Esercizio 1

Notiamo che $\overset{v_1}{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}}, \overset{v_3}{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}}$ sono lin. indipendenti. Infatti $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tali che

$$\alpha \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

si ha $\begin{pmatrix}\alpha & \alpha-\beta\\ \gamma & \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

da cui $\begin{cases}\alpha = 0\\ \alpha - \beta = 0\\ \gamma = 0\end{cases}$ e quindi $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Per il teorema di completamento ad una base $\exists\, v_4 \in M_2(\mathbb{R})$ tale che $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è base di $M_2(\mathbb{R})$ (per esempio basta prendere $v_4 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$).

Per il teorema fondamentale delle applicazioni lineari $\exists!$ $f: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$f(v_1) = (1,0)$

$f(v_2) = (0,1)$

$f(v_3) = (1,0)$

$f(v_4) = (1,0)$

un vettore qualsiasi di $\mathbb{R}^2$ va comunque bene

Esercizio 2

$\{\underset{v_1}{(1,1,0,0)}, \underset{v_2}{(0,0,1,1)}\}$ base di $\ker(f)$

$\{\underset{v_3}{(0,0,2,0)}, \underset{v_4}{(0,2,0,1)}\}$ base di $V(2)$

$$\Rightarrow \quad f(v_1) = (0,0,0,0)$$
$$f(v_2) = (0,0,0,0)$$
$$f(v_3) = 2 \cdot v_3 = (0,0,4,0)$$
$$f(v_4) = 2v_4 = (0,4,0,2)$$

a) Mostriamo che $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è base di $\mathbb{R}^4$. Infatti

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -4 \neq 0$$

Allora $\exists! \, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tali che

$$(1,-2,1,0) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4$$
$$= (\lambda_1, \lambda_1, 0, 0) + (0,0,\lambda_2,\lambda_2) + (0,0,2\lambda_3,0) + (0, 2\lambda_4, 0, \lambda_4)$$
$$= (\lambda_1, \lambda_1 + 2\lambda_4, \lambda_2 + 2\lambda_3, \lambda_2 + \lambda_4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_4 = -2 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 1 \\ \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow 2\lambda_4 = -2-1 = -3 \rightarrow \lambda_4 = -\frac{3}{2}$

$\longrightarrow \lambda_2 = -\lambda_4 = \frac{3}{2} \Rightarrow 2\lambda_3 = 1 - \lambda_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \lambda_3 = -\frac{1}{4}$

Quindi $\quad v = 1 \cdot v_1 + \frac{3}{2} v_2 - \frac{1}{4} \cdot v_3 - \frac{3}{2} v_4$

$$\rightarrow \quad f(1,-2,1,0) = f(v)$$

$$= 1\, f(v_1) + \frac{3}{2} f(v_2) - \frac{1}{4} f(v_3) - \frac{3}{2} f(v_4)$$

$$= 0 + 0 - \frac{1}{4}(0,0,4,0) - \frac{3}{2}(0,4,0,2)$$

$$= -(0,0,1,0) - (0,6,0,1)$$

$$= (0,-6,-1,-1).$$

b) f è diagonalizzabile. Infatti 2 è autovalore, così come anche 0 (dato che $\ker(f) \neq \{0\}$).

Inoltre

$$m_a(0) \geq m_g(0) = \dim(\ker f) = 2$$

$$m_a(2) \geq m_g(2) = \dim V(2) = 2$$

Se per assurdo $m_a(0)$ fosse > 2 allora $m_a(0) + m_a(2) > 4$

mentre $\quad m_a(0) + m_a(2) \leq \deg P(\lambda) = \dim \mathbb{R}^4 = 4.$

Quindi $\quad m_a(0) = 2.$

Analogamente $\quad m_a(2) = 2.$

Deduciamo anche che non ci possono essere altri autovalori.

Esercizio 3

$$A = \begin{pmatrix} 2h & 0 & 0 & 1 \\ 0 & h & 0 & h \\ 0 & 0 & -h & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 2h & 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & h & 0 & h & 1 \\ 0 & 0 & -h & 0 & h \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (-h) \cdot \det\begin{pmatrix} 2h & 0 & 1 \\ 0 & h & h \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (-h)\cdot(-2h - 2h^2)$$

$$= 2h^2 \cdot (h+1).$$

Quindi per $h \neq 0$ e $h \neq -1$ $\rho(A) = 4 = \rho(A|B)$ e dunque il sistema ammette un'unica soluzione (è di Cramer). Risolviamolo con la formula di Cramer.

