

**OPZIONI, DURATION E
INTEREST RATE SWAP (IRS)**



Valutazione delle opzioni

Esercizio 1

2

ESERCIZIO 1

Il portafoglio di un investitore è composto di 520 azioni della società A e un pari numero di opzioni Put sulle azioni A. Sapendo che l'azione quota oggi Euro 1,39, lo strike price della put è fissato a Euro 0,9, la scadenza è fissata a 3 anni, il tasso risk free è il 2% e che $u = +10\%$ e $d = -20\%$, calcolare:

- Il valore del portafoglio oggi;
- I valori a scadenza del portafoglio in tutti i casi possibili;
- Il valore atteso di portafoglio.



Valutazione delle opzioni

Esercizio 1

3

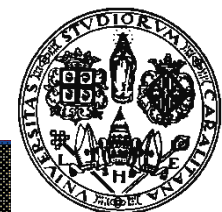
I fattori di rialzo e ribasso valgono rispettivamente $u = 1,10$ e $d = 0,80$.
Determiniamo i valori a scadenza ($T=3$) del sottostante:

$$A_{uuu} = A \cdot u^3 = 1,8501$$

$$A_{uud} = A \cdot u^2 \cdot d = 1,3455$$

$$A_{udd} = A \cdot u \cdot d^2 = 0,9786$$

$$A_{ddd} = A \cdot d^3 = 0,7117$$



Valutazione delle opzioni

Esercizio 1

4

I pay off a scadenza della put valgono rispettivamente:

$$P_{uuu} = \max(K - A_{uuu}; 0) = 0$$

$$P_{uud} = \max(K - A_{uud}; 0) = 0$$

$$P_{udd} = \max(K - A_{udd}; 0) = 0$$

$$P_{ddd} = \max(K - A_{ddd}; 0) = 0,1883$$



Valutazione delle opzioni

Esercizio 1

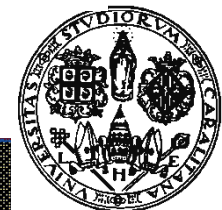
5

Mentre la probabilità risk-neutral vale:

$$\pi = \frac{1+i-d}{u-d} = 0,7333 \rightarrow 73,33\%$$

Possiamo ora calcolare il prezzo dell'opzione put:

$$P = \frac{\pi^3 \cdot P_{uuu} + 3\pi^2 \cdot (1-\pi) \cdot P_{uud} + 3\pi \cdot (1-\pi)^2 \cdot P_{udd} + (1-\pi)^3 \cdot P_{ddd}}{(1+i)^3} = 0,003365$$



Valutazione delle opzioni

Esercizio 1

6

Il valore del portafoglio all'epoca *zero* si ottiene sommando al prezzo del sottostante il prezzo dell'opzione (per il numero di quote):

$$V_0 = 520 \cdot (A + P) = 724,55$$

Il valore all'epoca *tre* del portafoglio si ottiene sommando al valore a scadenza del sottostante il valore dell'opzione (ossia il suo pay off), nei quattro percorsi aleatori possibili:

$$V_3(uuu) = A_{uuu} + P_{uuu} = 962,05$$

$$V_3(uid) = A_{uid} + P_{uid} = 699,67$$

$$V_3(udd) = A_{udd} + P_{udd} = 508,85$$

$$V_3(ddd) = A_{ddd} + P_{ddd} = 468,00$$



Valutazione delle opzioni

Esercizio 1

7

Infine, il valore atteso del portafoglio è:

$$V_3(Att) = \pi^3 \cdot V_3(uuu) + 3\pi^2 \cdot (1-\pi) \cdot V_3(uud) + 3\pi \cdot (1-\pi)^2 \cdot V_3(udd) + (1-\pi)^3 \cdot V_3(ddd) = 768,90$$

ATTENZIONE!

Il numero “3” per il quale sono moltiplicati il secondo e il terzo fattore della formula fa riferimento al numero di combinazioni ottenibili. Relativamente al secondo fattore (che prende in considerazione la fattispecie di due rialzi e un ribasso) potremmo infatti avere le seguenti tre casistiche:

1. Un ribasso e due rialzi
2. Un rialzo, un ribasso e un rialzo
3. Due rialzi e un ribasso



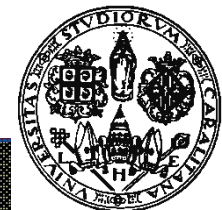
IRS

Esercizio 2

8

ESERCIZIO 3

Un'azienda ha un finanziamento del quale gli mancano da restituire due rate le cui quote capitali sono 1.000.000 di euro ciascuna; ha coperto il rischio di tasso con un IRS con tasso swap del 3%. Sapendo che il FV dell'IRS è pari a -20.000 euro e che $i(0;1)=2,5\%$ calcolare $i(0;2)$ e $i(0;1;2)$.



