Principi del massimo per equazioni paraboliche

Silvia Frassu

Indice

1 Equazioni paraboliche

In questa relazione studiamo le equazioni alle derivate parziali paraboliche lineari, spesso note con il termine di **equazioni di evoluzione**, in quanto la soluzione si evolve nel tempo a partire da una configurazione iniziale data. Le equazioni paraboliche sono una naturale generalizzazione dell'**equazione del calore** $u_t - \Delta u = 0$, dove $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ denota il Laplaciano nella variabile spaziale x e t è la variabile temporale ([1]-[2]-[3]-[5]). Quest'equazione è chiamata equazione del calore perché modellizza la distribuzione di temperatura u nel dominio U al tempo t.
Sia U un sottoinsieme aperto, limitato di $\mathbb{R}^n$ e sia $T > 0$ un tempo fissato. Definiamo:

- cilindro parabolico o cilindro spazio temporale l'insieme $U_T = U \times (0, T]$,
- frontiera parabolica di U_T l'insieme $\Gamma_T = \overline{U}_T \setminus U_T$.

Consideriamo il problema di Cauchy - Dirichlet

$$\begin{cases} u_t + Lu = f & \text{in } U_T \\ u = 0 & \text{su } \partial U \times [0, T] \\ u = g & \text{su } U \times \{t = 0\}, \end{cases} \tag{1}$$

dove $f : U_T \to \mathbb{R}$ e $g : U \to \mathbb{R}$ sono assegnate, $u : \overline{U}_T \to \mathbb{R}$ è incognita, $u = u(x, t)$. Se il termine lineare $f = 0$ allora il problema (1) è detto problema di Cauchy-Dirichlet omogeneo.
La seconda equazione di (1) è detta condizione di Dirichlet, la quale potrebbe essere sostituita dalla condizione di Neumann o di Robin, mentre la terza equazione è la condizione di Cauchy.

La lettera L denota per ogni tempo t un operatore alle derivate parziali del secondo ordine, scritto o in forma della divergenza

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u$$

oppure in forma della non divergenza

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,t)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u, \tag{2}$$

con coefficienti assegnati a^{ij}, b^i, c $(i,j = 1,...,n)$. Più precisamente, A=A(x,t) è una matrice quadrata di ordine n, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ sono vettori in $\mathbb{R}^n$.
Indichiamo con $C_1^2(U_T)$ lo spazio delle funzioni con derivate parziali continue fino al secondo ordine in x e fino al primo ordine in t.

Definizione 1.1. Definiamo u soluzione classica dell'equazione (1) se

- $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U}_T)$,
- $u_t + Lu = f$ per ogni $(x;t) \in U_T$,
- $u(x,t) = 0$ per ogni $(x,t) \in \partial U \times [0,T]$,
- $u(x,0) = g(x)$ per ogni $x \in U$.

Osserviamo che il problema (1) ammette una soluzione classica se il termine lineare f e il dato iniziale g sono almeno continui.

Definizione 1.2. L'operatore alle derivate parziali $\frac{\partial}{\partial t} + L$ è **uniformemente parabolico** se esiste una costante $\theta > 0$ tale che

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$$

per ogni $(x,t) \in U_T$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Osservazione 1.3. Osserviamo in particolare che per ogni tempo fissato $0 \leq t \leq T$ l'operatore L è uniformemente ellittico nella variabile spaziale x.

Quando $a^{ij} \equiv \delta_{ij}$, $b^i \equiv c \equiv f \equiv 0$ abbiamo il caso noto $L = -\Delta$ e l'equazione alle derivate parziali $\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = 0$ diventa la ben nota equazione del calore.
Le equazioni paraboliche generali del secondo ordine descrivono nelle applicazioni fisiche l'evoluzione nel tempo della densitá di una quantitá u, la concentrazione chimica, entro la regione U. Il termine del secondo ordine $\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,t)u_{x_i x_j}$ descrive la diffusione, il termine del primo ordine $\sum_{i=1}^{n} b^i(x,t)u_{x_i}$ il trasporto, e il termine di ordine zero cu descrive la creazione o l'esaurimento. Inoltre, le equazioni di Fokker-Planck e Kolmogorov sullo studio probabilistico dei processi di diffusione sono equazioni paraboliche del secondo ordine.

