Tesina per l'esame di Analisi superiore 2

Sul problema di Neumann omogeneo

Daria Dessì

A.A. 2020/21

Università degli studi di Cagliari

Indice

1 Introduzione

Quello che ci si propone è affrontare lo studio di un problema alle derivate parziali (EDP) del secondo ordine di tipo ellittico, con particolari condizioni al contorno. Più precisamente, si studierà il problema di Neumann omogeneo per il Laplaciano. Lo schema che si seguirà sarà quello di individuare il problema, determinare dei concetti di soluzione e studiarne la regolarità.

Nota sulle notazioni. Verranno sistematicamente tralasciati i dominî e le variabili di integrazione, ove questo non porti confusione. Inoltre, per rendere più spedita la trattazione, gli enunciati dei teoremi citati ma non dimostrati sono rimandati all'appendice finale. Occasionalmente nelle note a pie' di pagina sono riportati riferimenti bibliografici più precisi per qualche particolare delle dimostrazioni.

Laplaciano	Δ
d-derivata	derivata debole
c-derivata	derivata classica
$W^{1,p}(\Omega)$	spazio delle funzioni d-derivabili su Ω
$H^k(\Omega)$	$W^{k,2}(\Omega)$
funzioni test	$C_c^\infty(\Omega)$
$\mathbb{R}^N_+$	$\mathbb{R}^{N-1} \times (0, +\infty)$
$H\ddot{o}$	disuguaglianza di Hölder

- $V^* = \{f \colon V \to \mathbb{R} \mid \text{ f è lineare e continua}\}$
- $C_c^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) \mid \text{ e } \varphi(x) = 0 \ \forall x \in \Omega \setminus K, K \text{ compatto di } \Omega\}$
- $W^{1,p}(\Omega) = \{u \mid \exists (g_i)_{i=1}^N \subset L^p(\Omega) \ e \ \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\}$

  $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$
- $W^{k,p}(\Omega) = \{u \in W^{k-1,p}(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{k-1,p}(\Omega) \ \forall i = 1, \dots, N\}$
- $\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$

2 Ricerca delle soluzioni

2.1 Definizione di soluzione

Per iniziare la trattazione diamo una definizione che descriva dove sarà ambientato il problema.

Definizione 1 (dominio di classe C^k)**.** Si dice che un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (i.e. un aperto connesso) limitato è di *classe* C^k se per ogni $x \in \Gamma = \partial\Omega$ esiste un intorno $U_x \subset \mathbb{R}^N$ di x e un diffeomorfismo $H \in C^k(\overline{Q}, \overline{U_x})$ con la proprietà che

$$H(Q_+) = \Omega \cap U_x \quad \text{ e } H(Q_0) = \Gamma \cap U_x$$

dove

$$Q_+ = \{(x', x_N) \in \mathbb{R}^N \mid |x'| < 1 \text{ e } 0 < |x_N| < 1\}$$
$$Q_0 = \{(x', x_N) \in \mathbb{R}^N \mid |x'| < 1 \text{ e } x_N = 0\}$$

Se un dominio è di classe C^1 si dice *regolare.*

Definizione 2 (problema di Neumann)**.** Si dice problema di Neumann omogeneo

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \tag{N}$$

dove $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, Ω è un dominio limitato di classe C^1 e ν è il versore normale uscente rispetto a Γ. In particolare la condizione al contorno $\frac{\partial u}{\partial \nu} \equiv \nabla u \cdot \nu = 0$ si dice *condizione di Neumann omogenea.*

Questa, come accennato nell'introduzione, è una EDP lineare del secondo ordine di tipo ellittico (con una condizione al contorno). Ciò è dovuto alla presenza del Laplaciano, che determina l'ordine e ha tutti gli autovalori positivi.[d. A1]

Definizione 3 (soluzione classica)**.** Una soluzione classica (*c-soluzione*) per il problema (N), è una funzione $u \in C^2(\overline{\Omega})$ che soddisfi (N) in ogni punto di Ω.

