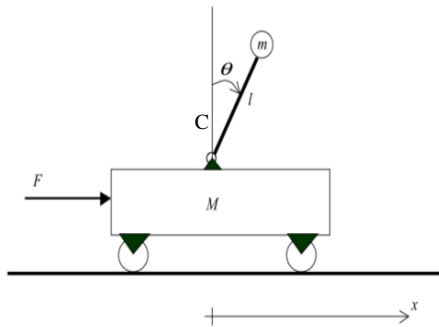


## Esercitazione di Analisi e Controllo dei Sistemi Multivariabili - 5

Siano date le equazioni non lineari che descrivono il comportamento dinamico del sistema “carrello + pendolo inverso”:



$$\begin{cases} ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos(\theta) - mgl\sin(\theta) = C \\ (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta}\cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) = F \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M &= 5kg & m &= 1kg \\ b &= \frac{0.5Ns}{m} & l &= 0.5m \\ g &= \frac{9.81m}{s^2} \end{aligned}$$

dove  $F[N]$  e  $C[Nm]$  denotano rispettivamente la forza di controllo agente sul carrello, e la coppia di controllo al giunto tra carrello e asta.

Definito il vettore di stato come  $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x}]^T$ , si richiede di:

- valutare il modello dinamico in Variabili di Stato (VS) a piccolo segnale del sistema, in un intorno del suo punto di equilibrio instabile;
- si definisca, se possibile, una legge di controllo con retroazione statica dello stato tale che gli autovalori per il sistema controllato siano, risp.,  $\Lambda_{pendolo} = \{-15, -20\}$  per le VS associate all'energia del pendolo, e  $\Lambda_{carrello} = \{-3, -5\}$  per le VS associate all'energia del carrello;
- Ipotizzate misurabili l'inclinazione dell'asta  $x_1 \equiv \theta(t)$  e la posizione del carrello  $x_3 \equiv x(t)$ , i.e.  $y = [x_1, x_3]^T$ , se possibile, si progetti un nuovo sistema di controllo con retroazione statica dell'uscita, tale da garantire le medesime specifiche.
- Validare la leggi di controllo sviluppate in ambiente Matlab/Simulink.

### Bonus:

- Modificare opportunamente il sistema di controllo al fine di poter assegnare arbitrariamente la posizione del carrello, mantenendo invariato l'equilibrio del pendolo, i.e.,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 0 \quad , \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_3(t) = x_3^* \in \mathbb{R}$$

e giustificare il risultato.

- Si ripeta il progetto nell'ipotesi che il pendolo sia sotto-attuato, i.e.,  $C(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ .

## Traccia Soluzione

Di seguito si riporta il modello matematico a piccolo segnale del sistema in un intorno del suo punto di equilibrio instabile, i.e.,

$$x_1 = \theta(t) \approx 0, \quad x_2 = \dot{\theta}(t) \approx 0, \quad x_3 = x, \quad x_4 = \dot{x}, \quad \forall \quad x, \dot{x} \in \mathfrak{R}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{g(m+M)}{Ml} & 0 & 0 & \frac{b}{Ml} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{g \cdot m}{M} & 0 & 0 & -\frac{b}{M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{(m+M)}{mMl^2} & -\frac{1}{Ml} \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{Ml} & \frac{1}{M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C \\ F \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} M &= 5kg & m &= 1kg \\ b &= \frac{0.5Ns}{m} & l &= 0.5m \\ g &= \frac{9.81m}{s^2} \end{aligned}$$

Essendo richiesto di realizzare una retroazione completa sullo stato tale da permettere a ciclo chiuso un assegnamento poli, ma essendo lo stato del sistema non completamente accessibile (in quanto si dispone esclusivamente della misura di posizione angolare dell'asta, e della posizione del carrello) sarà necessario progettare un osservatore dello stato.

In particolare, nel seguito progetteremo una legge in retroazione

$$U(t) = -\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{x}}(t)$$

- dove  $U = [C, F]^T$  è il segnale di comando;
- $\mathbf{K}$  è la matrice ottenuta assegnando opportunamente gli autovalori desiderati alla matrice  $\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{K}$  come se lo stato del sistema fosse realmente completamente accessibile;
- $\hat{\mathbf{x}}(t)$  è la stima dello stato ottenuta mediante un osservatore asintotico dello stato meglio noto come di Osservatore di Luemberger

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B} \cdot U(t) - \mathbf{L} \cdot (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

la cui matrice  $\mathbf{L}$  è scelta in modo da assegnare opportunamente gli autovalori alla matrice  $\mathbf{A} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{C}$  al fine di garantire una convergenza pressoché istantanea a zero dell'errore tra stato effettivo e stato reale del sistema

$$\mathbf{e}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)$$

rispetto alla dinamica del sistema sotto controllo.