IRS

Esercizio 2

9

Calcoliamo i tassi a pronti:

$$i(0,1) = 2,5\%$$

$$i(0;2) = x$$

Calcoliamo i fattori di attualizzazione:

$$v(0,1) = \frac{1}{(1 + 2,5\%)^1} = 0,97561$$

$$v(0,2) = \frac{1}{(1 + x)^2}$$

Tasso a termine:

$$i(0,1,2) = \frac{m(0;t)}{m(0;t-1)} - 1 = \frac{(1+x)^2}{(1+2,5\%)^1} - 1$$



IRS

Esercizio 2

10

Quota variabile:

$$QV_1 = 2.000.000 * i(0,1) = 2.000.000 * 2,5\% = 50.000$$

$$QV_2 = 1.000.000 * i(0,1,2) = 1.000.000 * \frac{(1+x)^2}{(1+2,5\%)^1} - 1$$

$$QV_2 = 1.000.000 * \frac{(1+x)^2 - 1,025}{1,025}$$

Quota fissa:

$$QF_1 = 2.000.000 * 3\% = 60.000$$

$$QF_2 = 1.000.000 * 3\% = 30.000$$



IRS

Esercizio 2

11

Calcolo FV:

$$(50.000 - 60.000) * 0,97561 + \left(1.000.000 * \frac{(1+x)^2 - 1,025}{1,025} - 30.000 \right) * \frac{1}{(1+x)^2} = -20.000$$

$$\left(1.000.000 * \frac{(1+x)^2 - 1,025}{1,025} - 30.000 \right) * (1+x)^{-2} = -20.000 + 9.756,1$$

$$\left(1.000.000 * \frac{1 - 1,025 * (1+x)^{-2}}{1,025} - 30.000 * (1+x)^{-2} \right) = -10.243,9$$

$$\left(\frac{1.000.000}{1,025} - 1.000.000 * (1+x)^{-2} - 30.000 * (1+x)^{-2} \right) = -10.243,9 - 975.609,76$$

$$(1+x)^{-2} = \frac{-985.853,66}{-1.030.000} = 0,957139 = v(0,2)$$



IRS

Esercizio 2

12

Calcolo del tasso $i(0,2)$:

$$x = \sqrt{\frac{1}{0,957139}} - 1 = 2,214\%$$

Calcolo del tasso $i(0,1,2)$:

$$i(0,1,2) = \frac{[1 + i(0;t)]^t}{[1 + i(0;t-1)]^{t-1}} - 1 = 1,93\%$$



IRS

Esercizio 2

13

Nella slide successive viene riportata una metodo di calcolo alternativa.

I due metodi sono alternativi pertanto portano agli stessi risultati.



IRS

Esercizio 2

14

Partiamo dal calcolo delle quote capitale e del debito residuo.

	QC	D (h)
0		€ 2.000.000,00
1	€ 1.000.000,00	€ 1.000.000,00
2	€ 1.000.000,00	€ -

A questo punto, ai fini della risoluzione dell'esercizio è necessario utilizzare il metodo di interpolazione.

Per calcolare il tasso a termine $i(0;1;2)$ sfruttiamo la seguente relazione tra tassi a pronti e tassi a termine:

$$i(0; t - 1; t) = \frac{m(0, t)}{m(0, t - 1)} - 1 = \frac{[1 + i(0, t)]^t}{[1 + i(0, t - 1)]^{t-1}} - 1$$



IRS

Esercizio 2

15

Vediamo ora come applicare il calcolo tramite interpolazione.

Tasso a pronti.

