DISEGUAGLIANZA DI SOBOLEV IN DIMENSIONE 1

NICOLA PIRAS

A.A. 2019/2020

Introduzione

Questa tesina ha lo scopo di analizzare ed approfondire alcuni argomenti trattati durante il corso di analisi superiore 2.

In particolare verranno definiti gli spazi di Sobolev in dimensione 1 e enunciati e dimostrati alcuni importanti risultati validi per essi.

Si potrà così essere in grado di sviluppare un prototipo della diseguaglianza di Sobolev studiata durante il corso nel caso di spazi in dimensione $N \geq 2$.

Il lavoro è stato svolto basandosi sul capitolo 8 del testo :
Haim Brezis,$Functional\ Analysis\ ,Sobolev\ Spaces\ and\ Partial\ Differential\ Equations.$

Verranno in particolare riportati riferimenti specifici a tale testo per i risultati riportati senza dimostrazione.

Sia I un intervallo (anche illimitato) e sia $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq \infty$

Definizione 1. Lo spazio di Sobolev $\mathcal{W}^{1,p}(I)$ è definito nel modo seguente:

$$\mathcal{W}^{1,p}(I) = \{u \in L^p(I); \exists\, g \in L^p(I)\, tale\, che \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi, \forall \varphi \in C_c^1(I)\}$$

Per $u \in \mathcal{W}^{1,p}(I)$ denotiamo la funzione g con u' e la chiamiamo derivata debole.

Osservazione 1. La funzione test φ può essere presa indifferentemente in $C_c^1(I)$ o $C_c^\infty(I)$ in quanto se $\varphi \in C_c^1(I)$, allora $\rho_n \star \varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(I)$ per n abbastanza grande (con $(\rho_n)\, mollificatori$) e $\rho_n \star \varphi \to \varphi$ in $C^1(I)$.

Lo spazio $\mathcal{W}^{1,p}(I)$ è munito della norma:

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \|u'\|_p$$

(per $1 < p < \infty$ si può utilizzare la norma equivalente $\|u\|_{1,p} = [\|u\|_p + \|u'\|_p]^{\frac{1}{p}}$)

Proposizione 1. *Lo spazio* $\mathcal{W}^{1,p}(I)$ *è uno spazio di Banach per* $1 \leq p \leq \infty$ *, è riflessivo per* $1 < p < \infty$ *e separabile per* $1 \leq p < \infty$

Dimostrazione. Sia (u_n) una successione di Cauchy in $\mathcal{W}^{1,p}(I)$.
Allora (u_n) e (u_n') sono di Cauchy in $L^p(I)$ che è completo, per cui: $u_n \to u$ in $L^p(I)$ e $u_n' \to g$ in $L^p(I)$. Si ha

$$\int_I u_n\varphi' = -\int_I u_n'\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^1(I)$$

da cui passando al limite $(\varphi, \varphi' \in L^{p'}(I))$

$$\int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^1(I)$$

da cui $u \in \mathcal{W}^{1,p}(I)$ con $g = u'$ e $\|u_n - u\|_{1,p} = \|u_n - u\|_p + \|u_n' - u'\|_p \longrightarrow 0$ ovvero $u_n \to u$ in $\mathcal{W}^{1,p}(I)$.

Sia $Y = L^p(I) \times L^p(I)$ e sia $T : \mathcal{W}^{1,p}(I) \longrightarrow Y$ definito da $T(u) = (u, u')$. $T \in \mathcal{L}(\mathcal{W}^{1,p}(I), Y)$ ed è un'isometria, quindi $T(\mathcal{W}^{1,p}(I))$ è un sottospazio chiuso di Y che è riflessivo per $1 < p < \infty$, e separabile per $1 \leq p < \infty$,per cui anche $T(\mathcal{W}^{1,p}(I))$ è riflessivo per $1 < p < \infty$ e separabile per $1 \leq p < \infty$, e quindi anche $\mathcal{W}^{1,p}(I)$. $\square$

Riportiamo ora una serie di risultati di cui faremo uso per dimostrare la diseguaglianza di Sobolev.

