

Struttura a termine dei tassi d'interesse

1. Operazioni a pronti e a termine
2. Durata Media Finanziaria (Duration)
3. Arbitraggio

Operaz. a pronti e a termine

Durata Media Finanziaria

Esercizio 1

- Dati i seguenti 3 titoli:
- $Z_1 = (-96; 110) / (0; 1)$
- $Z_2 = (-94; 5; 105) / (0; 1; 2)$
- $Z_3 = (-99; 8; 8; 108) / (0; 1; 2; 3)$
- Determinare:
 - i tassi a pronti $i(0, t)$
 - i tassi a termine $i(0; t-1; t)$
 - *duration* e *convessità* del titolo:
 - $Z = (-100; 12; 12; 112) / (0; 1; 2; 3)$

Esercizio 1 – Tassi a pronti

- Dal 1° titolo (Zero Coupon Bond) desumo il tasso a pronti $i(0; 1)$:

$$i(0; 1) = r(0; 1) - 1 = \frac{110}{96} - 1 = 0,14583$$

- Noto il tasso a pronti $i(0; 1)$, dal secondo titolo (Coupon Bond) desumo il tasso a pronti $i(0; 2)$:

$$94 = \frac{5}{(1 + 0,14583)} + \frac{105}{[1 + i(0; 2)]^2}$$

$$[1 + i(0; 2)]^2 = 105 / (94 - 4,363649)$$

Esercizio 1 – Tassi a pronti

- Risolvo rispetto a $i(0; 2)$:

$$i(0; 2) = \sqrt{1,1714} - 1 = 0,0823$$

- Noto $i(0; 2)$, dal 3° titolo (Coupon Bond) desumo il tasso a pronti $i(0; 3)$:

$$99 = \frac{8}{(1 + 0,14583)} + \frac{8}{[1 + 0,0823]^2} + \frac{108}{[1 + i(0; 3)]^3}$$

$$[1 + i(0; 3)]^3 = 108 / (99 - 6,98183849 - 6,8295906)$$

Esercizio 1 – Tassi a pronti

- Risolvo rispetto a $i(0; 3)$:

$$i(0; 3) = \sqrt[3]{1,2677757} - 1 = 0,0823$$

Esercizio 1 – Tassi a termine

- Dai Tassi a Pronti desumo i Tassi a Termine in base alla seguente formula:

$$i(t_0; t_h; t_n) = \left\{ \frac{[1 + i(t_0; t_n)]^{(t_n - t_0)}}{[1 + i(t_0; t_h)]^{(t_h - t_0)}} \right\}^{\frac{1}{(t_n - t_h)}} - 1$$

- Il primo tasso a termine corrisponde al primo tasso a pronti:

$$i(0; 0; 1) = i(0; 1) = 0,1458$$

Esercizio 1 – Tassi a termine



$$i(0; 1; 2) = \frac{[1 + i(0; 2)]^2}{[1 + i(0; 1)]} - 1 = 0,0223$$

$$i(0; 2; 3) = \frac{[1 + i(0; 3)]^3}{[1 + i(0; 2)]^2} - 1 = 0,0823$$

$$i(0; 1; 3) = \sqrt{\frac{[1 + i(0; 3)]^3}{[1 + i(0; 1)]}} - 1 = 0,05188$$

Esercizio 1 – *Duration*

- Calcolo della *Duration*:

$$D_1 = \frac{1 * 12 * (1 + 0,1458)^{-1} + 2 * 12 * (1 + 0,0823)^{-2} + 3 * 112 * (1 + 0,0823)^{-3}}{12 * (1 + 0,1458)^{-1} + 12 * (1 + 0,0823)^{-2} + 112 * (1 + 0,0823)^{-3}} = 2,7140$$

Esercizio 1 – *Convessità*

- Calcolo della *Duration* del 2° ordine (convessità):

$$D_2 = \frac{1^2 * 12 * (1 + 0,1458)^{-1} + 2^2 * 12 * (1 + 0,0823)^{-2} + 3^2 * 112 * (1 + 0,0823)^{-3}}{12 * (1 + 0,1458)^{-1} + 12 * (1 + 0,0823)^{-2} + 112 * (1 + 0,0823)^{-3}} = 7,7621$$

Arbitraggio

Esercizio 2

- Sapendo che sul nostro mercato finanziario di riferimento $v(0;1) = 0,93$ e $v(0;1;2)=0,85$, verificare se la presenza di uno ZCB unitario $Z_1=(-0,95; 1)/(0; 2)$ apre possibilità di arbitraggio ed, eventualmente, calcolare il profitto realizzabile impostando una strategia con saldo positivo in $t=0$.

Esercizio 2

- $V(0; 1) = 0,93$
- $V(0; 1; 2) = 0,85$
- ZCB: $(-0,95; 1)/(0; 2) \rightarrow V(0; 2)=0,95$

- Relazione di NON Arbitraggio:

$$v(0; 1) * v(0; 1; 2) = v(0; 2)$$

- Invece:

$$0,93 * 0,85 < 0,95$$

Esercizio 2

- Quindi “compro quello che costa meno e vendo allo scoperto quello che costa di più, ottenendo in tal modo un guadagno privo di rischio”.

Esercizio 2

	0	1	2
Vendo	+0,95		-1
Compro		-0,85	1
Compro	-0,85*0,93	+0,85*1	
SALDO	+0,1595	0	0

- Vendo 1 unità dello ZCB
- Compro 1 unità dell'operaz. a termine con prezzo 0,85
- Compro 0,85 unità dell'operaz. a pronti con prezzo 0,93
- Ottengo un guadagno all'epoca 0 di: + 0,1595

Esercizio 3

- Sapendo che sul nostro mercato finanziario di riferimento $v(0;1) = 0,85$ e $v(0;1;2)=0,95$, verificare se la presenza di uno ZCB unitario $Z_1=(-0,70; 1)/(0; 2)$ apre possibilità di arbitraggio ed, eventualmente, calcolare il profitto realizzabile impostando una strategia con saldo positivo in $t=0$.

Esercizio 3

- $V(0; 1) = 0,85$
- $V(0; 1; 2) = 0,95$
- ZCB: $(-0,70; 1)/(0; 2) \rightarrow V(0; 2)=0,70$

- Relazione di NON Arbitraggio:

$$v(0; 1) * v(0; 1; 2) = v(0; 2)$$

- Invece:

$$0,85 * 0,95 > 0,70$$

Esercizio 3

- Quindi “compro quello che costa meno e vendo allo scoperto quello che costa di più, ottenendo in tal modo un guadagno privo di rischio”.

Esercizio 3

	0	1	2
Vendo	$+0,95*0,85$	$-0,95*1$	
Vendo		$+0,95$	-1
Compro	-0,70		1
SALDO	+0,1075	0	0

- Vendo 0,95 unità dell'operaz. a pronti con prezzo 0,85
- Vendo 1 unità dell'operaz. a termine con prezzo 0,95
- Compro 1 unità dello ZCB
- Ottengo un guadagno all'epoca 0 di: + 0,1075