Definizione 4 (soluzione debole)**.** Una soluzione debole (*d-soluzione*) per il problema (N), è una funzione $u \in H^1(\Omega)$ che verifica

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi + u\varphi \; dx = \int_\Omega f\varphi \; dx \quad \forall\ \varphi \in H^1(\Omega) \tag{1}$$

Tra questi due tipi di soluzione esiste la relazione illustrata dalla seguente

Proposizione 5. *Se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ è una c-soluzione di* (N) *allora è anche d-soluzione.*

Dimostrazione. Dato che si è supposto che il dominio fosse limitato, $u \in H^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$. Dalla formula di Gauß-Green, e considerando che $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$, $\forall\ \varphi \in C^1(\overline{\Omega})$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi + u\varphi \; dx = \int_\Omega (-\Delta u + u)\varphi \; dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\varphi \; d\Gamma = \int_\Omega f\varphi \; dx$$

La conclusione segue per densità.[T. A2] QED

È semplice mostrare che una d-soluzione a questo problema esiste, con minime richieste sul dato iniziale; e infatti è questa la forza del definire questo nuovo tipo di soluzione. Tuttavia si è interessati a capire, se mai avviene, quando queste sono in effetti c-soluzioni. È in questo senso che si sviluppa la cosiddetta *teoria della regolarità* che culmina con il teorema seguente, che verrà dimostrato, come corollario, alla fine della sottosezione 3.4.

Corollario. *Siano $m > \frac{N}{2}$, $f \in H^m(\Omega)$, $u \in H^1(\Omega)$ e Ω un dominio di classe C^{m+2} a frontiera limitata. Se u è d-soluzione di (N), allora $u \in C^2(\overline{\Omega})$ ed è c-soluzione di (N).*

2.2 Esistenza e unicità

In questa parte ci si occupa dell'effettiva esistenza di un'unica d-soluzione attraverso metodi di analisi funzionale e le caratteristiche degli spazi di Sobolev.

Teorema 6. *Per ogni $f \in L^2(\Omega)$, esiste un'unica d-soluzione $u \in H^1(\Omega)$ per il problema (N), e questa è ottenuta come punto di minimo in $H^1(\Omega)$ del funzionale* (dell'energia)

$$J(z) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla z|^2 + z^2 \; dx - \int_\Omega fz \; dx$$

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sul teorema di Lax-Milgram. Lo spazio $H^1(\Omega)$ munito del prodotto scalare definito da

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + uv \; dx$$

è uno spazio di Hilbert (in particolare a è una forma bilineare, continua, coerciva). Inoltre, per ogni scelta di $f \in L^2(\Omega)$, la funzione

$$h(v) = \int_\Omega fv \; dx$$

è continua e lineare su $H^1(\Omega)$ (infatti segue dalla disuguaglianza di Hölder che $|h(v)| = |\int fv| \leq \|f\|_2 \|v\|_2$). Quindi h è un funzionale di $(H^1(\Omega))^*$. Segue quindi da Lax-Milgram che esiste un'unica

$$u \in H^1(\Omega) \text{ t.c. } a(u,v) = h(v) \; \forall v \in H^1(\Omega)$$

Inoltre, dal momento che il prodotto scalare è in particolare simmetrico, segue che esso realizza il minimo di I

$$J(u) = \min_{v \in H^1(\Omega)} J(v)$$

QED

3 Regolarità

A questo punto è lecito domandarsi sotto quali condizioni (del dominio e del dato iniziale) le soluzioni discusse nella sezione precedente possano avere migliori proprietà. In particolare proprietà tali che si possa invertire la proposizione 5. Per semplicità si studierà un problema preparatorio per poi poter tornare al caso della definizione 2. In anticipazione di ciò che servirà per la dimostrazione principale, si introducono in questa sottosezione delle definizioni e delle proprietà utili.

3.1 Definizioni e lemmi tecnici

I teoremi fanno affidamento sul metodo delle traslazioni di Nirenberg. Esso si basa su due trasformazioni di $u\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ che è bene introdurre.

Definizione 7. $\forall h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ e $x \in \mathbb{R}^N$

$$T_h u(x) = u(x+h)$$
$$D_h u(x) = \frac{T_h u(x) - u(x)}{|h|}$$

Esse godono, in particolare, delle utili proprietà che seguono.

Proposizione 8.

