

ODONE BELLUZZI

# SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

VOL. 1

ZANICHELLI



# INDICE GENERALE DELL'OPERA

## VOLUME PRIMO

- |   |   |
|---|---|
| CAP. 1. - La Scienza delle costruzioni. | CAP. 11. - Travi di una sola campata.                                       |
| » 2. - Operazioni sulle forze.          | » 12. - Travi su più di due appoggi.  |
| » 3. - Le reazioni dei vincoli.         | » 13. - Sforzo normale e flessione.   |
| » 4. - Geometria delle masse.           | » 14. - Le travature reticolari.  |
| » 5. - Trazione o compressione.         | » 15. - Il principio dei lavori virtuali nello studio dei sistemi elastici. |
| » 6. - Flessione.                       | » 16. - I teoremi sul lavoro di deformazione e le loro applicazioni.        |
| » 7. - Torsione.                        |   |
| » 8. - Taglio.                          |   |
| » 9. - Sollecitazioni composte.         |   |
| » 10. - Le travi inflesse.              |   |

## VOLUME SECONDO

- |  |  |
|--|--|
| CAP. 17. - La teoria dell'ellisse di elasticità. | CAP. 21. - Le travi nello spazio.                |
| » 18. - I carichi mobili.                        | » 22. - Le strutture reticolari nello spazio.    |
| » 19. - Le travi a curvatura semplice.           | » 23. - Il cemento armato.                       |
| » 20. - Le strutture a molte iperstatiche.       | » 24. - I collegamenti (chiodature e saldature). |

## VOLUME TERZO

- |   |  |
|---|--|
| CAP. 25. - Elementi di Teoria dell'elasticità con applicazioni. | CAP. 29. - Le volte sottili.                             |
| » 26. - Le lastre piane.  | » 30. - La plasticità.                                   |
| » 27. - Le membrane curve.                                      | » 31. - Le autotensioni. Il cemento armato precompresso. |
| » 28. - Le lastre curve.  | † » 32. - Meccanica del terreno.                         |

## VOLUME QUARTO

- |   |   |
|---|---|
| CAP. 33. - La stabilità dell'equilibrio elastico. | † CAP. 38. - Le indagini sperimentali sui modelli.    |
| » 34. - Le vibrazioni.                            | † » 39. - Le indagini sperimentali sulle costruzioni. |
| † » 35. - Sollecitazioni dinamiche varie.         | † » 40. - I criteri di sicurezza.                     |
| † » 36. - I fenomeni di fatica.                   | <i>Sguardo sintetico e storico.</i>                   |
| † » 37. - Le indagini sperimentali sui materiali. | <i>Indici alfabetici.</i>                             |

† La morte ha colto l'autore mentre stava attendendo alla stesura di questi capitoli.

## C) LE TRAVI SU APPOGGIO ELASTICO CONTINUO.

253. Generalità <sup>(6)</sup>.

Consideriamo una trave appoggiata per tutta la lunghezza su di un suolo elastico tale che la sua reazione in ogni punto sia proporzionale all'abbassamento che subisce la trave nell'infietersi. In alcuni casi il suolo elastico può reagire tanto verso l'alto (se la trave si abbassa), quanto verso il basso (se la trave si alza); come avviene quando la trave è interrata profondamente nel terreno <sup>(7)</sup>. In altri casi il suolo è capace di reagire soltanto verso l'alto, come nel caso di una trave semplicemente appoggiata sul terreno. Se la deformazione non supera un certo limite, l'ipotesi della proporzionalità della reazione allo spostamento è all'incirca verificata anche per gli ordinari terreni di fondazione.

Il comportamento elastico del suolo è caratterizzato dal *modulo del suolo*  $K$ , che rappresenta la reazione del suolo nell'area di 1 cmq quando l'abbassamento è di 1 cm, e che si misura perciò in kg/cm<sup>3</sup>. Per un suolo sabbioso  $K$  vale in media 2 kg/cm<sup>3</sup> (può variare da 1 a 4 kg/cm<sup>3</sup>); per un suolo ghiaioso il valore è più incerto e può variare da 4 a 12 kg/cm<sup>3</sup>, ma nel caso di ghiaie compatte o conglomerate può essere assai maggiore. Valori attendibili di  $K$  si ottengono soltanto mediante l'esperienza diretta <sup>(8)</sup>.

