PIANI DI AMMORTAMENTO, TIC, NUDA PROPRIETA' E USUFRUTTO, TIR E ARBITRAGGIO

ESERCIZIO 1

Una società prende in prestito 1.000.000 di euro e si impegna a restituire la somma secondo il seguente schema:

- Per i primi due anni non versa nulla
- Per i successivi 4 versa quote capitali semestrali crescenti in progressione aritmetica di 10.000 euro costanti annue e quote interessi anch'esse semestrali posticipate.

Il tasso applicato è il 10%.

Stendere il piano di ammortamento e calcolare nuda proprietà ed usufrutto al tasso del 12% all'epoca 3,5.

Nuda proprietà e usufrutto

Esercizio 1

Per la calcolare la quota capitale dei periodi 2,5 e 3 è necessario impostare la seguente equazione:

1.210.000 = 2x + 2(x+10.000) + 2(x+20.000) + 2(x+30.000)

$$1.210.000 = 2x + 2(x + 10.000) + 2(x + 20.000) + 2(x + 30.000)$$

$$1.210.000 = 2x + 2x + 20.000 + 2x + 40.000 + 2x + 60.000$$

$$1.210.000 = 8x + 120.000$$

$$x = 136.250$$

Nuda proprietà e usufrutto

Esercizio 1

Ora siamo in grado di calcolare tutte le quote capitali del piano di ammortamento (basta farle variare di 10.000 euro ogni anno).

E' inoltre necessario considerare che per i primi due anni non vengono pagate le rate e quindi il debito residuo aumenta ogni semestre di una quota pari all'interesse sul debito residuo non pagato.

E' necessario riportare il tasso annuo nominale da base annuale a base semestrale.

A questo punto abbiamo tutti gli elementi necessari per stendere il piano di ammortamento.

Nuda proprietà e usufrutto

Esercizio 1

La formula di conversione del tasso è la seguente:

$$i = \left(1 + i_{1/m}\right)^{m} - 1$$

$$i_{1/m} = (1 + i)^{1/m} - 1$$

$$i_{\frac{1}{2}} = (1 + 0{,}10)^{\frac{1}{2}} - 1 = 4{,}881\%$$

L'ammortamento dura 6 anni e vengono quindi pagate 12 rate semestrali.

Nuda proprietà e usufrutto

Esercizio 1

N. rata semestrale	QC	QI	R	DR
0	€ -	€ -	€ -	€ 1.000.000,00
1	€ -	€ -	€ -	€ 1.048.808,85
2	€ -	€ -	€ -	€ 1.100.000,00
3	€ -	€ -	€ -	€ 1.153.689,73
4	€ -	€ -	€ -	€ 1.210.000,00
5	€ 136.250,00	€ 59.058,71	€ 195.308,71	€ 1.073.750,00
6	€ 136.250,00	€ 52.408,50	€ 188.658,50	€ 937.500,00
7	€ 146.250,00	€ 45.758,30	€ 192.008,30	€ 791.250,00
8	€ 146.250,00	€ 38.620,00	€ 184.870,00	€ 645.000,00
9	€ 156.250,00	€ 31.481,71	€ 187.731,71	€ 488.750,00
10	€ 156.250,00	€ 23.855,32	€ 180.105,32	€ 332.500,00
11	€ 166.250,00	€ 16.228,94	€ 182.478,94	€ 166.250,00
12	€ 166.250,00	€ 8.114,47	€ 174.364,47	€ 0,00

Nuda proprietà e usufrutto

Esercizio 1

Calcoliamo la nuda proprietà all'epoca 3,5 (corrisponde alla settima rata semestrale). Il tasso annuale del 12% riconvertito su base semestrale è pari al 5,83%. E' necessario attualizzare le quote capitale all'epoca t-h al tasso del 5,83%.
Abbiamo le seguenti quote capitale:

8	€ 146.250,00
9	€ 156.250,00
10	€ 156.250,00
11	€ 166.250,00
12	€ 166.250,00

Calcoliamo i fattori di attualizzazione:

8	0,944911
9	0,892857
10	0,843671
11	0,797194
12	0,753277

Nuda proprietà e usufrutto

Esercizio 1

Calcoliamo per ogni epoca il valore attuale delle quote capitale. Basta moltiplicare il valore delle quote capitale per il fattore di attualizzazione nelle diverse epoche. Ad esempio per la rata numero 8 è necessario moltiplicare 146.250 * 0,944911 = 138.193,26.
Otterremo:

8	€ 138.193,26
9	€ 139.508,93
10	€ 131.823,55
11	€ 132.533,48
12	€ 125.232,37

Sommando infine i valori calcolati sopra otterremo il valore della nuda proprietà al tempo 3,5. La nuda proprietà considerando un tasso semestrale del 5,83% sarà pari a 667.291,59.