2 Principi del massimo

Uno strumento importante nello studio delle equazioni paraboliche del secondo ordine è il principio del massimo, il quale afferma che il massimo di una soluzione di un'equazione parabolica omogenea in un dominio viene raggiunto sulla frontiera di quel dominio, più precisamente sulla frontiera parabolica ([2]). Il principio del massimo viene utilizzato per dimostrare risultati di unicità per differenti problemi con condizioni sul bordo, stime L^∞ per le soluzioni e le loro derivate e anche per diverse stime sulla continuità.

2.1 Principio del massimo debole

Consideriamo l'operatore L nella forma della non divergenza (2), con i coefficienti a^{ij}, b^i, c continui. Supponiamo sempre la condizione di uniforme parabolicità e che la matrice A sia simmetrica ($a^{ij} = a^{ji}$ $i, j = 1, ..., n$).

Teorema 2.1. *(Principio del massimo debole) Sia* $u \in C^2_1(U_T) \cap C(\overline{U}_T)$ *e*

$$c \equiv 0 \quad \text{in } U_T. \tag{3}$$

(i) Se

$$u_t + Lu \leq 0 \quad \text{in } U_T, \tag{4}$$

allora

$$\max_{\overline{U}_T} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

(ii) Analogamente, se

$$u_t + Lu \geq 0 \quad \text{in } U_T, \tag{5}$$

allora

$$\min_{\overline{U}_T} u = \min_{\Gamma_T} u.$$

Osservazione 2.2. Una funzione u che soddisfa la disuguaglianza (4) è chiamata una sottosoluzione e possiamo affermare che una sottosoluzione raggiunge il massimo sulla frontiera parabolica Γ_T. Similmente, u è una soprasoluzione se vale la (5), in tal caso u raggiunge il minimo sempre sulla frontiera parabolica Γ_T.

Dimostrazione. Supponiamo inizialmente che valga la disuguaglianza stretta

$$u_t + Lu < 0 \quad \text{in } U_T, \tag{6}$$

e che esista un punto $(x_0, t_0) \in U_T$ con $u(x_0, t_0) = \max_{\overline{U}_T} u$.
Supponiamo per assurdo che $(x_0, t_0) \notin \Gamma_T$ e distinguiamo i seguenti casi: $0 < t_0 < T$ e $t_0 = T$.

- Se $0 < t_0 < T$ e $x_0 \in U$ allora (x_0, t_0) appartiene all'interno di U_T e di conseguenza, essendo un punto di massimo per u, abbiamo

$$u_t(x_0, t_0) = 0 \quad \text{e} \quad u_{x_i}(x_0, t_0) = 0 \quad (i = 1, \cdots, n), \tag{7}$$

$$D^2 u(x_0, t_0) = ((u_{x_i x_j})) \leq 0 \quad (i, j = 1 \cdots, n), \tag{8}$$

cioè la matrice simmetrica Hessiana $D^2 u$ è definita non positiva nel punto (x_0, t_0).
Poiché la matrice $A = (a^{ij}(x_0, t_0))$ è simmetrica e definita positiva, esiste una matrice ortogonale $O = (o^{ij})$ tale che

$$OAO^T = \operatorname{diag}(d_1, \cdots, d_n), \quad OO^T = I, \tag{9}$$

con $d_k > 0$ $(k = 1, \cdots, n)$. Poniamo $y = x_0 + O(x - x_0)$. Allora $x - x_0 = O^T(y - x_0)$, e così

