Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

17 febbraio 2021

Esercizio 1

Dire se esiste una applicazione lineare $f: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,0), \qquad f\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0,1), \qquad f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (1,0)$$

Esercizio 2

Sia $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare tale che una base nel nucleo di f è data da {(1,1,0,0), (0,0,1,1)} e 2 è un autovalore di f con relativo autospazio $V(2) = L((0,0,2,0), (0,2,0,1))$

a) Trovare $f(1,-2,1,0)$
b) f è diagonalizzabile?

Esercizio 3

Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli, stabilire per quali valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare è compatibile ed in tali casi trovarne le soluzioni

$$\begin{cases} 2hx_1 + x_4 = h \\ hx_2 + hx_4 = 1 \\ -hx_3 = h \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4

Si consideri l'endomorfismo f dello spazio vettoriale

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

Tale che, per ogni $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V$.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2x_2 + 3x_3 + x_4, x_1 + 3x_2 - x_4, -2x_3, -2x_4)$$

Stabilire se f è diagonalizzabile e in caso affermativo determinare una base di V formata da autovettori di f.