

Università di Cagliari
Corso di Laurea in Matematica
Prova scritta di Geometria 1
3 febbraio 2021

Esercizio 1

Si considerino

$$W_1 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \text{tr}(A) = 0\}$$

e

$$W_2 = L\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

- a) Dimostrare che W_1 è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$
- b) Stabilire se la somma $W_1 + W_2$ è diretta. In caso affermativo dire se $W_1 \oplus W_2 = M_2(\mathbb{R})$. In caso negativo, esibire un vettore di $W_1 + W_2$ che ammette due decomposizioni distinte come somma di un vettore di W_1 e di un vettore di W_2

Esercizio 2

Si consideri l'applicazione lineare

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$$

definita da

$$f(x_1, x_2) = 1 + (x_1 + x_2)x^2$$

dove $\mathbb{R}_2[x]$ denota lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale di 2 a coefficienti reali. Si consideri inoltre l'applicazione lineare

$$g: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

la cui matrice associata rispetto alla base $B = \{1 - x, 1 + x^2, x\}$ di $\mathbb{R}_2[x]$ e alla base $B' = \{(0,0,1), (1,0,1), (0, -1,0)\}$ di \mathbb{R}^3 è

$$M_{B'B'}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trovare $(g \circ f)(1,2)$.

Esercizio 3

Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli, stabilire per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare è compatibile ed in tali casi trovarne le soluzioni

$$\begin{cases} kx_1 + 2x_2 & = k \\ x_1 + x_2 & = 0 \\ kx_1 + 2x_2 + x_3 & = 0 \\ & 2x_3 = k \end{cases}$$

Esercizio 4

Sia V lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche di ordine 2 ed $f: V \rightarrow V$ l'endomorfismo così definito

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ a & b+c \end{pmatrix}$$

Stabilire se f è un endomorfismo diagonalizzabile