1. $D_h(u \cdot v) = (T_h u) D_h v + (D_h u) v$
2. *Se* $u, v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ *allora*
$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x) D_h v(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^N} D_{-h} u(x)\ v(x)\ dx$$
3. *Se* $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *allora* $T_h u, D_h u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *e*
$$\nabla(T_h u) = T_h(\nabla u) \qquad \nabla(D_h u) = D_h(\nabla u)$$

Dimostrazione. 1. Dalle definizioni
$$\begin{aligned}&(T_h u) D_h v + (D_h u) v = \\ &= u(x+h)\frac{v(x+h) - v(x)}{|h|} + \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|} v(x) = \\ &= \frac{u(x+h)v(x+h)}{|h|} - \frac{u(x)v(x)}{|h|} = D_h(uv)\end{aligned}$$

2. Con il cambiamento di variabile $y = x + h$ sul primo integrale
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} u(x) D_h v(x)\ dx &= \frac{1}{|h|}\left(\int_{\mathbb{R}^N} u(x)v(x+h)\ dx - \int_{\mathbb{R}^N} u(x)v(x)\ dx\right) = \\ &= \frac{1}{|h|}\left(\int_{\mathbb{R}^N} u(y-h)v(y)\ dy - \int_{\mathbb{R}^N} u(x)v(x)\ dx\right) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} D_{-h} u(x)\ v(x)\ dx\end{aligned}$$

3. Dal momento che T_h rappresenta una traslazione, le regole del calcolo delle d-derivate [P. A5](cambio di variabile) assicurano quanto affermato dalla tesi. Di conseguenza D_h è combinazione lineare di elementi di $H^1(\mathbb{R}^N)$ e ancora per [P. A5] può concludere.

QED

Lemma 9. *Se $u \in H^1(\Omega)$ soddisfa (1), allora $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$*

Dimostrazione. Dal momento che (1) è espressa tramite funzioni in $H^1(\Omega)$, essa è vera in particolare vale per $\varphi = u$:

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{H^1(\Omega)} &= \int_\Omega |u|^2 + |\nabla u|^2 \, dx = \\ &= \int_\Omega fu \, dx \leq \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

QED

Osservazione 10. Il lemma 9 e la sua dimostrazione valgono anche sul dominio $\mathbb{R}^N$. Infatti, il problema di Neumann, fin qui espresso su domini limitati, è generalizzabile a domini come $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{R}^N_+$. Nel primo caso il problema si esprime come

$$-\Delta u + u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^N$$

Nel secondo come

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', 0) = 0 & \text{per } x' \in \mathbb{R}^{N-1} \end{cases}$$

Per entrambi la definizione di d-soluzione è uguale a (1), pur di sostituire opportunamente Ω. Si estende anche la dimostrazione di esistenza e unicità.[1]

Lemma 11. *Sia $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Allora*

$$\|D_h u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

Dimostrazione. Per usare argomenti di densità, sia inizialmente $u \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N)$. Allora si può porre

$$g(t) = u(x + th) \; \forall x \in \mathbb{R}^N \implies g(t) \in C^1(\mathbb{R}) \text{ con } g'(t) = \nabla u(x + th) \cdot h$$

Si ha allora

$$|h||D_h u| = |u(x + h) - u(x)| = \left| \int_0^1 g'(t) \, dt \right| \leq |h| \int_0^1 |\nabla u(x + th)| \, dt$$

[1][B], Chapter 9, Example 5

da cui

$$
\begin{aligned}
\|D_h u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^1 |\nabla u(x+th)| \ dt \right)^2 dx \leq \\
&\leq \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x+th)|^2 \ dx \ dt = \\
&= \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned} \tag{2}
$$

Se ora $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, esiste una successione $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $u_n \overset{H^1(\mathbb{R}^N)}{\longrightarrow} u$ [T. A2]. Per i suoi termini vale (2), quindi si può quindi passare al limite e concludere. QED

Lemma 12. *Sia $u \in H^1(Q_+)$ tale che $\operatorname{supp} u \subset Q_+$ e $h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ tale che $h \| Q_0$ e il suo modulo è sufficientemente piccolo che $(\operatorname{supp} u) \pm h \subset Q_+$. Allora*

$$\|D_h u\|_{L^2(Q_+)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(Q_+)}$$

Dimostrazione. Sia $\tilde{u}$ l'estensione lineare e continua di u a $\mathbb{R}^N$.[2] Allora $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e per quanto detto nel lemma 11

$$\|D_h \tilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|\nabla \tilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

Quindi si ha

$$\|D_h u\|_{L^2(Q_+)} = \|D_h \tilde{u}\|_{L^2(Q_+)} \leq \|D_h \tilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|\nabla \tilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(Q_+)}$$

