

OPZIONI



Valutazione delle opzioni

Esercizio 1

2

LE OPZIONI

Le opzioni sono contratti che forniscono al detentore il diritto di acquistare o vendere una certa quantità del bene sottostante a una certa scadenza o entro una certa scadenza, a un prezzo convenuto dalle parti. Tali contratti si distinguono fondamentalmente in call e put.

La call attribuisce al possessore il diritto di acquistare il sottostante.

La put attribuisce al possessore il diritto al contrario di venderlo.



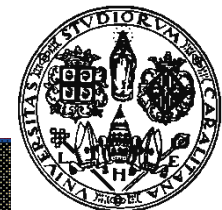
Valutazione delle opzioni

Esercizio 1

3

Tre elementi caratterizzano ogni tipo di contratto d'opzione:

- la definizione del bene sottostante, che può essere di varia natura: vi sono opzioni su azioni (stock options), su indici azionari (stock index options), su titoli (bond options), su valute (currency options), su merci (commodity options), e altri ancora;
- il prezzo convenuto dalle parti, chiamato strike price (prezzo d'esercizio), ossia il prezzo al quale il sottostante può essere acquistato o venduto;
- la definizione della data di scadenza (maturity o expiration date), vale a dire dell'ultima data utile per l'esercizio dell'opzione.



Valutazione delle opzioni

Esercizio 1

4

Mercati regolamentati e mercati over the counter.

Le opzioni si distinguono in europee e americane: le prime possono essere esercitate solo a scadenza, le seconde, invece si possono esercitare in qualsiasi momento precedente la scadenza.

Chi compra l'opzione assume una posizione lunga sul derivato e chi la vende assume una posizione corta. Combinando tali posizioni con le due tipologie fondamentali di opzioni, si ottiene un totale di quattro possibili posizioni:

- una posizione lunga su una call;
- una posizione lunga su una put;
- una posizione corta su una call;
- una posizione corta su una put.

Ciascuna di queste posizioni è caratterizzata da un diverso payoff finale.



Valutazione delle opzioni

Esercizio 1

5

L'acquirente di una call europea eserciterà il suo diritto solo se a scadenza il prezzo del sottostante sarà superiore al prezzo d'esercizio dell'opzione, poiché, se accadesse il contrario, per lui sarebbe più conveniente acquistare l'attività direttamente sul mercato.

Al contrario, il possessore di una put europea eserciterà l'opzione solamente se lo strike price sarà a scadenza superiore al prezzo del sottostante, altrimenti sarebbe più conveniente vendere il bene sul mercato.

Posizione lunga su una call → VISIONE RIALZISTA

Posizione lunga su una put → VISIONE RIBASSISTA



Valutazione delle opzioni

Esercizio 1

6

PAY-OFF DELLA CALL

Sia K il prezzo d'esercizio dell'opzione e A_T il prezzo al tempo T (*maturity*) del titolo sottostante; il valore a scadenza di una posizione lunga su una call europea è pari a

$$\text{Max}(A_T - K; 0)$$

che riflette che l'opzione sarà esercitata se $A_T > K$ e non sarà esercitata se $A_T < K$, nel qual caso avrà valore pari a zero.



Valutazione delle opzioni

Esercizio 1

7

Il payoff della corrispondente posizione corta è:

$$-Max(A_T - K; 0)$$

ovvero

$$\min(K - A_T; 0)$$

Come si può notare, il guadagno dell'holder rappresenta la perdita del writer (stessa cosa dicasi per le put) e viceversa.



Valutazione delle opzioni

Esercizio 1

8

PAY-OFF DELLA PUT

Il valore finale di una posizione lunga su una put europea è:

$$\text{Max}(K - A_T; 0)$$

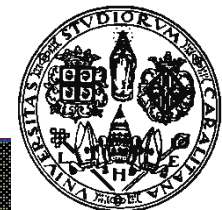
mentre il payoff della corrispondente posizione corta è:

$$-\text{Max}(K - A_T; 0)$$

ossia

$$\text{min}(A_T - K; 0)$$

Per calcolare il guadagno ottenuto dall'opzione, si sottrae il costo inizialmente pagato per l'acquisto della stessa dal suo valore a scadenza.