Nel caso di una trave appoggiata, in molti punti isolati, come ad es. una rotaia appoggiata sulle traversine, i risultati che seguono sono ancora applicabili con sufficiente approssimazione, purchè la distanza degli appoggi sia piccola in confronto della lunghezza d'onda  $\lambda$  (n. 255).

Può sembrare strano che il terreno, che costituisce di solito il suolo sul quale appoggia la trave, reagisca proporzionalmente alla deformazione che subisce, ossia si comporti elasticamente. Tuttavia, l'esperienza mostra che tale ipotesi è abbastanza bene verificata; mentre è anche confermata dal fatto che le traversine ferroviarie affondano nella massicciata ad ogni passaggio di un asse pesante e si rialzano subito dopo. D'altra parte l'attitudine del terreno a tra-

<sup>(6)</sup> Gli elementi della teoria di queste travi furono sviluppati da E. WINKLER: *Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit*, Praga, Dominicus, 1867, pag. 182. Altre notizie si trovano nella bibliografia alla fine del capitolo.

<sup>(7)</sup> Nelle stesse condizioni si trova anche una striscia generica di parete, parallela all'asse, su un tubo a parete sottile soggetto a pressione radiale variabile lungo l'asse. Infatti, essa riceve dalla parete adiacente una reazione radiale, proporzionale in ogni punto allo spostamento radiale della striscia (Cap. XXVIII, A).

<sup>(8)</sup> Per maggiori particolari si veda il Cap. XXXII.

smettere a grandi distanze le onde sonore e le onde sismiche conferma le proprietà elastiche del terreno stesso.

Si può osservare che l'abbassamento di un punto del suolo non dipende soltanto dal carico agente in quel punto, ma anche dai carichi agenti nelle vicinanze <sup>(9)</sup>. Tuttavia, l'abbassamento di un punto diminuisce molto rapidamente se si allontana il carico; così che esso dipende principalmente dai carichi agenti nell'immediata vicinanza, e soltanto in piccola misura da quelli più lontani.

#### 254. L'equazione della linea elastica.

(a) Se  $b$  è la larghezza della trave, la reazione su 1 cm della sua lunghezza, quando l'abbassamento è di 1 cm, è  $\beta = Kb$ , e si misura in  $\text{kg/cm}^2$ . Perciò quando l'abbassamento è  $\eta$ , la reazione ripartita è

$$(a) \quad r = \beta \eta .$$

Se la trave è soggetta a un carico ripartito rivolto in basso, di intensità  $q$  (fig. 421), la forza ripartita complessiva per unità di lunghezza è  $q - r = q - \beta \eta$ . Quindi, se la trave è prismatica e omogenea ( $EJ$  costante), l'equazione differenziale (235) della linea elastica diventa

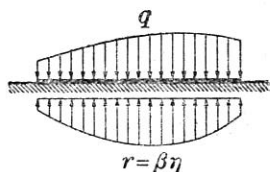


Fig. 421.

$$(349) \quad EJ \frac{d^4 \eta}{dx^4} = q - \beta \eta, \quad \text{ossia} \quad \boxed{EJ \eta^{IV} + \beta \eta = q.}$$

Se invece  $EJ$  è variabile, per le (233<sub>1</sub>), (222) si ha in generale

$$(349_1) \quad \frac{d^2}{dx^2} (EJ \eta'') + \beta \eta = q .$$

b) Nel caso di  $q = 0$ , la (349) diventa  $EJ \eta^{IV} + \beta \eta = 0$ , ossia

$$(b) \quad \eta^{IV} + 4\alpha^4 \eta = 0, \quad \text{avendo posto} \quad \frac{\beta}{4EJ} = \alpha^4 ;$$

( $\alpha$  è l'inverso di una lunghezza).