QED

Osservazione 13. Il lemma precedente vale anche per il semispazio $\mathbb{R}^N_+$. In questo caso serve richiedere soltanto che sia $h \| Q_0$ e non nullo. In aggiunta, per $\mathbb{R}^N$, la condizione che $\|D_h u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C$ (per una qualche costante e per ogni h) è sufficiente per affermare che $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, che quindi risulta ben caratterizzato dal comportamento della D_h. Infatti per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $h = te_i$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} u D_h \varphi \ dx \right| \overset{P.\ 8}{=} \left| \int_{\mathbb{R}^N} (D_{-h} u) \varphi \ dx \right| \overset{H\ddot{o}}{\leq} \|D_{-h} u\|_2 \|\varphi\|_2 \leq C \|\varphi\|_2$$

passando al limite per $|h| \to 0$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \ dx \right| \leq C \|\varphi\|_2 \quad \forall i = 1, \ldots, N$$

e dalla caratterizzazione degli spazi di Sobolev si può concludere.

[2] [B], Chapter 9, Remark 9

3.2 Caso preparatorio

Teorema 14 (regolarità su $\mathbb{R}^N$)**.** *Sia* $m \in \mathbb{N}$, $f \in H^m(\mathbb{R}^N)$ *e* $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *soluzione debole di*

$$-\Delta u + u = f \quad in\ \mathbb{R}^N$$

Allora $u \in H^{m+2}(\mathbb{R}^N)$ *e* $\|u\|_{H^{m+2}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|f\|_{H^m(\mathbb{R}^N)}$ *per qualche* $C > 0$ *indipendente da* f*.*

Dimostrazione. La dimostrazione procede per induzione su m.

$\boxed{\text{m=0}}$ Si ha che $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e occorre dimostrare che $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$. Fissato un $h \in \mathbb{R}^N \setminus 0$, sia come funzione test $\varphi = D_{-h}D_h u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ [P. 8]. Si ha

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} f D_{-h}D_h u \ dx = \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla(D_{-h}D_h u) + u(D_{-h}D_h u) \ dx \overset{P.\ 8}{=} \\
&\qquad = \int |\nabla D_h u|^2 + |D_h u|^2 \ dx = \|D_h u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}$$

A questo punto, dalla catena appena scritta si ha

$$\begin{aligned}
\|D_h u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} &\overset{H\ddot{o}}{\leq} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|D_{-h}D_h u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \overset{oss\ 13}{\leq} \\
&\leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|\nabla D_h u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \\
&\leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|D_h u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}$$

In particolare si ha $\forall\ i \in \{1, \ldots, N\}$

$$\left\| D_h \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \left\| \frac{\partial D_h u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|\nabla D_h u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

da cui segue, per l'oss. 13, che

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\mathbb{R}^N) \text{ con } \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

e di conseguenza $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ con la maggiorazione

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \sum_{j,k=1}^N \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \\
\leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{m>0}}$ In questo caso $f \in H^m(\mathbb{R}^N)$, $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in H^{m-1}(\mathbb{R}^N)$ e $u \in H^{m+1}(\mathbb{R}^N)$, con $m+1$ almeno 2 per base dell'induzione. A questo punto, scegliendo $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in$

$C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ come funzione test

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \nabla \varphi + \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi\right) dx = -\int \left(\nabla u \cdot \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) dx =$$
$$= -\int f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi \, dx$$

Quindi applicando l'ipotesi induttiva a $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ si ha che questa appartiene a $H^{m+1}(\mathbb{R}^N)$, e quindi $u \in H^{m+2}(\mathbb{R}^N)$. La maggiorazione segue, come nel punto precedente, dalla definizione di norma in $H^{m+2}(\mathbb{R}^N)$.

QED

3.3 Caso principale

Teorema 15 (di regolarità)**.** *Sia $m \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio di classe C^{m+2} a frontiera limitata e $u \in H^1(\Omega)$ una d-soluzione di* (N)*. Se*

$$f \in H^m(\Omega), \text{ allora } u \in H^{m+2}(\Omega)$$

ed esiste una costante (rispetto a f) t.c. $\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C\|f\|_{H^m(\Omega)}$

