DISPENSE DI MATEMATICA FINANZIARIA

INDICE

1 Regimi Finanziari.

1.1 Considerazioni introduttive.

Si definisce **operazione finanziaria** un'operazione che produce una variazione di capitale nel tempo. Consideriamo ad esempio lo scadenzario seguente $(-100;110)/(0;t)$ che prevede un'uscita di 100 all'epoca zero e un'entrata di 110 all'epoca t. Possiamo riferirci più in generale allo scadenzario $(P;M)/(0;t)$. L'importo P (il capitale iniziale) viene chiamato **valore attuale** mentre l'importo M viene chiamato **montante.**
Se due individui si scambiano i capitali P e M, questi due capitali si diranno **finanziariamente equivalenti**.
In un'operazione d'**investimento** avremo che $M > P$ perciò la differenza positiva $M - P = I$ è chiamata **interesse.** Avremo inoltre:

$$M = P + I \Rightarrow \frac{M}{P} = \frac{P+I}{P} \Rightarrow \frac{M}{P} = 1 + \frac{I}{P}$$

In quest'ultima relazione, poniamo $\frac{M}{P} = r$ e $\frac{I}{P} = i$ chiamati **fattore di capitalizzazione** (o di **montante**) e **tasso d'interesse** rispettivamente. Da un punto di vista finanziario il fattore di montante rappresenta il montante ottenuto investendo un capitale unitario, mentre il tasso d'interesse rappresenta l'interesse ottenuto investendo un capitale unitario.
L'ultima relazione si può anche riscrivere nella forma seguente:

$$r = 1 + i \Rightarrow M = P \cdot r = P \cdot [1 + i].$$

Possiamo infine definire l'operazione inversa rispetto all'investimento, nota come operazione di **attualizzazione** (o **anticipazione**). In questo caso, il capitale M disponibile all'epoca 1 viene attualizzato (riportato indietro nel tempo) all'epoca 0. La differenza positiva $M - P = D$ è chiamata **sconto.** Avremo inoltre:

$$P = M - D \Rightarrow \frac{P}{M} = \frac{M-D}{M} \Rightarrow \frac{P}{M} = 1 - \frac{D}{M}.$$

In quest'ultima relazione, poniamo $\frac{P}{M} = v$ e $\frac{D}{M} = d$ chiamati **fattore di sconto** (o di **attualizzazione**) e **tasso di sconto** rispettivamente. Da un punto di vista finanziario il fattore di sconto rappresenta il valore attuale ottenuto attualizzando un capitale unitario, mentre il tasso di sconto rappresenta lo sconto ottenuto attualizzando un capitale unitario.
L'ultima relazione si può anche riscrivere nella forma seguente:

$$v = 1 - d \Rightarrow P = M \cdot v = M \cdot [1 - d].$$

Tenendo conto della definizione di fattore di montante e fattore di sconto possiamo dedurre che questi sono reciproci: $r = \frac{1}{v}$

Osservazione. Indicheremo d'ora in poi l'epoca iniziale con 0 e l'epoca finale con t. Useremo perciò le seguenti notazioni:

$$r(0,t) = r_t = r(t)$$
$$v(0,t) = v_t = v(t)$$
$$i(0,t) = i_t = i(t)$$
$$d(0,t) = d_t = d(t)$$

(in tal caso t rappresenta la durata dell'operazione che non dipende dall'epoca d'investimento x). Ricordiamo che alla luce di queste nuove notazioni $i(t)$ rappresenta l'interesse generato da un capitale unitario investito per

un periodo t, mentre $d(t)$ rappresenta il costo che devo sostenere per anticipare a oggi un importo unitario che sarebbe disponibile solo tra t periodi. Osserviamo inoltre che note una di queste quattro funzioni, è possibile ricavare le altre tre.
Ricordiamo le relazioni seguenti:

$$M = P \cdot r(t)$$
$$P = M \cdot v(t)$$
$$I = P \cdot i(t)$$
$$D = M \cdot d(t).$$

Nel caso in cui $t = 1$ useremo le notazioni $r(0,1) = r$; $v(0,1) = v$; $i(0,1) = i$ e $d(0,1) = d$. Deduciamo da queste le seguenti relazioni:

$$r = \frac{1}{v} = 1 + i = \frac{1}{1-d}$$
$$v = 1 - d = \frac{1}{r} = \frac{1}{1+i}$$
$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{r-1}{r} = 1 - v$$
$$i = r - 1 = \frac{d}{1-d} = \frac{1-v}{v}.$$

Esempi.
1) Calcolare il tasso d'interesse e di sconto e il fattore di attualizzazione corrispondenti a un fattore di capitalizzazione $r = 1,25$.

Avremo $i = r - 1 = 0,25$. Inoltre $v = \frac{1}{r} = \frac{1}{1,25} = 0,80.$

Infine $d = 1 - 0,80 = 0,20 = 1 - v.$

2) Dovendo corrispondere dopo un periodo il capitale di 1.000, dato il tasso di interesse i del 25%, calcolare la somma equivalente a pronti e il tasso effettivo di sconto.
Lo scadenzario dell'operazione è $(P;1.000)/(0;1)$. Determiniamo dapprima il fattore di sconto v:

$$v = \frac{1}{r} = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1,25} = 0,80.$$

Perciò $P = 1.000 \cdot v = 800$. Infine il tasso di sconto è $d = \frac{i}{1+i} = \frac{0,25}{1,25} = 0,20.$

3) Dato lo scadenzario $(-100;121)/(0;1)$, determinare i tassi di interesse e di sconto, i fattori di capitalizzazione eattualizzazione. I dati sono $P = 100$, $M = 121$, $t = 2$. Deduciamo $I = M - P = 121 - 100 = 21$. In base alle note relazioni avremo:

$$i = \frac{I}{P} = \frac{21}{100} = 0,21 \rightarrow 21\%$$
$$r = \frac{M}{P} = 1 + i(0,2) = 1,21$$
$$d = \frac{i(0,2)}{1 + i(0,2)} = \frac{0,21}{1,21} = 0,17355 = \frac{D}{M}$$
$$v = \frac{1}{r} = \frac{1}{1,21} = 0,82645 = 1 - d$$

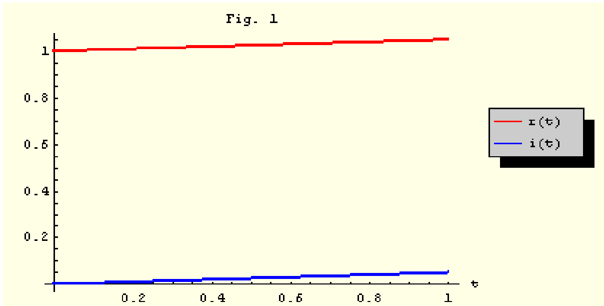
Possiamo adesso definire un **regime finanziario** come un insieme di "regole" che consente di effettuare operazioni di capitalizzazione e di attualizzazione. Possiamo perciò confrontare, conoscendo un particolare regime finanziario, importi disponibili a epoche diverse. Vediamo in dettaglio alcuni tra i più importanti regimi finanziari.

1.2 Regime finanziario dell'interesse semplice.

Nel regime finanziario dell'interesse semplice ("$RFIS$"), si parte dalla ipotesi che l'interesse si produce proporzionalmente (ossia linearmente) rispetto al tempo. Avremo perciò:

$$I = C \cdot i \cdot t \Rightarrow M = C \cdot (1 + i \cdot t).$$

Inoltre il tasso d'interesse nel periodo t è legato al tasso annuo i dalla relazione $i(t) = i \cdot t$ mentre, il fattore di montante è dato dalla relazione $r(t) = 1 + i \cdot t$ (figura 1).



Esempi.
1) Calcolare l'interesse e il montante prodotti da un capitale $C = 1.000$ impiegati:
- al $3,75\%$ per un anno;
- al 7% per 15 mesi.

Sfruttando la relazione $M = C \cdot (1 + i \cdot t)$ e $I = C \cdot i \cdot t$ avremo nel primo caso:

$$M = 1.000 \cdot (1 + 0,0375 \cdot 1) = 1.037,5$$
$$I = 1.000 \cdot 0,0375 \cdot 1 = 37,5 = M - C$$

e nel secondo caso:

$$M = 1.000 \cdot \left(1 + 0,07 \cdot \frac{15}{12}\right) = 1.087,5$$
$$I = 1.000 \cdot 0,07 \cdot \frac{15}{12} = 87,5 = M - C.$$

2) Calcolare a quale tasso i un capitale di 800 produce un montante $M = 900$ in tre anni.
Dalla relazione

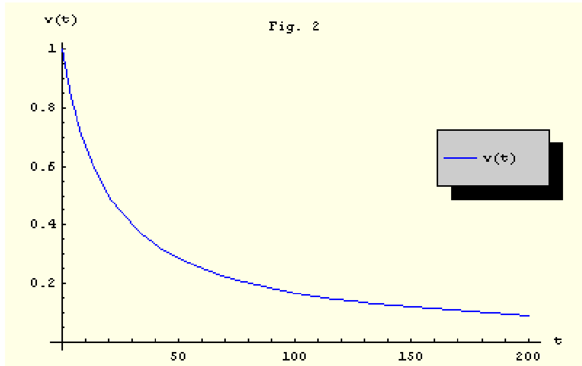
$$900 = 800 \cdot (1 + i \cdot 3)$$

si deduce che $i = \left(\frac{900}{800} - 1\right) \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow i = 0,0417 = 4,17\%.$

Ricordando le relazioni $r(t) = \frac{1}{v(t)}$ e $v(t) = \frac{1}{r(t)}$ avremo nel $RFIS$ le seguenti relazioni:

$$v(t) = \frac{1}{1 + i \cdot t} = (1 + i \cdot t)^{-1}$$
$$d(t) = 1 - v(t) = \frac{i \cdot t}{1 + i \cdot t}.$$

Notiamo che al crescere di t il valore attuale diminuisce (figura 2).



Applicazione: il riepilogo interessi bancari

Il calcolo degli interessi maturati su un conto corrente bancario viene tradizionalmente trasmesso al correntista sotto forma di tabella riepilogativa con indicati i “saldi”, “giorni” e “numeri”.
Il calcolo viene fatto sulla base del regime dell’interesse semplice, con accredito (normalmente) trimestrale degli interessi.
Considerato che, nel regime dell’interesse semplice, il valore degli interessi è dato da $I = C \cdot i \cdot t$, la somma di più interessi maturati allo stesso tasso è data da $\sum_k I_k = \sum_k C_k \cdot i \cdot t_k = i \sum_k C_k \cdot t_k$

Se *t* è espresso in giorni avremo:

$$\sum_k I_k = \sum_k C_k \cdot i \cdot \frac{t_k^{(g)}}{360} = \frac{i}{360} \sum_k C_k \cdot t_k^{(g)}$$

Nel quale $\sum_k C_k \cdot t_k^{(g)}$ prende il nome di “numeri” e $\frac{i}{360}$ di “divisore fisso”

Il procedimento è il seguente:

1) si rilevano il saldo iniziale del conto, tutti i movimenti intercorsi nel periodo e il saldo finale;
2) a ciascun movimento viene associata la data relativa;
3) si calcolano i “saldi”, ovvero il valore disponibile sul conto dopo ciascun movimento;
4) si calcolano i “giorni” di permanenza di ciascun saldo;
5) si calcola il prodotto di ciascun “saldo” per i relativi “giorni”, chiamato “numeri”;
6) si sommano i “numeri”
7) si calcolano gli interessi moltiplicando i “numeri” per il “divisore fisso”.

Date	Movimenti	Saldi	Giorni	Numeri	Interessi
01-gen	527	527	4	2108	0.0292778
05-gen	-552	-25	22	-550	-0.007639
27-gen	1200	1175	6	7050	0.0979167
02-feb	-350	825	13	10725	0.1489583
15-feb	-300	525	5	2625	0.0364583
20-feb	-557	-32	7	-224	-0.003111
27-feb	1200	1168	7	8176	0.1135556
05-mar	-300	868	10	8680	0.1205556
15-mar	-625	243	5	1215	0.016875
20-mar	500	743	2	1486	0.0206389
22-mar	-200	543	5	2715	0.0377083
27-mar	1200	1743	4	6972	0.0968333
31-mar					
			Totale	50978	0.7080278
i	0.50%		Interessi	0.708028	

Nota: in Economia Aziendale spesso la formula per il calcolo delgi interessi viene indicata con:
$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$ oppure, se il tempo è espresso in giorni, $I = \frac{C \cdot r \cdot gg}{36500}$

Le due notazioni sono diverse ma equivalenti, se si pone $C = P$; $r = \frac{i}{100}$, mentre abbiamo già visto che esprimere il tempo in giorni e dividere poi per 365 (o 360 a seconda delle convenzioni adottate) equivale a indicare la frazione di anno.