L'integrale generale di questa equazione è

$$(350) \quad \eta = C_1 e^{\alpha x} \sin \alpha x + C_2 e^{\alpha x} \cos \alpha x + C_3 e^{-\alpha x} \sin \alpha x + C_4 e^{-\alpha x} \cos \alpha x ,$$

come si verifica facilmente derivando quattro volte e sostituendo nella (b);  $C_1, C_2, C_3, C_4$  sono quattro costanti d'integrazione da determinare mediante le condizioni ai limiti.

<sup>(9)</sup> K. WIEGHARDT: *Ueber den Balken auf elastischer Unterlage*, *Zs. f. angew. Math. u. Mech.*, 1922, pag. 165.

La (350) si può anche scrivere nella forma

$$(350_1) \quad \eta = D_1 \operatorname{sen} ax \operatorname{senh} ax + D_2 \operatorname{sen} ax \operatorname{cosh} ax + \\ + D_3 \operatorname{cos} ax \operatorname{senh} ax + D_4 \operatorname{cos} ax \operatorname{cosh} ax,$$

essendo le costanti  $D$  legate alle  $C$  dalle relazioni seguenti

$$D_1 = C_1 - C_3, \quad D_2 = C_1 + C_3, \quad D_3 = C_2 - C_4, \quad D_4 = C_2 + C_4; \\ C_1 = \frac{D_1 + D_2}{2}, \quad C_2 = \frac{D_3 + D_4}{2}, \quad C_3 = \frac{D_2 - D_1}{2}, \quad C_4 = \frac{D_4 - D_3}{2}.$$

e) Nel caso di  $q$  costante, la (349) diventa

$$(c) \quad \eta^{IV} + 4\alpha^4 \eta = \frac{q}{EJ}, \quad \text{ossia} \quad \eta^{IV} + 4\alpha^4 \left( \eta - \frac{q}{\beta} \right) = 0;$$

e l'integrale generale è

$$(351) \quad \eta = \frac{q}{\beta} + e^{\alpha x} (C_1 \operatorname{sen} ax + C_2 \operatorname{cos} ax) + e^{-\alpha x} (C_3 \operatorname{sen} ax + C_4 \operatorname{cos} ax).$$

d) Ottenuta l'equazione  $\eta = \eta(x)$  della linea elastica, si deducono l'inclinazione  $\varphi$ , il momento flettente  $M$ , lo sforzo di taglio  $T$  e la reazione  $r$  mediante le relazioni

$$(352) \quad \varphi = \eta', \quad M = -EJ\eta'', \quad T = -EJ\eta''', \quad r = \beta\eta,$$

nelle quali le derivate hanno le seguenti espressioni

$$(d) \quad \eta' = \alpha e^{\alpha x} [(C_1 - C_2) \operatorname{sen} ax + (C_1 + C_2) \operatorname{cos} ax] + \\ + \alpha e^{-\alpha x} [-(C_3 + C_4) \operatorname{sen} ax + (C_3 - C_4) \operatorname{cos} ax],$$

$$(e) \quad \eta'' = 2\alpha^2 e^{\alpha x} (-C_2 \operatorname{sen} ax + C_1 \operatorname{cos} ax) + 2\alpha^2 e^{-\alpha x} (C_4 \operatorname{sen} ax - C_3 \operatorname{cos} ax),$$

$$(f) \quad \eta''' = 2\alpha^3 e^{\alpha x} [-(C_1 + C_2) \operatorname{sen} ax + (C_1 - C_2) \operatorname{cos} ax] + \\ + 2\alpha^3 e^{-\alpha x} [(C_3 - C_4) \operatorname{sen} ax + (C_3 + C_4) \operatorname{cos} ax].$$

## 255. Trave di lunghezza infinita.

Consideriamo la trave soggetta a un carico  $P$  concentrato in un punto qualsiasi (fig. 422 a), e supponiamo che il suolo sia reagente anche verso il basso. La trave di lunghezza infinita è un caso particolare di quello che studieremo nel n. 256; tuttavia cominciamo da questo, per la sua semplicità e per le utili indicazioni che fornisce.

