OPZIONI, DURATION E INTEREST RATE SWAP (IRS)

ESERCIZIO 1

Il portafoglio di un investitore è composto di 520 azioni della società A e un pari numero di opzioni Put sulle azioni A. Sapendo che l’azione quota oggi Euro 1,39, lo strike price della put è fissato a Euro 0,9, la scadenza è fissata a 3 anni, il tasso risk free è il 2% e che u =+10% e d = -20%, calcolare:

- Il valore del portafoglio oggi;
- I valori a scadenza del portafoglio in tutti i casi possibili;
- Il valore atteso di portafoglio.

Valutazione delle opzioni

Esercizio 1

I fattori di rialzo e ribasso valgono rispettivamente u = 1,10 e d = 0,80.
Determiniamo i valori a scadenza (T=3) del sottostante:

$$A_{uuu} = A \cdot u^3 = 1,8501$$

$$A_{uud} = A \cdot u^2 \cdot d = 1,3455$$

$$A_{udd} = A \cdot u \cdot d^2 = 0,9786$$

$$A_{ddd} = A \cdot d^3 = 0,7117$$

Valutazione delle opzioni

Esercizio 1

I pay off a scadenza della put valgono rispettivamente:

$$P_{uuu} = \max\left(K - A_{uuu}; 0\right) = 0$$

$$P_{uud} = \max\left(K - A_{uud}; 0\right) = 0$$

$$P_{udd} = \max\left(K - A_{udd}; 0\right) = 0$$

$$P_{ddd} = \max\left(K - A_{ddd}; 0\right) = 0{,}1883$$

Valutazione delle opzioni

Esercizio 1

Mentre la probabilità risk-neutral vale:

$$\pi = \frac{1+i-d}{u-d} = 0,7333 \rightarrow 73,33\%$$

Possiamo ora calcolare il prezzo dell’opzione put:

$$P = \frac{\pi^3 \cdot P_{uuu} + 3\pi^2 \cdot (1-\pi) \cdot P_{uud} + 3\pi \cdot (1-\pi)^2 \cdot P_{udd} + (1-\pi)^3 \cdot P_{ddd}}{(1+i)^3} = 0,003365$$

Valutazione delle opzioni

Esercizio 1

Il valore del portafoglio all'epoca *zero* si ottiene sommando al prezzo del sottostante il prezzo dell'opzione (per il numero di quote):

$$V_0 = 520 \cdot (A + P) = 724{,}55$$

Il valore all'epoca *tre* del portafoglio si ottiene sommando al valore a scadenza del sottostante il valore dell'opzione (ossia il suo pay off), nei quattro percorsi aleatori possibili:

$$V_3(uuu) = A_{uuu} + P_{uuu} = 962{,}05$$
$$V_3(uud) = A_{uud} + P_{uud} = 699{,}67$$
$$V_3(udd) = A_{udd} + P_{udd} = 508{,}85$$
$$V_3(ddd) = A_{ddd} + P_{ddd} = 468{,}00$$

Infine, il valore atteso del portafoglio è:

$$V_3(att) = \pi^3 \cdot V_3(uuu) + 3\pi^2 \cdot (1-\pi) \cdot V_3(uud) + 3\pi \cdot (1-\pi)^2 \cdot V_3(udd) + (1-\pi)^3 \cdot V_3(ddd) = 768,90$$

ATTENZIONE!

Il numero “3” per il quale sono moltiplicati il secondo e il terzo fattore della formula fa riferimento al numero di combinazioni ottenibili. Relativamente al secondo fattore (che prende in considerazione la fattispecie di due rialzi e un ribasso) potremmo infatti avere le seguenti tre casistiche:

1. Un ribasso e due rialzi
2. Un rialzo, un ribasso e un rialzo
3. Due rialzi e un ribasso

ESERCIZIO 3

Un’azienda ha un finanziamento del quale gli mancano da restituire due rate le cui quote capitali sono 1.000.000 di euro ciascuna; ha coperto il rischio di tasso con un IRS con tasso swap del 3%. Sapendo che il FV dell’IRS è pari a -20.000 euro e che i(0;1)=2,5% calcolare i(0;2) e i(0;1;2).

