

Immunizzazione Finanziaria

Esercizio 1

- Si considerino due titoli obbligazionari: uno ZCB che rimborsa 100 dopo 1 anno ed un CB con le seguenti entrate $(6; 6; 106) / (1; 2; 3)$
- Sapendo che la curva dei tassi è data da $i(0;t) = 0,06$ calcolare:
- a) le quote di composizione ed il valore del portafoglio formato dai due titoli, che immunizza un'unica uscita di Euro 500.000 prevista all'epoca 2;
- b) la disponibilità finanziaria in corrispondenza della *duration* dell'unica uscita, nell'ipotesi in cui si verifichi uno *shift positivo* pari a 3 punti percentuali nella curva dei tassi.

Esercizio 1 - soluzione

- Titoli di cui si dispone per comporre il portafoglio delle entrate:
- ZCB: $(100)/(1)$
- CB: $(6; 6; 106)/(1; 2; 3)$

- Portafoglio delle Uscite: un'unica uscita collocata all'epoca 2: $(500.000)/(2)$

- Tasso d'interesse: $i=6\%$

Esercizio 1 – soluzione punto A)

- Calcoliamo le quote di composizione del ptf delle entrate che immunizza l'unica uscita:

- Teorema (Redington):

Un ptf di attività è immunizzato rispetto ad un vettore di passività se sono verificati i *vincoli di bilancio, duration e convessità*.

- Teorema (Fisher-Weil):

Nel caso di una sola uscita e 2 o più entrate, il terzo vincolo (*convessità*) risulta soddisfatto per costruzione.

Esercizio 1 - soluzione punto A)

- Vincolo di Bilancio:

$$V(0; \theta) = V(0; U)$$

- Valore attuale del *ptf* delle uscite:

$$V(0; U) = \frac{500.000}{(1,06)^2} = 444.998,22$$

Esercizio 1 - soluzione punto A)

- Valore attuale del *ptf* delle entrate:

$$V(0; \theta) = \frac{(100\pi_1 + 6\pi_2)}{1,06} + \frac{6\pi_2}{(1,06)^2} + \frac{106\pi_2}{(1,06)^3} = 94,3396\pi_1 + 100\pi_2$$

- Vincolo di *Bilancio*:

$$94,3396\pi_1 + 100\pi_2 = 444.998,22$$

Esercizio 1 - soluzione punto A)

- Vincolo di *Duration*:

$$D(0; \theta) = D(0; U)$$

- Duration del *ptf delle uscite*:

$$D(0; U) = 2$$

Esercizio 1 - soluzione punto A)

- Duration del *ptf delle entrate*:

$$D(0; \theta) = \left[1 * \frac{(100\pi_1 + 6\pi_2)}{1,06} + 2 * \frac{6\pi_2}{(1,06)^2} + 3 * \frac{106\pi_2}{(1,06)^3} \right] / 444.998,22$$

$$D(0; \theta) = \frac{94,3396\pi_1 + 283,3404\pi_2}{444.998,22}$$

Esercizio 1 - soluzione punto A)

- Vincolo di *Duration*:

$$\frac{94,3396\pi_1 + 283,3404\pi_2}{444.998,22} = 2$$

Esercizio 1 - soluzione punto A)

- Mettiamo a sistema il vincolo di Bilancio e il vincolo di Duration:

$$\begin{cases} 94,3396\pi_1 + 100\pi_2 = 444.998,22 \\ \frac{94,3396\pi_1 + 283,3404\pi_2}{444.998,22} = 2 \end{cases}$$

Esercizio 1 - soluzione punto A)

- Risolviamo il sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} 94,3396\pi_1 + 100\pi_2 = 444.998,22 \\ 94,3396\pi_1 + 283,3404\pi_2 = 444.998,22 * 2 \\ \hline -183,3404\pi_2 = -444.998,22 \end{array} \right.$$

Esercizio 1 - soluzione punto A)

- Soluzione:
- Quota dello ZCB:

$$\pi_1 = 2.144,18$$

- Quota del CB:

$$\pi_2 = 2.427,17$$

Esercizio 1 - soluzione punto A)