Dimostrazione. La dimostrazione procede per induzione su m. Sia dunque, per iniziare, $m = 0$; allora $f \in L^2(\Omega)$ e si deve mostrare che $u \in H^2(\Omega)$. Dalla definizione 1 di dominio di classe C^2, esiste una famiglia di diffeomorfismi $\{H_k\}_{k \in X}$ e di aperti $\{U_k\}_{k \in X}$ tali che

$$H_k \in C^2(\overline{Q}, \overline{U_k}), \quad H_k^{-1} \in C^2(\overline{U_k}, \overline{Q}), \quad H_k(Q_+) = U_k \cap \Omega, \quad H_k(Q_0) = U_k \cap \Gamma$$

e dal momento che $\overline{\Omega}$ è compatto, è ben definita la partizione dell'unità[3] con un numero finito di funzioni. Esiste cioè un sottoricoprimento finito di $\overline{\Omega}$

$$\{U_k\}_{k=0}^p \text{ tale che } \quad \overline{\Omega} \subset \bigcup_{k=0}^p U_k, \quad \Gamma \subset \bigcup_{k=1}^p U_k, \quad U_0 \subset \Omega$$

e una famiglia di funzioni $\{\theta_k\}_{k=0}^p$ tale che

$$\theta_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \theta_k(x) \in [0,1], \quad \text{supp}(\theta_k) \subset U_k \quad \forall k = 0, \dots, p$$

con l'ulteriore proprietà che

$$\sum_{k=0}^p \theta_k = 1 \text{ in } \overline{\Omega}$$

[3] [B] Lemma 9.3

Allora per ogni $x \in \overline{\Omega}$

$$\sum_{k=0}^{p} (\theta_k u)(x) = u(x)$$

cosicché

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} = \|\theta_0 u + \sum_{k=1}^{p} \theta_k u\|_{H^2(\Omega)} \leq \|\theta_0 u\|_{H^2(\Omega)} + \|\sum_{k=1}^{p} \theta_k u\|_{H^2(\Omega)} \tag{3}$$

$\boxed{\text{stime interne: } \theta_0 u \in H^2}$ Si inizia definendo l'estensione banale di $\theta_0 u$ su tutto $\mathbb{R}^N$, con l'obiettivo di mostrare che $\theta_0 u \in H^2(\Omega)$

$$v(x) = \begin{cases} \theta_0(x)u(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \in \Omega^C \end{cases}$$

che appartiene a $H^1(\mathbb{R}^N)$.[4] Quindi definendo la funzione di $L^2(\mathbb{R}^N)$

$$g(x) = \begin{cases} \theta_0(x)f(x) - 2\nabla\theta_0(x) \cdot \nabla u(x) - \Delta\theta_0(x)u(x) & \text{in } \Omega \\ 0 & \text{in } \Omega^C \end{cases}$$

v è d-soluzione di $-\Delta v + v = g$ in $\mathbb{R}^N$, e in virtù del teorema 14 si ottiene $v \in H^2(\mathbb{R}^N)$ con la maggiorazione $\|v\|_{H^2(\mathbb{R}^N)} \leq C_1\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$. Pertanto

$$\begin{aligned} \|\theta_0 u\|_{H^2(\Omega)} &= \|v\|_{H^2(\mathbb{R}^N)} \leq \\ &\leq C_1\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \\ &\leq C_1(\theta_0)\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + C_2(\theta_0)\|u\|_{H^1(\Omega)} + \leq \\ &\overset{L.\ 9}{\leq} C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{stime esterne: } \theta_k u \in H^2}$ Sia ora $v_k = \theta_k u \in H^1(\Omega \cap U_k)$ per ogni $k = 1, \ldots, p$ e, come nel punto precedente, sia

$$g(x) = \theta_k(x)f(x) - \theta_k(x)u(x) - 2\nabla\theta_k(x) \cdot \nabla u(x) - \Delta\theta_k(x)u(x) \quad \text{in } \Omega \cap U_k$$

Questa è una funzione di $L^2(\Omega \cap U_k)$ che per passaggi analoghi a quelli sopra, ha norma $\|g\|_{L^2(\Omega \cap U_k)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$, C dipendente da θ_k ma non da f. Ora v_k è d-soluzione di

$$\begin{cases} -\Delta v = g & \text{in } \Omega \cap U_k \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \partial(\Omega \cap U_k) \end{cases}$$

e in particolare soddisfa

$$\int_{\Omega \cap U_k} \nabla v_k \cdot \nabla\varphi \, dx = \int_{\Omega \cap U_k} g\varphi \, dx \quad \forall\, \varphi \in H^1(\Omega \cap U_k) \tag{4}$$