Calcoliamo i tassi a pronti:

$$i(0,1) = 2,5\%$$
$$i(0;2) = x$$

Calcoliamo i fattori di attualizzazione:

$$v(0,1) = \frac{1}{(1+2,5\%)^1} = 0,97561$$
$$v(0,2) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

Tasso a termine:

$$i(0,1,2) = \frac{m(0;t)}{m(0;t-1)} - 1 = \frac{(1+x)^2}{(1+2,5\%)^1} - 1$$

IRS

Esercizio 2

Quota variabile:

$$QV_1 = 2.000.000 * i(0,1) = 2.000.000 * 2{,}5\% = 50.000$$

$$QV_2 = 1.000.000 * i(0,1,2) = 1.000.000 * \frac{(1+x)^2}{(1+2{,}5\%)^1} - 1$$

$$QV_2 = 1.000.000 * \frac{(1+x)^2 - 1{,}025}{1{,}025}$$

Quota fissa:

$$QF_1 = 2.000.000 * 3\% = 60.000$$
$$QF_2 = 1.000.000 * 3\% = 30.000$$

IRS
Esercizio 2

Calcolo FV:

$$(50.000 - 60.000) * 0{,}97561 + \left(1.000.000 * \frac{(1+x)^2 - 1{,}025}{1{,}025} - 30.000\right) * \frac{1}{(1+x)^2} = -20.000$$

$$\left(1.000.000 * \frac{(1+x)^2 - 1{,}025}{1{,}025} - 30.000\right) * (1+x)^{-2} = -20.000 + 9.756{,}1$$

$$\left(1.000.000 * \frac{1 - 1{,}025 * (1+x)^{-2}}{1{,}025} - 30.000 * (1+x)^{-2}\right) = -10.243{,}9$$

$$\left(\frac{1.000.000}{1{,}025} - 1.000.000 * (1+x)^{-2} - 30.000 * (1+x)^{-2}\right) = -10.243{,}9 - 975.609{,}76$$

$$(1+x)^{-2} = \frac{-985.853{,}66}{-1.030.000} = 0{,}957139 = v(0{,}2)$$

IRS

Esercizio 2

Calcolo del tasso i(0,2):

$$x = \sqrt{\frac{1}{0,957139}} - 1 = 2,214\%$$

Calcolo del tasso i(0,1,2):

$$i(0,1,2) = \frac{[1 + i(0;t)]^t}{[1 + i(0;t-1)]^{t-1}} - 1 = 1,93\%$$

IRS

Esercizio 2

Nella slide successive viene riportata una metodo di calcolo alternativa.

<u>I due metodi sono alternativi pertanto portano agli stessi risultati.</u>

IRS

Esercizio 2

Partiamo dal calcolo delle quote capitale e del debito residuo.

	QC	D (h)
0		€ 2.000.000,00
1	€ 1.000.000,00	€ 1.000.000,00
2	€ 1.000.000,00	€ -

A questo punto, ai fini della risoluzione dell'esercizio è necessario utilizzare il metodo di interpolazione.

Per calcolare il tasso a termine i(0;1;2) sfruttiamo la seguente relazione tra tassi a pronti e tassi a termine:

$$i(0;t-1;t)=\frac{m(0,t)}{m(0,t-1)}-1=\frac{[1+i(0,t)]^{t}}{[1+i(0,t-1)]^{t-1}}-1$$

IRS

Esercizio 2

Vediamo ora come applicare il calcolo tramite interpolazione.

Tasso a pronti.

	i(0;t)
0	
1	2,50%
2	x

Il tasso a pronti i(0;2) è incognito. Ai fini del calcolo di tale tasso tramite l'interpolazione è necessario:

1. assegnare un valore arbitrario al tasso i(0;2)
2. calcolare il FV dello swap associato al tasso scelto nel punto precedente
3. se il FV associato al tasso individuato al punto 1) è superiore al nostro FV obiettivo (pari a -20.000 euro) allora è necessario ripartire dal punto 1) e scegliere un valore di tasso tale per cui il nostro FV diminuisca
4. Ripetere il procedimento fino a trovare due valori di FV che individuano un intorno all'interno del quale è ricompreso il nostro FV obiettivo

Tasso a termine.