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} u_{y_k} o_{ik}, \quad u_{x_i x_j} = \sum_{k,l=1}^{n} u_{y_k y_l} o_{ik} o_{jl} \quad (i, j = 1, \cdots, n).$$

Quindi nel punto (x_0, t_0), ricordando la (9), otteniamo

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i x_j} = \sum_{k,l=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{y_k y_l} o_{ik} o_{jl} = \sum_{k=1}^{n} d_k u_{y_k y_k} \leq 0, \tag{10}$$

poiché $d_k > 0$ e $u_{y_k y_k}(x_0) \leq 0$ $(k = 1, \cdots, n)$, in accordo con (8). Allora nel punto (x_0, t_0)

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} \geq 0,$$

grazie a (7) e (10). Conseguentemente $u_t + Lu \geq 0$ in (x_0, t_0), in contraddizione con (6).

- Supponiamo ora $t_0 = T$. Poiché u raggiunge il massimo in $(x_0, t_0) \in \overline{U}_T$, abbiamo che

$$u_t \geq 0 \quad \text{in } (x_0, t_0).$$

Inoltre vale ancora la disuguaglianza $Lu \geq 0$ in (x_0, t_0), allora deduciamo ancora una volta

$$u_t + Lu \geq 0 \quad \text{in } (x_0, t_0),$$

in contraddizione con (6).

Supponiamo ora che valga la (4) e poniamo $u^\epsilon(x, t) := u(x, t) - \epsilon t$ con $\epsilon > 0$. Allora

$$u_t^\epsilon + Lu^\epsilon = u_t + Lu - \epsilon < 0 \quad \text{in } U_T,$$

e cosí, ripetendo il ragionamento precedente, otteniamo $\max_{\overline{U}_T} u^\epsilon = \max_{\Gamma_T} u^\epsilon$.
Facendo tendere $\epsilon \to 0$ troviamo $\max_{\overline{U}_T} u = \max_{\Gamma_T} u$. Questo prova (i).
Poiché $-u$ è una sottosoluzione ogni volta che u è una soprasoluzione, la (ii) è immediata. $\square$

Dal precedente teorema e dall'osservazione 2.2 discende il seguente corollario

Corollario 2.3. *Sia u una soluzione di $u_t + Lu = 0$ in U_T allora*

$$\min_{\Gamma_T} u \leq u \leq \max_{\Gamma_T} u.$$

Consideriamo ora il principio del massimo debole con il termine di ordine zero non nullo. Indichiamo con u^+, u^- rispettivamente la parte positiva e la parte negativa di u.

Teorema 2.4. *(Principio del massimo debole per $c \geq 0$) Sia $u \in C^2_1(U_T) \cap C(\overline{U}_T)$ e*

$$c \geq 0 \quad \textit{in}\, U_T.$$

(i) Se

$$u_t + Lu \leq 0 \quad \textit{in}\, U_T,$$

allora

$$\max_{\overline{U}_T} u \leq \max_{\Gamma_T} u^+.$$

(ii) Analogamente, se

$$u_t + Lu \geq 0 \quad \textit{in}\, U_T,$$

allora

$$\min_{\overline{U}_T} u \geq - \max_{\Gamma_T} u^-.$$

Osservazione 2.5. In particolare, se $u_t + Lu = 0$ nella regione U_T, allora

$$\max_{\overline{U}_T} |u| = \max_{\Gamma_T} |u|.$$

Dimostrazione. Supponiamo che u soddisfi

$$u_t + Lu < 0 \quad \text{in}\, U_T, \tag{11}$$

e raggiunga un massimo positivo nel punto $(x_0, t_0) \in U_T$. Poiché $u(x_0, t_0) > 0$ e $c \geq 0$, ragionando come prima, otteniamo la contraddizione

$$u_t + Lu \geq 0 \quad \text{in}\, (x_0, t_0).$$

Consideriamo ora la disuguaglianza

$$u_t + Lu \leq 0 \quad \text{in}\, U_T,$$

allora, ripetendo il ragionamento precedente, $u^\epsilon(x, t) := u(x, t) - \epsilon t$ soddisfa

$$u^\epsilon_t + Lu^\epsilon < 0 \quad \text{in}\, U_T.$$

Inoltre se u raggiunge un massimo positivo in qualche punto in U_T, allora anche u^ϵ raggiunge un massimo positivo in qualche punto appartenente a U_T, se $\epsilon > 0$ é abbastanza piccolo. Ma allora,

come nella precedente dimostrazione, abbiamo una contraddizione.
L'enunciato (ii) segue in modo simile. □