Nuda proprietà e usufrutto

Esercizio 1

Calcoliamo l'usufrutto all'epoca 3,5 (rata semestrale numero 7).
E' necessario attualizzare le quote interessi all'epoca t-h al tasso semestrale del 5,83% .
Abbiamo le seguenti quote interessi:

8	€	38.620,00
9	€	31.481,71
10	€	23.855,32
11	€	16.228,94
12	€	8.114,47

Calcoliamo i fattori di attualizzazione:

8	0,944911
9	0,892857
10	0,843671
11	0,797194
12	0,753277

Nuda proprietà e usufrutto

Esercizio 1

Calcoliamo per ogni epoca il valore attuale delle quote capitale. Basta moltiplicare il valore delle quote interessi per il fattore di attualizzazione nelle diverse epoche. Ad esempio per la rata numero 8 è necessario moltiplicare 38.620 * 0,944911 = 36.492,47.
Otterremo:

8	€	36.492,47
9	€	28.108,67
10	€	20.126,04
11	€	12.937,61
12	€	6.112,45

Sommando infine i valori calcolati sopra otterremo il valore dell'usufrutto al tempo 3,5. L'usufrutto all'epoca 3,5 considerando un tasso semestrale del 5,83% sarà pari a 103.777,24.

Esercizio 2

Un individuo si accorda per restituire un importo di 400 mila euro mediante il versamento di rate costanti semestrali per 10 anni al tasso effettivo annuo di interesse del 7%.
Dopo le prime 10 rate semestrali versate regolarmente il debitore incontra un periodo di difficoltà finanziarie nel quale paga solo gli interessi per 4 semestri e sospende completamente il versamento delle rate per altri quattro semestri; a questo punto si accorda per restituire il prestito nei tempi previsti versando rate semestrali di un nuovo ammortamento italiano condotto sul nuovo valore del debito D’ al tasso annuo del 10%.
Calcolare:

1. L’importo del debito residuo in corrispondenza dell’ultima epoca in cui i pagamenti avvengono regolarmente;
2. L’importo di D’;
3. L’importo delle nuove rate ricontrattate;
4. Il tasso di costo su base annua dell’operazione complessiva.

Piano di ammortamento e TIC

Esercizio 2

E' necessario come prima cosa riconvertire il tasso di interesse da base annuale a base semestrale.

La formula di conversione del tasso è la seguente:

$$i = \left(1 + i_{1/m}\right)^{m} - 1$$

$$i_{1/m} = (1 + i)^{1/m} - 1$$

$$i_{\frac{1}{2}} = (1 + 0{,}7)^{\frac{1}{2}} - 1 = 3{,}44\%$$

Piano di ammortamento e TIC

Esercizio 2

Come prima cosa è necessario calcolare $a_{20\neg 3,44\%}$ in modo da poter poi calcolare la rata costante dell'ammortamento francese.

$$a_{20\neg 3,44\%} = 14,2888$$

Il valore della rata sarà quindi pari a $R * a_{20\neg 3,44\%} = 27,993,89$

Per calcolare il debito residuo all'epoca della decima rata semestrale sfruttiamo la seguente relazione:

$$D_h = R \cdot (1+i)^{-1} + R \cdot (1+i)^{-2} + \cdots + R \cdot (1+i)^{-(n-h)} = R \cdot a_{n-h\rceil\, i}$$

Calcoliamo quindi $a_{20-10\neg 3,44\%}$

Piano di ammortamento e TIC

Esercizio 2

Il valore di $a_{10\neg 3{,}44\%} = 8{,}3415$

Il valore del debito residuo all'epoca 10 sarà pari a:

$$R * a_{10\neg 3{,}44\%} = 233.510{,}35$$

Il piano di ammortamento dal periodo 11 al periodo 18 sarà:

11	0	€ 8.034,63	€ 8.034,63	€ 233.510,35
12	0	€ 8.034,63	€ 8.034,63	€ 233.510,35
13	0	€ 8.034,63	€ 8.034,63	€ 233.510,35
14	0	€ 8.034,63	€ 8.034,63	€ 233.510,35
15	0	0	0	€ 241.544,98
16	0	0	0	€ 249.856,07
17	0	0	0	€ 258.453,13
18	0	0	0	€ 267.346,00

Piano di ammortamento Italiano

Esercizio 2

Successivamente risulta semplice calcolare le rate dell'ammortamento italiano considerando che il debito residuo del periodo 18 è pari a 267.346 euro.
Di seguito il piano di ammortamento dei periodi 19 e 20.