1.3 Regime finanziario dello sconto commerciale.

Nel regime finanziario dello sconto commerciale (" *RFSC* ") si parte dall'ipotesi che lo sconto è proporzionale al tempo:

$$D = M \cdot d \cdot t \Rightarrow d(t) = d \cdot t .$$

Possiamo inoltre dedurre le altre relazioni:

$$v(t) = 1 - d \cdot t$$
$$r(t) = \frac{1}{1 - d \cdot t} = \frac{1}{v(t)}$$
$$i(t) = r(t) - 1 = \frac{d \cdot t}{1 - d \cdot t}.$$

Da queste relazioni dobbiamo imporre che $0 \leq t \leq \frac{1}{d}$ (inoltre per $t = \frac{1}{d}$ si annulla il valore attuale). Oltre questo limite, il *RFSC* perde di significato.

Se ad esempio $d = 0{,}12$ avremo che $t < \frac{1}{0{,}12}$; $8{,}33$ (ossia otto anni e quattro mesi circa).

Esempi.

1) Calcolare il montante di un capitale pari a 100 dopo tre anni con $i = 10\%$.
Tenendo conto della relazione

$$M = C \cdot \frac{1}{1 - d \cdot t} \text{ con } d = \frac{i}{1 + i}$$

si avrà:

$$M = 100 \cdot \frac{1}{1 - \frac{0{,}10}{1{,}10} \cdot 3} = 137{,}5.$$

2) Una società presenta allo sconto una cambiale di 10.000.000 scadente in nove mesi, la finanziaria applica un tasso di sconto del 16% nel *RFSC*. Calcolare l'importo accreditato.
Applichiamo le note relazioni:

$$P = 10.000.000 \cdot \left(1 - 0{,}16 \cdot \frac{9}{12}\right) = 8.800.000$$
$$D = 10.000.000 \cdot 0{,}16 \cdot \frac{9}{12} = 1.200.000 = M - P.$$

Osservazione. Confrontiamo i due regimi finanziari visti finora. Consideriamo un capitale $C = 1.000$ e un tasso annuo $i = 10\%$. Per un tempo pari a sei mesi ($t = 1/2$) il montante nel *RFIS* sarà
$M_1 = 1.000 \cdot \left(1 + 0{,}10 \cdot \frac{1}{2}\right) = 1.050$ mentre nel *RFSC* avremo un montante pari a

$M_2 = 1.000 \cdot \dfrac{1}{1 - \dfrac{0,10}{1,10} \cdot \dfrac{1}{2}} = 1.047,6$ perciò $M_1 > M_2$ (il montante nel *RFIS* prevale sullo sconto commerciale per una scadenza inferiore a uno). Per scadenze maggiori di uno, accade il contrario. Riprendiamo lo stesso esempio con $t = 2$: $M_1 = 1.000 \cdot (1 + 0,10 \cdot 2) = 1.200$, mentre $M_2 = 1.000 \cdot \dfrac{1}{1 - \dfrac{0,10}{1,10} \cdot 2} = 1.212,22$ perciò $M_1 < M_2$.

1.4 Regime finanziario dell'interesse composto.

Il regime finanziario dell'interesse composto (" *RFIC* ") è caratterizzato dal fatto che l'interesse si accumula sul capitale e forma nuovi interessi. Da un punto di vista finanziario si può mostrare che in tal caso il fattore di montante è dato da una funzione esponenziale:

$$r(t) = (1+i)^t \Rightarrow M(t) = C \cdot (1+i)^t.$$

Il fattore di sconto sarà perciò:

$$v(t) = (1+i)^{-t} = \frac{1}{(1+i)^t}.$$

Abbiamo inoltre:

$$i(t) = (1+i)^t - 1$$

$$d(t) = 1 - v(t) = 1 - \frac{1}{(1+i)^t} = \frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t}.$$

Esempi.

1) Calcolare il montante e l'interesse prodotto dall'investimento di un capitale $C = 1.000$ per tre anni e sei mesi al tasso $i = 7,50\%$.

Applicando le formule precedenti si ottiene:

$$M = 1.000 \cdot (1,075)^{3,5} = 1.288,04$$

$$I = M - C = 288,04.$$

2) Sconto presso un istituto bancario una cambiale scadente tra nove mesi il cui valore è 3.000. La banca mi applica un tasso $i = 13\%$. Calcolare il tasso di sconto, la somma anticipata e lo sconto.

Applichiamo le formule note:

$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{0,13}{1,13} = 0,1150 \rightarrow d = 11,5\%$$

$$C = M \cdot (1+i)^{-t} = 3.000 \cdot (1,13)^{-9/12} = 2.737,24$$

$$D = M - C = 262,76.$$

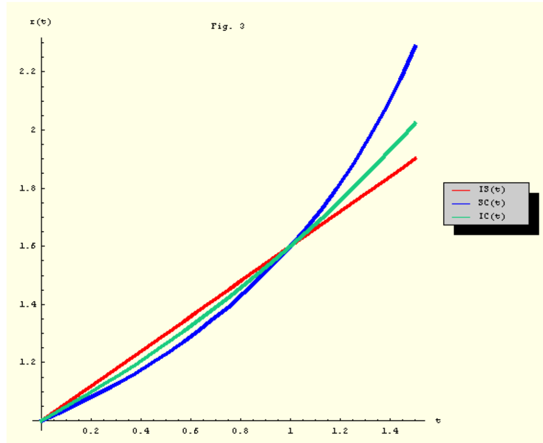
Confrontiamo ora il fattore di montante nei tre regimi finanziari visti.

Si ha:

$$0 < t < 1 \Rightarrow RFSC < RFIC < RFIS$$

$$t > 1 \Rightarrow RFIS < RFIC < RFSC.$$

ossia il montante prodotto nel *RFIC* è sempre compreso tra quello relativo agli altri due regimi finanziari; per $0 < t < 1$ prevale l'interesse semplice mentre per $t > 1$ prevale lo sconto commerciale (vedere figura 3).



1.5 Tassi equivalenti.

Diremo in generale che due tassi sono **equivalenti,** quando applicati ad uno stesso capitale per una stessa durata, forniscono lo stesso montante.

Poniamoci adesso nell'ambito del $RFIC$ e indichiamo con $i_{1/m}$ il tasso relativo a un $m-esimo$ di anno.

Vogliamo determinare il tasso annuo i equivalente al tasso $i_{1/m}$. Per definizione di tassi equivalenti avremo che l'investimento di un capitale unitario per un anno porta alla relazione:

$$\left(1+i_{1/m}\right)^m = (1+i)$$

dalla quale possiamo ricavare il legame cercato:

$$i = \left(1+i_{1/m}\right)^m - 1$$

$$i_{1/m} = \left(1+i\right)^{1/m} - 1.$$

Osserviamo che nel $RFIS$ si ha la relazione $i_{1/m} = i/m$.

Esempi.

1) Dato il tasso annuo $i = 20\%$, determinare il tasso semestrale $i_{1/2}$, il tasso quadrimestrale $i_{1/3}$, il tasso trimestrale $i_{1/4}$, il tasso mensile $i_{1/12}$ e il tasso giornaliero $i_{1/365}$ equivalenti.

Utilizzando la relazione sui tassi equivalenti (lavoreremo sempre nel $RFIC$ se non diversamente specificato) avremo:

$$i_{1/2} = (1{,}20)^{1/2} - 1 = 0{,}0954451$$

$$i_{1/3} = (1{,}20)^{1/3} - 1 = 0{,}06$$

$$i_{1/4} = (1{,}20)^{1/4} - 1 = 0{,}0466351$$

$$i_{1/12} = (1{,}20)^{1/12} - 1 = 0{,}015$$

$$i_{1/365} = (1{,}20)^{1/365} - 1 = 0{,}000496.$$

2) Dato il tasso trimestrale $i_{1/4} = 0{,}05$ calcolare il tasso annuale, semestrale e quadrimestrale equivalenti.

Dalle relazioni note ricaviamo:

$$i = (1+0{,}05)^4 - 1 = 0{,}215506$$

$$i_{1/2} = (1{,}215506)^{1/2} - 1 = 0{,}1025$$

$$i_{1/3} = (1{,}215506)^{1/3} - 1 = 0{,}067.$$

1.6 Scindibilità dei regimi finanziari.

Un regime finanziario è **scindibile** se il montante di un capitale investito dall'epoca 0 all'epoca t è pari a quello ottenuto investendo lo stesso capitale dall'epoca 0 a un'epoca intermedia s e poi dall'epoca s all'epoca t.
Questa definizione si può esprimere attraverso il fattore di montante nel modo seguente:

$$r(0,t) = r(0,s) \cdot r(s,t) \text{ con } 0 < s < t.$$

Possiamo esprimerla analogamente facendo ricorso al fattore di sconto:

$$v(0,t) = v(0,s) \cdot v(s,t) \text{ con } 0 < s < t.$$

Esempi.

1) Il $RFIC$ è scindibile. In effetti, essendo $r(h,k) = (1+i)^{k-h}$ si ha:

$$r(0,t) = r(0,s) \cdot r(s,t) \Leftrightarrow (1+i)^t = (1+i)^s \cdot (1+i)^{t-s}$$

per una semplice proprietà delle potenze.

2) Il $RFIS$ non è scindibile. In effetti, essendo $r(h,k) = 1 + i \cdot (k-h)$ si ha:

$$r(0,s) \cdot r(s,t) = \left[1 + i \cdot s\right] \cdot \left[1 + i \cdot (t-s)\right] = \left[1 + i \cdot (s + t - s) + i^2 \cdot s \cdot (t-s)\right] \cdot \neq r(0,t) = \left[1 + i \cdot t\right].$$

Vediamo un'applicazione numerica nel $RFIC$ con i dati seguenti: $C = 100$; $i = 10\%$; $s = 2$; $t = 3$. Calcoliamo il montante con e senza capitalizzazione intermedia:

$$M = 100 \cdot (1{,}10)^2 \cdot (1{,}10) = 133{,}1$$
$$M = 100 \cdot (1{,}10)^3 = 133{,}1.$$

Si ottiene come previsto lo stesso risultato.

Esercizi di riepilogo.

1) Calcolare I e M prodotti da un capitale $C = 1.000$, impiegati al tasso i annuo e per il periodo indicati (nel $RFIS$):

a) al $3{,}75\%$ per un anno;
avremo:

$$I(t) = C \cdot i \cdot t = 1.000 \cdot 0{,}0375 \cdot 1 = 37{,}5$$
$$M = I(t) + C = 37{,}5 + 1.000 = 1.037{,}5$$

b) al 7% per 15 mesi;

$$I(t) = C \cdot i \cdot t = 1.000 \cdot 0{,}07 \cdot \frac{15}{12} = 87{,}5$$
$$M = I(t) + C = 87{,}5 + 1.000 = 1.087{,}5$$

c) al $9{,}25\%$ per 120 giorni;

$$I(t) = C \cdot i \cdot t = 1.000 \cdot 0{,}0925 \cdot \frac{120}{360} = 30{,}8\bar{3}$$
$$M = I(t) + C = 30{,}8\bar{3} + 1.000 = 1.030{,}8\bar{3}.$$

2) Calcolare a quale tasso annuo d'interesse (nel $RFIS$):

a) un capitale di 1.250 produce un interesse $I = 84{,}375$ in un anno;
utilizziamo la nota relazione:

$$I(t) = C \cdot i \cdot t \Rightarrow i = \frac{I(t)}{C \cdot t} = \frac{84{,}375}{1.250 \cdot 1} = 0{,}0675 \to i = 6{,}75\%.$$

b) un capitale di 800 produce un montante di 900 in tre anni;
utilizziamo la nota relazione:

$$M(t) = C \cdot (1 + i \cdot t) \Rightarrow i = \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{M(t)}{C} - 1 \right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{900}{800} - 1 \right) = 0{,}041\bar{6}.$$

c) un capitale C generico raddoppia in due anni;
essendo $M(t) = 2C$, si ottiene:

$$i = \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{2C}{C} - 1 \right) = \frac{1}{2} \cdot (2 - 1) = 0{,}5 \rightarrow i = 50\%.$$