- Valore del *ptf delle entrate*:

$$V(0; \theta) = \frac{(100 * 2.144,18 + 6 * 2.427,17)}{1,06} + \frac{6 * 2.427,17}{(1,06)^2} + \frac{106 * 2.427,17}{(1,06)^3} = 444.998,13$$

Esercizio 1 - soluzione punto B)

- *Shift positivo* sulla curva dei tassi (+3%):
- $\rightarrow i = 6\% + 3\% = 9\%$
- Calcoliamo la *disponibilità finanziaria* (saldo netto) all'epoca 2:

Titolo ZCB		$100\pi_1$		
Titolo CB		$6\pi_2$	$6\pi_2$	$106\pi_2$
Uscita			-500.000	
	0	1	2	3

Esercizio 1 - soluzione punto B)

- Moltiplichiamo ciascun flusso per la corrispondente quota π_1 e π_2 :

<i>Titolo ZCB</i>		214.418		
<i>Titolo CB</i>		14.563,02	14.563,02	257.280,02
<i>Uscita</i>			-500.000	
	0	1	2	3

Esercizio 1 - soluzione punto B)

- Saldo netto all'epoca 2:

$$VN_2 = 214.418 * (1,09) + 14.563,02 * (1,09) + 14.563,02 - 500.000 + \frac{257.280,02}{1,09}$$

$$VN_2 = 189,05$$

Esercizio 2

- Si considerino due titoli obbligazionari: uno ZCB che rimborsa 100 dopo 1 anno ed un CB con le seguenti entrate (10; 10; 110) / (1; 2; 3).

Sapendo che la curva dei tassi è data da:

$$i(0;t) = 0,04 + 0,005*(t-1)$$

- Calcolare:
- a) le quote di composizione ed il valore del portafoglio formato dai due titoli, che immunizza un'unica uscita di Euro 300.000 prevista all'epoca 2;
- b) il saldo residuo all'epoca finale, ovvero all'epoca 3, del portafoglio complessivo (comprensivo dell'unica uscita), nell'ipotesi in cui si verifichi uno *shift negativo* pari 2 punti percentuali nella curva dei tassi.

Esercizio 2 - soluzione

- Titoli di cui si dispone per comporre il portafoglio delle entrate:
 - ZCB: $(100)/(1)$
 - CB: $(10; 10; 110)/(1; 2; 3)$
- Portafoglio delle Uscite: un'unica uscita collocata all'epoca 2: $(300.000)/(2)$
- Curva dei tassi d'interesse: $i(0;t)=0,04 + 0,005^*(t-1)$

Esercizio 2 - soluzione

- Da cui ottengo i Tassi a pronti:
- $i(0; 1) = 0,04$
- $i(0; 2) = 0,045$
- $i(0; 3) = 0,05$

Esercizio 2 - soluzione punto A)

- Calcoliamo le quote di composizione del ptf delle entrate che immunizza l'unica uscita:

- Teorema (Redington):

Un ptf di attività è immunizzato rispetto ad un vettore di passività se sono verificati i *vincoli di bilancio, duration e convessità*.

- Teorema (Fisher-Weil):

Nel caso di una sola uscita e 2 o più entrate, il terzo vincolo (*convessità*) risulta soddisfatto per costruzione.

Esercizio 2 - soluzione punto A)

- Vincolo di Bilancio:

$$V(0; \theta) = V(0; U)$$

- Valore attuale del *ptf delle uscite*:

$$V(0; U) = \frac{300.000}{(1,045)^2} = 274.718,99$$

Esercizio 2 - soluzione punto A)

- Valore attuale del *ptf* delle entrate:

$$V(0; \theta) = \frac{(100\pi_1 + 10\pi_2)}{1,04} + \frac{10\pi_2}{(1,045)^2} + \frac{110\pi_2}{(1,05)^3} = 96,1538\pi_1 + 113,7948\pi_2$$

- Vincolo di *Bilancio*:

$$96,1538\pi_1 + 113,7948\pi_2 = 274.718,99$$

Esercizio 2 - soluzione punto A)