19	€ 133.673,00	€ 13.048,85	€ 146.721,85	€ 133.673,00
20	€ 133.673,00	€ 6.524,43	€ 140.197,42	€ -

A questo punto è necessario calcolare il tasso di costo su base annua dell'operazione complessiva.

Piano di ammortamento Italiano

Esercizio 2

Di seguito si riepilogano le rate pagate e relative all'operazione complessiva.

		R
1	0,5	€ 27.993,89
2	1	€ 27.993,89
3	1,5	€ 27.993,89
4	2	€ 27.993,89
5	2,5	€ 27.993,89
6	3	€ 27.993,89
7	3,5	€ 27.993,89
8	4	€ 27.993,89
9	4,5	€ 27.993,89
10	5	€ 27.993,89
11	5,5	€ 8.034,63
12	6	€ 8.034,63
13	6,5	€ 8.034,63
14	7	€ 8.034,63
15	7,5	0
16	8	0
17	8,5	0
18	9	0
19	9,5	€ 146.721,85
20	10	€ 140.197,42

Piano di ammortamento Italiano

Esercizio 2

Il tasso interno di costo è definito come quel tasso costante rispetto al quale la somma dei valori attuali delle rate fornisce il valore del debito. Il TIC dovrà pertanto soddisfare la seguente equazione di equilibrio finanziario:

$$\mathbf{400.000} = \frac{\mathbf{27.993,89}}{\left(\mathbf{1}+i_{\frac{1}{2}}\right)^{\mathbf{1}}} + \frac{\mathbf{27.993,89}}{\left(\mathbf{1}+i_{\frac{1}{2}}\right)^{\mathbf{2}}} + \frac{\mathbf{27.993,89}}{\left(\mathbf{1}+i_{\frac{1}{2}}\right)^{\mathbf{3}}} + \cdots + \frac{\mathbf{27.993,89}}{\left(\mathbf{1}+i_{\frac{1}{2}}\right)^{\mathbf{10}}}$$

$$+ \frac{\mathbf{8.034,63}}{\left(\mathbf{1}+i_{\frac{1}{2}}\right)^{\mathbf{11}}} + \cdots + \frac{\mathbf{8.034,63}}{\left(\mathbf{1}+i_{\frac{1}{2}}\right)^{\mathbf{14}}} + \frac{\mathbf{146.721,85}}{\left(\mathbf{1}+i_{\frac{1}{2}}\right)^{\mathbf{19}}} + \frac{\mathbf{140.197,42}}{\left(\mathbf{1}+i_{\frac{1}{2}}\right)^{\mathbf{20}}}$$

Otteniamo una equazione algebrica che possiamo risolvere con il metodo dell'interpolazione lineare. Considerando i dati del problema ipotizziamo che il tasso semestrale sia compreso tra il 3,44% (7% annuale) e il 3,68% (7,5% annuale).

Piano di ammortamento Italiano

Esercizio 2

Per semplificare l'equazione precedente possiamo riscriverla nel seguente modo:

$$\mathbf{400.000 = 27.993,89 * a_{10\neg 3,44\%} +}$$

$$\mathbf{+(8.034,63 * a_{4\neg 3,44\%}) * (1 + 3,44\%)^{-10} + \frac{146.721,85}{(1 + 3,44\%)^{19}} + \frac{140.197,42}{(1 + 3,44\%)^{20}}}$$

Piano di ammortamento Italiano

Esercizio 2

Sostituendo quindi all'equazione i valori del 3,44% e del 3,68% otteniamo:

$$i_{1/2_0} = 3,44\%\ allora\ avremo\ che\ A_0 = 403.003{,}06$$
$$i_{1/2_1} = 3,68\%\ allora\ avremo\ che\ A_1 = 392.991{,}53$$

Ricordando che il valore di A=400.000
Ricordando che la formula dell'interpolazione è la seguente:

$$\tilde{\imath} = i_0 + \frac{i_1 - i_0}{A_1 - A_0} \cdot (A - A_0).$$

$$i = 3,44\% + \left(\frac{3,68\% - 3,44\%}{392.991,53 - 403.003,06}\right) * (400.000 - 403.003,06)$$

Avremo quindi che il valore del tasso semestrale sarà pari a circa Il 3,51% (che su base annuale corrisponde al 7,148%).