Osservazione 2.6. Diversamente dalle equazioni alle derivate parziali ellittiche, esistono varie versioni del principio del massimo per equazioni paraboliche, anche se il coefficiente del termine di ordine zero é negativo [2].

2.2 La disuguaglianza di Harnack

La disuguaglianza di Harnack afferma che se u è una soluzione non negativa dell'equazione $u_t + Lu = 0$ in U_T, allora il massimo di u in qualche regione interna di U_T in un tempo positivo può essere stimato dal minimo di u nella stessa regione in un tempo successivo.

Teorema 2.7. *(Disuguaglianza di Harnack parabolica) Sia $u \in C_1^2(U_T)$ soluzione di*

$$u_t + Lu = 0 \quad \textit{in } U_T, \tag{12}$$

e

$$u \geq 0 \quad \textit{in } U_T.$$

Supponiamo $V \subset\subset U$ connesso. Allora per ogni $0 < t_1 < t_2 \leq T$, esiste una costante C tale che

$$\sup_V u(.,t_1) \leq C \inf_V u(.,t_2). \tag{13}$$

La costante C dipende solo da V, t_1, t_2 e dai coefficienti di L.

Questo è vero se i coefficienti sono continui, o anche solamente limitati e misurabili ([4]). Nella seguente dimostrazione si considera il caso speciale $b^i \equiv c \equiv 0$ e a^{ij} differenziabili $(i, j = 1, \cdots, n)$.

Dimostrazione. Possiamo assumere, senza perdita di generalità, $u > 0$ in U_T, altrimenti possiamo sempre applicare il risultato a $u + \epsilon$ e poi far tendere $\epsilon \to 0^+$. Poniamo

$$v := \log u \quad \text{in } U_T. \tag{14}$$

Usando (12), calcoliamo

$$v_t = \sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij} v_{x_i x_j} + a^{ij} v_{x_i} v_{x_j} \right) \quad \text{in } U_T. \tag{15}$$

Definiamo

$$w := \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} v_{x_i x_j}, \quad \tilde{w} := \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} v_{x_i} v_{x_j}; \tag{16}$$

così dalla (15) abbiamo

$$v_t = w + \tilde{w}. \tag{17}$$

Utilizzando (16), (17), otteniamo per $k, l = 1, \cdots, n$:

$$v_{x_k x_l t} = w_{x_k x_l} + \sum_{i,j=1}^{n} \left(2a^{ij} v_{x_i x_k x_l} v_{x_j} + 2a^{ij} v_{x_i x_k} v_{x_j x_l}\right) + R,$$