Il tasso a termine viene calcolato utilizzando la seguente relazione tra tassi a termine e tassi a pronti:

$$i(0;t-1;t)=\frac{m(0,t)}{m(0,t-1)}-1=\frac{[1+i(0,t)]^{t}}{[1+i(0,t-1)]^{t-1}}-1$$

Il primo tasso a termine coincide con il primo tasso a pronti.

Per calcolare il tasso i(0;1;2) all'interno della formula dobbiamo inserire il valore di i(0;2) arbitrariamente individuato nella slide precedente.

Infatti:

$$i(0;1;2)=\frac{m(0,2)}{m(0;1)}-1=\frac{[1+i(0,2)]^{2}}{[1+i(0,1)]^{1}}-1$$

Fattori di attualizzazione.

Calcoliamo i fattori di attualizzazione con la seguente formula:

$$\frac{1}{(1 + i(0;t))^t} = v(0;t)$$

Quota fissa swap.

Calcoliamo la quota fissa del contratto swap considerando un tasso del 3%:

$$QF_1 = Dr_0 * 3\%$$
$$QF_2 = Dr_1 * 3\%$$

IRS
Esercizio 2

<u>Quota variabile swap.</u>
Calcoliamo la quota variabile del contratto swap considerando i tassi la curva dei tassi a termine (il primo tasso a pronti coincide con il primo tasso a termine):

$$QV_1 = Dr_0 * i(0;1)$$
$$QV_2 = Dr_1 * i(0;1;2)$$

<u>Fair Value swap.</u>
Si calcola attualizzando all'epoca di valutazione la differenza tra i flussi di cassa generati dalla quota variabile e dalla quota fissa.

$$diff1 = QV_1 - QF_1$$
$$diff2 = QV_2 - QF_2$$

$$FV = diff1 * v(0,1) + diff2 * v(0,2)$$

Verifica del tasso di interesse per l'interpolazione.

Eseguiamo il calcolo del FV ipotizzando arbitrariamente che il tasso a pronti i(0,2) sia pari al 2,55%.
Eseguendo i calcoli (utilizzando le formule viste precedentemente) avremo un FV pari a -13.559,4:

	QC	D (h)	i(0;t)	i(0;t-1;t)	v(0;t)	QF	QV	QV-QF	FV
0		€ 2.000.000,00							
1	€ 1.000.000,00	€ 1.000.000,00	2,50%	2,50%	0,97561	60000	50000	-10000	-13559,4
2	€ 1.000.000,00	€ -	2,55%	2,60%	0,950886	30000	26000,24	-3999,76	

$$i(0;1;2) = \frac{m(0{,}2)}{m(0;1)} - 1 = \frac{[1 + 2{,}55\%]^2}{[1 + 2{,}50\%]^1} - 1 = 2{,}60\%$$

$$QF_1 = 2.000.000 * 3\% = 60.000$$
$$QF_2 = 1.000.000 * 3\% = 30.000$$

IRS

Esercizio 2

$$QV_1 = 2.000.000 * 2{,}5\% = 50.000$$
$$QV_2 = 1.000.000 * 2{,}6\% = 26.000{,}24$$

$$diff1 = QV_1 - QF_1 = -10.000$$
$$diff2 = QV_2 - QF_2 = -3.999{,}76$$

$$FV = -10.000 * v(0{,}1) + \left(-3.999{,}76 * v(0{,}2)\right) = -13.559{,}4$$

Il FV è troppo alto rispetto al nostro valore obiettivo (pari a -20.000 euro). Facciamo quindi una prova con un altro valore di tasso per renderci conto della relazione tra tasso di interesse e FV dello swap.

Prendiamo un tasso del 2% ad esempio.

IRS

Esercizio 2

Con un tasso del 2% avremo un valore del FV pari a -24.150,2.