Poniamo l'origine delle coordinate nel punto d'applicazione di  $P$ . È evidente anzitutto che a distanza infinita da  $P$ , ossia per  $x = \infty$ , si ha  $\eta = 0$ ; per cui nella (350) devono mancare i termini crescenti (cioè quelli con  $e^{\alpha x}$ ), e rimanere soltanto quelli decrescenti (con  $e^{-\alpha x}$ );



infinita, sono sufficientemente approssimati anche per una trave finita <sup>(11)</sup>, purchè non sia molto più corta della lunghezza d'onda  $\lambda$ . Inoltre, il principio della sovrapposizione degli effetti consente di utilizzare questi risultati anche per lo studio di condizioni di carico più complesse.

Nella fig. 422 b) sono rappresentate le variazioni di  $\eta$  e di  $M$ , a meno dei fattori costanti  $Pa/2\beta$  e  $P/4a$ . Nella tabella seguente sono riportati alcuni valori dei fattori variabili  $f_1(ax) = e^{-ax}(\sin ax + \cos ax)$  ed  $f_2(ax) = e^{-ax}(\cos ax - \sin ax)$ :

$ax$	$f_1$	$f_2$	$ax$	$f_1$	$f_2$	$ax$	$f_1$	$f_2$
0	1	1	0,9	0,5712	-0,0657	$\pi$	-0,0432	-0,0432
0,1	0,9907	0,8100	1,0	0,5083	-0,1108	3,5	-0,0389	-0,0177
0,2	0,9651	0,6398	1,2	0,3899	-0,1716	4,0	-0,0258	0,0019
0,3	0,9267	0,4888	1,4	0,2849	-0,2011	4,5	-0,0123	0,0085
0,4	0,8784	0,3564	$\pi/2$	0,2079	-0,2079	5,0	-0,0046	0,0084
0,5	0,8231	0,2415	1,8	0,1234	-0,1985	5,5	0,0000	0,0058
0,6	0,7628	0,1431	2,0	0,0667	-0,1794	6,0	0,0017	0,0031
0,7	0,6997	0,0599	2,5	-0,0166	-0,1149	$2\pi$	0,0019	0,0019
$\pi/4$	0,6448	0	3,0	-0,0423	-0,0563	6,5	0,0018	0,0012

**Esercizio 312.** - Una barra di ferro di sezione quadrata di 5 cm di lato, lunga 8 m, è vincolata a un suolo elastico di modulo  $K = 10 \text{ kg/cm}^3$  e sopporta nella parte centrale tre carichi uguali  $P = 2000 \text{ kg}$ , distanti fra loro  $d = 0,80 \text{ m}$  (fig. 423). Calcolare l'abbassamento e il momento flettente sotto il carico centrale.

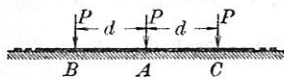


Fig. 423.

*Soluzione.* Si ha  $\beta = 10 \cdot 5 = 50 \text{ kg/cm}^3$ . Il momento d'inerzia della sezione è  $J = 5^4/12 = 52,1 \text{ cm}^4$ . Quindi

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{50}{4 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 52,1}} = 0,018385 \text{ cm}^{-1}.$$

La lunghezza d'onda risulta  $\lambda = 2\pi/0,018385 = 342 \text{ cm}$ ; per cui essendo  $l$  notevolmente maggiore di  $\lambda$ , si possono applicare con buona approssimazione i risultati del n. 255.

<sup>(11)</sup> Infatti, i fattori variabili  $e^{-ax}(\sin ax + \cos ax)$  ed  $e^{-ax}(\cos ax - \sin ax)$  contenuti nelle espressioni di  $\eta$  e di  $M$  diminuiscono molto rapidamente al crescere di  $ax$ ; quindi gli effetti  $\eta$ ,  $M$ ,  $r$  del carico  $P$  diminuiscono altrettanto rapidamente al crescere della distanza  $x$  da  $P$ . Ad. es., mentre per  $x = 0$  i due fattori sono uguali a 1, per  $ax = \pi$ , cioè per  $x = \lambda/2$ , si riducono a  $-0,0432$ ; e per  $ax = 2\pi$ , cioè per  $x = \lambda$ , si riducono a  $0,00187$ . Pertanto, a una certa distanza da  $P$  la trave rimane praticamente inerte; quindi la presenza delle parti lontane influisce poco sugli effetti che  $P$  produce nelle sue vicinanze (v. anche i nn. 256 e 257).