Esercizio 3

Un ammortamento di Euro 400.000 è restituito in 3 anni con versamento di rate semestrali di cui le prime due (uguali tra loro) sono rispettivamente la metà della terza e della quarta e 1/3 della quinta e della sesta; il tasso è il 9,2%.
Calcolare il valore delle rate nei diversi periodi.

Ammortamento

Esercizio 3

Il tasso annuale del 9,2% riconvertito su base semestrale è pari al 4,499%. Ai fini del calcolo della rata è necessario impostare la seguente equazione:

$$\mathbf{400.000} = \frac{x}{(1+4,499\%)^1} + \frac{x}{(1+4,499\%)^2} + 2 * \frac{x}{(1+4,499\%)^3} +$$

$$2 * \frac{x}{(1+4,499\%)^4} + 3 * \frac{x}{(1+4,499\%)^5} + 3 * \frac{x}{(1+4,499\%)^6}$$

Si è proceduto considerando che il valore attuale delle rate è uguale al debito residuo all'epoca iniziale. Risolvendo avremo che il valore di x sarà pari a: $400.000 = x * \left(v^1 + v^2 + 2v^3 + 2v^4 + 3v^5 + 3v^6\right)$

$$\mathrm{x} = \frac{400.000}{(v^1 + v^2 + 2v^3 + 2v^4 + 3v^5 + 3v^6)} = 39.944,52$$

Ammortamento

Esercizio 3

Il valore delle rate nei diversi periodi sarà:

	Rata
1	€ 39.944,52
2	€ 39.944,52
3	€ 79.889,04
4	€ 79.889,04
5	€ 119.833,56
6	€ 119.833,56

Il valore di 79.889,04 è stato calcolato moltiplicando 39.944,52 * 2.
Il valore di 119.833,56 è stato calcolato moltiplicando 39.944,52 * 3.

Esercizio 4

Un’operazione finanziaria costa 100 e fornisce flussi per 20 per 10 anni. Sapendo che il 50% dell’importo è finanziato con un prestito a quota capitale costante al tasso fisso del 10% con durata 5 anni, calcolare il TIR dell’operazione.

TIR

Esercizio 4

La prima operazione risulta così strutturata:

	Flussi
	-100
1	20
2	20
3	20
4	20
5	20
6	20
7	20
8	20
9	20
10	20

TIR

Esercizio 4

Il prestito risulta così strutturato:

	QC	QI	R	DR
				50
1	10	5	15	40
2	10	4	14	30
3	10	3	13	20
4	10	2	12	10
5	10	1	11	0

L'operazione di prestito produrrà i seguenti flussi di cassa (derivanti dal pagamento della rata):

0	50
1	-15
2	-14
3	-13
4	-12
5	-11

TIR

Esercizio 4

L'operazione complessiva si costituisce della somma algebrica dei flussi di cassa delle due operazioni che la compongono:

t	Op. finanz.	Rata	Op. complessiva
0	-100	50	-50
1	20	-15	5
2	20	-14	6
3	20	-13	7
4	20	-12	8
5	20	-11	9
6	20		20
7	20		20
8	20		20
9	20		20
10	20		20

A questo punto per calcolare il TIR dell'operazione complessiva è necessario risolvere la seguente equazione:

$$\mathbf{0 = -50 + \frac{5}{(1+i)^1} + \frac{6}{(1+i)^2} + \frac{7}{(1+i)^3} + \frac{8}{(1+i)^4} + \frac{9}{(1+i)^5} + \frac{20}{(1+i)^6} +}$$

$$\mathbf{+ \frac{20}{(1+i)^7} + \frac{20}{(1+i)^8} + \frac{20}{(1+i)^9} + \frac{20}{(1+i)^{10}}}$$

TIR

Esercizio 4

L'equazione precedente può essere riscritta come:

$$0 = -50 + \frac{5}{(1+i)^1} + \frac{6}{(1+i)^2} + \frac{7}{(1+i)^3} +$$

$$+ \frac{8}{(1+i)^4} + \frac{9}{(1+i)^5} + 20 * a_{5\neg i} * (1+i)^{-5}$$

A questo punto risolvendo con il metodo dell'interpolazione così come visto nell'esercizio 2 troveremo che il valore del TIR sarà pari a circa 17,24%.