Lemma 1. *Sia $f \in L^1_{loc}(I)$ tale che*

$$\int_I f\varphi' = 0 \qquad \forall \varphi \in C^1_c(I)$$

Allora esiste una costante C tale che $f = C$ q.o in I

Dimostrazione. Sia $\psi \in C_c(I)$ tale che $\int_I \psi = 1$. Per ogni funzione $\omega \in C_c(I)$ consideriamo la funzione

$$h = \omega - \left(\int_I \omega \right) \psi$$

questa è continua e a supporto compatto in I e, poichè $\int_I h = 0$, h ammette un'unica primitiva a supporto compatto.

Esiste quindi $\varphi \in C^1_c(I)$ tale che

$$\varphi' = \omega - \left(\int_I \omega \right) \psi$$

Dall'ipotesi segue che

$$\int_I f \left[\omega - \left(\int_I \omega \right) \psi \right] = 0 \qquad \forall \omega \in C_c(I)$$

ovvero

$$\int_I \left[f - \left(\int_I f\psi \right) \right] \omega = 0 \qquad \forall \omega \in C_c(I)$$

da cui segue che

$$f - \left(\int_I f\psi \right) = 0 \quad \text{q.o in } I$$

cioè $f = C$ q.o, con $C = \int_I f\psi$

□

Lemma 2. *Sia $g \in L^1_{loc}(I)$, fissato y_0 in I, poniamo*

$$v(x) = \int_{y_0}^{x} g(t)dt \qquad\qquad x \in I.$$

Allora $v \in C(I)$ e

$$\int_I v\varphi' = - \int_I g\varphi \qquad\qquad \forall \varphi \in C^1_c(I)$$

Dimostrazione. Si ha

$$\int_I v\varphi' = \int_I \left[\int_{y_0}^{x} g(t)dt\right]\varphi'(x)dx =$$
$$= -\int_a^{y_0} dx \int_x^{y_0} g(t)\varphi'(x)dt + \int_{y_0}^{b} dx \int_{y_0}^{x} g(t)\varphi'(x)dt$$

Applicando ora il teorema di Fubini otteniamo

$$\int_I v\varphi' = -\int_a^{y_0} g(t)dt \int_a^{t} \varphi'(x)dx + \int_{y_0}^{b} g(t)dt \int_t^{b} \varphi'(x)dx$$
$$= -\int_I g(t)\varphi(t)dt$$

□

Proposizione 2. *Sia $u \in \mathcal{W}^{1,p}(I)$, $1 \leq p \leq \infty$, allora esiste una funzione $\tilde{u} \in C(\bar{I})$ tale che :*

$$u = \tilde{u} \ \textit{q.o su } I$$

e

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt \quad \forall x, y \in \bar{I}$$

Dimostrazione. Fissiamo $y_0 \in I$ e poniamo $\bar{u}(x) = \int_{y_0}^{x} u'(t)dt$. Per il lemma 2 si ha

$$\int_I \bar{u}\varphi' = -\int_I u'\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^1(I)$$

Dunque, ricordando la definizione di derivata debole, $\int_I (u - \bar{u})\varphi' = 0$ $\forall \varphi \in C_c^1(I)$. Dal lemma 1 segue che $u - \bar{u} = C$ q.o. Pertanto la funzione $\tilde{u}(x) = \bar{u}(x) + C$ gode delle proprietà cercate. □

Osservazione 2. Questo lemma mostra che la primitiva v di una funzione g di L^p appartiene a $\mathcal{W}^{1,p}$ se $v \in L^p$,il che è sempre vero se I è limitato.

Proposizione 3. *Sia $u \in L^p(I)$ con $1 < p \leq \infty$ .Le seguenti proprietà sono tra loro equivalenti:*

(i) $u \in \mathcal{W}^{1,p}(I)$

(ii) *Esiste una costante C tale che*

$$\left|\int_I u\varphi'\right| \leq C\|\varphi\|_{p'} \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(I)$$

dove possiamo prendere $C = \|u'\|_p$

Dimostrazione. $(i) \Longrightarrow (ii)$
Utilizzando la diseguaglianza di Hölder(pensando $u' \in L^p(I)$ e $\varphi \in L^{p'}(I)$) otteniamo

$$\left|\int_I u\varphi'\right| = \left|\int_I u'\varphi\right| \leq \|u'\|_p \|\varphi\|_{p'}$$