dove il resto R soddisfa una stima della forma

$$|R| \leq \epsilon |D^2 v|^2 + C(\epsilon)|Dv|^2 + C \tag{18}$$

per ogni $\epsilon > 0$. Quindi

$$w_t = \sum_{k,l=1}^{n} \left(a^{kl} v_{x_k x_l t} + a_t^{kl} v_{x_k x_l}\right)$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} \left\{ a^{kl} \left[w_{x_k x_l} + \sum_{i,j=1}^{n} \left(2a^{ij} v_{x_i x_k x_l} v_{x_j} + 2a^{ij} v_{x_i x_k} v_{x_j x_l}\right) + R \right] + a_t^{kl} v_{x_k x_l} \right\}$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} a^{kl} w_{x_k x_l} + 2 \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a^{ij} a^{kl} v_{x_i x_k} v_{x_j x_l} + 2 \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a^{ij} a^{kl} v_{x_j} v_{x_i x_k x_l} + \sum_{k,l=1}^{n} R a^{kl} + \sum_{k,l=1}^{n} a_t^{kl} v_{x_k x_l}$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} a^{kl} w_{x_k x_l} + 2 \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} v_{x_j} w_{x_i} + 2 \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a^{ij} a^{kl} v_{x_i x_k} v_{x_j x_l} - 2 \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a^{ij} a_{x_i}^{kl} v_{x_j} v_{x_k x_l} + \sum_{k,l=1}^{n} R a^{kl} + \sum_{k,l=1}^{n} a_t^{kl} v_{x_k x_l}$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} a^{kl} w_{x_k x_l} + 2 \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} v_{x_j} w_{x_i} + 2 \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a^{ij} a^{kl} v_{x_i x_k} v_{x_j x_l} + R,$$

dove R denota un altro termine di resto soddisfacente la stima (18). Pertanto scegliendo $\epsilon > 0$ abbastanza picccolo in (18) e ricordando la condizione di uniforme parabolicità, deduciamo che

$$w_t - \sum_{k,l=1}^{n} a^{kl} w_{x_k x_l} + \sum_{k=1}^{n} b^k w_{x_k} \geq \theta^2 |D^2 v|^2 - C|Dv|^2 - C, \tag{19}$$

dove

$$b^k := -2 \sum_{l=1}^{n} a^{kl} v_{x_l} \quad (k = 1, \cdots, n). \tag{20}$$

La stima (19) è una disuguaglianza differenziale per w, il prossimo passo è ottenere una disuguaglianza simile per $\tilde{w}$. Infatti, usando (16) e (15), abbiamo

$$\tilde{w}_t - \sum_{k,l=1}^{n} a^{kl} \tilde{w}_{x_k x_l} = \sum_{i,j=1}^{n} a_t^{ij} v_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} v_{x_i t} v_{x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} v_{x_i} v_{x_j t} - \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a^{kl} a_{x_k x_l}^{ij} v_{x_i} v_{x_j} +$$

$$- \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a^{kl} a_{x_k}^{ij} (v_{x_i x_l} v_{x_j} + v_{x_i} v_{x_j x_l}) - \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a^{kl} a_{x_l}^{ij} v_{x_i x_k} v_{x_j} - \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a^{kl} a^{ij} (v_{x_i x_k x_l} v_{x_j} + v_{x_i x_k} v_{x_j x_l}) +$$

$$- \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a^{kl} a_{x_l}^{ij} v_{x_i} v_{x_j x_k} - \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a^{kl} a^{ij} (v_{x_i x_l} v_{x_j x_k} + v_{x_i} v_{x_j x_k x_l})$$

$$= 2\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} v_{x_i} \left(v_{tx_j} - \sum_{k,l=1}^{n} a^{kl} v_{x_k x_l x_j} \right) - 2 \sum_{i,j,k,l=1} a^{ij} a^{kl} v_{x_i x_k} v_{x_j x_l} + R,$$

R ancora una volta è un altro termine resto che soddisfa (18) per ogni $\epsilon > 0$. Ricordando (15) e (20), semplifichiamo e otteniamo

$$\tilde{w}_t - \sum_{k,l=1}^{n} a^{kl} \tilde{w}_{x_k x_l} + \sum_{k=1}^{n} b^k \tilde{w}_{x_k} \geq -C|D^2 v|^2 - C|Dv|^2 - C \quad \text{in } U_T. \tag{21}$$