A dimostrazione di quanto affermato notiamo che definito il nuovo vettore di stato:

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}$$

Si ottiene la seguente dinamica autonoma:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & -\mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{LC} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Da cui una volta che  $\mathbf{e}(t) \rightarrow 0$ , l'aver retroazionato la stima dello stato del sistema anziché lo stato reale di quest'ultimo non produrrà alcuna sostanziale differenza.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) - \mathbf{BK}\hat{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \cdot \mathbf{x}(t) - \mathbf{BK} \cdot \mathbf{e}(t) \approx (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \cdot \mathbf{x}(t)$$

Da notare però che la scelta della matrice  $\mathbf{L}$  è di fondamentale importanza per la buona riuscita della regolazione, in quanto affinché le azioni di controllo atte sul sistema  $-\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{x}}(t)$  siano coerenti con quanto sta avvenendo sul sistema stesso  $\mathbf{x}(t)$ , allora la dinamica dell'osservatore dovrà essere molto più rapida di quella del sistema sotto controllo. L'unico vincolo quindi è che l'osservatore debba avere il suo polo dominante approssimativamente una decade avanti rispetto al più rapido dei poli delle matrici  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$  ed  $\mathbf{A}$ .

Posto  $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]$  da un'analisi numerica, vedi codice matlab a fine documento, risulta che il nostro sistema MIMO risulta meglio condizionato scegliendo la seguente matrice di controllabilità:

$$\mathbf{C}_o = [\mathbf{b}_1 \mathbf{A}\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{A}\mathbf{b}_2] \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

Per cui, progetteremo il sistema di controllo affinché la dinamica desiderata presenti la seguente struttura a blocchi di Jordan:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_{des} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{A}_G \cdot \mathbf{z} + \mathbf{B}_G \cdot \mathbf{u} \quad \text{con} \quad \mathbf{u} = -\mathbf{K}_c \cdot \mathbf{z} \quad (2)$$

$$\Lambda\{\mathbf{A}_G - \mathbf{B}_G \mathbf{K}_c\} = \Lambda\{\mathbf{A}_{des}\} \quad (2.a)$$

$$\mathbf{A}_{des} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -300 & -35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -15 & -8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.b)$$

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{B}_G^T \cdot (\mathbf{A}_G - \mathbf{A}_{des}) \quad (2.c)$$

Poiché il sistema da controllare si trova in un differente spazio di stato

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \quad \text{con} \quad \mathbf{u} = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{x} \quad (3)$$

con  $\mathbf{K}$  incognito. La sola maniera per risolvere il problema è quella di portare il sistema (3) nel medesimo spazio di stato del sistema (2) e quindi noto il  $\mathbf{K}_c$  tale da garantire l'assegnamento poli sul sistema nel riferimento  $\mathbf{z}$  (ricavato nella (2.c)), ricavare la matrice/vettore  $\mathbf{K}$  necessario per garantire l'assegnamento poli nello spazio di stato  $\mathbf{x}$  in cui si trova il motore.

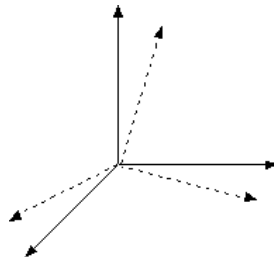


Figura 1. Sistemi di riferimento cartesiani differenti.