$(ii) \Longrightarrow (i)$ Sia

$$\psi(\varphi) = \int_I u\varphi' dx \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(I)$$

Quindi $\psi : C_c^\infty(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ è un funzionale lineare continuo per la norma di $L^{p'}$. Per ipotesi abbiamo $|\psi(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_{p'}$, quindi $C_c^\infty(I) \subset L^{p'}(I)$ è dominato da tale seminorma,per cui applicando il teorema di Helly-Hahn-Banach possiamo dire che esiste $\tilde{\psi} \in (L^{p'}(I))^*$ tale che

$$\tilde{\psi}(\varphi) = \psi(\varphi) \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(I)$$

e

$$|\tilde{\psi}(v)| \leq C\|v\|_{p'} \qquad \forall v \in L^{p'}(I)$$

Inoltre per il teorema di rappresentazione di Riesz esiste $g \in L^p(I)$ tale che

$$\tilde{\psi}(v) = \int_I gv\, dx \quad \forall v \in L^{p'}(I)$$

Da cui in particolare

$$\int_I u\varphi' dx = \int_I g\varphi dx$$

e dunque $u \in \mathcal{W}^{1,p}(I)$

□

Proposizione 4. *Sia $u \in L^p(\mathbb{R})$ con $1 < p < \infty$ .Le seguenti proprietà sono tra loro equivalenti:*

(i) $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R})$

(ii) *Esiate una costante C tale che* $\|\tau_h u - u\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C|h| \qquad \forall h \in \mathbb{R}$

dove possiamo prendere $C = \|u'\|_{L^p(\mathbb{R})}$.

Ricordiamo che l'operatore di traslazione è definito nel modo seguente:

$$(\tau_h u)(x) = u(x+h)$$

Dimostrazione. $(i) \Longrightarrow (ii)$
Per ogni x e h in $\mathbb{R}$,per la proposizione 2, si ha

$$u(x+h) - u(x) = \int_x^{x+h} u'(t)dt = h\int_0^1 u'(x+sh)ds$$

da cui applicando la diseguaglianza di Hölder otteniamo

$$|u(x+h)-u(x)|^p \leq |h|^p \int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds$$

da ciò segue che

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x+h)-u(x)|^p dx \leq |h|^p \int_{\mathbb{R}} dx \int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds \leq |h|^p \int_0^1 ds \int_{\mathbb{R}} |u'(x+sh)|^p dx$$

La tesi segue osservando che per $0 < s < 1$

$$\int_{\mathbb{R}} |u'(x+sh)|^p dx = \int_{\mathbb{R}} |u'(y)|^p dy$$

(ii) $\Longrightarrow$ *(i)*
Sia $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$.
Per ogni $h \in \mathbb{R}$ utilizzando l'ipotesi e la diseguaglianza di Hölder si ha

$$\left| \int_{\mathbb{R}} [u(x+h)-u(x)]\varphi(x)dx \right| \leq C|h| \|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}$$

o equivalentemente

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u(x)[\varphi(x-h)-\varphi(x)]dx \right| \leq C|h| \|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}$$

da cui dividendo per $|h|$ e passando al limite per $h \to 0$ otteniamo

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u\varphi' \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}$$

Applicando la proposizione 3 concludiamo quindi che $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R})$ $\square$

Affrontiamo ora la teoria di densità ed estensione.

Teorema 1 (Operatore di estensione)**.** *Sia $1 \leq p \leq \infty$.Esiste un operatore di prolungamento $E : \mathcal{W}^{1,p}(I) \to \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R})$ lineare e continuo tale che:*

(i) $Eu_{|I} = u \qquad \forall u \in \mathcal{W}^{1,p}(I)$

(ii) $\|Eu\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{L^p(I)} \qquad \forall u \in \mathcal{W}^{1,p}(I)$

(iii) $\|Eu\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(I)} \qquad \forall u \in \mathcal{W}^{1,p}(I)$

dove C dipende solo da $|I| \leq \infty$

Dimostrazione. Consideriamo inizialmente il caso $I = (0, +\infty)$
Definiamo il prolungamento per riflessione nel modo seguente:

$$(Eu)(x) = u^\star(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \geq 0 \\ u(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

In primo luogo risulta quindi $\|u^\star\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|_{L^p(I)}$