	$i(0;t)$
0	
1	2,50%
2	x

Il tasso a pronti $i(0;2)$ è incognito. Ai fini del calcolo di tale tasso tramite l'interpolazione è necessario:

1. assegnare un valore arbitrario al tasso $i(0;2)$
2. calcolare il FV dello swap associato al tasso scelto nel punto precedente
3. se il FV associato al tasso individuato al punto 1) è superiore al nostro FV obiettivo (pari a -20.000 euro) allora è necessario ripartire dal punto 1) e scegliere un valore di tasso tale per cui il nostro FV diminuisca
4. Ripetere il procedimento fino a trovare due valori di FV che individuano un intorno all'interno del quale è ricompreso il nostro FV obiettivo



IRS

Esercizio 2

16

Tasso a termine.

Il tasso a termine viene calcolato utilizzando la seguente relazione tra tassi a termine e tassi a pronti:

$$i(0; t - 1; t) = \frac{m(0, t)}{m(0, t - 1)} - 1 = \frac{[1 + i(0, t)]^t}{[1 + i(0, t - 1)]^{t-1}} - 1$$

Il primo tasso a termine coincide con il primo tasso a pronti.

Per calcolare il tasso $i(0; 1; 2)$ all'interno della formula dobbiamo inserire il valore di $i(0; 2)$ arbitrariamente individuato nella slide precedente.

Infatti:

$$i(0; 1; 2) = \frac{m(0, 2)}{m(0; 1)} - 1 = \frac{[1 + i(0, 2)]^2}{[1 + i(0, 1)]^1} - 1$$



IRS

Esercizio 2

17

Fattori di attualizzazione.

Calcoliamo i fattori di attualizzazione con la seguente formula:

$$\frac{1}{(1 + i(0; t))^t} = v(0; t)$$

Quota fissa swap.

Calcoliamo la quota fissa del contratto swap considerando un tasso del 3%:

$$QF_1 = Dr_0 * 3\%$$

$$QF_2 = Dr_1 * 3\%$$



IRS

Esercizio 2

18

Quota variabile swap.

Calcoliamo la quota variabile del contratto swap considerando i tassi la curva dei tassi a termine (il primo tasso a pronti coincide con il primo tasso a termine):

$$QV_1 = Dr_0 * i(0; 1)$$
$$QV_2 = Dr_1 * i(0; 1; 2)$$

Fair Value swap.

Si calcola attualizzando all'epoca di valutazione la differenza tra i flussi di cassa generati dalla quota variabile e dalla quota fissa.

$$diff1 = QV_1 - QF_1$$
$$diff2 = QV_2 - QF_2$$

$$FV = diff1 * v(0,1) + diff2 * v(0,2)$$



IRS

Esercizio 2

19

Verifica del tasso di interesse per l'interpolazione.

Eseguiamo il calcolo del FV ipotizzando arbitrariamente che il tasso a pronti $i(0,2)$ sia pari al 2,55%.

Eseguendo i calcoli (utilizzando le formule viste precedentemente) avremo un FV pari a -13.559,4:

	QC	D (h)	$i(0;t)$	$i(0;t-1;t)$	$v(0;t)$	QF	QV	QV-QF	FV
0		€ 2.000.000,00							
1	€ 1.000.000,00	€ 1.000.000,00	2,50%	2,50%	0,97561	60000	50000	-10000	-13559,4
2	€ 1.000.000,00	€ -	2,55%	2,60%	0,950886	30000	26000,24	-3999,76	

$$i(0; 1; 2) = \frac{m(0,2)}{m(0; 1)} - 1 = \frac{[1 + 2,55\%]^2}{[1 + 2,50\%]^1} - 1 = 2,60\%$$

$$QF_1 = 2.000.000 * 3\% = 60.000$$

$$QF_2 = 1.000.000 * 3\% = 30.000$$



IRS

Esercizio 2

20

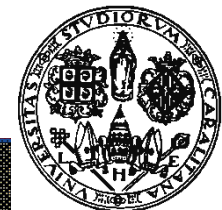
$$QV_1 = 2.000.000 * 2,5\% = 50.000$$
$$QV_2 = 1.000.000 * 2,6\% = 26.000,24$$

$$diff1 = QV_1 - QF_1 = -10.000$$
$$diff2 = QV_2 - QF_2 = -3.999,76$$

$$FV = -10.000 * v(0,1) + (-3.999,76 * v(0,2)) = -13.559,4$$

Il FV è troppo alto rispetto al nostro valore obiettivo (pari a -20.000 euro). Facciamo quindi una prova con un altro valore di tasso per renderci conto della relazione tra tasso di interesse e FV dello swap.

Prendiamo un tasso del 2% ad esempio.



