Il Teorema di alternativa di Fredholm e applicazione alle equazioni ellittiche

Simone Carta

Indice

Introduzione **2**

1 Notazioni e richiami **3**

2 Il Teorema di alternativa di Fredholm **6**

3 Applicazione alle equazioni ellittiche **10**

4 Esempio di applicazione **14**

Introduzione

Questa tesina è volta ad approfondire alcuni degli argomenti trattati durante il corso di Analisi Superiore 2 presso il c.d.s. in Matematica della facoltà di Scienze dell'Università degli studi di Cagliari, a.a. 2017/2018. Durante il corso sono stati affrontati problemi di esistenza delle soluzioni di alcune equazioni differenziali utilizzando il cosiddetto "metodo variazionale", che consiste nel ricondursi alla risoluzione di un problema di minimo di un certo funzionale. Ci sono tuttavia alcune situazioni in cui questo metodo non può essere applicato: è questo il caso delle equazioni ellittiche, che andremo qui a trattare. Per farlo utilizzeremo il Teorema di alternativa di Fredholm, un importante risultato che, come vedremo, ci garantirà l'esistenza di soluzioni ai problemi che andremo ad affrontare.

Capitolo 1

Notazioni e richiami

Richiamiamo alcune definizioni e proprietà importanti che ci saranno utili in seguito.

Salvo diverso avviso, denoteremo con X uno spazio di Banach e con B_1^X la palla unitaria in X. Quando lo spazio sarà chiaro dal contesto scriveremo solo B_1. Inoltre denoteremo con I l'operatore identità di X.

Definizione 1.0.1. Sia $A : X \to Y$ un operatore lineare tra spazi di Banach. A è detto continuo se $\exists\, C > 0$ tale che $\|A(x)\|_Y \leq C\|x\|_X \quad \forall x \in X$. Scriveremo $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Nel caso in cui $X = Y$ poniamo $\mathcal{L}(X,X) = \mathcal{L}(X)$.

Definizione 1.0.2. Un operatore $A : X \to Y$ è detto compatto se $A(B_1^X)$ ha chiusura compatta in Y. Scriveremo $A \in K(X,Y)$. Nel caso in cui $X = Y$ per semplicità poniamo $K(X,X) = K(X)$.

Equivalentemente, A è compatto se per ogni successione $(x_n) \subset X$ limitata, $(A(x_n)) \subset Y$ ammette una sottosuccessione convergente.
Si dimostra che se A è compatto e $\lambda > 0$, allora λA è compatto.

Proposizione 1.0.1. Siano $A \in K(X,Y)$, B un operatore continuo a valori in X (risp. a valori in Y). Allora l'operatore $A \circ B$ (risp. $B \circ A$) è compatto.

Definizione 1.0.3. Sia $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Definiamo

1. $ker(A) := \{x \in X \mid A(x) = 0\}$;
2. $rank(A) := \{y \in Y \mid \exists\, x \in X \ t.c.\ y = A(x)\}$;
3. $graf(A) := \{(x,y) \in X \times Y \mid y = A(x)\}$.

Proposizione 1.0.2 (*operatore aggiunto*)**.** Sia $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. È ben definito un unico operatore $A^* : Y^* \to X^*$, detto aggiunto di A, tale che

$$< A(x), y > = < x, A^*(y) > \quad \forall x, y \in X$$

Teorema 1.0.3 (*di Schauder*)**.** Sia $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. A è compatto sse A^* è compatto.

Proposizione 1.0.4. Sia $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $graf(A)$ chiuso. Allora

1. $ker(A) = rank(A^*)^{\perp}$;
2. $ker(A^*) = rank(A)^{\perp}$;
3. $ker(A)^{\perp} \supseteq \overline{rank(A^*)}$;
4. $(kerA^*)^{\perp} = \overline{rank(A)}$.

Definizione 1.0.4. Sia X uno spazio di Hilbert. $A \in \mathcal{L}(X)$ è detto autoaggiunto se $A = A^*$.

Definizione 1.0.5. Una forma bilineare $a : X \times X \to \mathbb{R}$ è detta:

1. continua, se $|a(x, y)| \leq C\|x\|\|y\|, \;\; C > 0, \;\forall x, y \in X$;
2. coerciva, se $|a(x, x)| \geq \alpha\|x\|^2, \;\; \alpha > 0, \;\forall x \in X$.