Poniamo ora

$$v(x) = \begin{cases} u'(x) & \text{se } x > 0 \\ -u'(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Si ha che $v \in L^p(\mathbb{R})$ e $u^\star(x) - u^\star(0) = \int_0^x v(t)dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
quindi per l'osservazione 2, $u^\star \in \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R})$ e

$$\|u^\star\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(I)}$$

Consideriamo ora il caso di un intervallo limitato I,senza perdita di generalità ci si può sempre ricondurre al caso $I = (0, 1)$.
Fissiamo una funzione $\eta \in C^1(\mathbb{R})$, con $0 \leq \eta \leq 1$ e tale che

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{se } x > \frac{3}{4} \end{cases}$$

Data una funzione u in $(0, 1)$ poniamo

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Sia $u \in \mathcal{W}^{1,p}(I)$ e $\varphi \in C_c^1((0, \infty))$, si ha

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \eta\tilde{u}\varphi' = \int_0^1 \eta u\varphi' = \int_0^1 u[(\eta\varphi)' - \eta'\varphi] = \\ = -\int_0^1 u'\eta\varphi - \int_0^1 u\eta'\varphi \quad \textit{essendo } \eta\varphi \in C_c^1((0, 1)) \\ = -\int_0^\infty (\tilde{u'}\eta + \tilde{u}\eta')\varphi \end{aligned}$$

Scriviamo

$$u = \eta u + (1 - \eta)u$$

Per prima cosa prolunghiamo ηu su $(0, \infty)$ con $\eta\tilde{u}$ e successivamente lo prolunghiamo su $\mathbb{R}$ per riflessione.
Otteniamo così una funzione $v_1 \in \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R})$ che estende ηu e tale che

$$\|v_1\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|_{L^p(I)} \quad e \quad \|v_1\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(I)}$$

dove C dipende da $\|\eta'\|_{L^\infty}$

Adesso procediamo in modo analogo con $(1-\eta)u$ prima prolungandolo su $(-\infty,1)$ e ponendolo a 0 su $(-\infty,0)$ e successivamente prolungandolo su $\mathbb{R}$ per riflessione rispetto a 1.
Otteniamo così una funzione $v_2 \in \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R})$ che estende $(1-\eta)u$ e tale che

$$\|v_2\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|_{L^p(I)} \quad e \quad \|v_2\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(I)}$$

Allora $E(u) = v_1 + v_2$ soddisfa le condizioni cercate. □

Lemma 3. [1] *Sia* $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ *e sia* $v \in \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R})$ *con* $1 \leq p \leq \infty$.
Allora:

$$\rho \star v \in \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}) \qquad e \qquad (\rho \star v)' = \rho \star v'$$

Teorema 2 (Densità)**.** *Sia* $u \in \mathcal{W}^{1,p}(I)$ *con* $1 \leq p < \infty$.*Allora esiste una successione* (u_n) *in* $C_c^\infty(\mathbb{R})$ *tale che* $u_{n|I} \to u$ *in* $\mathcal{W}^{1,p}(I)$

Dimostrazione. Supponiamo inizialmente che $I = \mathbb{R}$.
Procediamo mediante una tecnica di convoluzione,che rende le funzioni C^∞, e di troncamento,che rende le funzioni a supporto compatto.

Consideriamo una successione (ρ_n) di mollificatori ($\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})_+$; $\|\rho_n\|_1 = 1$; $supp(\rho_n) \subset \bar{B}_{1/n}$) e ricordiamo che per le proprietà del prodotto di convoluzione si ha che $\rho_n \star u \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $\rho_n \star u \to u$ in $L^p(\mathbb{R})$.[2]
Fissiamo ora una funzione cut-off $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tale che $0 \leq \xi \leq 1$ e

$$\xi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 2 \end{cases}$$

Definiamo la successione

$$\xi_n(x) = \xi\left(\frac{x}{n}\right) \quad per \quad n = 1, 2, \dots$$

Quindi $\xi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tale che $0 \leq \xi_n \leq 1$ e

$$\xi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq n \\ 0 & \text{se } |x| \geq 2n \end{cases}$$