3) Calcolare in quanto tempo, al tasso d'interesse del $7{,}50\%$ annuo (nel $RFIS$)
a) un capitale di 3.500 produce un interesse di 350 ;
utilizziamo la relazione:

$$t = \frac{I(t)}{C \cdot i} = \frac{350}{3.500 \cdot 0{,}075} = 1{,}\bar{3} \text{ (un anno e } 4 \text{ mesi)}$$

b) un capitale di 2.500 produce un montante di 3.000;
utilizziamo la relazione:

$$t = \frac{1}{i} \cdot \left(\frac{M(t)}{C} - 1 \right) = \frac{1}{0{,}075} \cdot \left(\frac{3.000}{2.500} - 1 \right) = 2{,}\bar{6} \text{ (} 2 \text{ anni e } 8 \text{ mesi).}$$

4) Calcolare il capitale da investire oggi al $9{,}50\%$ annuo per avere (nel $RFIS$):
a) un montante pari a 1.000 tra 14 mesi;
utilizziamo la relazione:

$$C = \frac{M(t)}{1 + i \cdot t} = \frac{1.000}{1 + 0{,}095 \cdot \frac{14}{12}} = 900{,}225$$

b) un interesse pari a 100 tra 6 mesi;
utilizziamo la relazione:

$$C = \frac{I(t)}{i \cdot t} = \frac{100}{0{,}095 \cdot \frac{6}{12}} = 2.105{,}263.$$

5) Viene stipulato un prestito di 5.000 da restituire dopo 9 mesi con $i = 12\%$ nel $RFIS$. Calcolare il valore attuale dopo 6 mesi della somma dovuta usando il tasso d'interesse del 10% annuo.
Il montante è:

$$M(t) = C \cdot (1 + i \cdot t) = 5.000 \cdot \left(1 + 0{,}12 \cdot \frac{9}{12} \right) = 5.450.$$

Il valore attuale richiesto sarà allora (attualizziamo il montante precedente di tre mesi):

$$P = M(t) \cdot v(t) = M(t) \cdot \frac{1}{1 + i \cdot t} = \frac{5.450}{1 + 0{,}10 \cdot \frac{3}{12}} = 5.317{,}07.$$

6) Calcolare nel $RFSC$ sconto e valore attuale per un capitale a scadenza $K = 1.000$ con tasso annuo di sconto e intervallo di tempo indicati:
a) $d = 0{,}10$; $t = 1$;
abbiamo le relazioni:

$$D = K \cdot d \cdot t = 1.000 \cdot 0{,}10 \cdot 1 = 100$$
$$P = K - D = 1.000 - 100 = 900\,.$$

b) $d = 0{,}12$; $t = 8/12$ (otto mesi);
abbiamo le relazioni:

$$D = K \cdot d \cdot t = 1.000 \cdot 0{,}12 \cdot \frac{8}{12} = 80$$
$$P = K - D = 1.000 - 80 = 920.$$

7) Calcolare nel $RFSC$ il tasso annuo di sconto in base al quale:
a) 1.000 è il valore attuale di 1.300 disponibili tra otto mesi;
utilizziamo la relazione:

$$P = K \cdot v(t) = K \cdot (1 - d \cdot t) \Rightarrow d = \left(1 - \frac{P}{K}\right) \cdot \frac{1}{t}$$
$$d = \left(1 - \frac{1.000}{1.300}\right) \cdot \frac{1}{8/12} = 0{,}346\,.$$

b) 1.000 è lo sconto necessario per anticipare di un anno un capitale di 10.000;
utilizziamo la relazione:

$$D = K \cdot d \cdot t \Rightarrow d = \frac{D}{K \cdot t} = \frac{1.000}{10.000 \cdot 1} = 0{,}1$$
$$d = 10\%\,.$$

c) il valore attuale di un capitale C disponibile tra 18 mesi è la metà di C;
consideriamo la relazione del punto *a)*

$$d = \left(1 - \frac{P}{K}\right) \cdot \frac{1}{t} = \left(1 - \frac{C/2}{C}\right) \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 0{,}\bar{3}.$$

8) Una banca concede prestiti a breve termine al tasso annuo dell' 8% d'interesse semplice anticipato. Calcolare la somma che si riscuote in effetti contraendo un prestito di:
a) 8.000 a tre mesi.
Utilizziamo la relazione

$$P = K \cdot (1 - d \cdot t) = 8.000 \cdot \left(1 - 0{,}08 \cdot \frac{3}{12}\right) = 7.840.$$

b) 12.500 a 45 giorni.

$$P = K \cdot (1 - d \cdot t) = 12.500 \cdot \left(1 - 0{,}08 \cdot \frac{45}{360}\right) = 12.375.$$

9) Calcolare a quale tasso annuo d'interesse semplice posticipato corrisponde un interesse anticipato di 160 ad un capitale di 8.000 prestato per tre mesi.
Utilizziamo le note formule:

$$C = K - I = 8.000 - 160 = 7.840$$
$$i = \frac{I}{C \cdot t} = \frac{160}{7.840 \cdot \frac{3}{12}} = 0{,}0816 \rightarrow i = 8{,}16\%.$$

10) Calcolare i seguenti tassi equivalenti (nel $RFIC$).

- $i = 0{,}20 \rightarrow$ determinare il tasso mensile $i_{1/12}$

$$i_{1/12} = (1 + 0{,}20)^{1/12} - 1 = 0{,}015309$$

- $i = 0{,}15 \rightarrow$ determinare il tasso trimestrale $i_{1/4}$

$$i_{1/4} = (1+0,15)^{1/4} - 1 = 0,035558$$

- $i_{1/6} = 0,09 \rightarrow$ determinare il tasso annuo i

$$i = (1+0,09)^6 - 1 = 0,6771$$

11) Calcolare nel $RFIC$ il montante e l'interesse prodotti da ciascuno degli investimenti che seguono.
a) $C = 1.200$ al 13% annuo per tre anni e quattro mesi:
abbiamo $t = 3 + \frac{4}{12} = \frac{10}{3}$ perciò

$$M(t) = C \cdot (1+i)^t = 1.200 \cdot (1+0,13)^{10/3} = 1.803,47$$
$$I = M - C = 603,47$$

b) $C = 7.500$ al tasso istantaneo del $7,5\%$ per due anni e sei mesi:
abbiamo $i = e^{\delta} - 1 = e^{0,075} - 1 = 0,07788$ perciò

$$M(t) = C \cdot (1+i)^t = 7.500 \cdot (1+0,07788)^{2,5} = 9.046,727$$
$$I = M - C = 1.546,7269.$$

Possiamo calcolare il montante nel modo equivalente:

$$M(t) = C \cdot e^{\delta \cdot t} = 7.500 \cdot e^{0,075 \cdot 2,5} = 9.046,727$$

12) Calcolare il tempo necessario (nel $RFIC$) per generare un montante di 4.000 da un capitale di 2.500 impiegato al 5% semestrale.
Determiniamo il tasso annuo equivalente:

$$i = (1+0,05)^2 - 1 = 0,1025.$$

Dalla relazione

$$M = C \cdot (1+i)^t$$

ricaviamo

$$t = \frac{\log M / C}{\log(1+i)} = \frac{\log \frac{4.000}{2.500}}{\log 1,1025} = 4,817$$

13) Se il tasso d'interesse vigente è del $9,50\%$ annuo (nel $RFIC$) conviene:
a) pagare 3.100 oggi oppure 300 oggi e 3.000 tra un anno?
Confrontiamo i valori attuali delle due alternative.

$$P_1 = 3.100$$
$$P_2 = 300 + 3.000 \cdot (1,095)^{-1} = 3.039,726.$$

Conviene la seconda alternativa (v.a. minore).

b) pagare 2.500 oggi oppure 1.500 tra sei mesi e 1.500 tra un anno?
Confrontiamo i valori attuali delle due alternative.

$$P_1 = 2.500$$
$$P_2 = 1.500 \cdot (1,095)^{-1/2} + 1.500 \cdot (1,095)^{-1} = 2.803,32.$$

Conviene la prima alternativa (v.a. minore).

14) Investite 2.500 euro per due anni (nel $RFIC$), al tasso del 5% semestrale. Quale montante ricavate al termine se ogni disponibilità ulteriore vi rende il 3% quadrimestrale?
Conosciamo $i_{1/2} = 0,05$.
Le quattro quote interessi varranno:

$$I = C \cdot i_{1/2} = 2.500 \cdot 0,05 = 125$$

Queste rate sono reinvestite al tasso quadrimestrale fornito. Determiniamo il tasso annuo equivalente:

$$i = (1+0,03)^3 - 1 = 0,092727$$

Avremo pertanto:

$$I_{tot} = 125 \cdot (1,092727)^{1,5} + 125 \cdot (1,092727)^1 + 125 \cdot (1,092727)^{0,5} + 125 = 535,04$$

Il montante sarà quindi:

$$M = C + I_{tot} = 3.035,04.$$

15) Un operatore ottiene a prestito da una banca una somma e, inoltre, dopo cinque anni una somma tripla della precedente. Dopo altri cinque anni, restituisce a saldo del dovuto 1.500 euro. Calcolare quali somme sono state prestate dalla banca, se $i = 12\%$ (nel $RFIC$).
Abbiamo lo scadenzario seguente:

$$(C;3C;1.500)/(0;5;10)$$

perciò dovremo risolvere l'equazione seguente nell'incognita C:

$$C \cdot (1+i)^{10} + 3C \cdot (1+i)^5 = 1.500$$

da cui:

$$C = \frac{1.500}{(1+i)^{10} + 3 \cdot (1+i)^5} = 178,723$$

$$3C = 536,1692.$$

2 Le rendite.

2.1 Rendite intere.

Osserviamo che quando poniamo il tempo $t = 1$ (nel $RFIC$) si ha:

$$r(1) = r = 1 + i$$
$$v(1) = v = (1+i)^{-1} = \frac{1}{1+i}$$
$$i(1) = i$$
$$d(1) = d$$

mentre se consideriamo un'epoca generica t avremo:

$$v(t) = (1+i)^{-t} = v^t$$
$$r(t) = (1+i)^t = r^t.$$

Definiamo adesso una **rendita** come una successione di pagamenti scadenzati nel tempo. Ogni pagamento prende il nome di **rata** della rendita. Indicheremo con R_1 la rata al tempo t_1 ed in maniera generica R_n la rata al tempo t_n.

Come caso particolare possiamo considerare una rendita con rate costanti:

$$R_1 = R_2 = \cdots = R_h = \cdots = R_n = R$$

e periodiche:

$$t_h - t_{h-1} = 1 \qquad \forall h$$

Nelle prossime formule utilizzeremo sempre una rata costante unitaria $R = 1$.

Consideriamo una **rendita posticipata** (ossia ogni rata è posta al termine del periodo a cui si riferisce) con $n = 4$. Lo scadenzario di questa rendita è

$$(1;1;1;1)/(1;2;3;4)$$

mentre il valore attuale si ottiene attualizzando all'epoca zero tutte le sue rate, perciò:

$$VA = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^4} = v + v^2 + v^3 + v^4$$

La rendita appena vista si chiama **rendita immediata unitaria posticipata.** Riepiloghiamone le caratteristiche:

- *immediata:* il primo pagamento si effettua al primo anno (altrimenti si chiama *differita*);
- *unitaria*: $R = 1$;
- *posticipata*: ossia ogni rata è posta al termine del periodo a cui si riferisce (altrimenti si chiama *anticipata*).

Nel caso in cui il numero delle rate è pari a n, il suo valore attuale sarà:

$$VA = v + v^2 + \cdots + v^n$$

Somma di n termini in progressione geometrica, di primo termine v e ragione v.

Considerato che la somma di n termini in progressione geometrica con primo termine uguale ad a e ragione (rapporto tra due termini consecutivi) pari a q è data da:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = a\frac{1-q^n}{1-q}$$

La loro somma sarà

$$v+v^2+\cdots+v^n=v\frac{1-v^n}{1-v}=\left(\frac{1}{1+i}\right)\frac{1-v^n}{\frac{1-1+i}{1+i}}=\left(\frac{1}{1+i}\right)\frac{1-v^n}{\frac{i}{1+i}}=\frac{1-v^n}{i}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=a_{\overline{n|}\,i}$$

Il simbolo $a_{\overline{n|}\,i}$ si legge "a figurato n al tasso i".