[4][B] Remark 4 (ii), pag. 265

Ora occorre effettuare un cambio di variabili verso Q_+ in modo da poter utilizzare il metodo delle traslazioni di Nirenberg [D. 7] per mostrare che $v_k \in H^2(\Omega \cap U_k)$. A tal fine, fissato $k \in \{1, \dots, p\}$, si pone per ogni $y \in \overline{Q_+}$ e $\varphi \in H^1(\Omega \cap U_k)$ [Figura 1]

$$\begin{aligned} \tilde{g}(y) &= (g \circ H_k)(y) |\det J_{H_k}|(y) \\ w_k(y) &= v_k(H_k(y)) \\ \psi(y) &= \varphi \circ H_k(y) \end{aligned} \tag{5}$$

Inoltre, per semplificare la notazione, sarà

$$\begin{array}{ll} U \overset{not}{=} \Omega \cap U_k & H \overset{not}{=} H_k \\ H_j \overset{not}{=} (H_k)_j & \text{componente } j\text{−esima} \\ v \overset{not}{=} v_k & w \overset{not}{=} w_k \end{array}$$

Come primo fatto, da (5) si ha che

$$\|w\|_{L^2(Q_+)} \le C\|v\|_{L^2(U)} \le C\|u\|_{L^2(U)} \overset{L.\ 9}{\le} C\|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{6}$$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "H^{-1}"] & Q_+ \arrow[r, "H"] \arrow[rr, bend left, "w"] & U \arrow[r, "v"] & \mathbb{R} \\
x \arrow[r, mapsto] \arrow[rrr, bend right, "w(H^{-1}(x))=v(x)"'] & H^{-1}(x) = y \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, "w(y)=v(H(y))"'] & x = H(H^{-1}(x))) \arrow[r, mapsto] & v(x)
\end{tikzcd}$$

Figura 1: diagramma del cambio di variabile

Ora considerato che $\psi \in H^1(Q_+)$, si ha che

$$\int_{Q_+} \tilde{g}\psi \; dy \overset{(5)}{=}$$
$$= \int_{Q_+} g(H(y))\varphi(H(y))|\det J_H| \; dy =$$
$$= \int_U g(x)\varphi(x)|\det J_H||\det J_H^{-1}| \; dx \overset{(4)}{=}$$
$$= \int_U \nabla v \cdot \nabla \varphi \; dx =$$
$$= \int_U \sum_{i=1}^N \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \; dx \overset{(5)}{=}$$
$$= \int_U \sum_{i,l,j=1}^N \left(\frac{\partial w}{\partial y_j}\frac{\partial H_j^{-1}}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial y_l}\frac{\partial H_l^{-1}}{\partial x_i}\right) \; dx =$$
$$= \int_U \sum_{j,l=1}^N \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial H_j^{-1}}{\partial x_i}\frac{\partial H_l^{-1}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial w}{\partial y_j}\frac{\partial \psi}{\partial y_l} \; dx =$$
$$= \int_{Q_+} \sum_{j,l=1}^N \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial H_j^{-1}}{\partial x_i}\frac{\partial H_l^{-1}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial w}{\partial y_j}\frac{\partial \psi}{\partial y_l}|\det J_H| \; dy =$$
$$\overset{not}{=} \int_{Q_+} \sum_{j,l=1}^N a_{j,l}\frac{\partial w}{\partial y_j}\frac{\partial \psi}{\partial y_l} \; dy$$

$$\text{Ossia } \int_{Q_+} \sum_{j,l=1}^N a_{j,l}\frac{\partial w}{\partial y_j}\frac{\partial \psi}{\partial y_l} \; dy = \int_{Q_+} \tilde{g}\psi \; dy \quad \forall\, \psi \in H^1(Q_+) \tag{7}$$

A questo punto bisogna mostrare che $w \in H^2(Q_+)$, ma prima si osserva che i coefficienti $a_{j,l} \in C^1(\overline{Q_+})$ soddisfano la condizione di uniforme ellitticità $\forall\, y \in \overline{Q_+},\ \xi \in \mathbb{R}^N$

$$\sum_{j,l=1}^N a_{j,l}\xi_j\xi_l \geq \alpha|\xi|^2 \qquad \text{per qualche } \alpha > 0\ \forall j,l = 1,\dots,N \tag{8}$$