Valutazione delle opzioni

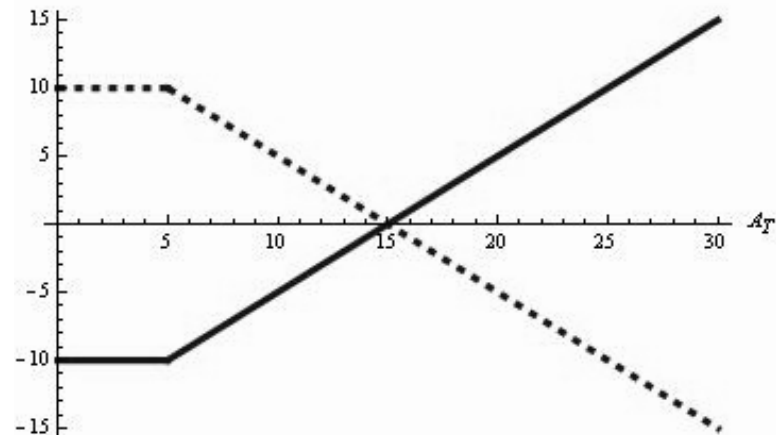
Esercizio 1

9

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DEI PAY-OFF – OPZIONE CALL

Il compratore della call (“*buyer*”, linea continua) ha potenzialità di guadagno molto elevato, la perdita è limitata. Il profitto netto realizzato (tenendo conto del prezzo pagato c) sarà $\Pi = C_T - c$.

Si ha graficamente (con $K=5$ e $c=10$, figura sotto):



Valutazione delle opzioni

Esercizio 1

10

Vediamo che si ha un profitto netto positivo quando $A_T > K + C$.
Invece per $K < A_T < K + C$, non si ha un profitto netto positivo ma conviene comunque esercitare l'opzione per non perdere il premio C .

Per il venditore della call (“*seller*”) abbiamo un grafico simmetrico, nel senso che la somma algebrica dei due grafici dà *zero* (ossia a un guadagno del seller corrisponde una perdita del buyer e viceversa).

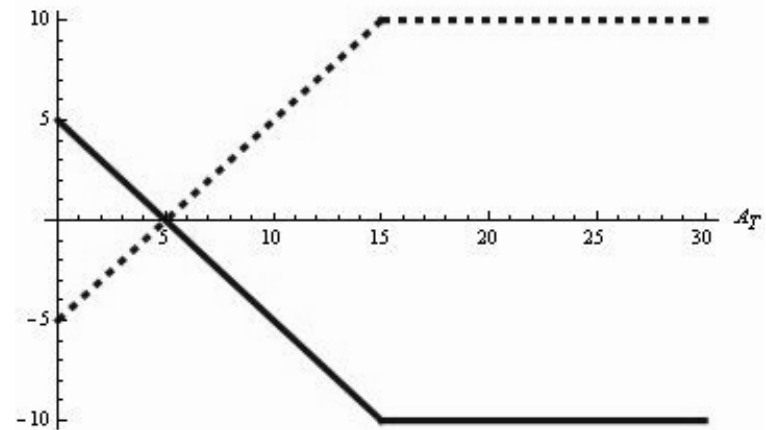


Valutazione delle opzioni

Esercizio 1

11

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DEI PAY-OFF – OPZIONE PUT



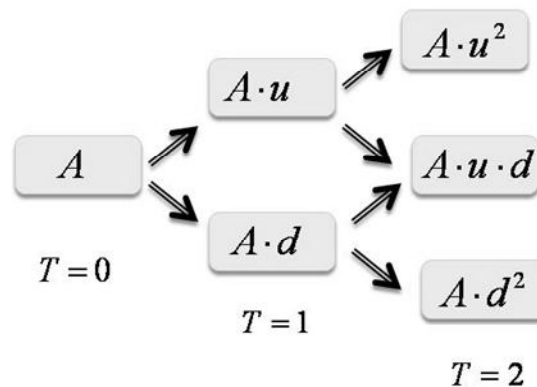
Valutazione delle opzioni

Esercizio 1

12

IL MODELLO BINOMIALE DI COX-ROSS-RUBINSTEIN (MODELLO CRR)

Ipotizza che in un singolo periodo il corso azionario con prezzo iniziale A possa avere solamente due movimenti: a rialzo ($A_T = A \cdot u$ con il fattore di rialzo $u > 1$), o a ribasso ($A_T = A \cdot d$ con il fattore di ribasso $d < 1$).