$$x_1 = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det\begin{pmatrix} h & 0 & 0 & 1 \\ 1 & h & 0 & h \\ h & 0 & -h & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2h^2(h+1)} (-h) \cdot \det\begin{pmatrix} h & 0 & 1 \\ 1 & h & h \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{h(h^2-1)}{2h^2(h+1)} = \frac{h-1}{2h}$$

$$x_2 = \frac{1}{\det(A)} \det\begin{pmatrix} 2h & h & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & h \\ 0 & h & -h & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2h^2(h+1)} (-h) \cdot \det\begin{pmatrix} 2h & h & 1 \\ 0 & 1 & h \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-2h(h^2-1)}{2h^2(h+1)} = -\frac{h-1}{h}$$

$$x_3 = \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} 2h & 0 & h & 1 \\ 0 & h & 1 & h \\ 0 & 0 & h & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2h^2(h+1)} h \cdot \det \begin{pmatrix} 2h & 0 & 1 \\ 0 & h & h \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{h(-2h-2h^2)}{2h^2(h+1)} = \frac{h(h+1)}{h+1} = h$$

$$x_4 = h - 2hx_1 = h - (h-1) = 1$$

Quindi la soluzione (unica) è $\left(\frac{h-1}{2h}, -\frac{h-1}{h}, h, 1\right)$.

- Per $h = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rho(A) = 2$ perché ci sono 2 righe nulle e la 1ª e 4ª riga sono lin. indip.

Invece $\rho(A|B) = 3$ perché $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$

Quindi il sistema non è compatibile.

- Per $h = -1$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rho(A) = 3$ perché $\det \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$.

Controlliamo l'unico minore di ordine 4 di $A|B$, orlato di

$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, che potrebbe avere $\det \neq 0$.

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -2 + 2 = 0$$

Quindi $\rho(A|B) = 3 = \rho(A)$. Il sistema è compatibile e ammette ∞^1 soluzioni. Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} -2x_1 = -1 - t \\ -x_2 = 1 + t \\ x_3 = -1 \end{cases} \qquad x_4 = t$$

da cui $S = \left\{ \left(\frac{1+t}{2}, -1-t, -1, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$

Esercizio 4

$$V = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = - x_2 - x_3 \}$$

$$= \{ (-s-t, s, t, p) : s,t,p \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ (-s, s, 0, 0) + (-t, 0, t, 0) + (0, 0, 0, p) : s,t,p \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ s(-1,1,0,0) + t(-1,0,1,0) + p(0,0,0,1) : s,t,p \in \mathbb{R} \}$$

$$= L\big(\underbrace{(-1,1,0,0)}_{v_1}, \underbrace{(-1,0,1,0)}_{v_2}, \underbrace{(0,0,0,1)}_{v_3} \big)$$

v_1, v_2, v_3 sono anche lin. indip. perché $\rho \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$.

Quindi $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è base di V.

$$f(v_1) = f(-1,1,0,0) = (-2, 2, 0, 0) = 2(-1,1,0,0) = 2v_1$$

$$f(v_2) = f(-1,0,1,0) = (3,-1,-2,0) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$$

$$= \alpha(-1,1,0,0) + \beta(-1,0,1,0) + \gamma(0,0,0,1)$$

$$= (-\alpha-\beta, \alpha, \beta, \gamma)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha - \beta = 3 \\ \alpha = -1 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow f(v_2) = -1 \cdot v_1 - 2 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$$

$$f(v_3) = (1, -1, 0, -2) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = (-\alpha-\beta, \alpha, \beta, \gamma)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha-\beta = 1 \\ \alpha = -1 \\ \beta = 0 \\ \gamma = -2 \end{cases} \Rightarrow f(v_3) = -1\,v_1 + 0\,v_2 - 2\,v_3$$

$$A = M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(2+\lambda)^2$$

Abbiamo dunque due autovalori: $\lambda = 2$, $\lambda = -2$.

$m_a(2) = 1$, $m_a(-2) = 2$.

$$v = x\,v_1 + y\,v_2 + z\,v_3 \in V(-2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = -2x \\ -2y = -2y \\ -2z = -2z \end{cases} \Leftrightarrow 4x - y - z = 0 \Leftrightarrow y = 4s - t$$

con $x = s$, $z = t$

Quindi

$$V(2) = \{ s\,v_1 + (4s-t)\,v_2 + t\,v_3 : s,t \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ s\,(v_1 + 4v_2) + t\,(-v_2 + v_3) : s,t \in \mathbb{R} \}$$
$$= L(v_1 + 4v_2,\ -v_2 + v_3)$$

$$\Rightarrow \quad m_g(-2) = 2 = m_a(-2)$$

$$v = x v_1 + y v_2 + z v_3 \in V(2) \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2x - y - z = 2x \\ -2y = 2y \\ -2z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} -y - z = 0 \\ 4y = 0 \\ 4z = 0 \end{cases} \iff \cancel{x}\, y = z = 0$$

$$\iff V(2) = \{ s v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 \ : \ s \in \mathbb{R} \}$$
$$= L(v_1).$$

Allora $m_g(2) = 1 = m_a(1)$ (cosa che già sapevamo).

f è diagonalizzabile e una base di V formata da autovettori di f è

$$\{ v_1 + 4v_2, \ -v_2 + v_3, \ v_1 \} =$$
$$= \{ (-5, 1, 4, 0), (1, 0, -1, 1), (-1, 1, 0, 0) \}.$$