	QC	D (h)	i(0;t)	i(0;t-1;t)	v(0;t)	QF	QV	QV-QF	FV
0		€ 2.000.000,00							
1	€ 1.000.000,00	€ 1.000.000,00	2,50%	2,50%	0,97561	60000	50000	-10000	-24150,2
2	€ 1.000.000,00	€ -	2,00%	1,50%	0,961169	30000	15024,39	-14975,6	

Ci accorgiamo che il valore del nostro FV obiettivo (pari a -20.000) è compreso tra i due valori di FV calcolati fin ora. Si evidenzia che potrebbero chiaramente essere necessarie più di due prove per trovare i valori del FV all'interno dei quali è compreso il nostro FV obiettivo.

Applichiamo ora la formula dell'interpolazione per trovare il valore del nostro tasso.

IRS

Esercizio 2

i0	2%
A0	-€ 24.150,19
A	-€ 20.000,00
i1	2,55%
A1	-€ 13.559,41

$$i(0;2) = 2\% + \frac{(2{,}55\% - 2\%)}{(-13.559{,}4 - (-24.150{,}2))} * \left(-20.000 - (-24.150{,}2)\right) =$$

$$i(0;2) = 2{,}21\%$$

A questo punto, il valore di i(0,1,2) si calcola come segue:

$$i(0;1;2) = \frac{m(0{,}2)}{m(0;1)} - 1 = \frac{[1 + 2{,}21\%]^2}{[1 + 2{,}50\%]^1} - 1 = 1{,}93\%$$

Esercizio 3

Siano dati i seguenti 3 titoli obbligazionari (i cui valori teorici non coincidono con i prezzi):

$$b_1 = (-97{,}91; 4; 104)/(0; 1; 2)$$
$$b_2 = (-99{,}65; 5; 5; 105)/(0; 1; 2; 3)$$
$$b_3 = (-99{,}55; 5; 5; 5; 105)/(0; 1; 2; 3; 4)$$

Sapendo che la struttura dei tassi di mercato è piatta ed è espressa da un tasso istantaneo pari al 5% calcolare le quote del portafoglio formato dai tre titoli che immunizzano il vettore delle uscite (0;100;0;100;0)/(0;1;2;3;4) nell'ipotesi in cui si desideri avere una duration di secondo ordine dell'attivo pari a 1,2 volte quella del passivo.

Immunizzazione di portafoglio

Esercizio 3

Risoluzione:

$$\delta = 0{,}05 = log(1 + i)$$

$$i = e^{0{,}05} - 1 = 0{,}05127$$

$$v = \frac{1}{1 + i} = \frac{1}{1{,}05127} = 0{,}95123$$

VINCOLO DI BILANCIO

$$V(0;\theta)=V(0;u)$$

$$\sum_k \theta_k * (1 + \mathrm{i})^{-tk} = \sum_k u_k * (1 + \mathrm{i})^{-tk}$$

Immunizzazione di portafoglio

Esercizio 3

$$\boldsymbol{a * (4v + 104v^2) + \beta(5v + 5v^2 + 105^3) + \gamma * (5v + 5v^2 + 5v^3 + 105v^4)}$$
$$\boldsymbol{= 100 * v + 100 * v^3}$$

Ricordando che v = 0,95123 avremo:

$$\boldsymbol{97,908 * \alpha + 99,6547 * \beta + 99,5506 * \gamma = 181,194}$$

VINCOLO DI DURATION

$$\boldsymbol{D(0;\theta) = D(0;u)}$$

$$\boldsymbol{D(0;u) = \frac{100 * v + 3 * 100 * v^3}{100 * v + 100 * v^3} = \frac{100 * v + 3 * 100 * v^3}{181,194} = 1,95004}$$