IRS

Esercizio 2

21

Con un tasso del 2% avremo un valore del FV pari a -24.150,2.

	QC	D (h)	$i(0;t)$	$i(0;t-1;t)$	$v(0;t)$	QF	QV	QV-QF	FV
0		€ 2.000.000,00							
1	€ 1.000.000,00	€ 1.000.000,00	2,50%	2,50%	0,97561	60000	50000	-10000	-24150,2
2	€ 1.000.000,00	€ -	2,00%	1,50%	0,961169	30000	15024,39	-14975,6	

Ci accorgiamo che il valore del nostro FV obiettivo (pari a -20.000) è compreso tra i due valori di FV calcolati fin ora. Si evidenzia che potrebbero chiaramente essere necessarie più di due prove per trovare i valori del FV all'interno dei quali è compreso il nostro FV obiettivo.

Applichiamo ora la formula dell'interpolazione per trovare il valore del nostro tasso.



IRS

Esercizio 2

22

i_0	2%
A_0	-€ 24.150,19
A	-€ 20.000,00
i_1	2,55%
A_1	-€ 13.559,41

$$i(0; 2) = 2\% + \frac{(2,55\% - 2\%)}{(-13.559,4 - (-24.150,2))} * (-20.000 - (-24.150,2)) =$$

$$i(0; 2) = 2,21\%$$

A questo punto, il valore di $i(0, 1, 2)$ si calcola come segue:

$$i(0; 1; 2) = \frac{m(0,2)}{m(0; 1)} - 1 = \frac{[1 + 2,21\%]^2}{[1 + 2,50\%]^1} - 1 = 1,93\%$$



Immunizzazione di portafoglio

Esercizio 3

23

Esercizio 3

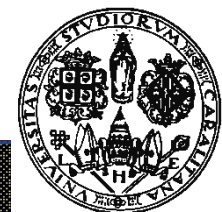
Siano dati i seguenti 3 titoli obbligazionari (i cui valori teorici non coincidono con i prezzi):

$$b_1 = (-97,91; 4; 104)/(0; 1; 2)$$

$$b_2 = (-99,65; 5; 5; 105)/(0; 1; 2; 3)$$

$$b_3 = (-99,55; 5; 5; 5; 105)/(0; 1; 2; 3; 4)$$

Sapendo che la struttura dei tassi di mercato è piatta ed è espressa da un tasso istantaneo pari al 5% calcolare le quote del portafoglio formato dai tre titoli che immunizzano il vettore delle uscite $(0;100;0;100;0)/(0;1;2;3;4)$ nell'ipotesi in cui si desideri avere una duration di secondo ordine dell'attivo pari a 1,2 volte quella del passivo.



Immunizzazione di portafoglio

Esercizio 3

24

Risoluzione:

$$\delta = 0,05 = \log(1 + i)$$

$$i = e^{0,05} - 1 = 0,05127$$

$$v = \frac{1}{1 + i} = \frac{1}{1,05127} = 0,95123$$

VINCOLO DI BILANCIO

$$V(0;\theta) = V(0;u)$$

$$\sum_k \theta_k * (1 + i)^{-tk} = \sum_k u_k * (1 + i)^{-tk}$$



Immunizzazione di portafoglio

Esercizio 3

25

$$\alpha * (4v + 104v^2) + \beta(5v + 5v^2 + 105^3) + \gamma * (5v + 5v^2 + 5v^3 + 105v^4) \\ = 100 * v + 100 * v^3$$

Ricordando che $v = 0,95123$ avremo:

$$97,908 * \alpha + 99,6547 * \beta + 99,5506 * \gamma = 181,194$$

VINCOLO DI DURATION

$$D(0; \theta) = D(0; u)$$

$$D(0; u) = \frac{100 * v + 3 * 100 * v^3}{100 * v + 100 * v^3} = \frac{100 * v + 3 * 100 * v^3}{181,194} = 1,95004$$



Immunizzazione di portafoglio

Esercizio 3

26

$$D(0;\theta) = \frac{(4\alpha + 5\beta + 5\gamma)v + 2(104\alpha + 5\beta + 5\gamma)v^2}{181,194} +$$
$$+ \frac{3(105\beta + 5\gamma)v^3 + (105 \cdot 4)\gamma v^4}{181,194} = \frac{\alpha(4v + 208v^2)}{181,194} + \frac{\beta(5v + 10v^2 + 15v^3 + 420v^4)}{181,194}$$