Infatti

$$\begin{aligned}
\sum_{j,l=1}^{N} a_{j,l}\xi_j\xi_l &= \sum_{j,l}\left(\sum_i \frac{\partial H_j^{-1}}{\partial x_i}\frac{\partial H_l^{-1}}{\partial x_i}|\det J_H|\right)\xi_j\xi_l = \\
&= |\det J_H|\sum_i\left(\sum_j \xi_j\frac{\partial H_j^{-1}}{\partial x_i}\right)\left(\sum_l \xi_l\frac{\partial H_l^{-1}}{\partial x_i}\right) = \\
&= J\sum_i\left(\sum_j \xi_j\frac{\partial H_j^{-1}}{\partial x_i}\right)^2 \geq \\
&\geq J\sum_i\left(\sum_j \xi_j \min_j\{\frac{\partial H_j^{-1}}{\partial x_i}\}\right)^2 = \\
&= J\sum_i M_i^2\sum_j \xi_j^2 = \alpha|\xi|^2
\end{aligned}$$

Imponendo in (7) $\psi = w$ si otterrà $\|\nabla w\|_{L^2(Q_+)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$

$$\begin{aligned}
\alpha\|\nabla w\|^2_{L^2(Q_+)} &= \alpha\int_{Q_+}\sum_i\left|\frac{\partial w}{\partial y_i}\right|^2 dy \overset{(8)}{\leq} \\
&\leq \int\sum_{j,l} a_{j,l}\frac{\partial w}{\partial y_j}\frac{\partial w}{\partial y_l}\ dy \overset{(7)}{=} \\
&= \int \tilde{g}w\ dy \overset{H\ddot{o}}{\leq} \\
&\leq C\|\tilde{g}\|_{L^2(Q_+)}\|w\|_{L^2(Q_+)} \overset{(6)}{\leq} \\
&\leq C\|f\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Per cui $\|\nabla w\|_{L^2(Q_+)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$ e come conseguenze di questo e (6)

$$\|w\|_{H^1(Q_+)} = \|w\|_{L^2(Q_+)} + \|\nabla w\|_{L^2(Q_+)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{9}$$

Per come è definito v, $\operatorname{supp} w \Subset Q_+$; quindi per stimare le derivate seconde miste sia $h\|Q_0$ t.c. $(\operatorname{supp} w) \pm h \subset Q_+$ in modo che $\psi \equiv D_{-h}D_h w \in$

$H^1(Q_+)$. Allora si ha

$$
\begin{aligned}
&\Big|\int_{Q_+} \sum_{j,l} D_h\left(a_{j,l}\frac{\partial w}{\partial y_j}\right)\frac{\partial D_h w}{\partial y_l}\ dy\Big| \overset{P.\ 8(2)}{=}\\
&\Big|\int_{Q_+} \sum_{j,l} a_{j,l}\frac{\partial w}{\partial y_j} D_{-h}\left(\frac{\partial D_h w}{\partial y_l}\right)\ dy\Big| \overset{P.\ 8(3)}{=}\\
&= \Big|\int \sum_{j,l} a_{j,l}\frac{\partial w}{\partial y_j}\frac{\partial \psi}{\partial y_l}\ dy\Big| \overset{(7)}{=}\\
&= \Big|\int \tilde{g}\psi\ dy\Big| \leq\\
&\leq \|\tilde{g}\|_{L^2(Q_+)}\|\psi\|_{L^2(Q_+)} \overset{L.\ 12}{\leq} \|\tilde{g}\|_{L^2(Q_+)}\|\nabla D_h w\|_{L^2(Q_+)}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

D'altra parte

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j,l} D_h\left(a_{j,l}\frac{\partial w}{\partial y_j}\right)\frac{\partial D_h w}{\partial y_l} \overset{P.\ 8}{=}\\
&\qquad = \sum_{j,l} T_h a_{j,l}\frac{\partial D_h w}{\partial y_j}\frac{\partial D_h w}{\partial y_l} + D_h a_{j,l}\frac{\partial w}{\partial y_j}\frac{\partial D_h w}{\partial y_l} \overset{(8)}{\geq}\\
&\qquad \geq \alpha|\nabla D_h w|^2 + \sum_{j,l} D_h a_{j,l}\frac{\partial w}{\partial y_j}\frac{\partial D_h w}{\partial y_j} \geq\\
&\qquad \geq \alpha|\nabla D_h w|^2 - C|\nabla w||\nabla D_h w|
\end{aligned}
$$