Valutazione delle opzioni

Esercizio 1

13

Per l'opzione call dopo due periodi avremo tre possibili payoff:

$$C_{uu} = \text{Max}(A \cdot u^2 - K; 0)$$

$$C_{ud} = \text{Max}(A \cdot u \cdot d - K; 0)$$

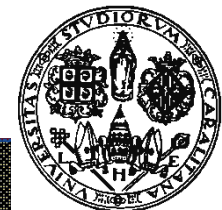
$$C_{dd} = \text{Max}(A \cdot d^2 - K; 0)$$

Per l'opzione put dopo due periodi avremo tre possibili payoff:

$$P_{uu} = \text{Max}(K - A \cdot u^2; 0)$$

$$P_{ud} = \text{Max}(K - A \cdot u \cdot d; 0)$$

$$P_{dd} = \text{Max}(K - A \cdot d^2; 0)$$



Valutazione delle opzioni

Esercizio 1

14

Ipotizziamo ora di avere a disposizione un titolo risk free (ossia privo di rischio) che rende il tasso i (con "certezza") su base uniperiodale. Lo scadenziario di questo titolo sarà perciò $(1; 1+i) / (0; 1)$. Costruiamo un portafoglio Ω costituito da una quota α di titoli azionari e da una quota β di titoli risk free. Imponiamo che il valore del portafoglio alla scadenza T abbia lo stesso valore di un'opzione call (scritta sullo stesso titolo azionario) in caso di rialzo del corso azionario, ossia:

$$\alpha \cdot A \cdot u + \beta \cdot (1+i) = C_u$$

Imponiamo la stessa condizione in caso di ribasso del corso azionario, ossia:

$$\alpha \cdot A \cdot d + \beta \cdot (1+i) = C_d$$



Valutazione delle opzioni

Esercizio 1

15

Un portafoglio Ω che ha questa proprietà è chiamato portafoglio replicante perché replica il profilo dell'opzione sia in caso di ribasso, sia in caso di rialzo del corso azionario sottostante l'opzione. Il portafoglio replicante costituisce perciò un prodotto finanziariamente equivalente all'opzione.

Le due relazioni scritte presentano come uniche incognite le quote α e β . Mettendo a sistema queste due relazioni possiamo quindi determinare le quote del portafoglio replicante. Risolvendo il sistema nel caso generale, si ottengono le formule seguenti:

$$\alpha = \frac{C_u - C_d}{A \cdot (u - d)} \quad \beta = \frac{u \cdot C_d - d \cdot C_u}{(1 + i) \cdot (u - d)}$$



Valutazione delle opzioni

Esercizio 1

16

A questo punto, per evitare opportunità di arbitraggio (legge dell'"unico prezzo"), il valore del portafoglio replicante all'epoca *zero* dovrà essere uguale al prezzo dell'opzione:

$$C = \alpha \cdot A + \beta \cdot 1 = \frac{C_u - C_d}{A \cdot (u - d)} \cdot A + \frac{u \cdot C_d - d \cdot C_u}{(1+i) \cdot (u - d)} = \frac{C_u - C_d}{u - d} + \frac{u \cdot C_d - d \cdot C_u}{(1+i) \cdot (u - d)}$$

Questa formula può essere riscritta in maniera equivalente. Introduciamo il coefficiente

$$\pi = \frac{1+i-d}{u-d}$$



Valutazione delle opzioni

Esercizio 1

17

Si verifica facilmente che il prezzo dell'opzione si può scrivere:

$$C = \frac{\pi \cdot C_u + (1 - \pi) \cdot C_d}{1 + i}$$

ossia il prezzo dell'opzione è la media ponderata dei payoff, attualizzata al tasso risk free.