Il montante della rendita si ottiene capitalizzando tutte le rate all'epoca finale (oppure capitalizzando direttamente il valore attuale della rendita fino all'epoca finale). In simboli avremo:

$$M=r^{n-1}+r^{n-2}+\cdots+1=\frac{(1+i)^n-1}{i}=s_{\overline{n|}\,i}$$

dove, in maniera analoga, Il simbolo $s_{\overline{n|}\,i}$ si legge "s figurato n al tasso i".

Si avrà ovviamente:

$$s_{\overline{n|}\,i}=a_{\overline{n|}\,i}\cdot(1+i)^n.$$

Esempio.
Consideriamo una rendita unitaria immediata posticipata con $n=4$ e $i=10\%$. Calcoliamone il valore attuale e il montante. Lo scadenzario di questa rendita è: $(1;1;1;1)/(1;2;3;4)$.
Si ha:

$$a_{\overline{4|}\,0,10}=\frac{1}{1,10}+\frac{1}{(1,10)^2}+\frac{1}{(1,10)^3}+\frac{1}{(1,10)^4}=\frac{1-(1,10)^{-4}}{0,10}=3,17$$

$$s_{\overline{4|}\,0,10}=(1,10)^3+(1,10)^2+1,10+1=4,64=\frac{(1,10)^4-1}{0,10}=a_{\overline{4|}\,0,10}\cdot(1,10)^4.$$

Nel caso di una rendita immediata unitaria **anticipata**, la prima rata è pagata all'epoca zero, mentre l'ultima rata è pagata all'epoca $n-1$.
Il valore attuale e il montante sono determinati nel modo seguente:

$$\ddot{a}_{\overline{n|}\,i}=1+v+v^2+v^3+\cdots+v^{n-1}=\frac{1-v^n}{d}=a_{\overline{n|}\,i}\cdot(1+i)$$

$$\ddot{s}_{\overline{n|}\,i}=\frac{(1+i)^n-1}{d}$$

Nel caso di una rendita unitaria posticipata **differita**, c'è un periodo da 0 a t di differimento, ossia la prima rata è pagata all'epoca t, mentre l'ultima è pagata all'epoca $t+n.$ Per calcolare il valore attuale di una tale rendita, dovremo tener conto del periodo di differimento. In formule avremo:

$$_{t|}a_{\overline{n|}\,i}=v^{t+1}+v^{t+2}+\cdots+v^{t+n}=v^t\cdot\left(v+v^2+\cdots+v^n\right)=v^t\cdot a_{\overline{n|}\,i}.$$

Per calcolare il montante di tale rendita possiamo utilizzare semplicemente $s_{\overline{n|}\,i}$, in quanto il periodo di differimento non incide sul calcolo del montante;
In alternativa possiamo ricavarlo dal valore attuale, comunque trascurando il differimento in quanto:

$$_{t|}s_{\overline{n|}\,i}=(1+i)^{t+n}\cdot{}_{t|}a_{\overline{n|}\,i}=(1+i)^{t+n}\cdot v^t\cdot a_{\overline{n|}\,i}=(1+i)^n\cdot a_{\overline{n|}\,i}.$$

Osserviamo che valore attuale e montante di tutte le tipologie di rendite sono riconducibili a un'espressione contenente $a_{\overline{n|}\,i}$.

Una rendita **perpetua** immediata posticipata possiede invece infinite rate. Il valore attuale si ottiene con un passaggio al limite:

$$a_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{i}$$

tenendo conto che *i>0* avremo

$$\lim_{n\to\infty}(1+i)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+i)^n} = 0$$

2.2 Rendite non unitarie.

Dopo aver analizzato le rendite unitarie, possiamo passare alle rendite la cui rata costante è pari a R.
Il valore attuale e il montante di una rendita posticipata con rate R costanti valgono:

$$VA = R\cdot a_{\overline{n}|i}$$
$$M = R\cdot s_{\overline{n}|i}.$$

Si procede in maniera analoga per tutte le altre tipologie di rendite non unitarie.
In generale, le rendite sono caratterizzate da quattro grandezze: VA (oppure equivalentemente M), la rata R, la durata n e il tasso i. Note tre di queste grandezze, si può sempre determinare la quarta.

2.3 Rendite frazionate.

Una rendita è **frazionata** quando la rata non è pagata al termine dell'anno o all'inizio di esso, ma è frazionata in $m-esimi$ di anno, ovvero i pagamenti saranno rate di periodo diverso dall'anno, nella pratica prevale la cadenzatura mensile o trimestrale, pagate alle epoche $\frac{1}{m},\frac{2}{m},\frac{3}{m},\cdots,\frac{(n\bullet m)-1}{m},\frac{n\bullet m}{m}$.
Per risolvere questo tipo di problemi occorre riportare tutti i parametri (rata, numero di periodi e tasso) alla frazione di anno indicata e poi proseguire come per le rendite annuali.
Esempio.
Se prendiamo $n=3$ e $m=2$ abbiamo una rendita triennale frazionata in semestri

Il valore attuale della rendita si ottiene sempre attualizzando tutte le rate. Se la rata periodica è R_m avremo:

$$a_{\overline{n}|i}^{(m)} = R_m\cdot v^{1/m} + R_m\cdot v^{2/m} + \cdots + R_m\cdot v^n = R_m\cdot\left(v^{1/m}+v^{2/m}+\cdots+v^n\right) = R_m\cdot a_{\overline{n\cdot m}|i_{1/m}}$$

Abbiamo, in effetti, una rendita con $n\cdot m$ rate pari a R_m ogni $m-esimo$ di anno.
Avremo pertanto il numero di rate e il loro ammontare riferito a un $m-esimo$ di anno. Se, coerentemente, appichiamo il tasso equivalente per lo stesso periodo varrà quanto già considerato per le rendite annuali, con rata uguale a R_m, numero di rate $n\cdot m$ e tasso $i_{1/m}$

Esempi.
1) Calcolare VA se $R=350$, $n=5$ e $i=12\%$.
Applichiamo la formula nota:

$$VA = R\cdot a_{\overline{n}|i} = 350\cdot a_{\overline{5}|0,12} = 350\cdot\frac{1-(1{,}12)^{-5}}{0{,}12} = 1.262$$

2) Come nel problema precedente se le rate sono anticipate.
Applichiamo la formula nota:

$$VA = R\cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i} = 350\cdot\ddot{a}_{\overline{5}|0,12} = 350\cdot\frac{1-v^n}{d} = 350\cdot\frac{1-(1{,}12)^{-5}}{\frac{0{,}12}{1{,}12}} = 1.413 = 1.262\cdot 1{,}12.$$

3) Siano dati $R = 350$, $n = 5$ e $i = 12\%$. Calcolare il montante della rendita.
Applichiamo la formula nota:

$$M = R \cdot s_{\overline{n}|\,i} = 350 \cdot s_{\overline{5}|\,0,12} = 350 \cdot \frac{(1,12)^5 - 1}{0,12} = 2.223 = 350 \cdot a_{\overline{5}|\,0,12} \cdot (1,12)^5.$$

4) Siano dati $R = 350$, $n = 5$ e $i = 12\%$. Calcolare il montante della rendita differita con $t = 3$.
Lo scadenzario di questa rendita è:

$$(0;0;0;350;350;350;350;350)\,/\,(1;2;3;4;5;6;7;8).$$

Applichiamo la formula nota:

$$VA = R \cdot v^t \cdot a_{\overline{n}|\,i} = 350 \cdot 1,12^{-3} \cdot a_{\overline{5}|\,0,12} = 898.$$

5) Siano dati $VA = 500$, $n = 4$ e $i = 12\%$. Calcolare la rata della rendita posticipata.
Applichiamo la formula seguente:

$$R = \frac{VA}{a_{\overline{n}|\,i}} = \frac{500}{a_{\overline{4}|\,0,12}} = \frac{500}{\dfrac{1-(1,12)^{-4}}{0,12}} = 165.$$

6) Supponiamo che l'incognita sia la durata. Ricaviamo una relazione generale che consente di determinare n.
Partiamo dalla relazione generale:

$$VA = R \cdot a_{\overline{n}|\,i} = R \cdot \frac{1 - v^n}{i}$$

perciò

$$\frac{VA}{R} \cdot i = 1 - v^n \Rightarrow v^n = 1 - \frac{VA}{R} \cdot i.$$

Applichiamo il logaritmo a entrambi i membri:

$$\log\left(v^n\right) = n \cdot \log v = \log\left(1 - \frac{VA}{R} \cdot i\right)$$

e infine:

$$n = \frac{\log\left(1 - \frac{VA}{R} \cdot i\right)}{\log v} = -\frac{\log\left(1 - \frac{VA}{R} \cdot i\right)}{\log(1+i)}.$$

Vediamo un'applicazione numerica con $VA = 1.262$, $i = 12\%$ e $R = 350$.
Si ha:

$$n = -\frac{\log\left(1 - \frac{1.262}{350} \cdot 0,12\right)}{\log(1,12)} ;\ 5.$$

7) Siano dati $VA = 1.000$, $n = 5$ e $R = 350$. Calcolare il tasso i.
Dalla relazione generale

$$VA = R \cdot a_{\overline{n}|\,i} = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

si deduce:

$$i = \frac{1-(1+i)^{-n}}{\frac{VA}{R}}.$$

Da questa relazione vediamo che non è possibile (tranne che in casi particolari) esplicitare i rispetto alle altre variabili. Dobbiamo utilizzare dei metodi di approssimazione numerica per stimare il valore di i.
Illustriamo il metodo dell'**iterazione.** Opero come segue: scelgo un tasso arbitrario, ad esempio il 27%, e lo inserisco al secondo membro dell'ultima relazione. Il valore ottenuto lo chiamo i_1:

$$i_1 = \frac{1-(1,27)^{-5}}{2,857} = 0,2450$$

Adesso poniamo i_1 al secondo membro e chiamo il risultato i_2:

$$i_2 = \frac{1-(1,2450)^{-5}}{2,857} = 0,2397.$$

Ripetiamo questa procedura:

$$i_3 = \frac{1-(1,2397)^{-5}}{2,857} = 0,2305$$
$$i_4 = 0,2219$$
$$i_5 = 0,2213$$
$$\vdots$$

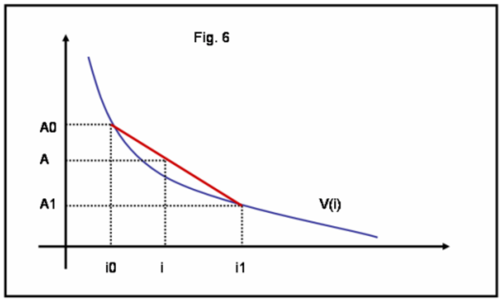
Dopo un certo numero di tappe, osservo che il tasso ottenuto si stabilizza attorno ad un valore particolare che assumeremo come la nostra soluzione (i tassi iterati i_n convergono asintoticamente verso il tasso reale). Il tasso di partenza scelto ad arbitrio potrà essere sia maggiore sia minore del tasso reale.
Prendiamo gli stessi dati e illustriamo ora il metodo dell'**interpolazione lineare.**
Il tasso esatto i dovrà soddisfare la relazione:

$$1.000 = 350 \cdot a_{\overline{5}|i}$$

Diamo alcuni valori arbitrari a i e determiniamo il corrispondente valore che assume il secondo membro. Abbiamo la tabella seguente:

i	A
$12,50\%$	$1.246,2$
$15,00\%$	$1.173,3$
$17,50\%$	$1.107,0$
$i_0 = 20,00\%$	$A_0 = 1.046,7$
$i_1 = 22,50\%$	$A_1 = 991,7$

Siccome il valore attuale di una rendita è una funzione decrescente del tasso, il tasso reale dovrà essere compreso tra il 20% e il $22,50\%$ (per questi tassi il valore attuale della rendita è rispettivamente maggiore e minore del valore esatto 1.000.
Il metodo dell'interpolazione lineare ipotizza che il tasso reale si trovi, con buona approssimazione, sul segmento che congiunge i punti di coordinate $(i_0; A_0)$ e $(i_1; A_1)$ in corrispondenza dell'ordinata A. Ovviamente l'approssimazione sarà più precisa se le due soglie sono molto vicine al tasso reale (vedere figura 6).