Verifichiamo quindi che la successione $u_n = \xi_n(\rho_n \star u)$ che sta in $C_c^\infty(\mathbb{R})$ (infatti $supp(u_n) \subset \bar{B}_{2n}$) converge a u in $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R})$.
Infatti abbiamo:

$$u_n - u = \xi_n[(\rho_n \star u) - u] + [\xi_n u - u]$$

[1] Vedi Brezis,lemma 8.4
[2] Vedi Brezis,teorema 4.22

e dunque (osservando che per il teorema della convergenza dominata se $f \in L^p$ allora $\xi_n f \to f$ in L^p)

$$\|u_n - u\|_p \leq \|(\rho_n \star u) - u\|_p + \|\xi_n u - u\|_p \longrightarrow 0$$

Inoltre dal lemma 3 abbiamo

$$u_n' = \xi_n'(\rho_n \star u) + \xi_n(\rho_n \star u')$$

da cui osservando che $\xi_n'(x) = \frac{1}{n}\xi'\left(\frac{x}{n}\right)$ e applicando la diseguaglianza di Hölder e il teorema di Young si ha

$$\begin{aligned}\|u_n' - u'\|_p &\leq \|\xi_n'(\rho_n \star u)\|_p + \|\xi_n(\rho_n \star u') - \rho_n \star u'\|_p + \|\rho_n \star u' - u'\|_p \leq \\ &\leq \frac{\|\xi'\|_\infty}{n}\|u\|_p + \|\xi_n - 1\|_\infty \|u'\|_p + o(1) \leq \\ &\leq \|\xi_n - 1\|_\infty \|u'\|_p + o(1) \longrightarrow 0\end{aligned}$$

Nel caso di I generico la tesi segue estendendo u a una funzione di $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R})$ grazie al teorema 1. $\square$

Ricordiamo i segenti risultati che utilizzeremo in seguito:

Teorema 3 (Ascoli-Arzelà). [3] *Sia K uno spazio metrico compatto e sia H un sottoinsieme limitato di C(K).Supponiamo che H sia uniformemente equicontinuo,ovvero*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \quad tale\,che \quad d(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \quad \forall f \in H$$

Allora H ha chiusura compatta in C(K)

Teorema 4 (Kolmogorov). [4] *Sia F un insieme limitato in $L^p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p < \infty$.Supponiamo che*

$$\lim_{|h| \to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0 \quad uniformemente\ a\ f \in F$$

ovvero $\forall \epsilon > 0 \quad \delta > 0$ tale che $\|\tau_h f - f\|_p < \epsilon$, $\forall h \in (\mathbb{R})$ con $|h| < \delta$ e $\forall f \in F$ Allora $F_{|I}$ ha chiusura compatta (o equivalentemente è relativamente compatto) in $L^p(I)$ per ogni I di misura finita.

[3] Vedi Brezis,teorema 4.25
[4] Vedi Brezis,teorema 4.26

Possiamo ora dimostrare il seguente teorema che costituisce un prototipo della diseguaglianza di Sobolev

Teorema 5. *Esiste una costante C (dipendente solo da $|I| \leq \infty$) tale che*

$$(1) \qquad \|u\|_{L^\infty(I)} \leq C\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(I)} \qquad \forall u \in \mathcal{W}^{1,p}(I), \quad \forall 1 \leq p \leq \infty$$

Ovvero $\mathcal{W}^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ con iniezione continua per ogni $1 \leq p \leq \infty$.

Inoltre,se I è limitato, si ha

$$(2) \quad l'iniezione \quad \mathcal{W}^{1,p}(I) \subset C(\bar{I}) \text{ è compatta per } 1 < p \leq \infty$$

$$(3) \quad l'iniezione \quad \mathcal{W}^{1,1}(I) \subset L^q(I) \text{ è compatta per } 1 \leq q < \infty$$

Dimostrazione. Iniziamo a dimostrare (1) per $I = \mathbb{R}$, il caso generale seguirà grazie al teorema 1 di prolungamento.