Teorema 1.0.5 (*di Lax-Milgram*)**.** Siano X spazio di Hilbert, $a : X \times X \to \mathbb{R}$ forma bilineare, continua e coerciva, $\varphi \in X^*$. Allora $\exists!\, x \in X$ tale che

$$a(x, y) = \varphi(y) \quad \forall y \in X$$

Proposizione 1.0.6 (*proiezione metrica*)**.** Siano X spazio di Hilbert e $K \subseteq X$ chiuso e convesso. È ben definita un'applicazione $\Pi : X \to K$, detta proiezione metrica, dove $\Pi(x) = y$ è l'unico elemento di K tale che $\|x - y\| = dist(x, K)$. Inoltre Π è 1-lipschitziana e $\Pi(x) = x \;\; \forall x \in K$.

Lemma 1.0.7 (*di Riesz*)**.** Siano X uno spazio di Banach, $Z \subset X$ un suo sottospazio chiuso, $\epsilon > 0$. Allora $\exists\, x \in \partial B_1$ tale che $dist(x, Z) \geq 1 - \epsilon$.

Teorema 1.0.8 (*di Riesz*)**.** Sia X uno spazio di Banach. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. $dim X < \infty$;
2. $\overline{B_1^X}$ è compatta.

In ultimo, ricordiamo alcune proprietà degli autovalori dell'operatore $-\Delta$ nello spazio $H_0^1(\Omega)$, dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ è un aperto limitato con frontiera regolare e Δ è l'operatore di Laplace.

Proposizione 1.0.9. Gli autovalori di $-\Delta$ in $H_0^1(\Omega)$ formano una successione $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ con

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ... \leq \lambda_n \leq ... \longrightarrow \infty$$

L'autovalore λ_1 è semplice con autofunzioni di segno costante. Inoltre esiste (e_n) base ortonormale di $L^2(\Omega)$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}_0$, $e_n \in H_0^1(\Omega)$ ed è autofunzione relativa a λ_n.

Capitolo 2

Il Teorema di alternativa di Fredholm

Possiamo ora enunciare il

Teorema 2.0.1 (*di alternativa di Fredholm)***.** Siano X spazio di Hilbert, $A \in K(X)$. Allora

1. $dim(ker(I - A)) < \infty$;
2. $rank(I - A) = ker(I - A^*)^\perp$, ed è chiuso;
3. $ker(I - A) = \{0\} \iff rank(I - A) = X$;
4. $dim(ker(I - A)) = dim(ker(I - A^*))$.

Dimostrazione.

1. Sia $Z = ker(I - A)$. Per il Teorema di Riesz, ci basta mostrare che $\overline{B_1^Z}$ è compatto in X. Si ha $B_1^Z \subset A(B_1)$, infatti $\forall x \in B_1^Z$, $x - A(x) = 0$, da cui $x = A(x)$. Essendo $\|x\| = 1$, segue che $x \in A(B_1)$, cioè $B_1^Z \subset A(B_1)$. Passando alle chiusure abbiamo $\overline{B_1^Z} \subset \overline{A(B_1)}$, quest'ultimo è compatto essendo $A \in K(X)$. Dunque $\overline{B_1^Z}$ è compatto in quanto sottoinsieme chiuso di un compatto.

2. Mostriamo prima che $rank(I - A)$ è chiuso: sia $(y_n) \subset rank(I - A)$, $y_n \to y$. Dobbiamo far vedere che $y \in rank(I - A)$. Esiste $(x_n) \subset X$ tale che $y_n = x_n - A(x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Sia ora

$$d_n = dist(x_n, Z) = dist(x_n, ker(I - A))$$

Supponiamo dapprima $d_n = 0$ definitivamente, ciò implica che per n maggiore di un certo N si ha $0 = x_n - A(x_n) = y_n$, e quindi $y = 0 \in Z$ banalmente. Sia quindi $d_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Esiste $z_n \in Z$ tale che $\|x_n - z_n\| = d_n$, scriviamo $y_n = x_n - z_n - A(x_n - z_n)$. La successione (d_n) è limitata, infatti supponiamo per assurdo che $d_n \to \infty$ e poniamo