Ricordando l'equazione di una retta passante per due punti assegnati, il tasso approssimato $\tilde{\imath}$ dovrà soddisfare la relazione:

$$\tilde{\imath} = i_0 + \frac{i_1 - i_0}{A_1 - A_0} \cdot (A - A_0).$$

Nel nostro caso avremo:

$$\tilde{\imath} = 0{,}20 + \frac{0{,}2250 - 0{,}20}{991{,}7 - 1.046{,}7} \cdot (1.000 - 1.046{,}7) = 0{,}2212 \,.$$

8) Siano dati $VA = 819{,}4$, $n = 11$ e $R = 135$. Calcolare il tasso i.
L'equazione che dovremo risolvere è:

$$819{,}4 = 135 \cdot a_{\overline{11}|i}.$$

Procediamo con il metodo dell'interpolazione lineare. Diamo dei valori arbitrari a i che visualizziamo nella tabella seguente:

i	A
8%	963,8
9%	918,7
10%	876,8
$i_0 = 11\%$	$A_0 = 837{,}9$
$i_1 = 12\%$	$A_1 = 801{,}6$
13%	767,7

Vediamo subito che le due soglie più adatte sono $i_0 = 11\%$ e $i_1 = 12\%$. Applichiamo perciò la formula dell'interpolazione con questi valori:

$$\tilde{\imath} = 0{,}11 + \frac{0{,}12 - 0{,}11}{801{,}6 - 837{,}9} \cdot (819{,}4 - 837{,}9) = 0{,}11509$$

Esercizi di riepilogo.
1) Calcolare quale versamento semestrale (posticipato) per cinque anni porta ad accumulare un capitale di 8.500 euro, se il tasso d'interesse è il $7{,}50\%$ annuo (nel $RFIC$).
Abbiamo perciò una rendita frazionata posticipata immediata il cui montante è noto.
Sia la formula del montante:

$$M = R \cdot s_{\overline{n \cdot m|}\, i_{1/m}} = R \cdot \frac{(1+i_{1/m})^{n \cdot m} - 1}{i_{1/m}}$$

con

$$i_{1/2} = \sqrt{1+0,075} - 1 = 0,03682$$

perciò sostituendo i dati:

$$8.500 = R \cdot \frac{(1+0,03682)^{5 \cdot 2} - 1}{0,03682} = R \cdot 11,8306$$

$$\Rightarrow R = \frac{8.500}{11,8306} = 718,4709$$

2) A fronte di un investimento si può contare su cinque entrate costanti posticipate d'importo pari a 50.000 euro, la prima delle quali fra tre anni. Calcolare il valore dell'investimento utilizzando un tasso del 15% annuo (nel $RFIC$).
Lo scadenzario dell'investimento è:

$$(0;0;R,R,R,R,R)/(1;2;3;4;5;6;7)$$

che possiamo trattare come rendita posticipata differita con differimento $t = 2$.
Il valore di tale rendita sarà perciò:

$$VA = R \cdot {}_{t|}a_{\overline{n|}\, i} = 50.000 \cdot {}_{2|}a_{\overline{5|}\, 0,15} = 50.000 \cdot (1+0,15)^{-2} \cdot \frac{1-(1+0,15)^{-5}}{0,15} = 126.734,7351.$$

3) Una rendita ha durata quadriennale e rate costanti pari a 100; utilizzando il tasso del 5% calcolare l'importo della rata semestrale di una rendita frazionata in semestri di pari durata (quattro anni) finanziariamente equivalente alla precedente.
Determiniamo il valore attuale della prima rendita:

$$VA_1 = R \cdot a_{\overline{4|}\, 0,05} = 100 \cdot \frac{1-(1+0,05)^{-4}}{0,05} = 354,595$$

Per quanto riguarda la seconda rendita, avremo:

$$VA_2 = R \cdot a_{\overline{n \cdot m|}\, i_{1/m}} = R \cdot a_{\overline{8|}\, i_{1/2}}$$

Ricaviamo il tasso semestrale equivalente:

$$i_{1/2} = \sqrt{1+0,05} - 1 = 0,024695$$

perciò:

$$VA_2 = R \cdot \frac{1-(1+0,024695)^{-8}}{0,024695} = R \cdot 7,179468.$$

Infine dalla relazione $VA_1 = VA_2$ avremo:

$$R = \frac{354,595}{7,179468} = 49,36271.$$

4) Una partita di merce viene pagata in otto rate mensili di cui:
- le prime due pari al 20% del prezzo per contanti, fissato in $1.000.000$, corrisposte in via anticipata immediata;

- le rimanenti costanti e versate regolarmente dal termine del terzo mese.
Calcolare le rate in questione se l'operazione viene effettuata al tasso del 15% annuo (nel $RFIC$).
Lo scadenzario sarà:

$$(200.000; 200.000; 0; R; R; R; R; R; R) / \left(0; \frac{1}{12}; \frac{2}{12}; \frac{3}{12}; \frac{4}{12}; \frac{5}{12}; \frac{6}{12}; \frac{7}{12}; \frac{8}{12}\right).$$

Questa rendita è costituita da una rendita anticipata e da una rendita differita con differimento pari a due periodi.
Determiniamo il tasso mensile equivalente:

$$i_{1/12} = (1{,}15)^{1/12} - 1 = 0{,}011715$$

Imponiamo quindi che il valore attuale di questa rendita sia pari a $1.000.000$:

$$200.000 \cdot \ddot{a}_{\overline{2}|i_{1/12}} + R \cdot {}_{2|}a_{\overline{6}|i_{1/12}} = 1.000.000$$

Otteniamo perciò un'equazione nell'incognita R.
Esplicitiamo x:

$$R = \frac{1.000.000 - 200.000 \cdot \ddot{a}_{\overline{2}|i_{1/12}}}{{}_{2|}a_{\overline{6}|i_{1/12}}} = \frac{1.000.000 - 200.000 \cdot 1{,}9884}{5{,}62884} = 107.006$$

3 Piani di ammortamento.

3.1 Considerazioni generali.

Un **piano di ammortamento** consiste nella restituzione di un importo preso a prestito mediante il versamento d'importi minori via via nel tempo.
Vediamo quali sono gli elementi che caratterizzano i piani d'ammortamento.
Indichiamo con D_0 o S l'importo prestato e con $C_1, \ldots, C_n$ le **quote capitale** versate (dove C_h rappresenta la quota capitale versata al generico periodo h, mentre n rappresenta l'ultimo periodo, ossia la durata del piano d'ammortamento stesso). Vale la relazione:

$$\sum_{h=1}^{n} C_h = D_0$$

ossia la somma di tutte le quote capitale deve ridare l'importo prestato.
Ovviamente, il debitore non dovrà restituire solamente l'importo prestato ma anche gli interessi maturati a ogni periodo. Un'altra caratteristica dei piani d'ammortamento sarà perciò il tasso di remunerazione del prestito i (che ipotizzeremo costante per tutta la durata del piano). Le quote interessi, che indicheremo con I_h (con $h = 1, \ldots, n$), rappresentano un costo per il debitore ma un guadagno per il creditore. Saranno calcolate a ogni periodo sulla base della parte di debito non ancora rimborsata:

$$\begin{gathered} I_1 = i \cdot S \\ I_2 = i \cdot \left(S - C_1\right) \\ I_3 = i \cdot \left(S - C_1 - C_2\right) \\ \vdots \\ I_n = i \cdot \left(C_n\right) \end{gathered}$$

Il **debito residuo** D_h all'epoca h rappresenta l'importo da restituire all'epoca h (con $h = 1, \ldots, n$). Possiamo calcolarlo in due maniere:

- visione prospettiva (come somma delle quote capitale ancora da pagare):

$$D_h = \sum_{j=h+1}^{n} C_j$$

- visione retrospettiva (come somma delle quote capitale già pagate, dedotte dal debito iniziale):

$$D_h = S - \sum_{j=1}^{h} C_j$$

Deve valere inoltre l'ovvia relazione $D_n = 0$.
Possiamo adesso definire nuovamente le quote interesse attraverso il debito residuo nel modo seguente:

$$I_h = D_{h-1} \cdot i$$

A ogni periodo il debitore dovrà versare una quota capitale e una quota interesse: la somma algebrica di queste due quote prende il nome di **rata**. Avremo perciò:

$$R_h = C_h + I_h \quad h = 1, \ldots, n$$

Le rate dovranno soddisfare la seguente relazione (ci poniamo sempre nel $RFIC$):

$$\sum_{h=1}^{n} R_h \cdot (1+i)^{-h} = D_0$$

ossia la somma dei valori attuali delle rate deve uguagliare l'importo prestato (l'importo prestato sarà quindi il valore attuale di una rendita avente per rate le rate del piano d'ammortamento).
Rappresenteremo un piano d'ammortamento sotto forma di una tabella che avrà per colonne rispettivamente l'epoca, la quota capitale, la quota interesse, la rata e il debito residuo.
Esempio.
Consideriamo il seguente piano d'ammortamento (rimborso graduale) con $S = 1.000$, $n = 5$, $i = 10\%$.

h	$\mathbf{C}_h$	$\mathbf{I}_h$	$\mathbf{R}_h$	$\mathbf{D}_h$
0	–	–	–	1.000
1	300	100	400	700
2	100	70	170	600
3	200	60	260	400
4	100	40	140	300
5	300	30	330	0

Come possiamo osservare, tutte le relazioni elencate prima sono soddisfatte. Ad esempio:

$$\frac{400}{1{,}10} + \frac{170}{(1{,}10)^2} + \frac{260}{(1{,}10)^3} + \frac{140}{(1{,}10)^4} + \frac{330}{(1{,}10)^5} = 1.000 .$$

Osserviamo che il debito residuo può essere determinato anche attraverso le rate.

- Visione prospettiva:

$$D_h = R_{h+1} \cdot v + \cdots + R_n \cdot v^{n-h} = \sum_{j=h+1}^{n} R_j \cdot v^{j-h}$$

- Visione retrospettiva:

$$D_h = S \cdot (1+i)^h - R_1 \cdot (1+i)^{h-1} - R_2 \cdot (1+i)^{h-2} - \cdots - R_h = S \cdot (1+i)^h - \sum_{j=1}^{h} R_j \cdot (1+i)^{h-j}$$

Nel caso dell'esempio precedente avremo:

$$D_2 = C_3 + C_4 + C_5 = 200 + 100 + 300 = 600$$
$$D_2 = \frac{R_3}{1+i} + \frac{R_4}{(1+i)^2} + \frac{R_5}{(1+i)^3} = 600$$

Utilizzando la valutazione retrospettiva avremo lo stesso risultato:

$$D_2 = S - C_1 - C_2 = 1.000 - 300 - 100 = 600$$
$$D_2 = S \cdot (1+i)^2 - R_1 \cdot (1+i) - R_2 = 1.000 \cdot (1{,}10)^2 - 400 \cdot 1{,}10 - 170 = 600$$

3.2 Ammortamento italiano.

L'ammortamento **italiano** è caratterizzato dal fatto che tutte le quote capitale sono costanti, ossia

$$C_1 = C_2 = \cdots = C_n = C$$

perciò:

$$n \cdot C = D_0 \Rightarrow C = \frac{D_0}{n}$$

Gli altri elementi del piano d'ammortamento assumono una forma semplificata. Ad esempio, per quanto riguarda il debito residuo:

- visione prospettiva:

$$D_h = \frac{D_0}{n} \cdot (n-h)$$

- visione retrospettiva:

$$D_h = D_0 - \frac{D_0}{n} \cdot h$$

Per quanto riguarda le quote interessi:

$$I_h = D_{h-1} \cdot i = \frac{D_0}{n} \cdot (n-h+1) \cdot i$$

oppure equivalentemente:

$$I_h = \left[D_0 - \frac{D_0}{n} \cdot (h-1) \right] \cdot i$$

Infine le rate si esprimono nel modo seguente:

$$R_h = C_h + I_h = \frac{D_0}{n} + \frac{D_0}{n} \cdot (n-h+1) \cdot i$$

Esercizi.

1) Stendere il piano di un ammortamento italiano con $D_0 = 1.000$, $n = 5$ e $i = 10\%$.

Avremo $C = \frac{1.000}{5} = 200$, mentre il piano completo è:

h	**C**$_h$	**I**$_h$	**R**$_h$	**D**$_h$
0	–	–	–	1.000
1	200	100	300	800
2	200	80	280	600
3	200	60	260	400
4	200	40	240	200

5	200	20	220	0

2) Stendere il piano di un ammortamento italiano con $D_0 = 400.000$, $n = 8$ e $i = 6,5\%$. Determinare quindi il debito residuo all'epoca 5.