Sia $v \in C_c^1(\mathbb{R})$, se $1 \leq p < \infty$, poniamo $G(s) = |s|^{p-1}s$.
La funzione $w = G(v)$ appartiene a $C_c^1(\mathbb{R})$ e

$$w' = G'(v)v' = p|v|^{p-1}v'$$

Dunque per $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$G(v(x)) = \int_{-\infty}^{x} p|v(t)|^{p-1}v'(t)dt$$

da cui utilizzando la diseguaglianza di Hölder si ha

$$|v(x)|^p \leq p\|v\|_{L^p}^{p-1}\|v'\|_{L^p}$$

da cui utilizzando la diseguaglianza di Young si ha

$$|v(x)|^p \leq p\left[\frac{\|v\|_p^p}{p'} + \frac{\|v'\|_p^p}{p}\right]$$

da cui

$$|v(x)| \leq C(\|v\|_p + \|v'\|_p)$$

ovvero

$$\|v\|_{L^\infty} \leq C\|v\|_{\mathcal{W}^{1,p}} \qquad \forall v \in C_c^1(\mathbb{R})$$

dove C è una costante universale.

Ragioniamo ora per densità. Sia $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R})$ per il teorema 2 esiste una successione $(u_n) \in C_c^1(\mathbb{R})$ tale che $u_n \to u$ in $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R})$. Dall'ultima relazione ottenuta notiamo che (u_n) è di Cauchy in L^∞, dunque $u_n \to u$ in L^∞ e si ha la tesi.

Dimostriamo ora (2).
Sia B la sfera unitaria di $\mathcal{W}^{1,p}(I)$ con $1 < p \leq \infty$. Per $u \in B$,utilizzando il teorema fondamentale del calcolo integrale e la diseguaglianza di Hölder, si ha

$$|u(x) - u(y)| = \left| \int_y^x u'(t)dt \right| \leq \|u'\|_{L^p} |x - y|^{1/p'} \leq$$
$$\leq |x - y|^{1/p'} \qquad \forall x, y \in I$$

Dal teorema 3 segue che B è relativamente compatta in $C(\bar{I})$.

Infine dimostriamo (3).
Sia H la bolla unitaria in $\mathcal{W}^{1,1}(I)$.Sia E l'operatore di estensione definito nel teorema 1 e $F = E(H)$ così che $H = F_{|I}$. Chiaramente F è limitato in $\mathcal{W}^{1,1}(\mathbb{R})$ quindi anche in $L^q(\mathbb{R})$ essendo limitato sia in $L^1(\mathbb{R})$ sia in $L^\infty(\mathbb{R})$.

Dalla proposizione 4 segue che per ogni $f \in F$

$$\|\tau_h f - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq |h| \|f'\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C|h|$$

dal fatto che F è un sottoinsieme limitato di $\mathcal{W}^{1,1}(\mathbb{R})$.
Inoltre applicando la diseguaglianza di interpolazione con $1 \leq q < \infty$
($q = \frac{1}{\epsilon}$ con $\epsilon \in (0, 1]$, quindi $q(1 - \epsilon) = q - 1$), si ha

$$\|\tau_h f - f\|^q_{L^q(\mathbb{R})} \leq \|\tau_h f - f\|^{q-1}_{L^\infty(I)} \|\tau_h f - f\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

da cui ricordando che $\|\tau_h f\| = \|f\|$ e $\|f\|_{L^\infty(I)} \leq 1$ otteniamo

$$\|\tau_h f - f\|^q_{L^q(\mathbb{R})} \leq (2\|f\|_{L^\infty(I)})^{q-1} \|\tau_h f - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C|h|$$

e di conseguenza

$$\|\tau_h f - f\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq C|h|^{\frac{1}{q}}$$

con C indipendente da f.Da ciò segue che (essendo $q \neq \infty$)

$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_q = 0 \qquad uniformemente\ a\ f \in F$$

Dal teorema 4 segue quindi che H è relativamente compatto in $L^q(I)$. □

Osservazione 3. Vediamo due controesempi:

- La funzione $u(x) = x^{-1/2} \in L^1(0, 1)$ ma non a $\mathcal{W}^{1,1}(0, 1)$ (infatti la sua derivata non appartiene a $L^1(0, 1)$).
- Sia $g(x) \in C_c^\infty(0, 1)$,e per ogni n naturale sia $u_n(x) = g(x+n)$,allora (u_n) è una successione limitata in $\mathcal{W}^{1,p}(0, \infty)$ ma non ha estratte convergenti in $C(0, \infty)$.