Esercizio 5

Sono disponibili sul mercato le seguenti tre operazioni:

$$z_1 : \quad (-95; 100)/(0; 1)$$
$$z_2 : \quad (-85; 100)/(0; 3)$$
$$z_3 : \quad (-90,25; 100)/(1; 3)$$

Verificare se le tre operazioni rispettino o meno la proprietà di non arbitraggio. Nel caso in cui non la rispettino, costruire un adeguato mix di operazioni che consentano di realizzare un profitto all'epoca *zero* annullando qualsiasi altro importo sul resto dello scadenzario.

Affinché ci sia possibilità di arbitraggio deve risultare:

$$v(0; 3) \neq v(0; 1) \cdot v(0; 1; 3)$$

Dai tre titoli possiamo ricavare i fattori di sconto:

$$z_1 \rightarrow v(0; 1) = \frac{95}{100} = 0,95$$
$$z_2 \rightarrow v(0; 3) = \frac{85}{100} = 0,85$$
$$z_3 \rightarrow v(0; 1; 3) = \frac{90,25}{100} = 0,9025$$

Arbitraggio

Esercizio 5

E' necessario confrontare le seguenti due operazioni:

1) v(0;3)
2) Una situazione equivalente a v(0;3) in termini temporali ma formata da due operazioni (una a pronti e una a termine). Le due operazioni sono v(0;1) e v(0;1;3).

Prima di procedere con la risoluzione dell'esercizio, analizziamo i due possibili casi davanti ai quali ci si può trovare svolgendo un esercizio di questo tipo:

I CASO $v(0;3) < v(0;1) * v(0;1;3)$

II CASO $v(0;3) > v(0;1) * v(0;1;3)$

Arbitraggio

Esercizio 5

La logica di fondo è quella di vendere l'operazione che costa di più e acquistare quella costa meno con l'obiettivo di trarne un possibile profitto. E' infatti possibile trarre un profitto da un'operazione simile nel momento in cui il mercato prezza due operazioni equivalenti in maniera diversa (qualora si verifichi questo è possibile effettuare un'operazione di arbitraggio).

<u>I CASO (caso dell'esercizio in questione)</u>

Quindi nel caso in cui $v(0;3) < v(0;1) * v(0;1;3)$ è necessario acquistare $v(0;3)$ e vendere l'operazione composta $v(0;1) * v(0;1;3)$ → Attenzione perché bisogna considerare $v(0;1) * v(0;1;3)$ come una operazione unica. E' quindi necessario sempre vendere o acquistare ENTRAMBE le operazioni singole che formano l'operazione composta. Non si può chiaramente vendere $v(0;1)$ e acquistare $v(0;1;3)$ e viceversa.

Arbitraggio

Esercizio 5

L'acquisto di v(0;3) comporta all'epoca zero un'uscita di -85 e all'epoca 3 un'entrata di +100.

Considerando l'operazione composta, per procedere prendiamo a riferimento per prima l'operazione a termine. In questo caso poiché dovremo venderla avremo una entrata in 1 pari a 90,25 e una uscita in 3 pari a -100.
Ora per effettuare l'arbitraggio e avere un profitto sicuro in zero bisogna annullare il flusso in 1 vendendo una quantità dell'operazione a pronti tale da poter compensare il valore in entrata derivante dalla vendita dell'operazione a termine (in questo esercizio bisogna vendere una quantità di 0,9025). In tal modo abbiamo annullato il flusso in 1
e abbiamo creato un flusso in zero positivo e certo.

Arbitraggio

Esercizio 5

Quindi, l'esercizio in questione rientra all'interno del I caso. Infatti:

$$v(0;1) \cdot v(0;1;3) = 0,857375 \neq v(0;3)$$
$$v(0;1) \cdot v(0;1;3) > v(0;3)$$

La relazione di non arbitraggio è dunque violata, si apre perciò la possibilità di arbitraggio.
Come specificato in precedenza, avremo quindi la seguente situazione:

op. fin.	0	1	3
compro una unità di z_2	-85	$-$	$+100$
vendo una unità di z_3	$-$	$+90,25$	-100
vendo $0,9025$ unità di z_1	$+0,9025 \cdot 95$	$-0,9025 \cdot 100$	$-$
saldo	$+0,7375$	0	0

Arbitraggio

Esercizio 5

II CASO

Se ci dovessimo trovare nella situazione v(0;3) > v(0;1) * v(0;1;3) sarebbe necessario procedere in maniera speculare vendendo v(0;3) e acquistando v(0;1) e v(0;1;3).