Immunizzazione di portafoglio

Esercizio 3

$$D(0;\theta)=\frac{(4\alpha+5\beta+5\gamma)*v+2*(104\alpha+5\beta+5\gamma)*v^2}{181{,}194}+$$

$$+\frac{3*(105\beta+5\gamma)*v^3+(105*4)\gamma*v^4}{181{,}194}=\frac{\alpha*(4v+208v^2)}{181{,}194}+\frac{\beta*(5v+10v^2+15v^3+420v^4)}{181{,}194}$$

$$\Rightarrow\quad 1{,}0597\alpha+1{,}5725\beta+2{,}0452\gamma=1{,}95004$$

VINCOLO DI DISPERSIONE

$$D^2(0;\theta)=1{,}2*D^2(0;u)$$

$$\frac{\sum_k t_k{}^2\,\theta_k*(1+\mathrm{i})^{-tk}}{\sum_k\ \theta_k*(1+\mathrm{i})^{-tk}}=\frac{\sum_k t_k{}^2\,u*(1+\mathrm{i})^{-tk}}{\sum_k\ u_k*(1+\mathrm{i})^{-tk}}$$

$$D^2(0;u)=\frac{100*v+9*100*v^3}{100*v+100*v^3}=4{,}80017$$

Immunizzazione di portafoglio

Esercizio 3

$$D^2(0;\theta)=\frac{(4\alpha+5\beta+5\gamma)*v+4*(104\alpha+5\beta+5\gamma)*v^2}{181{,}194}+$$

$$\frac{9*(105\beta+5\gamma)*v^3+1680\gamma*v^4}{181{,}194}=\frac{\alpha*(4v+416v^2)}{181{,}194}+$$

$$+\ \frac{\beta*\left(5v+20v^2+945v^3\right)+\gamma*(5v+20v^2+45v^3+1680v^4)}{181{,}194}=$$

$$=2{,}0984\alpha+4{,}6151\beta+7{,}9310\gamma$$

$$\Rightarrow\quad 2{,}0984\alpha+4{,}6151\beta+7{,}9310\gamma=1{,}2*4{,}80017=5{,}7602$$

Immunizzazione di portafoglio

Esercizio 3

$$\begin{cases} 97{,}908\alpha + 99{,}6547\beta + 99{,}5506\gamma = 181{,}194 \\ 1{,}0597\alpha + 1{,}5725\beta + 2{,}0452\gamma = 1{,}95004 \\ 2{,}0984\alpha + 4{,}6151\beta + 7{,}9310\gamma = 5{,}7602 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 97{,}908\alpha = -99{,}6547\beta - 99{,}5506\gamma + 181{,}194$$

$$\alpha = -1{,}0178\beta - 1{,}0168\gamma + 1{,}8506$$

$$\begin{cases} 0{,}4939\beta + 0{,}9677\gamma = -0{,}011 \\ 2{,}4793\beta + 5{,}7973\gamma = 1{,}8769 \end{cases}$$

$$0{,}4939\beta = -0{,}9677\gamma - 0{,}011$$

$$\Rightarrow \quad \beta = -1{,}9593\gamma - 0{,}022$$

$$2{,}4793 * (-1{,}9593\gamma - 0{,}022) + 5{,}7973\gamma = 1{,}8769$$

$$\gamma = 2{,}1288 \ \rightarrow \ \beta = -4{,}1489 \ \rightarrow \ \alpha = 3{,}9088$$

Esercizio 4

Un portafoglio è composto da uno ZCB triennale che ha un prezzo $P = 100 * e^{-0.05} * 0,98$ e rimborsa 100 e da una opzione CALL di scadenza triennale.

Sapendo che l'azione sottostante alla call quota oggi 5, che lo strike price è 4,2 ed ipotizzando che u=1.10, d=0.88 e i=0.05 valutare:

- il prezzo dell'opzione considerata;
- i TIR del portafoglio descritto corrispondenti ai possibili percorsi aleatori.