Avremo $C = \frac{400.000}{8} = 50.000$ mentre, il piano completo è:

h	**C**$_h$	**I**$_h$	**R**$_h$	**D**$_h$
0	–	–	–	400.000
1	50.000	26.000	76.000	350.000
2	50.000	22.750	72.750	300.000
3	50.000	19.500	69.500	250.000
4	50.000	16.250	66.250	200.000
5	50.000	13.000	63.000	150.000
6	50.000	9.750	59.750	100.000
7	50.000	6.500	56.500	50.000
8	50.000	3.250	53.250	0

Il debito residuo $D_5 = 150.000$ può essere ottenuto come:

$$D_5 = C_6 + C_7 + C_8 = 50.000 + 50.000 + 50.000 = 150.000 = \frac{400.000}{8} \cdot (8 - 5) = \frac{D_0}{n} \cdot (n - h)$$

oppure tolgo le quote capitale già pagate:

$$D_5 = D_0 - C_1 - C_2 - C_3 - C_4 - C_5 = D_0 - \frac{D_0}{n} \cdot h = 400.000 - 50.000 \cdot 5 = 150.000.$$

Analogamente utilizzando la somma attualizzata delle rate rimanenti:

$$D_5 = \frac{R_6}{1+i} + \frac{R_7}{(1+i)^2} + \frac{R_8}{(1+i)^3} = \frac{59.750}{1,065} + \frac{56.500}{1,065^2} + \frac{53.250}{1,065^3} = 150.000.$$

3.3 Ammortamento a rimborso unico.

L'ammortamento a **rimborso unico** prevede che non si rimborsa nulla fino all'epoca n. Le quote capitale valgono perciò:

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_{n-1} = 0$$
$$C_n = D_0$$

Il valore del debito residuo sarà quindi sempre uguale al debito iniziale, esclusa l'ultima rata:

$$D_1 = D_2 = \ldots = D_{n-1} = D_0$$
$$D_n = 0$$

e delle quote interessi:

$$I_1 = I_2 = \ldots = I_n = S \cdot i$$

Infine le rate valgono:

$$R_1 = R_2 = \ldots = R_{n-1} = S \cdot i$$
$$R_n = S + S \cdot i$$

Esercizi.
1) Stendere il piano di un ammortamento a rimborso unico con $D_0 = 1.000$, $n = 5$ e $i = 10\%$.
Utilizzando le relazioni precedenti si ha:

h	$\mathbf{C}_h$	$\mathbf{I}_h$	$\mathbf{R}_h$	$\mathbf{D}_h$
0	–	–	–	1.000
1	0	100	100	1.000
2	0	100	100	1.000
3	0	100	100	1.000
4	0	100	100	1.000
5	1.000	100	1.100	0

2) Stendere il piano di un ammortamento a rimborso unico con $D_0 = 100$, $n = 4$ e $i = 5{,}0625\%$ e con rate semestrali.
Le quote capitale valgono (indichiamo i tempi in semestri):

$$I_h = D_0 \cdot i_{1/2} = 2{,}5$$

dove

$$i_{1/2} = \sqrt{1+i} - 1 = 0{,}025$$

Abbiamo perciò:

h	$\mathbf{C}_h$	$\mathbf{I}_h$	$\mathbf{R}_h$	$\mathbf{D}_h$
0	–	–	–	100
1 / 2	0	2,5	2,5	100
1	0	2,5	2,5	100
3 / 2	0	2,5	2,5	100
2	0	2,5	2,5	100
5 / 2	0	2,5	2,5	100
3	0	2,5	2,5	100
7 / 2	0	2,5	2,5	100
4	100	2,5	102,5	0

3.4 Ammortamento francese.

L'ammortamento **francese** prevede delle rate uguali:

$$R_1 = R_2 = \cdots = R_n = R$$

Tenendo conto della proprietà generale riguardante le rate di un piano d'ammortamento (ossia la somma dei valori attuali delle rate uguaglia l'importo del debito), avremo:

$$D_0 = \sum_{h=1}^{n} R_h \cdot (1+i)^{-h} = \sum_{h=1}^{n} R \cdot (1+i)^{-h} = R \cdot \sum_{h=1}^{n} (1+i)^{-h} = R \cdot a_{\overline{n|}\, i}$$

dalla quale potremo ricavare il valore della rata costante:

$$R = \frac{D_0}{a_{\overline{n}|i}}$$

Per quanto riguarda il debito residuo, avremo:

$$D_h = R \cdot (1+i)^{-1} + R \cdot (1+i)^{-2} + \cdots + R \cdot (1+i)^{-(n-h)} = R \cdot a_{\overline{n-h}|i}$$

Possiamo perciò dedurre il valore delle quote interessi:

$$I_h = D_{h-1} \cdot i = R \cdot a_{\overline{n-h+1}|i} \cdot i$$

Determiniamo ora il valore delle quote capitale:

$$C_h = R_h - I_h = R - I_h = R - R \cdot a_{\overline{n-h+1}|i} \cdot i = R \cdot \left[1 - \left(1 - (1+i)^{-n+h-1}\right)\right] = R \cdot v^{n-h+1}$$

ossia:

$$\begin{gathered} C_1 = R \cdot v^n \\ C_2 = R \cdot v^{n-1} \\ C_3 = R \cdot v^{n-2} \\ \vdots \\ C_n = R \cdot v \end{gathered}$$

Le quote capitale variano quindi in progressione geometrica con primo termine pari a $R \cdot v^n$ e ragione $1+i = v^{-1}$.

Esercizio.
1) Stendere il piano di un ammortamento francese con $D_0 = 1.000$, $n = 5$ e $i = 10\%$.
Determiniamo la rata costante:

$$R = \frac{D_0}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{1.000}{a_{\overline{5}|0,10}} = 263,8$$

Per quanto riguarda le quote capitale:

$$\begin{gathered} C_1 = R - I_1 = R - D_0 \cdot i = 263,8 - 100 = 163,8 \\ C_2 = 163,8 \cdot 1,10 = 180,18 \\ C_3 = 180,18 \cdot 1,10 = 198,20 \\ C_4 = 198,20 \cdot 1,10 = 218,02 \\ C_5 = 218,02 \cdot 1,10 = 239,82 \end{gathered}$$

Si verifica ovviamente che $\sum_{h=1}^{5} C_h = 1.000$.
Il piano completo è:

h	$\mathbf{C}_h$	$\mathbf{I}_h$	$\mathbf{R}_h$	$\mathbf{D}_h$
0	–	–	–	1.000
1	163,8	100	263,8	836,20
2	180,18	83,62	263,8	656,02
3	198,20	65,60	263,8	457,82

4	218,02	45,78	263,8	239,82
5	239,82	23,98	263,8	0

Esercizio (riepilogo).
Un individuo prende a prestito un importo di 100.000 e s'impegna a restituire in 10 anni al tasso effettivo annuo del 10% versando rate di un ammortamento italiano. Dopo cinque anni l'individuo, a seguito di una crisi finanziaria, non può più onorare i suoi impegni e paga solo la quota interesse per il sesto e settimo anno e nulla l'anno successivo. A questo punto si accorda con il finanziatore per estinguere il debito rimanente entro la scadenza prefissata, sempre in ammortamento italiano al nuovo tasso del 15%. Calcolare il tasso di costo dell'operazione per il debitore e determinare la successione delle rate effettivamente pagate.
I dati del problema sono $D_0 = 100.000$, $n = 10$ e $i = 10\%$.
Le quote capitale costanti valgono:

$$C = \frac{D_0}{n} = 10.000$$

Le prime cinque rate effettivamente pagate valgono:

$$\begin{aligned}
R_1 &= C_1 + I_1 = 10.000 + 10.000 = 20.000 \\
R_2 &= C_2 + I_2 = 10.000 + 9.000 = 19.000 \\
R_3 &= C_3 + I_3 = 10.000 + 8.000 = 18.000 \\
R_4 &= C_4 + I_4 = 10.000 + 7.000 = 17.000 \\
R_5 &= C_5 + I_5 = 10.000 + 6.000 = 16.000
\end{aligned}$$

Il debito residuo all'epoca cinque vale:

$$D_h = \frac{D_0}{n} \cdot (n-h) = 10.000 \cdot (10-5) = 50.000$$

Al sesto e settimo anno, il debitore paga soltanto gli interessi, perciò il debito residuo rimane immutato e le rate (pari alla sola quota interesse) valgono:

$$\begin{aligned}
R_6 &= I_6 = D_5 \cdot i = 5.000 \\
R_7 &= I_7 = D_6 \cdot i = 5.000
\end{aligned}$$

essendo

$$D_5 = D_6 = D_7 = 50.000$$

Durante l'ottavo anno il creditore non paga nulla, perciò il debito residuo si capitalizza per un anno. Avremo all'epoca 8:

$$R_8 = 0$$
$$D_8 = D_7 \cdot (1+i) = 50.000 \cdot 1{,}10 = 55.000.$$

Avremo perciò un nuovo piano d'ammortamento calcolato sul nuovo valore del debito D_8:

h	**C**$_h$	**I**$_h$	**R**$_h$	**D**$_h$
8	–	–	–	55.000
9	27.500	8.250	35.750	27.500
10	27.500	4.125	31.625	0

Abbiamo quindi determinato le ultime due rate del piano d'ammortamento.
Infine, il tasso interno di costo ("*TIC*") è definito come quel tasso costante rispetto al quale la somma dei valori

attuali delle rate fornisce il valore del debito. Il TIC dovrà perciò soddisfare la seguente equazione di equilibrio finanziario

$$100.000 = \frac{20.000}{1+i} + \frac{19.000}{(1+i)^2} + \frac{18.000}{(1+i)^3} + \frac{17.000}{(1+i)^4} + \frac{16.000}{(1+i)^5} + \frac{5.000}{(1+i)^6} + \frac{5.000}{(1+i)^7} + \frac{0}{(1+i)^8} + \frac{35.750}{(1+i)^9} + \frac{31.625}{(1+i)^{10}}$$

Otteniamo un’equazione algebrica di decimo grado che risolveremo con il metodo dell'interpolazione lineare. Considerando i dati del problema, prendiamo come soglie il 10% e l’11%. Si ottiene quindi:

$$i_0 = 0{,}10 \rightarrow A_0 = 101.696$$
$$i_1 = 0{,}11 \rightarrow A_1 = 97.489$$

Applichiamo infine la formula dell'interpolazione con questi dati:

$$\tilde{i} = 0{,}10 + \frac{0{,}11 - 0{,}10}{97.489 - 101.696} \cdot \left(100.000 - 101.696\right) = 0{,}1037$$

3.5 Il preammortamento.

Il **preammortamento** è una situazione in cui non succede nulla per t anni in cui si pagano solo gli interessi e non le quote capitale. Si tratta quindi di una variante per qualsiasi piano d'ammortamento.
Abbiamo sotto forma di tabella:

h	$\mathbf{C}_h$	$\mathbf{I}_h$	$\mathbf{R}_h$	$\mathbf{D}_h$
0	–	–	–	D_0
1	–	$D_0 \cdot i$	$D_0 \cdot i$	D_0
2	–	$D_0 \cdot i$	$D_0 \cdot i$	D_0
3	–	$D_0 \cdot i$	$D_0 \cdot i$	D_0
$\vdots$	–	$D_0 \cdot i$	$D_0 \cdot i$	D_0
t	–	$D_0 \cdot i$	$D_0 \cdot i$	D_0
$t+1$	C_1	I_1	$C_1 + I_1$	D_1
$t+2$	C_2	I_2	$C_2 + I_2$	D_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$t+n$	C_n	I_n	$C_n + I_n$	0

Esempio.
Consideriamo i dati seguenti: $D_0 = 50.000.000$, $n = 5$, $i = 18\%$ e $t = 3$ (periodo di preammortamento).
Le quote capitale valgono, dal periodo $t+1$ al periodo $t+n$:

$$C = \frac{D_0}{n} = 10.000.000$$

Dall'epoca *zero* all'epoca t le quote interesse valgono:

$$I = D_0 \cdot i = 50.000.000 \cdot 0{,}18 = 9.000.000$$

Il piano completo sarà perciò (importi in milioni):

h	$\mathbf{C}_h$	$\mathbf{I}_h$	$\mathbf{R}_h$	$\mathbf{D}_h$
0	–	–	–	50

1	–	9	9	50
2	–	9	9	50
3	–	9	9	50
4	10	9	19	40
5	10	7,2	17,2	30
6	10	5,4	15,4	20
7	10	3,6	13,6	10
8	10	1,8	11,8	0