Poniamo

$$\hat{w} := w + \kappa \tilde{w}, \tag{22}$$

con $\kappa > 0$. Combinando (19) e (21), deduciamo

$$\hat{w}_t - \sum_{k,l=1}^{n} a^{kl} \hat{w}_{x_k x_l} + \sum_{k=1}^{n} b^k \hat{w}_{x_k} \geq \frac{\theta^2}{2} |D^2 v|^2 - C|Dv|^2 - C \tag{23}$$

posto $0 < \kappa \leq \frac{1}{2}$ sufficientemente piccolo.
Supponiamo $V \subset\subset U$ è una palla aperta e $0 < t_1 < t_2 \leq T$. Scegliamo una funzione cutoff $\zeta \in C^\infty(U_T)$ tale che

$$\begin{cases} 0 \leq \zeta \leq 1, \ \zeta = 0 & \text{su } \Gamma_T, \\ \zeta \equiv 1 & \text{su } V \times [t_1, t_2]. \end{cases}$$

Osserviamo che ζ si annulla lungo $\{t = 0\}$. Sia μ una costante positiva, e ragionando per assurdo, supponiamo che

$$\zeta^4 \hat{w} + \mu t \quad \text{raggiunga un minimo negativo in qualche punto } (x_0, t_0) \in U \times (0, T]. \tag{24}$$

Di conseguenza

$$\zeta \hat{w}_{x_k} + 4\zeta_{x_k} \hat{w} = 0 \quad \text{in } (x_0, t_0) \ (k = 1, \cdots, n). \tag{25}$$

Inoltre

$$0 \geq (\zeta^4 \hat{w} + \mu t)_t - \sum_{k,l=1}^{n} a^{kl} (\zeta^4 \hat{w} + \mu t)_{x_k x_l} \quad \text{in } (x_0, t_0).$$

Quindi in (x_0, t_0)

$$0 \geq \mu + \zeta^4 \big(\hat{w}_t - \sum_{k,l=1}^{n} a^{kl} \hat{w}_{x_k x_l} \big) - 2 \sum_{k,l=1}^{n} a^{kl} (\zeta^4)_{x_l} \hat{w}_{x_k} + \hat{R}, \tag{26}$$

dove

$$|\hat{R}| \leq C \zeta^2 |\hat{w}|. \tag{27}$$

Richiamiamo ora (23) e (25)

$$0 \geq \mu + \zeta^4 \Big(\frac{\theta^2}{2} |D^2 v|^2 - C|Dv|^2 - C - \sum_{k=1}^{n} b^k \hat{w}_{x_k} \Big) + \hat{R},$$

dove $\hat{R}$ é un altro resto che soddisfa la stima (27). Utilizzando (25) e (20), deduciamo

$$0 \geq \mu + \zeta^4 \Big(\frac{\theta^2}{2} |D^2 v|^2 - C|Dv|^2 - C \Big) + \tilde{R}, \tag{28}$$

dove ora

$$|\tilde{R}| \leq C\zeta^2 |\hat{w}| + C\zeta^3 |Dv||\hat{w}|. \tag{29}$$

Ricordiamo che (28), (29) valgono nel punto (x_0, t_0) dove $\zeta^4 \hat{w} + \mu t$ ottiene un minimo negativo. In particolare, in questo punto $\hat{w} = w + \kappa \tilde{w} < 0$. Richiamando la definizione (16) di w, $\tilde{w}$, deduciamo

$$|Dv|^2 \leq C|D^2 v|, \tag{30}$$

e quindi

$$|\hat{w}| \leq C|D^2 v| \quad \text{in } (x_0, t_0).$$

Conseguentemente (29) implica la stima

$$|\tilde{R}| \leq C\zeta^2 |D^2 v| + C\zeta^3 |D^2 v|^{3/2} \leq \epsilon \zeta^4 |D^2 v|^2 + C(\epsilon), \tag{31}$$

dove abbiamo usato la disuguaglianza di Young con ϵ (Appendice B [2]).
Usando (28), (30), (31) infine otteniamo una contraddizione in (24), posto che μ sia abbastanza grande.
Pertanto $\zeta^4 \hat{w} + \mu t \geq 0$ in U_T, e quindi in particolare