Opzioni

Esercizio 4

I dati del nostro esercizio sono:

$A=5 \quad i=0{,}05 \quad K=4{,}2 \quad u=1{,}10 \quad d=0{,}88 \quad T=3$

Calcoliamo le probabilità di rialzo e ribasso :

$$\pi = \frac{1+i-d}{u-d} = \frac{1+0{,}05-0{,}88}{1{,}10-0{,}88} = \frac{0{,}17}{0{,}22} = 0{,}7727$$

$$1-\pi = 1-0{,}7727 = 0{,}2273$$

Opzioni

Esercizio 4

Considerando che abbiamo un orizzonte temporale di tre anni, l’azione può assumere quattro diversi valori:

$$A_{uuu} = A*u*u*u = A*u^3 = 5*1,10^3 = 6,6550$$

$$A_{uud} = A*u*u*d = A*u^2*d = 5*1,10^2*0,88 = 5,3240$$

$$A_{udd} = A*u*d*d = A*u*d^2 = 5*1,10*0,88^2 = 4,2592$$

$$A_{ddd} = A*d*d*d = A*d^3 = 5*0,88^3 = 3,4074$$

I pay-off dell'opzione sono i seguenti:

$$C_{uuu} = \max(A_{uuu} - K;0) = \max(6{,}6550 - 4{,}2;0) = 2{,}4550$$

$$C_{uud} = \max(A_{uud} - K;0) = \max(5{,}3240 - 4{,}2;0) = 1{,}1240$$

$$C_{udd} = \max(A_{udd} - K;0) = \max(4{,}2592 - 4{,}2;0) = 0{,}0592$$

$$C_{ddd} = \max(A_{ddd} - K;0) = \max(3{,}4074 - 4{,}2;0) = 0$$

Opzioni

Esercizio 4

Il prezzo della call sarà calcolato come di seguito.

$$C = \frac{\pi^3 * C_{uuu} + 3 * \pi^2 * (1-\pi) * C_{uud} + 3 * \pi * (1-\pi)^2 * C_{udd} + (1-\pi)^3 * C_{ddd}}{(1+i)^3} =$$

$$= \frac{0{,}7727^3 * 2{,}4550 + 3 * 0{,}7727^2 * (1-0{,}7727) * 1{,}1240 + 3 * 0{,}7727 * (1-0{,}7727)^2 * 0{,}0592 + (1-0{,}7727)^3 * 0}{(1+0{,}05)^3} =$$

$$= \frac{1{,}5973}{1{,}1576} = 1{,}3799$$

Il valore del portafoglio all'epoca zero è:

$$V(0) = P + C = 100 * e^{-0{,}05} * 0{,}98 + 1{,}3799 = 94{,}6004$$

Opzioni

Esercizio 4

Il valore del portafoglio all'epoca tre è dato dalla somma dello ZCB a scadenza e dei diversi pay-off dell'opzione.

$$V_3(uuu) = 100 + C_{uuu} = 100 + 2{,}4550 = 102{,}4550$$

$$V_3(uud) = 100 + C_{uud} = 100 + 1{,}1240 = 101{,}1240$$

$$V_3(udd) = 100 + C_{udd} = 100 + 0{,}0592 = 100{,}0592$$

$$V_3(ddd) = 100 + C_{ddd} = 100 + 0 = 100$$

Opzioni

Esercizio 4

Il valore del portafoglio dopo 3 anni, è dato dal valore iniziale capitalizzato 3 anni al tasso TIR.
Nel nostro caso, conoscendo il valore iniziale e i 4 diversi valori finali del portafoglio, possiamo agevolmente ricavare i TIR, risolvendo l’equazione:

$$V_3 = V_0 * (1 + TIR)^3$$

$$TIR = \sqrt[3]{\frac{V_3}{V_0}} - 1$$

Opzioni

Esercizio 4

Si avranno così quattro differenti TIR.

$$TIR_{uuu} = \sqrt[3]{\frac{V_3(uuu)}{V_0}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{102,4550}{94,6004}} - 1 = 2,6944\%$$

$$TIR_{uud} = \sqrt[3]{\frac{V_3(uud)}{V_0}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{101,1240}{94,6004}} - 1 = 2,2477\%$$

$$TIR_{udd} = \sqrt[3]{\frac{V_3(udd)}{V_0}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{100,0592}{94,6004}} - 1 = 1,8876\%$$

$$TIR_{ddd} = \sqrt[3]{\frac{V_3(ddd)}{V_0}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{100}{94,6004}} - 1 = 1,8675\%$$