Nel caso di un ammortamento di tipo francese, il piano completo è:

h	$\mathbf{C}_h$	$\mathbf{I}_h$	$\mathbf{R}_h$	$\mathbf{D}_h$
0	–	–	–	50
1	–	9	9	50
2	–	9	9	50
3	–	9	9	50
4	6,99	9	15,99	43,01
5	8,25	7,74	15,99	34,76
6	9,73	6,26	15,99	25,03
7	11,48	4,51	15,99	13,55
8	13,55	2,44	15,99	0

Attualizziamo le rate del preammortamento italiano:

$$\frac{9}{1{,}18}+\frac{9}{1{,}18^2}+\ldots+\frac{11{,}8}{1{,}18^8}=50$$

3.6 Ammortamento a tassi variabili.

L'ammortamento a tassi variabili è una variante dei piani d'ammortamenti generali che prevede il calcolo delle quote interesse con tassi diversi per ciascun periodo. I tassi non sono fissati a priori ma normalmente calcolati sulla base di quelli rilevati sul mercato interbancario.
Per quanto riguarda l'ammortamento italiano si tratta semplicemente di calcolare per ciascun periodo le quoate interessi sulla base del debito residuo all'anno precedente e del tasso vigente nel periodo.
Se ad esempio partiamo da un piano d'ammortamento italiano con $D_0 = 300,\ n = 3$ il cui scadenzario per le quote capitale è:

h	$\mathbf{C}_h$	$\mathbf{I}_h$	$\mathbf{R}_h$	$\mathbf{D}_h$
0	–			300
1	100			200
2	100			100
3	100			0

Ed i tassi applicati sono per il periodo 1 il 10%, per il periodo 2 il 15% e per il periodo 3 il 12% avremo:

h	$\mathbf{C}_h$	$\mathbf{I}_h$	$\mathbf{R}_h$	$\mathbf{D}_h$
0	–	–	–	300
1	100	30	130	200
2	100	30	130	100
3	100	12	112	0

Per quanto riguarda l'ammortamento francese esistono (almeno) due varianti ampiamente diffuse sul mercato. La prima è basata sulla sequenza delle quote capitali calcolata al tasso iniziale, con il ricalcalo delle quote interesse periodo per periodo. Evidentemente le rate non saranno più costanti, se non nel caso di tassi stabili nel tempo.

Esempio.

Consideriamo un piano d'ammortamento francese a interessi anticipati con $D_0 = 50.000.000$, $i = 18\%$ e $n = 5$.

Le quote capitale valgono:

$$C_1 = R \cdot v^n = \frac{50.000.000}{\frac{1-1,18^{-5}}{0,18}} \cdot 1,18^{-5} = 6.990.000$$

$$C_2 = C_1 \cdot (1+i) = 8.250.000$$

$$C_3 = C_2 \cdot (1+i) = 9.730.000$$

etc.

Il piano di rimborso delle sole quote capitali è (importi in milioni):

h	$\mathbf{C}_h$	$\mathbf{I}_h$	$\mathbf{R}_h$	$\mathbf{D}_h$
0	–			50
1	6,99			43,01
2	8,25			34,76
3	9,73			25,03
4	11,48			13,55
5	13,55			0

Le quote interessi possono essere calcolate solo dopo la indicazione del tasso applicato per ciascun periodo:
se
i_1=18%
i_2=20%
i_3=17%
i_4=18%
i_5=15%
le quote interessi saranno date da:

$I_1 = i_1 D_0 = 0.18 \cdot 50 = 9$

$I_2 = i_2 D_1 = 0.2 \cdot 43.01 = 8.602$

etc.

Le rate si ottengono dalla somma della quota capitale più la quota interessi.

Il piano completo sarà quindi:

h	$\mathbf{C}_h$	$\mathbf{I}_h$	$\mathbf{R}_h$	$\mathbf{D}_h$
0	–			50
1	6,99	9	15,99	43,01
2	8,25	8,6	16,85	34,76
3	9,73	5,93	15,66	25,03
4	11,48	4,51	15,99	13,55
5	13,55	2,03	15.58	0

Come si può notare le rate relative a periodi con uguali tassi di interesse vigenti (1 e 4) sono uguali. Sono invece diverse le rate relative a periodi con tassi di interesse diversi, maggiore è il tasso, maggiore la rata.

La seconda variante (rate costanti a tassi variabili) utilizza come base di riferimento la rata iniziale, e dopo aver calcolato la quota interessi rettifica la quota capitale in modo da mantenere costante la rata.
Riprendendo l'esempio precedente:

$R = \frac{50.000.000}{\frac{1-1,18^{-5}}{0,18}}$; 15.99

Per il primo anno la quota interessi sarà data da:

$I_1 = i_1 D_0 = 0.18 \cdot 50 = 9$

La quota capitale da: $C_1 = R_1 - I_1 = 15,99 - 9 = 6,99$

E il debito residuo sarà: $D_1 = D_0 - C_1 = 50 - 6,99 = 43,01$

Per il secondo anno:

$I_2 = i_2 D_1 = 0.2 \cdot 43,1 = 8,62$

La quota capitale sarà: $C_2 = R_2 - I_2 = 15,99 - 8,62 = 7,37$

E il debito residuo sarà: $D_2 = D_1 - C_2 = 43,1 - 7,37 = 35,73$

Il piano completo:

h	**C**$_h$	**I**$_h$	**R**$_h$	**D**$_h$	i
0	–			50,00	
1	6,99	9,00	15,99	43,01	18%
2	7,37	8,62	15,99	35,73	20%
3	9,92	6,07	15,99	25,81	17%
4	11,34	4,65	15,99	14,47	18%
5	13,82	2,17	15,99	0,65	15%
6	0,65	0,10	0,75	-	16%

In questo caso le variazioni nei tassi hanno reso necessaria una ulteriore rata, di importo pari al residuo capitalizzato, per completare il rimborso.
Evidentemente rialzi dei tassi generano un allungamento nei tempi di rimborso, abbassamenti dei tassi consentono maggiori rimborsi in linea capitale (la rata è costante) e, quindi, un rimborso più rapido.

3.7 Valutazione di un prestito.

Il **valore** di un prestito all'epoca generica h al tasso di valutazione j (scelto arbitrariamente, da non confondere con il tasso di remunerazione i del piano d'ammortamento) è definito come la somma dei valori attuali calcolati all'epoca h di tutte le rate successive all'epoca h. In simboli avremo:

$$V_h = \sum_{t=h+1}^{n} R_t \cdot (1+j)^{h-t}$$

dove n rappresenta l'epoca finale.
Il valore di un prestito può essere scisso nella somma di due componenti: la **nuda proprietà** (ottenuta attualizzando le quote capitale) e l'**usufrutto** (ottenuto attualizzando le quote interesse):

$$N_h = \sum_{t=h+1}^{n} C_t \cdot (1+j)^{h-t}$$

$$U_h = \sum_{t=h+1}^{n} I_t \cdot (1+j)^{h-t}$$

perciò vale a ogni epoca h:

$$V_h = N_h + U_h .$$

Esempio.
Consideriamo il seguente piano d'ammortamento con $D_0 = 1.000$; $n = 5$ e $i = 10\%$.

h	**C**$_h$	**I**$_h$	**R**$_h$	**D**$_h$
0	–	–	–	1.000
1	200	100	300	800
2	200	80	280	600
3	100	60	160	500
4	100	50	150	400
5	400	40	440	0

Vogliamo calcolare nuda proprietà e usufrutto all'epoca tre al tasso di valutazione $j = 15\%$.
Utilizzando le definizioni viste si ottiene:

$$V_3 = \frac{150}{1{,}15} + \frac{440}{1{,}15^2} = 463{,}1$$

$$N_3 = \frac{100}{1{,}15} + \frac{400}{1{,}15^2} = 389{,}4$$

$$U_3 = \frac{50}{1{,}15} + \frac{40}{1{,}15^2} = 73{,}7 .$$

Esercizio.
Un prestito è restituito in cinque anni mediante il versamento di cinque quote capitale in progressione aritmetica di ragione 100 e primo termine 100 e pagamento degli interessi al 10% effettivo annuo. Dopo due anni il creditore cede i flussi residui a un terzo soggetto. Costui paga un prezzo d'acquisto che gli consente di realizzare un rendimento dall'operazione pari al 12% pur in presenza di tassazione sulle quote interesse in base ad un'aliquota del 40%.
Stendere il piano di ammortamento completo e calcolare il prezzo pagato dal terzo soggetto per acquistare il debito residuo.
Utilizzando le note relazioni possiamo scrivere il piano d'ammortamento:

h	**C**$_h$	**I**$_h$	**R**$_h$	**D**$_h$
0	–	–	–	1.500
1	100	150	250	1.400
2	200	140	340	1.200
3	300	120	420	900
4	400	90	490	500
5	500	50	550	0

Mentre le quote capitale C_3, C_4 e C_5 sono acquistate dal terzo soggetto, sulle quote interessi ci sarà da togliere il 40%.
Siccome il rendimento è del 12%, il prezzo pagato sarà il valore attuale di ciò che deve essere incassato, ossia:

$$V_2 = \frac{300}{1{,}12} + \frac{400}{1{,}12^2} + \frac{500}{1{,}12^3} + \left(\frac{120}{1{,}12} + \frac{90}{1{,}12^2} + \frac{50}{1{,}12^3} \right) \cdot (1 - 0{,}4) = 1.071{,}31 .$$

Osservazione. Il **tasso interno di costo** ("TIC") di un prestito è quel tasso in base al quale le rate pagate per la restituzione di un debito attualizzate all'epoca *zero* sono uguali al valore iniziale del debito stesso. Il TIC consente quindi di valutare la convenienza tra due alternative di finanziamento, accogliendo quella che presenta

il TIC più basso.
Come verifica, possiamo calcolare il tasso interno di costo risolvendo l'equazione di equilibrio finanziario:

$$V(j)=\frac{300}{1+j}+\frac{400}{(1+j)^2}+\frac{500}{(1+j)^3}+\left(\frac{120}{1+j}+\frac{90}{(1+j)^2}+\frac{50}{(1+j)^3}\right)\cdot(1-0,4)=1.071,31$$

Si trova proprio $j=12\%$.
Esercizio.
Un individuo si accorda per restituire un importo di 800.000 euro mediante il versamento di rate costanti semestrali per dieci anni al tasso effettivo annuo d'interesse del 5%. Dopo le prime otto rate semestrali versate regolarmente il debitore incontra un periodo di difficoltà finanziarie nel quale paga solo gli interessi per due semestri e sospende completamente il versamento delle rate per altri quattro semestri; a questo punto si accorda per restituire il prestito nei tempi previsti versando rate semestrali di un nuovo ammortamento francese condotto sul nuovo valore del debito D' al tasso annuo del 8%.
Calcolare:
- l'importo del debito residuo in corrispondenza dell'ultima epoca in cui i pagamenti avvengono regolarmente;
- il tasso di costo su base annua dell'operazione complessiva.

