

# Le rendite

# Esercizio 1

- Un fondo è gravato da un canone perpetuo posticipato annuo di Euro 22.000. Il possessore propone al concedente, in alternativa, il pagamento di 8 rate annue di Euro 70.000 ciascuna. A quale tasso effettivo annuo viene considerata equa l'operazione?

# Esercizio 1 - svolgimento

- La prima alternativa riguarda una rendita annua immediata posticipata perpetua, il cui VALORE ATTUALE si calcola utilizzando la seguente formula:

$$VA_1 = rata * \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - v^n}{i} = rata * \frac{1}{i}$$

- La seconda alternativa riguarda, invece, una rendita annua immediata posticipata di durata limitata (8 anni), il cui valore attuale si calcola:

$$VA_2 = rata * \frac{1 - v^n}{i}$$

# Esercizio 1 - svolgimento

- Un'operazione finanziaria è equa quando hanno lo stesso valore attuale.
- Quindi poniamo:

$$VA_1 = VA_2$$

# Esercizio 1 - svolgimento

- Ovvero:

$$22.000 * \frac{1}{i} = 70.000 * \frac{1 - v^8}{i}$$

- Dove “ $v$ ” è il fattore di attualizzazione:

$$v^8 = (1 + i)^{-8}$$

$$22.000 * \frac{1}{i} = 70.000 * \frac{1 - (1 + i)^{-8}}{i}$$

- Risolviamo rispetto al tasso d'interesse “ $i$ ”:

# Esercizio 1 - soluzione



$$22.000 = 70.000 * [1 - (1 + i)^{-8}]$$

$$1 - \frac{22}{70} = \frac{1}{(1 + i)^8}$$

$$\sqrt[8]{\frac{70}{48}} = 1 + i$$

$$i = 4,83\%$$

## Esercizio 2

- Dato il tasso anticipato  $d = 0,07$  nel regime dello sconto composto, determinare il montante di una rendita posticipata immediata di importo pari ad euro 2.000.000, al tasso  $i$ , per 5 anni.
- Inoltre calcolare quanti anni sarebbero stati necessari se si fosse desiderato ricevere un montante pari a euro 40.000.000.

## Esercizio 2 - svolgimento

- Dato “ $d$ ” troviamo il tasso d’interesse:

$$i = \frac{d}{1-d} = \frac{0,07}{1-0,07} = 0,07527$$

- Montante della rendita posticipata immediata:

$$M = rata * s_{n|i} = rata * \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

## Esercizio 2 - svolgimento

- Montante:

$$M = 2.000.000 * \frac{(1 + 0,07527)^5 - 1}{0,07527} = 11.623.272$$

- Calcolo il tempo necessario per avere un Montante pari a 40.000.000 (l'incognita è "n" = *numero rate*)

$$M = 2.000.000 * \frac{(1 + 0,07527)^n - 1}{0,07527} = 40.000.000$$

## Esercizio 2 - svolgimento

$$\frac{40.000.000}{2.000.000} * 0,07527 + 1 = (1 + 0,07527)^n$$

$$n = \frac{\ln 2,5054}{\ln 1,07527} = 12,66$$

- Il tempo necessario per la costituzione del montante è 12 anni, 7 mesi e 28 giorni.

# Esercizio 3

- Un'azienda industriale viene valutata attualizzando i redditi futuri della gestione al tasso del 9% con inflazione nulla.
- I redditi prospettici vengono stimati nella misura seguente:
  - per i primi 10 anni pari a euro 120.000.000;
  - dall'undicesimo al ventesimo anno pari a euro 100.000.000;
  - in seguito pari a euro 90.000.000.
- Calcolare il valore stimato della società.
- Ricalcolare, inoltre, il valore in questione nell'ipotesi che l'inflazione si mantenga costante al 4% per tutti gli anni futuri e che i redditi rimangano costanti al livello indicato.

## Esercizio 3 - svolgimento

- Valore attuale dei primi 10 anni (rendita immediata):

$$VA = 120.000.000 * a_{10|0,09} = 120.000.000 * \frac{1 - (1 + 0,09)^{-10}}{0,09} = 770.118.924$$

- Valore attuale dall'11° al 20° anno (rendita differita):

$$VA = 100.000.000 * a_{10|0,09} * (1,09)^{-10} = 271.088.797$$

# Esercizio 3 - svolgimento

- Valore attuale dal 21° anno in poi (rendita perpetua differita):

$$VA = \frac{\text{rata}}{i} * (1 + i)^{-n} = \frac{90.000.000}{0,09} * (1,09)^{-20} = 178.430.890$$

- Valore stimato della società è la somma dei valori attuali:

$$VA_{\text{società}} = 1.219.638.611$$

## Esercizio 3 - svolgimento

- Per calcolare il valore della società in presenza del tasso d'inflazione pari al 4%, si dovrà effettuare gli stessi calcoli utilizzando un tasso di attualizzazione pari al 13%.
- Soluzione: Euro 871.080.077

## Esercizio 4

- Calcolare il credito posseduto da un soggetto presso una banca che corrisponde il tasso annuo del 3,5%, sapendo che dopo 15 prelevamenti annui posticipati di € 2.000.000 esso si riduce ad un quinto.
- Inoltre, calcolare quanto si dovrebbe ritirare, posticipatamente, ogni 3 mesi, per esaurire il credito in 20 anni.

## Esercizio 4 - svolgimento

- Poniamo il credito iniziale pari a “C” e calcoliamo il montante all’epoca 15, ridotto dei 15 prelevamenti annui, anch’essi capitalizzati sino all’epoca 15:

$$C * (1,035)^{15} - 2.000.000 * \frac{(1,035)^{15} - 1}{0,035} = \frac{1}{5} * C$$

- Risolviamo rispetto a “C”:

$$C * \left[ (1,035)^{15} - \frac{1}{5} \right] = 38.591.362$$

# Esercizio 4 - svolgimento

- Credito iniziale:

$$C = \frac{38.591.362}{1,47535} = 26.157.428$$

# Esercizio 4 - svolgimento

- Calcoliamo la rata trimestrale da prelevare per esaurire il credito in 20 anni:

- Tasso trimestrale:  $i_{\frac{1}{4}} = (1,035)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0,00864$

- La rata si ricava dalla seguente equazione:

$$VA = 26.157.428 = Rata * a_{80|0,00864}$$

# Esercizio 4 - svolgimento

- Rata trimestrale:

$$Rata = 26.157.428 * \frac{0,00864}{1 - (1,00864)^{-80}} = 454.239$$