Nel caso dell'opzione put, possiamo procedere in maniera simmetrica, cambiando semplicemente i payoff. Avremo pertanto:

$$\alpha = \frac{P_u - P_d}{A \cdot (u - d)} \quad \beta = \frac{u \cdot P_d - d \cdot P_u}{(1 + i) \cdot (u - d)} \quad P = \frac{\pi \cdot P_u + (1 - \pi) \cdot P_d}{1 + i}$$



Valutazione delle opzioni

Esercizio 1

18

Il coefficiente π è compreso tra *zero* e *uno*, perciò lo possiamo interpretare come una probabilità. Più precisamente π è chiamato probabilità neutrale rispetto al rischio. In effetti, dalla definizione possiamo scrivere:

$$u \cdot \pi + d \cdot (1 - \pi) = 1 + i$$

perciò π è tale da rendere il valore atteso del rendimento azionario (il primo membro) pari al tasso risk free (il secondo membro).



Valutazione delle opzioni

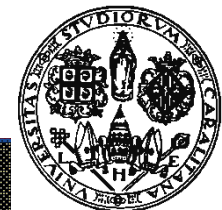
Esercizio 1

19

ESERCIZIO 1

Valutare mediante il modello CRR una opzione put che scade tra un anno essendo l'evoluzione del prezzo del sottostante guidata da un processo binomiale moltiplicativo caratterizzato dai parametri $u = 1,2$ e $d = 0,9$ nell'ipotesi in cui il prezzo di esercizio è pari a 100, il corso azionario all'epoca iniziale è 101 ed il tasso risk free annuo è il 5,5%.

Calcolare le quote di composizione del portafoglio replicante.



Valutazione delle opzioni

Esercizio 1

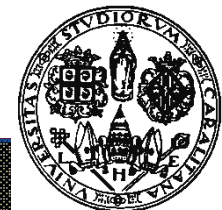
20

I dati sono: $A=101$; $K=100$; $u=1,2$; $d=0,9$; $i=0,055$

Calcolo dei payoff:

$$\begin{aligned} P_u &= \text{Max}(K - A \cdot u; 0) = \text{Max}(100 - 101 \cdot 1,2; 0) = \\ &= \text{Max}(-21,2; 0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_d &= \text{Max}(K - A \cdot d; 0) = \text{Max}(100 - 101 \cdot 0,9; 0) = \\ &= \text{Max}(9,1; 0) = 9,1 \end{aligned}$$



Valutazione delle opzioni

Esercizio 1

21

Portafoglio “replicante” risk-free (fornisce stesso risultato dell’opzione nei due casi di rialzo e ribasso) → Portafoglio misto con quote di composizione a (quota azionaria) e b (quota ZCB).

Le quote si ottengono dal sistema:

$$\begin{cases} A \cdot u \cdot a + (1+i) \cdot b = P_u \\ A \cdot d \cdot a + (1+i) \cdot b = P_d \end{cases}$$



Valutazione delle opzioni

Esercizio 1

22

Le cui soluzioni sono:

$$a = \frac{P_u - P_d}{A \cdot (u - d)} = \frac{-9,1}{101 \cdot 0,3} = \boxed{-0,30033}$$

$$b = \frac{u \cdot P_d - d \cdot P_u}{(1 + i) \cdot (u - d)} = \frac{1,2 \cdot 9,1}{1,055 \cdot 0,3} = \boxed{34,50237}$$

Prezzo del portafoglio:

$$P = a \cdot A + b = -0,30033 \cdot 101 + 34,50237 = \boxed{4,169036}$$



Valutazione delle opzioni

Esercizio 1

23

Osservazione. Formula alternativa per trovare il prezzo:

$$P = \frac{\pi \cdot P_u + (1 - \pi) \cdot P_d}{1 + i}$$

dove

$$\pi = \frac{1 + i - d}{u - d}$$