Determiniamo dapprima il tasso semestrale equivalente:

$$i_{1/2}=\sqrt{1,05}-1=0,024695.$$

La rata del piano d'ammortamento si deduce dalla formula vista per l'ammortamento francese (abbiamo un totale di venti rate semestrali):

$$R=\frac{S}{a_{\overline{20}|i_{1/2}}}=\frac{800.000}{15,6349}=51.167,5494$$

Il debito residuo, tenendo conto delle rate ancora da versare, sarà:

$$DR_h=R\cdot a_{\overline{n-h}|i_{1/2}}$$

ossia:

$$DR_8=R\cdot a_{\overline{12}|0,02469}=51.167,5494\cdot\frac{1-1,024695^{-12}}{0,024695}=525.851,203$$

Alle epoche 9 e 10 il debitore paga solo gli interessi:

$$I=I_9=I_{10}=DR_8\cdot i_{1/2}$$

mentre il debito residuo non cambia:

$$DR_8=DR_9=DR_{10}.$$

Per i successivi quattro semestri, il debitore non paga nulla perciò il debito residuo si capitalizza per quattro semestri (o equivalentemente per due anni). Si avrà quindi:

$$DR_{14}=DR_8\cdot(1+i)^2=579.739,46=D'$$

Le ultime sei rate del nuovo ammortamento si trovano con la solita formula:

$$R'=\frac{D'}{a_{\overline{6}|j_{1/2}}}=\frac{579.739,46}{5,2553}=110.315,198$$

dopo aver determinato il tasso semestrale equivalente:

$$j_{1/2} = \sqrt{1,08} - 1 = 0,03923\,.$$

Per la ricerca del TIC scriviamo l'equazione di equilibrio finanziario:

$$800.000 = R \cdot a_{\overline{8}|\,i_{1/2}} + I \cdot a_{\overline{2}|\,i_{1/2}} \cdot (1+i_{1/2})^{-8} + 0 + R' \cdot a_{\overline{6}|\,i_{1/2}} \cdot (1+i_{1/2})^{-14}\,.$$

Risolviamo per interpolazione prendendo come soglie i tassi semestrali equivalenti al 5% e al 8% annui. Si ha:

$$i_0 = 0,024695 \rightarrow A_0 = 820.224,47$$
$$i_1 = 0,03923 \rightarrow A_1 = 701.886,462$$

Applichiamo infine la formula dell'interpolazione con questi dati:

$$\tilde{i} = 0,024695 + \frac{0,03923 - 0,024695}{701.886,462 - 820.224,47} \cdot (800.000 - 820.224,47)\,;\; 0,027175\,.$$

Infine il TIC su base annua sarà:

$$i = (1+0,027175)^2 - 1 = 0,05509\,.$$

Esercizi di riepilogo.
1) Un individuo di 40 anni di età sottoscrive un contratto che gli assicura una rendita perpetua differita posticipata annua dall'età di 65 anni. Ipotizzando che la rata della rendita sia di 2.000 e che il tasso di riferimento sia del 4%, calcolare quale sarà l'importo complessivo che l'individuo dovrà versare oggi a fronte della prestazione indicata. L'operatore dispone, inoltre, di una seconda alternativa: versare dieci rate annue posticipate invece dell'unico importo calcolato al punto precedente. Determinare l'importo delle rate in questione.
Il valore attuale della prima rendita perpetua sarà:

$$A = \frac{R}{i} = \frac{2.000}{0,04} = 50.000\,.$$

Il valore attuale di tale somma all'epoca *zero* (cioè passando da 65 a 40 anni) è:

$$A = 50.000 \cdot (1+0,04)^{-25} = 18.755,84\,.$$

Infine, l'importo della rata della seconda rendita si ottiene uguagliando i valori attuali delle due rendite equivalenti:

$$18.755,84 = R \cdot a_{\overline{10}|\,0,04} \Rightarrow R = \frac{18.755,84}{a_{\overline{10}|\,0,04}} = \frac{18.755,84}{8,1109} = 2.312,425$$

2) Un'operazione finanziaria prevede flussi bimestrali che variano in progressione aritmetica di primo termine 250.000 e ultimo termine 400.000 con durata un anno. Calcolare il montante di tale operazione finanziaria al tasso del 12% annuo. Ricalcolare il valore in questione nel caso in cui la progressione delle rate fosse di tipo geometrico.
Conosciamo la prima e l'ultima rata ma non la ragione D. In generale, abbiamo la seguente relazione che lega la prima rata con la rata $n-esima$:

$$R_n = R_1 + (n-1) \cdot D$$

Nel nostro caso avremo perciò:

$$D = \frac{400.000 - 250.000}{5} = 30.000.$$

La successione delle rate sarà (dividendo gli importi per 10.000):

$$(25;28;31;34;37;40)$$

Per determinare il montante della rendita, calcoliamo il tasso bimestrale equivalente:

$$i_{1/6} = (1,12)^{1/6} - 1 = 0,01906$$

Capitalizziamo quindi tutte le rate fino al sesto bimestre:

$$\frac{M}{10.000} = 25 \cdot 1,01906^5 + 28 \cdot 1,01906^4 + 31 \cdot 1,01906^3 +$$
$$+34 \cdot 1,01906^2 + 37 \cdot 1,01906^1 + 40 = 203,4918$$
$$\Rightarrow M = 2.034.918 .$$

Se le rate variano in progressione geometrica di ragione q, la relazione tra la prima rata e l'ultima rata sarà:

$$R_6 = R_1 \cdot q^5 \Rightarrow q = \left(\frac{400.000}{250.000}\right)^{1/5} = 1,09856.$$

Il montante si trova sempre con lo stesso procedimento:

$$\frac{M}{10.000} = 25 \cdot 1,01906^5 + 25 \cdot q \cdot 1,01906^4 + 25 \cdot q^2 \cdot 1,01906^3 +$$
$$+25 \cdot q^3 \cdot 1,01906^2 + 25 \cdot q^4 \cdot 1,01906^1 + 40 = 200,5478$$
$$\Rightarrow M = 2.005.478 .$$

3) Dato un ammortamento francese per un importo iniziale pari a 100.000 euro, di durata dieci anni, realizzato al tasso del 10% annuo d'interesse mediante il versamento di rate trimestrali, calcolare la rata e il debito residuo dopo tre anni e mezzo.
Calcoliamo dapprima il tasso trimestrale equivalente:

$$i_{1/4} = (1 + 0,10)^{1/4} - 1 = 0,02411.$$

Il nostro piano d'ammortamento prevede 40 rate trimestrali d’importo pari a:

$$R = \frac{100.000}{a_{\overline{40}|\,0,02411}} = 3.924,39.$$

Il debito residuo dopo 14 rate si ottiene dalla formula:

$$DR_{3,5} = R \cdot a_{\overline{40-14}|\,0,02411} = 3.924,39 \cdot 19,1516 = 75.158,31.$$

4) Un prestito di 100.000 è ammortizzato con otto rate annue posticipate. Il tasso effettivo è del 10%. Le prime tre rate sono uguali. Ciascuna delle successive cinque è pari al doppio di quella iniziale. Calcolare:
- l'importo della rata iniziale R;
- il debito residuo all'epoca sei, dopo aver corrisposto la rata.

Lo scadenzario delle rate è il seguente:

$$(R;R;R;2R;2R;2R;2R;2R)/(1;2;3;4;5;6;7;8)$$

Osserviamo che non si tratta di un ammortamento francese: le rate non sono tutte uguali. Possiamo però calcolare il valore attuale della rendita scindendo le rate in due blocchi: una rendita immediata (le prime tre rate) e una rendita differita di tre periodi (le ultime cinque). Abbiamo perciò:

$$100.000 = R \cdot a_{\overline{3}|\,0,10} + 2R \cdot 1{,}10^{-3} \cdot a_{\overline{5}|\,0,10}.$$

da cui ricaviamo la rata:

$$R = \frac{100.000}{a_{\overline{3}|\,0,10} + 2 \cdot 1{,}10^{-3} \cdot a_{\overline{5}|\,0,10}} = 12.220{,}46.$$

Concludiamo con il debito residuo:

$$D_6 = 2R \cdot a_{\overline{2}|\,0,10} = 2 \cdot 12.220{,}46 \cdot \frac{1 - 1{,}10^{-2}}{0{,}10} = 42.418{,}11.$$

5) Un individuo prende a prestito 150.000 euro che s'impegna a restituire in dieci anni mediante il versamento di rate costanti quadrimestrali al 9% annuo d'interesse. Dopo sei anni inizia un periodo di difficoltà finanziaria che lo conduce a pagare i soli interessi per il settimo anno e nulla per l'ottavo. A questo punto si accorda per estinguere il prestito nei tempi inizialmente previsti mediante il versamento di rate ancora costanti e quadrimestrali calcolate all'11% annuo. Calcolare:
- la rata del primo ammortamento;
- il debito su cui viene ricalcolata la nuova rata all'epoca otto;
- il tasso di costo dell'operazione complessiva (che è necessariamente compreso tra i tassi d'ammortamento).

Determiniamo dapprima il tasso quadrimestrale equivalente:

$$i_{1/3} = 1{,}09^{1/3} - 1 = 0{,}02914$$

La rata del piano d'ammortamento si deduce dalla formula vista per l'ammortamento francese (abbiamo un totale di trenta rate quadrimestrali):

$$R = \frac{S}{a_{\overline{30}|\,i_{1/3}}} = \frac{150.000}{a_{\overline{30}|\,i_{1/3}}} = 7.568{,}07$$

Il debito residuo, tenendo conto delle rate ancora da versare, sarà:

$$DR_h = R \cdot a_{\overline{n-h}|\,i_{1/3}}$$

ossia:

$$DR_6 = R \cdot a_{\overline{12}|\,0,02914} = 7.568{,}07 \cdot 10{,}0053 = 75.720{,}8$$

All'epoca 7 il debitore paga solo gli interessi:

$$I = DR_6 \cdot i_{1/3} = 2.206{,}50$$

mentre il debito residuo non cambia:

$$DR_7 = DR_6.$$

All'epoca 8, il debitore non paga nulla perciò il debito residuo si capitalizza per un anno. Si avrà quindi:

$$DR_8 = DR_6 \cdot (1+i) = 75.720{,}8 \cdot 1{,}09 = 82.535{,}7.$$

Le ultime sei rate del nuovo ammortamento si trovano con la solita formula:

$$R' = \frac{DR_8}{a_{\overline{6}|\,j_{1/3}}} = 15.509,7$$

dopo aver determinato il tasso quadrimestrale equivalente:

$$j_{1/3} = 1,11^{1/3} - 1 = 0,0354.$$

Per la ricerca del TIC scriviamo l'equazione di equilibrio finanziario:

$$150.000 = R \cdot a_{\overline{18}|\,i_{1/3}} + I \cdot a_{\overline{3}|\,i_{1/3}} \cdot (1+i_{1/3})^{-18} + 0 + R' \cdot a_{\overline{6}|\,i_{1/3}} \cdot (1+i_{1/3})^{-24}.$$

Risolviamo per interpolazione prendendo come soglie i tassi quadrimestrali equivalenti al 9% e all'11% annui. Si trova

$$i\%;\ 0,02956.$$

Infine il TIC su base annua sarà $i\ ;\ 9,13\%$.

6) Un individuo si accorda per restituire un prestito mediante il versamento di cinque quote capitale di cui la prima pari a 50.000 euro e le altre ciascuna pari alla precedente moltiplicata per due; il tasso è pari al $7,5\%$.
Calcolare:
- il debito residuo all'epoca tre;
- la nuda proprietà e l'usufrutto all'epoca due utilizzando il tasso del 9%.

La successione delle quote capitale è:

$$C_1 = 50.000;\ C_2 = 100.000;\ C_3 = 200.000;\ C_4 = 400.000;\ C_5 = 800.000.$$

Il debito residuo è:

$$D_3 = 400.000 + 800.000 = 1.200.000.$$

Per quanto riguarda nuda proprietà e usufrutto, applichiamo la definizione:

$$P_2 = 200.000 \cdot 1,09^{-1} + 400.000 \cdot 1,09^{-2} + 800.000 \cdot 1,09^{-3} = 1.137.905,02.$$

Il debito residuo alle altre epoche è:

$$D_2 = D_3 + C_3 = 1.400.000$$
$$D_4 = D_3 - C_4 = 800.000.$$

Le quote interesse necessarie per determinare l'usufrutto sono:

$$I_3 = D_3 \cdot i = 1.400.000 \cdot 0,075 = 105.000$$
$$I_4 = D_4 \cdot i = 90.000$$
$$I_5 = D_5 \cdot i = 40.000$$

perciò:

$$U_2 = 105.000 \cdot 1,09^{-1} + 90.000 \cdot 1,09^{-2} + 40.000 \cdot 1,09^{-3} = 202.969.$$

7) Un'azienda si finanzia emettendo un prestito obbligazionario dell'importo di $5.000.000$ euro che s'impegna a rimborsare mediante un ammortamento a rimborso unico con rata annuale al $4,15\%$ in 12 anni. Calcolare nuda

proprietà e usufrutto del prestito all'epoca tre al tasso di valutazione del 7%.
L'unica quota capitale non nulla è l'ultima:

$$C_{12} = 5.000.000$$

avremo perciò

$$V_3 = 5.000.000 \cdot 1,07^{-9} = 2.719.669 .$$

Le quote interesse sono tutte uguali e valgono:

$$I = 5.000.000 \cdot 0,0415 = 207.500$$

ne deduciamo quindi l'usufrutto:

$$U_3 = I \cdot a_{\overline{9}|\,0,07} = 1.351.910,692 .$$