Iniziamo quindi col **riportare il sistema (3) in forma compagna controllabile** attraverso la seguente trasformazione di similitudine:

$$z = T^{-1} \cdot x \quad (4)$$

con

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \cdot A^{\gamma_1} \\ \alpha_2 \\ \alpha_2 \cdot A^{\gamma_2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

Dove  $\alpha_1$  ed  $\alpha_2$  sono la seconda e quarta riga dell'inversa della matrice di controllabilità del sistema, in accordo con la struttura scelta in (2.b), mentre  $\gamma_1$  ed  $\gamma_2$  sono i rispettivi invarianti del controllo. Nel caso in analisi  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$  visto che,

$$C_o = [b_1 A^{\gamma_1} b_1 \quad b_2 A^{\gamma_2} b_2] = \begin{bmatrix} * \\ \alpha_1 \\ * \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

Combinando la (3) e la (4) si ottiene:

$$\dot{z} = A_c \cdot z + B_c \cdot u \quad (5)$$

con

$$A_c = T^{-1}AT, \quad B_c = T^{-1}B \quad (5.a)$$

A questo punto dovremo **riportare il sistema (5) in forma compagna generalizzata**, meglio nota come forma di Brunovsky. A tal fine definito

$$u = F \cdot w \quad (6)$$

con

$$F : \quad B_G = B_c \cdot F \quad , \quad B_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.a)$$

e ricordando che  $B_G$  è una matrice ortogonale:

$$B_G^T \cdot B_G = I \quad (6.b)$$

otteniamo  $F$  come segue:

$$I = B_G^T \cdot B_c \cdot F \rightarrow F^{-1} = B_G^T \cdot B_c = B_G^T \cdot T^{-1}B \rightarrow F = (B_G^T \cdot T^{-1}B)^{-1} \quad (6.c)$$

A questo punto, avendo la matrice degli ingressi in forma generalizzata non ci rimane che riportare anche la matrice di stato in forma generalizzata.

Definiamo quindi

$$w = v - H \cdot z \quad (7)$$

e sostituiamo a catena rispettivamente prima nella (6) e poi nella (5). Il risultato è il seguente:

$$\dot{z} = A_c \cdot z + B_G \cdot (v - H \cdot z) = A_G \cdot z + B_G \cdot v \quad (8)$$

con

$$A_G = (A_c - B_G H) \rightarrow H = B_G^T \cdot (A_c - A_G)$$

Dopo questa serie di trasformazioni abbiamo che il sistema (3) si trova nel medesimo spazio vettoriale del sistema (2) per cui posto

$$v = -K_c \cdot z \quad (9)$$

dalla (2) si ricava il  $K_c$  come in (2.c):

$$A_{des} = A_G - B_G \cdot K_c \rightarrow K_c = B_G^T \cdot (A_G - A_{des}) \quad (10)$$

A questo punto percorrendo la catena di trasformazioni a ritroso, dalla (7), (8), (9) e (10) si ottiene:

$$w = v - H \cdot z = -(K_c + H) \cdot z = -\left(B_G^T \cdot (A_G - A_{des}) + B_G^T \cdot (A_c - A_G)\right) \cdot z \quad (11)$$

Quindi sostituendo nella (6) la (11) e la (5.a) si ottiene

$$u = F \cdot w = -(B_G^T \cdot T^{-1}B)^{-1} \cdot B_G^T \cdot (A_c - A_{des}) \cdot z = -(B_G^T \cdot T^{-1}B)^{-1} B_G^T \cdot (T^{-1}AT - A_{des}) \cdot z$$

infine ricordando dalla (4) che  $z = T^{-1} \cdot x$  si ottiene:

$$u = -K \cdot x = F \cdot w = -\left[(B_G^T \cdot T^{-1}B)^{-1} B_G^T \cdot (T^{-1}AT - A_{des}) \cdot T^{-1}\right] \cdot x$$

$$K = (B_G^T \cdot T^{-1}B)^{-1} B_G^T \cdot (T^{-1}AT - A_{des}) \cdot T^{-1} \quad (12)$$

Per quanto riguarda invece il progetto dell'osservatore sulla base del principio di dualità di Kalman [Ref. *Analisi dei sistemi dinamici, Giua et all. pp.415*] siamo in grado di progettare l'osservatore asintotico dello stato

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A \cdot \hat{x}(t) + B \cdot U(t) - L \cdot (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C \cdot \hat{x}(t) \end{cases}$$

ed in particolare la matrice  $L$ , risolvendo il problema di controllo associato al sistema duale.