$$w_n = \frac{x_n - z_n}{d_n}\ , \quad \|w_n\| = 1 \quad \forall n$$

Ovviamente (w_n) è limitata, ed essendo A compatto segue che a meno di estratte $A(w_n) \to w$. Ma $w_n - A(w_n) = y_n/d_n \to 0$, unendo questi due fatti otteniamo che $w_n \to w$ e $w - A(w) = 0$, cioè $w \in Z$ .Tuttavia

$$dist(w_n, Z) = \inf_{z \in Z} \|w_n - z\| = \frac{d(x_n, Z)}{d_n} = 1 \nrightarrow 0$$

assurdo. Ne consegue che (d_n) è limitata in $\mathbb{R}$ e quindi che $(x_n - z_n)$ è limitata in X. A questo punto, dalla compattezza di A segue che $A(x_n - z_n) \to v$, da cui, ricordando che $y_n = x_n - z_n - A(x_n - z_n)$, otteniamo $x_n - z_n \to y + v$ (le convergenze sono da considerarsi a meno di estratte). Si ha

$$y + v - A(y + v) = \lim_{n\to\infty} (x_n - z_n - A(x_n - z_n)) = \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

e quindi $y = (I - A)(y + v)$, cioè $y \in rank(I - A)$.
Resta da mostrare l'identità. Ricordando la Proposizione (1.0.4), abbiamo

$$I - A^* = (I - A)^* \implies ker(I - A^*) = \overline{rank(I - A)} = rank(I - A)$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto appena dimostrato che $rank(I-A)$ è chiuso.

3. $\Rightarrow$ Per assurdo, sia $Y_1 = rank(I - A) \subset X$ strettamente. Per il punto precente, Y_1 è un sottospazio chiuso di X e $A_{|Y_1} \in K(Y_1)$. Sia ora $Y_2 = (I - A)(Y_1) \subset Y_1$, è un sottospazio chiuso. L'inclusione è stretta, infatti $\forall x \in X \setminus Y_1$ dall'iniettività di A segue $x - A(x) \in Y_1 \setminus Y_2$.
Possiamo così costruire una successione di spazi (Y_n), con $Y_n \subset Y_{n-1}$ strettamente. Utilizziamo ora il Lemma di Riesz, scelto $\epsilon = \frac{1}{2}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}_0\ \exists\, x_n \in Y_n \cap \partial B_1\ t.c.\ dist(x_n, Y_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$$

La successione (x_n) è limitata, perciò $A(x_n)$ converge (a meno di estratte). Ma $\forall\, n > m$ si ha

$$\|A(x_n) - A(x_m)\| = \|(A(x_n) - x_n) + (x_m - A(x_m)) + x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$$

assurdo, dunque $Y_1 = rank(I - A) = X$.

$\Leftarrow$ Sappiamo che $ker(I-A^*) = rank(I-A)^\perp = \{0\}$, dunque per la prima parte $rank(I-A^*) = X$. Segue quindi che $ker(I-A) = rank(I-A^*)^\perp = \{0\}$.

4. Siano $d = dim(ker(I-A))$, $d^* = dim(ker(I-A^*))$, vogliamo mostrare che $d = d^*$. Per il punto 1 si ha $d, d^* < \infty$, facciamo vedere che vale la doppia disuguaglianza:

$d^* \leq d$. Per assurdo, sia $d^* > d$. Consideriamo la proiezione metrica $\Pi \in \mathcal{L}(X, ker(I-A))$. Sappiamo dal punto 2 che $rank(I-A) = ker(I-A^*)^\perp$ e dunque esiste $Z \subset X$ sottospazio chiuso, $dimZ = d^*$, tale che X si scriva come somma diretta $X = rank(I-A) \oplus Z$. Essendo $d^* > d$, esisterà un certo $B \in \mathcal{L}(ker(I-A), Z)$ iniettivo ma non suriettivo. Poniamo ora $S = A + B \circ \Pi$, è un operatore compatto in quanto lo sono A, Π e B è continuo. Vogliamo mostrare che $I - S$ è iniettivo, sia quindi $x \in ker(I - S)$, si ha