- Vincolo di *Duration*:

$$D(0; \theta) = D(0; U)$$

- Duration del *ptf delle uscite*:

$$D(0; U) = 2$$

Esercizio 2 - soluzione punto A)

- Duration del *ptf delle entrate*:

$$D(0; \theta) = \left[1 * \frac{(100\pi_1 + 10\pi_2)}{1,04} + 2 * \frac{10\pi_2}{(1,045)^2} + 3 * \frac{110\pi_2}{(1,05)^3} \right] / 274.718,99$$

$$D(0; \theta) = \frac{96,1538\pi_1 + 312,9964\pi_2}{274.718,99}$$

Esercizio 2 - soluzione punto A)

- Vincolo di *Duration*:

$$\frac{96,1538\pi_1 + 312,9964\pi_2}{274.718,99} = 2$$

Esercizio 2 - soluzione punto A)

- Mettiamo a sistema il vincolo di Bilancio e il vincolo di Duration:

$$\begin{cases} 96,1538\pi_1 + 113,7948\pi_2 = 274.718,99 \\ \frac{96,1538\pi_1 + 312,9964\pi_2}{274.718,99} = 2 \end{cases}$$

Esercizio 2 - soluzione punto A)

- Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} 96,1538\pi_1 + 113,7948\pi_2 = 274.718,99 \\ 94,1538\pi_1 + 312,9964\pi_2 = 274.718,99 * 2 \end{cases}$$

$$-199,20\pi_2 = -274.718,99$$

Esercizio 2 - soluzione punto A)

- Soluzione:
- Quota dello ZCB:

$$\pi_1 = 1.224,95$$

- Quota del CB:

$$\pi_2 = 1.379,11$$

Esercizio 2 - soluzione punto A)

- Valore del *ptf delle entrate*:

$$V(0; \theta) = \frac{(100 * 1.224,95 + 10 * 1.379,11)}{1,04} + \frac{10 * 1.379,11}{(1,045)^2} + \frac{110 * 1.379,11}{(1,05)^3} = 274.719,23$$

Esercizio 2 - soluzione punto B)

- Shift *negativo* sulla curva dei tassi (-2%):
- $\rightarrow i(0; t) = 0,02 + 0,005^*(t-1)$

- Calcolo i nuovi Tassi a pronti:
- $i(0; 1) = 0,02$
- $i(0; 2) = 0,025$
- $i(0; 3) = 0,03$

Esercizio 2 - soluzione punto B)

- Calcolo i Tassi a termine:

$$i(0; 1; 2) = \frac{m(0; 2)}{m(0; 1)} - 1 = \frac{(1,025)^2}{1,02} - 1 = 0,030024509$$

$$i(0; 2; 3) = \frac{m(0; 3)}{m(0; 2)} - 1 = \frac{(1,03)^3}{(1,025)^2} - 1 = 0,040073$$

$$i(0; 1; 3) = \sqrt{\frac{m(0; 3)}{m(0; 1)}} - 1 = \sqrt{\frac{(1,03)^3}{(1,02)}} - 1 = 0,0350367$$

- Calcoliamo la *disponibilità finanziaria* (saldo netto) all'epoca 3, usando i tassi a termine:

Titolo ZCB		$100\pi_1$		
Titolo CB		$10\pi_2$	$10\pi_2$	$110\pi_2$
Uscita			-300.000	
	0	1	2	3

Esercizio 2 - soluzione punto B)

- Moltiplichiamo ciascun flusso per la corrispondente quota π_1 e π_2 :

<i>Titolo ZCB</i>		122.495		
<i>Titolo CB</i>		13.791,1	13.791,1	151.702,1
<i>Uscita</i>			-300.000	
	0	1	2	3

Esercizio 2 - soluzione punto B)

- Saldo netto all'epoca 3:

$$VN_3 = [122.495 + 13.791,1] * [1 + i(0; 1; 3)]^2 + [13.791,1 - 300.000] * [1 + i(0; 2; 3)] + 151.702,1$$

$$VN_3 = 27,38$$