Per cui, essendo il sistema in analisi

$$\begin{cases} \dot{x} &= A \cdot x + B \cdot u \\ y &= C \cdot x \end{cases} \quad (13)$$

osservabile, per la coppia di uscite considerata, per il principio di dualità di Kalman il sistema (14) sarà controllabile.

$$\begin{cases} \dot{s} &= A_d \cdot s + B_d \cdot r \\ j &= C_d \cdot s \end{cases} \quad \text{con} \quad A_d = A^T, B_d = C^T, C_d = B^T \quad (14)$$

Per cui scelti gli autovalori per l'osservatore, sufficientemente più grandi del massimo autovalore del sistema, ad esempio quattro autovalori coincidenti in  $-1000^1$

$$\Lambda\{A - LC\} = \Lambda\{A_d - B_d K_d\} = \Lambda \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1000000 & -2000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1000000 & -2000 \end{bmatrix} \right\}$$

applicando la (12) si ottiene:

$$K_d = (B_{Gd}^T \cdot T_d^{-1}B_d)^{-1} B_{Gd}^T \cdot (T_d^{-1}AT_d - A_{des}) \cdot T_d^{-1}$$

---

<sup>1</sup> Si sarebbe potuti scegliere semplicemente una decade più grandi del massimo autovalore previsto per il sistema di controllo, il motivo di questa scelta è che questo set di autovalori presenta ottime prestazioni, in simulazione, anche nel caso in cui si sostituisca al processo il suo modello non lineare, come avverrebbe nella realtà.

Dove le matrici  $B_{Gd}$ ,  $T_d$  ed  $A_{des}$  sono state scelte in accordo con la precedente trattazione. Infine si ottiene la matrice  $L$  semplicemente trasponendo  $K_d$