$$0 = x - S(x) = (x - A(x)) - B(\Pi(x)) \in rank(I - A) \oplus Z$$

Poiché la somma è diretta, deve essere necessariamente

$$\begin{cases} x - A(x) = 0 \\ B(\Pi(x)) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima segue $x \in ker(I - A)$ e quindi $\Pi(x) = x$ per le proprietà della proiezione metrica, dalla seconda segue $\Pi(x) = 0$ essendo B iniettivo. Mettendo insieme le due cose otteniamo $x = 0$ e quindi $ker(I - S) = \{0\}$. Sfruttando il punto 3 si ha poi che $rank(I - S) = X$.
A questo punto, poiché B è non suriettivo, esiste $z \in Z \backslash B(ker(I-A))$,inoltre esiste $x \in X$ tale che

$$z = x - S(x) = (x - A(x)) - B(\Pi(x)) \in rank(I - A) \oplus Z$$

con $-B(\Pi(x)) \neq z$. Segue che

$$x - A(x) = z + B(\Pi(x)) \in Z \setminus \{0\}$$

assurdo perché non si avrebbe la somma diretta.

$d \leq d^*$. Sia $d^{**} = dim(ker(I-A^{**}))$. Essendo $A^{**} \in K(X^{**})$, applicando quanto abbiamo appena visto abbiamo $d^{**} \leq d^*$. Ma

$$ker(I - A) \subseteq ker(I - A^{**}) \implies d \leq d^{**}$$

Confrontando otteniamo $d \leq d^*$.

$\square$

L'alternativa vera e propria a cui fa riferimento il Teorema è data da questo importante

Corollario 2.0.2. Data l'equazione

$$x - A(x) = y \tag{2.1}$$

una sola delle seguenti è vera:

(i) $\forall y \in X$ l'equazione (2.1) ha soluzione unica;

(ii) $\exists\, d \in \mathbb{N}_0$ tale che (2.1) ha d soluzioni linearmente indipendenti per $y = 0$, inoltre (2.1) ha soluzione sse $y \in ker(I - A^*)^\perp$.

Dimostrazione.
Ovviamente (i) esclude (ii) e viceversa. Mostriamo che $\neg(i) \Rightarrow (ii)$.
$I - A$ non è biunivoco, in particolare non è iniettivo, segue che $dim(ker(I - A)) = d \in \mathbb{N}_0$. Se $y = 0$, l'equazione (2.1) ha quindi d soluzioni linearmente indipendenti, mentre $\forall y \in X \setminus \{0\}$ ha soluzione se e solo se $y \in rank(I - A) = ker(I - A^*)^\perp$.

□

Capitolo 3

Applicazione alle equazioni ellittiche

Vediamo ora un'applicazione del Teorema di alternativa a una classe di equazioni che prendono il nome di ellittiche. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} -div(A\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu = f & in\ \Omega \\ u = 0 & su\ \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

Dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ è un aperto limitato, Γ è regolare e $f \in L^2(\Omega)$. $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^N$ è una matrice con entrate $a_{ij} \in C^2(\overline{\Omega})$, $b = (b_1, ..., b_N)$ è un vettore con $b_h \in C^1(\overline{\Omega})$ e $c \in C(\overline{\Omega})$.
In seguito supporremo la seguente condizione sugli a_{ij}, detta condizione di uniforme ellitticità:

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|\,, \quad \alpha > 0 \qquad \forall x \in \overline{\Omega},\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N \tag{3.2}$$

Diamo ora le definizioni di soluzione classica e soluzione debole del problema (3.1).

Definizione 3.0.1. Una soluzione classica di (3.1) è $u \in C^2(\overline{\Omega})$ che soddisfa (3.1) in ogni punto di Ω.

Definizione 3.0.2. Una soluzione debole di (3.1) è $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$ si abbia

$$\int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \sum_{h=1}^{N} b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} \varphi + cu\varphi \right] dx = \int_\Omega f\varphi\, dx \tag{3.3}$$

Proposizione 3.0.1. Sia u soluzione classica di (3.1), allora è anche soluzione debole.