→ $1,0597\alpha + 1,5725\beta + 2,0452\gamma = 1,95004$



Immunizzazione di portafoglio

Esercizio 3

27

VINCOLO DI DISPERSIONE

$$D^2(0;\theta) = 1,2 * D^2(0;u)$$

$$\frac{\sum_k t_k^2 \theta_k * (1+i)^{-tk}}{\sum_k \theta_k * (1+i)^{-tk}} = \frac{\sum_k t_k^2 u * (1+i)^{-tk}}{\sum_k u * (1+i)^{-tk}}$$

$$D^2(0;u) = \frac{100*v + 9*100*v^3}{100*v + 100*v^3} = 4,80017$$



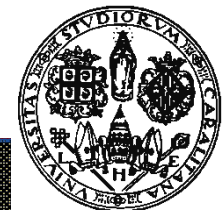
Immunizzazione di portafoglio

Esercizio 3

28

$$\begin{aligned} D^2(0;\theta) &= \frac{(4\alpha+5\beta+5\gamma)*v+4*(104\alpha+5\beta+5\gamma)*v^2}{181,194} + \\ &\frac{9*(105\beta+5\gamma)*v^3+1680\gamma*v^4}{181,194} = \frac{\alpha*(4v+416v^2)}{181,194} + \\ &+ \frac{\beta*(5v+20v^2+945v^3)+\gamma*(5v+20v^2+45v^3+1680v^4)}{181,194} = \\ &= 2,0984\alpha + 4,6151\beta + 7,9310\gamma \end{aligned}$$

$$\longrightarrow 2,0984\alpha + 4,6151\beta + 7,9310\gamma = 1,2 * 4,80017 = 5,7602$$



Immunizzazione di portafoglio

Esercizio 3

29

$$\begin{cases} 97,908\alpha + 99,6547\beta + 99,5506\gamma = 181,194 \\ 1,0597\alpha + 1,5725\beta + 2,0452\gamma = 1,95004 \\ 2,0984\alpha + 4,6151\beta + 7,9310\gamma = 5,7602 \end{cases}$$

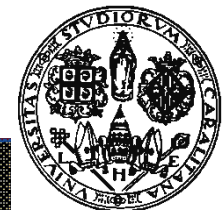
$$\longrightarrow 97,908\alpha = -99,6547\beta - 99,5506\gamma + 181,194$$

$$\alpha = -1,0178\beta - 1,0168\gamma + 1,8506$$

$$\begin{cases} 0,4939\beta + 0,9677\gamma = -0,011 \\ 2,4793\beta + 5,7973\gamma = 1,8769 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} 0,4939\beta = -0,9677\gamma - 0,011 \\ \beta = -1,9593\gamma - 0,022 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2,4793 * (-1,9593\gamma - 0,022) + 5,7973\gamma &= 1,8769 \\ \gamma &= 2,1288 \rightarrow \beta = -4,1489 \rightarrow \alpha = 3,9088 \end{aligned}$$



Opzioni

Esercizio 4

30

Esercizio 4

Un portafoglio è composto da uno ZCB triennale che ha un prezzo $P = 100 * e^{-0.05 * 3} * 0,98$ e rimborsa 100 e da una opzione CALL di scadenza triennale.

Sapendo che l'azione sottostante alla call quota oggi 5, che lo strike price è 4,2 ed ipotizzando che $u=1.10$, $d=0.88$ e $i=0.05$ valutare:

- il prezzo dell'opzione considerata;
- i TIR del portafoglio descritto corrispondenti ai possibili percorsi aleatori.



Opzioni

Esercizio 4

31

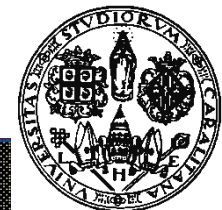
I dati del nostro esercizio sono:

$$A=5 \quad i=0,05 \quad K=4,2 \quad u=1,10 \quad d=0,88 \quad T=3$$

Calcoliamo le probabilità di rialzo e ribasso :

$$\pi = \frac{1+i-d}{u-d} = \frac{1+0,05-0,88}{1,10-0,88} = \frac{0,17}{0,22} = 0,7727$$

$$1-\pi = 1-0,7727 = 0,2273$$



Opzioni

Esercizio 4

32

Considerando che abbiamo un orizzonte temporale di tre anni, l'azione può assumere quattro diversi valori:

$$A_{uuu} = A * u * u * u = A * u^3 = 5 * 1,10^3 = 6,6550$$

$$A_{uud} = A * u * u * d = A * u^2 * d = 5 * 1,10^2 * 0,88 = 5,3240$$

$$A_{udd} = A * u * d * d = A * u * d^2 = 5 * 1,10 * 0,88^2 = 4,2592$$

$$A_{ddd} = A * d * d * d = A * d^3 = 5 * 0,88^3 = 3,4074$$



Opzioni

Esercizio 4

33

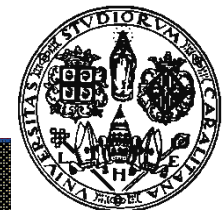
I pay-off dell'opzione sono i seguenti:

$$C_{uru} = \max(A_{uru} - K; 0) = \max(6,6550 - 4,2; 0) = 2,4550$$

$$C_{urd} = \max(A_{urd} - K; 0) = \max(5,3240 - 4,2; 0) = 1,1240$$

$$C_{udd} = \max(A_{udd} - K; 0) = \max(4,2592 - 4,2; 0) = 0,0592$$

$$C_{ddd} = \max(A_{ddd} - K; 0) = \max(3,4074 - 4,2; 0) = 0$$



Opzioni

Esercizio 4

34

Il prezzo della call sarà calcolato come di seguito.

$$\begin{aligned} C &= \frac{\pi^3 * C_{uuu} + 3 * \pi^2 * (1 - \pi) * C_{uud} + 3 * \pi * (1 - \pi)^2 * C_{udd} + (1 - \pi)^3 * C_{ddd}}{(1 + i)^3} = \\ &= \frac{0,7727^3 * 2,4550 + 3 * 0,7727^2 * (1 - 0,7727) * 1,1240 + 3 * 0,7727 * (1 - 0,7727)^2 * 0,0592 + (1 - 0,7727)^3 * 0}{(1 + 0,05)^3} = \\ &= \frac{1,5973}{1,1576} = 1,3799 \end{aligned}$$

Il valore del portafoglio all'epoca zero è:

$$V(0) = P + C = 100 * e^{-0,05} * 0,98 + 1,3799 = 94,6004$$



Opzioni

Esercizio 4

35

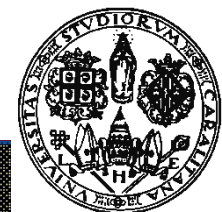
Il valore del portafoglio all'epoca tre è dato dalla somma dello ZCB a scadenza e dei diversi pay-off dell'opzione.

$$V_3(uuu) = 100 + C_{uuu} = 100 + 2,4550 = 102,4550$$

$$V_3(uud) = 100 + C_{uud} = 100 + 1,1240 = 101,1240$$

$$V_3(udd) = 100 + C_{udd} = 100 + 0,0592 = 100,0592$$

$$V_3(ddd) = 100 + C_{ddd} = 100 + 0 = 100$$



Opzioni

Esercizio 4

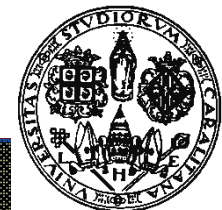
36

Il valore del portafoglio dopo 3 anni, è dato dal valore iniziale capitalizzato 3 anni al tasso TIR.

Nel nostro caso, conoscendo il valore iniziale e i 4 diversi valori finali del portafoglio, possiamo agevolmente ricavare i TIR, risolvendo l'equazione:

$$V_3 = V_0 * (1 + TIR)^3$$

$$TIR = \sqrt[3]{\frac{V_3}{V_0}} - 1$$



Opzioni

Esercizio 4

37

Si avranno così quattro differenti TIR.

$$TIR_{uuu} = \sqrt[3]{\frac{V_3(uuu)}{V_0}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{102,4550}{94,6004}} - 1 = 2,6944\%$$

$$TIR_{uud} = \sqrt[3]{\frac{V_3(uud)}{V_0}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{101,1240}{94,6004}} - 1 = 2,2477\%$$

$$TIR_{udd} = \sqrt[3]{\frac{V_3(udd)}{V_0}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{100,0592}{94,6004}} - 1 = 1,8876\%$$

$$TIR_{ddd} = \sqrt[3]{\frac{V_3(ddd)}{V_0}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{100}{94,6004}} - 1 = 1,8675\%$$