$$\hat{w} + \mu t \geq 0 \quad \text{in } V \times [t_1, t_2].$$

Utilizzando (17), allora deduciamo che

$$v_t \geq \alpha |Dv|^2 - \beta \quad \text{in } V \times [t_1, t_2] \tag{32}$$

per opportune costanti $\alpha, \beta > 0$.
La disuguaglianza differenziale (32) per $v = \log u$ ci porta alla disuguaglianza di Harnack, nel seguente modo. Fissiamo $x_1, x_2 \in V, t_2 > t_1$. Allora

$$v(x_2, t_2) - v(x_1, t_1) = \int_0^1 \frac{d}{ds} v(sx_2 + (1-s)x_1, st_2 + (1-s)t_1)\, ds$$

$$= \int_0^1 \langle Dv, x_2 - x_1 \rangle + v_t (t_2 - t_1)\, ds$$

$$\geq \int_0^1 -|Dv||x_2 - x_1| + (t_2 - t_1)[\alpha|Dv|^2 - \beta]\, ds \quad \text{dalla (32)}$$

$$\geq -\gamma,$$

dove γ dipende soltanto da $\alpha, \beta, |x_2 - x_1|, |t_2 - t_1|$. Pertanto (14) implica

$$\log u(x_2, t_2) \geq \log u(x_1, t_1) - \gamma,$$

e quindi

$$u(x_2, t_2) \geq e^{-\gamma} u(x_1, t_1).$$

Questa disuguaglianza è vera per ogni $x_1, x_2 \in V$, e così (13) è valida nel caso in cui V sia una palla. Nel caso generale ricopriamo $V \subset\subset U$ con le palle e applichiamo ripetutamente la stima sopra. □

2.3 Principio del massimo forte

Utilizziamo la disuguaglianza di Harnack per dimostrare il principio del massimo forte.

Teorema 2.8. *(Principio del massimo forte) Sia $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U}_T)$ e*

$$c \equiv 0 \quad in\, U_T.$$

Supponiamo che U sia connesso.
(i) Se

$$u_t + Lu \leq 0 \quad in\, U_T$$

e u raggiunge il massimo su $\overline{U}_T$ in un punto $(x_0, t_0) \in U_T$, allora u è costante su U_{t_0}.
(ii) Analogamente, se

$$u_t + Lu \geq 0 \quad in\, U_T,$$

e u raggiunge il minimo su $\overline{U}_T$ in un punto $(x_0, t_0) \in U_T$, allora u è costante su U_{t_0}.

Per le seguenti dimostrazioni supponiamo che u e i coefficienti di L siano differenziabili.

Dimostrazione. Supponiamo che $u_t + Lu \leq 0$ in U_T, e che u raggiunga il massimo in qualche punto $(x_0, t_0) \in U_T$. Prendiamo un insieme aperto, differenziabile $W \subset\subset U$, con $x_0 \in W$. Sia v una soluzione di

$$\begin{cases} v_t + Lv = 0 & \text{in } W_T \\ v = u & \text{su } \Delta_T, \end{cases}$$

dove Δ_T denota la frontiera parabolica di W_T. Allora, dal principio del massimo debole, $u \leq v$. Poiché

$$u \leq v \leq M,$$

con $M := \max_{\overline{U}_T} u$, deduciamo che $v = M$ in (x_0, t_0).
Poniamo $\tilde{v} := M - v$. Allora, poiché $c \equiv 0$, abbiamo

$$\tilde{v}_t + L\tilde{v} = 0, \quad \tilde{v} \geq 0 \quad \text{in } W_T. \tag{33}$$