Dimostrazione. Sia $u \in C^2(\overline{\Omega})$ soluzione classica del problema e $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Dalla (3.1) moltiplicando per φ e integrando su Ω otteniamo

$$\int_\Omega [-div(A\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu]\varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx$$

Applicando il Teorema della divergenza abbiamo

$$\int_\Omega [(Au) \cdot \nabla\varphi + b \cdot \nabla u + cu\varphi] dx = \int_\Omega f\varphi \, dx$$

Che è la (3.3) in forma compatta.

□

Questo problema non è di tipo variazionale, cioè non si riesce ad interpretarlo come problema di minimo di un funzionale dell'energia. Abbiamo perciò bisogno di un approccio differente.

Teorema 3.0.2. Una sola delle seguenti è vera:

(i) $\forall f \in L^2(\Omega)$ il problema (3.1) ha soluzione (debole) unica;

(ii) $\exists\, d \in \mathbb{N}_0$, $Y \subset L^2(\Omega)$ sottospazio, $dim Y = d$, e il problema per $f = 0$ ha d soluzioni deboli indipendenti. Inoltre (3.1) ha soluzione debole sse $f \in Y^\perp$.

Dimostrazione.
Definiamo una forma bilineare $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, dove

$$a(u, v) = \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{h=1}^N b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} v + cuv \right] dx \tag{3.4}$$

Si verifica facilmente che a è continua. Poniamo poi

$$\tilde{a}(u, v) = a(u, v) + \lambda \int_\Omega uv \, dx \,, \quad \lambda > 0$$

Vogliamo applicare ad $\tilde{a}$ il Teorema di Lax-Milgram, per poterlo fare occorre mostrare che è una forma bilineare continua e coerciva. Le prime due sono banali, vediamo la coercività.

Siano $\beta = \max_h \|b_h\|_\infty$, $\gamma = \|c\|_\infty$. Usando la condizione (3.2) e le disuguaglianze di Hölder e Young si ottiene, per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(u,u) &\geq \int_\Omega [\,\alpha|\nabla u|^2 - \beta|\nabla u||u| - \gamma|u|^2\,]dx + \lambda\int_\Omega u^2\,dx \\
&\geq \alpha\|\nabla u\|_2^2 - \beta\|\nabla u\|_2\|u\|_2 + (\lambda-\gamma)\|u\|_2^2 \\
&\geq \alpha\|\nabla u\|_2^2 - \beta\left(\frac{\epsilon\,\|\nabla u\|_2^2}{2} + \frac{\|u\|_2^2}{2\epsilon}\right) + (\lambda-\gamma)\|u\|_2^2 \\
&= \left(\alpha - \frac{\beta\epsilon}{2}\right)\|\nabla u\|_2^2 + \left(\lambda - \gamma - \frac{\beta}{2\epsilon}\right)\|u\|_2^2
\end{aligned}$$

I coefficienti delle due norme, scelti ϵ abbastanza piccolo e λ abbastanza grande, sono positivi. Quindi per un'opportuna costante C_0 si ha

$$\tilde{a}(u,u) \geq C_0\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

cioè $\tilde{a}$ è coerciva in $H_0^1(\Omega)$.
Ricordiamo che $L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^* \subseteq H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^*$, dal Teorema di Lax - Milgram segue quindi che per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste un'unica $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\tilde{a}(u,\varphi) = \int_\Omega f\varphi\,dx\,, \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Definiamo $A(f) = u$, $A : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$. L'operatore A è continuo, infatti si ha

$$C_0\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq |\tilde{a}(u,u)| = |\int_\Omega fu\,dx| \leq \|f\|_2\|u\|_2 \leq \|f\|_2\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Da cui segue

$$\|A(f)\|_{H_0^1(\Omega)} = \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{\|f\|_2}{C_0}$$

A è quindi continuo. Abbiamo il seguente diagramma

$$L^2(\Omega) \xrightarrow{A} H_0^1(\Omega) \overset{K}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$$

dove $\overset{K}{\hookrightarrow}$ indica l'immersione compatta di $H_0^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$. A è quindi un operatore compatto, e tale è anche λA.
Ora, il problema (3.1) è equivalente a risolvere l'equazione $u = A(f + \lambda u)$. Posto $v = f + \lambda u$ l'equazione diventa

$$(I - \lambda A)(v) = f \tag{3.5}$$

Per il Teorema di alternativa di Fredholm, una sola delle seguenti è vera:

(i) $\forall f \in L^2(\Omega)$, l'equazione (3.5) ha soluzione unica, e quindi ha soluzione unica il problema (3.1);

(ii) $\exists\, d \in \mathbb{N}_0$ tale che l'equazione $v - \lambda A(v) = 0$ ha d soluzioni linearmente indipendenti, e quindi il problema (3.1) ha d soluzioni indipendenti per $f = 0$. Inoltre, posto $Y = ker(I - \lambda A^*)$, si ha $dimY = d$ e (3.1) ha soluzione sse $f \in Y^{\perp}$.

$\square$

Capitolo 4

Esempio di applicazione

Applichiamo ora il risultato teorico visto nel capitolo precendente al problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda_1 u = f & in\ \Omega \\ u = 0 & su\ \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

Dove λ_1 è il primo autovalore dell'operatore $-\Delta$ in $H_0^1(\Omega)$. Ricordiamo che λ_1 è semplice, pertanto ha una sola autofunzione associata $e_1 \in H_0^1(\Omega)$ (cioè l'autospazio relativo a λ_1 ha dimensione 1).

Possiamo osservare immediatamente che il problema (4.1) rientra nel caso già visto, con $A = [\delta_{ij}]$, $b = 0$, $c = -\lambda_1$. In particolare abbiamo il seguente risultato:

Teorema 4.0.1. Sia $f \in L^2(\Omega)$. Allora il problema (4.1) ha soluzione se e solo se $\int_\Omega f e_1\, dx = 0$.

Dimostrazione. Ripercorriamo la dimostrazione del Teorema (3.0.2). Possiamo scegliere $\lambda = \lambda_1$, infatti la forma bilineare

$$\int_\Omega [\nabla u \cdot \nabla v - \lambda_1 uv] dx + \lambda_1 \int_\Omega uv\, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx$$

è banalmente coerciva in $H_0^1(\Omega)$. Resta quindi definito l'operatore
$A \in K(L^2(\Omega))$, dove $u = A(f)$ è l'unica soluzione (debole) del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & in\ \Omega \\ u = 0 & su\ \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \tag{4.2}$$

Determiniamo $ker(I - \lambda_1 A)$. Sia $g \in L^2(\Omega)$, allora $g \in ker(I - \lambda_1 A)$ se e solo se esiste $u \in H_0^1(\Omega)$ che soddisfa

$$\begin{cases} g = -\lambda_1 u \\ -\Delta u = g \end{cases}$$

Vale a dire $-\Delta u = \lambda_1 u$, il che equivale a richiedere $g \in span(e_1)$. Segue quindi che $ker(I - \lambda_1 A) = span(e_1)$. Rientriamo dunque nel caso (ii) con $d = 1$.
Per concludere basta mostrare che A è autoaggiunto, infatti in tal caso avremmo $ker(I - \lambda_1 A^*) = ker(I - \lambda_1 A) = span(e_1)$ e dal Teorema (3.0.2)

$$\text{(4.1) ha soluzione} \iff f \in span(e_1)^\perp \iff \int_\Omega f e_1 \, dx = 0$$

Mostriamo dunque che $A = A^*$. Siano $f, g \in L^2(\Omega)$ e $u = A(f)$, $v = A(g)$, allora, ricordando che u, v sono soluzioni deboli di (4.2) rispettivamente per f, g, si ha

$$< u, g >_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega ug \, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega fv \, dx = < f, v >_{L^2(\Omega)}$$

cioè A è autoaggiunto.

$\square$

Questo risultato ha un'interessante conseguenza:

Corollario 4.0.2. Sia $f \in L^2(\Omega)$ soluzione di (4.1). Allora f cambia segno in Ω.

Dimostrazione. Per assurdo, sia $f \in L^2(\Omega)_+$ (il caso $f \in L^2(\Omega)_-$ è analogo). Sappiamo che e_1 ha segno costante in Ω, ne segue che

$$\int_\Omega f e_1 \, dx \neq 0$$

essendo l'integranda una funzione di segno costante in Ω. Ma ciò contraddice il Teorema precedente, assurdo, dunque f cambia segno in Ω.

$\square$