$$L = K_d^T$$

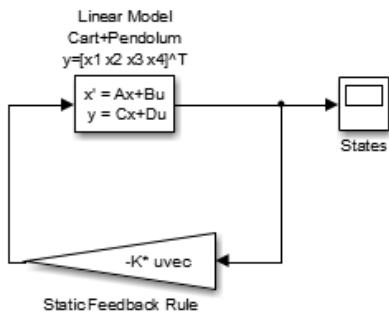
Attraverso il seguente script Matlab si ottengono i valori delle matrici  $K$  ed  $L$ .

```
clc; clear all; close all;
% Parametri del sistema pendolo inverso:
M=5; m=1; l=0.5; b=0.5; g=9.8;
xzero=0.1; xpuntozero=0.1; thetazero=0; thetapuntozero=0;
x_0=[thetazero thetapuntozero xzero xpuntozero]
disp('Matrici del modello VDS')
A=[0,1,0,0; g*(m+M)/(M*l),0,0,b/(M*l); 0,0,0,1;-g*m/M,0,0,-b/M];
b1=[0; (M+m)/(m*M*l); 0;-1/(M*l)]; b2=[0;-1/(M*l); 0;1/M]; B=[b1,b2]; C=[1 0 0 0;
0 0 1 0]; D=zeros(2,2)
fprintf('\nMatrici del modello VDS:\n')
A, B, C, D, x_0
%% Studiamo la controllabilita
fprintf('\nAnalisi della controllabilita con i due ingressi:\n')
Mcontr=ctrb(A,B);
fprintf('\nIl sistema è controllabile: rank([B A*B A^2*B]) = %d\n',rank(Mcontr))
%% Studiamo l'osservabilita
fprintf('\nAnalisi della osservabilita misurando x e theta:\n')
Moss=obsv(A,C);
fprintf('\nIl sistema è osservabile: rank([C; C*A C*A^2]) = %d\n',rank(Moss))
fprintf('\nNotare che l\'analisi della osservabilita\' non viene influenzata dal
numero dei controlli!\n');
%% Valutiamo ora se il sistema risulta controllabile con un solo ingresso
fprintf('\nValutiamo ora se il sistema risulta controllabile con un solo
ingresso:\n')
fprintf('\nAnalisi della controllabilita con 1 solo ingresso (coppia
pendolo)\n')
Co1=ctrb(A,b1);%comando rapido per calcolare la matrice di controllabilità
rank(Co1), det(Co1), cond(Co1)
fprintf('\nIl sistema NON è controllabile:\n\t rank([C; C*A C*A^2]) =
%d\n',rank(Co1))
%%
disp('Analisi della controllabilita con 1 solo ingresso (forza sul carrello)')
Co2=ctrb(A,b2)
det(Co2), rank(Co2), cond(Co2)
%% gamma1=2, gamma2=2
disp('gamma1=2, gamma2=2')
Co3=[b1 A*b1 b2 A*b2]
det(Co3), rank(Co3), cond(Co3)
%% gamma1=3, gamma2=1
disp('gamma1=3, gamma2=1')
Co4=[b1 A*b1 A^2*b1 b2]
det(Co4), rank(Co4), cond(Co4)
%% gamma1=1, gamma2=3
disp('gamma1=1, gamma2=3')
Co5=[b1 b2 A*b2 A^2*b2]
det(Co5), rank(Co5), cond(Co5)
%% abbiamo scelto gamma1=gamma2=2 perché era il sistema meglio condizionato
% Avremo potuto scegliere anche gamma2=4 gamma1=0
disp('Progetto controllore che assegna i poli in [-25 -50 -3 -5]')
Co=[b1 A*b1 b2 A*b2];
invCo=inv(Co);
invT=[invCo(2,:);invCo(2,:)*A;invCo(4,:);invCo(4,:)*A];
T=inv(invT);
Bg=[0,0;1,0;0,0;0,1]
```

```

%% Costruiamo la matrice degli autovalori desiderati:
P1 = poly([-25 -50]);
P2 = poly([-3 -5]);
Ades1=[0,1; -P1(3),-P1(2)];
Ades2=[0,1; -P2(3),-P2(2)];
Ades=[Ades1 zeros(2,2); zeros(2,2) Ades2]
% vedi dimostrazione fotocopie
K=(Bg'*T^-1*B)^-1*Bg'*(T^-1*A*T-Ades)*T^-1
% Comando Alternativo che calcola direttamente K (vedi "help place")
K1= place(A,B,[-50 -25 -5 -3])
eig(A-B*K)
eig(A-B*K1)
%%
clc
disp('Progetto osservatore')
Ad=A'; Bd=C'; Cd=B';
b1d=Bd(:,1); b2d=Bd(:,2);
Cod=[Bd Ad*Bd Ad^2*Bd]
rank(Cod) %rango 4
%% gamma1=2, gamma2=2
clc
disp('gamma1=2, gamma2=2')
Co3d=[b1d Ad*b1d b2d Ad*b2d]
det(Co3d)
rank(Co3d) % rank = 4
cond(Co3d) % cond = 30
%%
Cod=Co3d
invCod=inv(Cod);
invTd=[invCod(2,:);invCod(2,:)*Ad;invCod(4,:);invCod(4,:)*Ad];
Td=inv(invTd);
Bgd=[0,0;1,0;0,0;0,1]
%% Costruiamo la matrice degli autovalori a ciclo chiuso per l'osservatore:
Pd = poly([ -100 -100]);
Adesd=[0,1; -Pd(3),-Pd(2)];
Adesd=[Adesd zeros(2,2); zeros(2,2) Adesd]
%%
Kd=(Bgd'*Td^-1*Bd)^-1*Bgd'*(Td^-1*Ad*Td-Adesd)*Td^-1
K1d= place(Ad,Bd,[-100 -100.01 -100 -100.03])
eig(Ad-Bd*Kd)
eig(Ad-Bd*K1d)
L=Kd'
eig(Ad-Bd*Kd)
eig(A-L*C)
%%
% Si noti che se non avessimo avuto accessibile la posizione del pendolo
% avremo cmq potuto completamente lo stato del sistema
% utilizzando la sola posizione del carrello in quanto il sistema risulta
% ancora ben condizionato
clc
Co2d=ctrb(Ad,b2d)
det(Co2d)
rank(Co2d) % rank = 4
cond(Co2d) % cond = 2.0680

```



Function Block Parameters: Linear Model Cart+Pen...

State Space

State-space model:  
 $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$   
 $y = Cx + Du$

Parameters

A:  
A

B:  
B

C:  
eye(4)

D:  
zeros(4,2)

Initial conditions:  
x\_0

OK Cancel Help Apply

Function Block Parameters: Integrator

Integrator

Continuous-time integration of the input signal.

Parameters

External reset: none

Initial condition source: internal

Initial condition:  
[0 0 0 0]

☐ Limit output

Upper saturation limit:  
inf

Lower saturation limit:  
-inf

☐ Show saturation port

☐ Show state port

Absolute tolerance:  
auto

☐ Ignore limit and reset when linearizing

☒ Enable zero crossing detection

OK Cancel Help Apply