L'abbassamento di  $A$  è la somma di quelli dovuti a ciascun carico: essendo  $AC = x = 80$  cm e  $\alpha x = 1,47$ , per la (356) e la (353) risulta

$$\begin{aligned}\eta_a &= \frac{2000 \cdot 0,018385}{2 \cdot 50} [1 + 2e^{-1,47}(\text{sen } 1,47 + \cos 1,47)] = \\ &= 0,3677(1 + 2 \cdot 0,2519) = 0,553 \text{ cm}.\end{aligned}$$

Il momento flettente si ottiene in modo analogo dalle (357) e (355):

$$\begin{aligned}M_a &= \frac{2000}{4 \cdot 0,018385} [1 + 2e^{-1,47}(\cos 1,47 - \text{sen } 1,47)] = \\ &= 27196(1 - 2 \cdot 0,2056) = 16013 \text{ kgcm}.\end{aligned}$$

**Esercizio 313.** — Una trave di lunghezza considerevolmente maggiore di  $c$ , è caricata uniformemente su di un tratto intermedio di lunghezza  $c$  (fig. 424). Calcolare l'abbassamento e il momento flettente in un punto  $S$  del tratto caricato, distante  $a$  e  $b$  dagli estremi del tratto stesso.

*Soluzione.* Un carico elementare  $q dx$  distante  $x$  dal punto  $S$  produce in  $S$  un abbassamento  $d\eta$  e un momento flettente

$$d\eta = \frac{q dx a}{2\beta} e^{-\alpha x}(\text{sen } \alpha x + \cos \alpha x),$$

$$dM = \frac{q dx}{4\alpha} e^{-\alpha x}(\cos \alpha x - \text{sen } \alpha x).$$

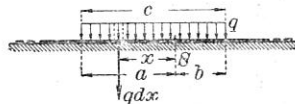


Fig. 424.

Perciò l'abbassamento e il momento flettente in  $S$  dovuti all'intero carico risultano

$$\begin{aligned}\eta &= \int_0^a \frac{q\alpha}{2\beta} e^{-\alpha x}(\text{sen } \alpha x + \cos \alpha x) dx + \int_0^b \frac{q\alpha}{2\beta} e^{-\alpha x}(\text{sen } \alpha x + \cos \alpha x) dx = \\ &= \frac{q}{2\beta} (2 - e^{-\alpha a} \cos \alpha a - e^{-\alpha b} \cos \alpha b).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M &= \int_0^a \frac{q}{4\alpha} e^{-\alpha x}(\cos \alpha x - \text{sen } \alpha x) dx + \int_0^b \frac{q}{4\alpha} e^{-\alpha x}(\cos \alpha x - \text{sen } \alpha x) dx = \\ &= \frac{q}{4\alpha^2} (e^{-\alpha a} \text{sen } \alpha a + e^{-\alpha b} \text{sen } \alpha b).\end{aligned}$$

Se  $S$  è il punto di mezzo del tratto  $c$ , si ha

$$\eta_0 = \frac{q}{\beta} \left(1 - e^{-\alpha c/2} \cos \frac{\alpha c}{2}\right), \quad M_0 = \frac{q}{2\alpha^2} e^{-\alpha c/2} \text{sen } \frac{\alpha c}{2}.$$

Se il tratto  $c$  è molto lungo e se  $a$  e  $b$  sono considerevoli,  $e^{-\alpha a}$  ed  $e^{-\alpha b}$  sono piccoli, e l'abbassamento diventa approssimativamente  $q/\beta$ ; ossia il tratto centrale si abbassa circa ugualmente in tutti i punti, e s'infilette quindi in misura trascurabile; cioè il carico  $q$  è trasmesso direttamente al suolo.

Agli estremi del tratto  $c$ , ad es. a sinistra, si ha  $a = 0$ ,  $b = c$ ,  $e^{-\alpha a} \cos \alpha a = 1$ ; e se il tratto  $c$  è lungo, si ha anche  $e^{-\alpha c} \cos \alpha c = \sim 0$ . Quindi l'abbassamento risulta approssimativamente  $q/2\beta$ , ossia metà di quello della zona centrale.