Prendiamo $V \subset\subset W$ con $x_0 \in V$, V connesso. Sia $0 < t < t_0$, allora, dalla disuguaglianza di Harnack,

$$\max_V \tilde{v}(.,t) \leq C \inf_V \tilde{v}(.,t_0). \tag{34}$$

Ma $\inf_V \tilde{v}(.,t_0) \leq \tilde{v}(x_0,t_0) = 0$. Poiché $\tilde{v} \geq 0$, (34) implica $\tilde{v} \equiv 0$ su $V \times \{t\}$, per ogni $0 < t < t_0$. Questa deduzione vale per ogni insieme V come sopra, e quindi $\tilde{v} \equiv 0$ in W_{t_0}. Ma pertanto $v \equiv M$ in W_{t_0}. Poiché $v = u$ su Δ_T, concludiamo $u \equiv M$ su $\partial W \times [0, t_0]$. Questa conclusione vale per tutti gli insiemi W come sopra, e pertanto $u \equiv M$ su U_{t_0}. □

Teorema 2.9. *(Principio del massimo forte per $c \geq 0$) Sia $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U}_T)$ e*

$$c \geq 0 \quad \textit{in } U_T.$$

Supponiamo che U sia connesso.
(i) Se

$$u_t + Lu \leq 0 \quad \textit{in } U_T$$

e u raggiunge un massimo non negativo su $\overline{U}_T$ in un punto $(x_0, t_0) \in U_T$, allora u è costante su U_{t_0}.
(ii) Analogamente, se

$$u_t + Lu \geq 0 \quad \textit{in } U_T$$

e u raggiunge il minimo non positivo su $\overline{U}_T$ in un punto $(x_0, t_0) \in U_T$, allora u è costante su U_{t_0}.

Dimostrazione. Come nella dimostrazione precedente, poniamo $M := \max_{\overline{U}_T} u$. Supponiamo $M > 0$, $u_t + Lu \leq 0$ in U_T, e u ottiene questo massimo in qualche punto $(x_0, t_0) \in U_T$.
Se $M = 0$ la dimostrazione precedente si applica direttamente e abbiamo

$$\tilde{v}_t + L\tilde{v} = 0, \; \tilde{v} \geq 0 \quad \text{in } W_T,$$

da cui la tesi.
Supponiamo invece che $M > 0$. Prendiamo un insieme aperto, regolare $W \subset\subset U$, con $x_0 \in W$. Sia v una soluzione di

$$\begin{cases} v_t + Kv = 0 & \text{in } W_T \\ v = u^+ & \text{su } \Delta_T, \end{cases}$$

dove $Kv := Lv - cv$. Osserviamo che $0 \leq v \leq M$. Poiché $u_t + Ku = -cu \leq 0$ su $\{u \geq 0\}$, deduciamo dal principio del massimo debole che $u \leq v$. Come prima, segue che $v = M$ in (x_0, t_0).
Poniamo $\tilde{v} := M - v$, poiché l'operatore K non ha termini di ordine zero, abbiamo

$$\tilde{v}_t + K\tilde{v} = 0, \; \tilde{v} \geq 0 \quad \text{in } W_T.$$

Prendiamo $V \subset\subset W$ con $x_0 \in V$, V connesso. Sia $0 < t < t_0$, allora la disuguaglianza di Harnack implica, come sopra, $v \equiv u^+ \equiv M$ su $\partial W \times [0, t_0]$. Poiché $M > 0$, concludiamo che $u \equiv M$ su $\partial W \times [0, t_0]$. Questa deduzione é valida per tutti gli insiemi W come sopra, e pertanto $u \equiv M$ su U_{t_0}. □

Riferimenti bibliografici

[1] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations,* Universitext, Springer, New York (2011);

[2] L.C. Evans, *Partial differential equations. Part II,* Second edition, Graduate Studies in Mathematics, 19, American Mathematical Society (2010);

[3] F. John, *Partial Differential Equations,* Fourth edition, Applied Mathematical Sciences 1, Springer (1991);

[4] G.M. Lieberman, *Second Order Parabolic Partial Differential Equations,* World Scientific (1996);

[5] S. Salsa, *Partial differential equations in action. From modelling to theory,* Second edition, Unitext, 86, Springer (2015).