Da cui passando agli integrali

$$
\begin{aligned}
&\alpha\int_{Q_+}|\nabla D_h w|^2\ dy \leq\\
&\quad \leq \int \sum_{j,l} D_h\left(a_{j,l}\frac{\partial w}{\partial y_j}\right)\frac{\partial D_h w}{\partial y_l}\ dy + \int C|\nabla w||\nabla D_h w|\ dy \overset{(10)}{\leq}\\
&\quad \leq \|\tilde{g}\|_2\|\nabla D_h w\|_{L^2(Q_+)} + C\|\nabla w\|_{L^2(Q_+)}\|\nabla D_h w\|_{L^2(Q_+)}
\end{aligned}
$$

Quindi

$$
\|\nabla D_h w\|_{L^2(Q_+)} \leq \|\tilde{g}\|_{L^2(Q_+)} + C\|w\|_{H^1(Q_+)} \overset{(9)}{\leq} C\|f\|_{L^2(\Omega)}
$$

$$
\|D_h\frac{\partial w}{\partial x_i}\|_{L^2(Q_+)} \leq \|\nabla D_h w\|_{L^2(Q_+)} \Longrightarrow \|D_h w\|_{H^1(Q_+)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{11}
$$

Ponendo $h = te_i$ $i \neq N$, dove e_i sono termini della base canonica di $\mathbb{R}^N$, per $j = 1, \dots, N$ e $\varphi \in C_c^\infty(Q_+)$

$$\begin{aligned}\Big|\int_{Q_+} w\big(D_{-h}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\big)\ dy\Big| &= \\ &= \Big|\int_{Q_+}(D_h\frac{\partial w}{\partial x_j})\varphi\ dy\Big| \leq \\ &\leq \|D_h\frac{\partial w}{\partial x_j}\|_{L^2(Q_+)}\|\varphi\|_{L^2(Q_+)} \overset{(11)}{\leq} \\ &\leq \|D_h w\|_{H^1(Q_+)}\|\varphi\|_{L^2(Q_+)} \leq \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(Q_+)}\end{aligned}$$

Dalla caratterizzazione degli spazi di Sobolev, per $t \to 0^+$ si ottiene

$$\Big|\int_{Q_+} w\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}\ dy\Big| \leq \|f\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} \Longrightarrow \|\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}\|_{L^2(Q_+)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Rimane fuori dal computo la derivata seconda pura in N. Dal momento che (8) vale in particolare per $\xi = (0, \dots, 0, 1)$, si ha $a_{NN} > 0$. Ma allora è ben definita $\tilde{\psi} = \frac{\psi}{a_{NN}} \in C_c^1(Q_+)$ $\forall \psi \in C_c^\infty(Q_+)$. E in particolare si ha

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y_N} = \frac{\partial}{\partial y_N}\left(\frac{\psi}{a_{NN}}\right) = \Big(\frac{\partial \psi}{\partial y_N}a_{NN} - \psi\frac{\partial a_{NN}}{\partial y_N}\Big)\frac{1}{{a_{NN}}^2} \tag{12}$$

Inoltre segue da (7)

$$\int a_{NN}\frac{\partial w}{\partial y_N}\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y_N}\ dy = -\sum_{(j,l)\neq(N,N)} a_{j,l}\frac{\partial w}{\partial y_j}\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y_l} + \int \tilde{g}\tilde{\psi}\ dy \tag{13}$$

Quindi si ha

$$\begin{aligned}&\Big|\int_{Q_+}\frac{\partial w}{\partial y_N}\frac{\partial \psi}{\partial y_N}\ dy\Big| \overset{(12)}{=} \\ &= \Big|\int a_{NN}\frac{\partial w}{\partial y_N}\frac{\partial}{\partial y_N}\Big(\frac{\psi}{a_{NN}}\Big)\ dy + \int \frac{\psi}{a_{NN}}\frac{\partial a_{NN}}{\partial y_N}\frac{\partial w}{\partial y_N}\ dy\Big| \overset{(13)}{=} \\ &= \Big|-\int \sum_{(j,l)\neq(N,N)} a_{j,l}\frac{\partial w}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\frac{\psi}{a_{NN}}\Big)\ dy + \int \Big(\tilde{g} + \frac{\partial a_{NN}}{\partial y_N}\frac{\partial w}{\partial y_N}\Big)\frac{\psi}{a_{NN}}\ dy\Big| = \\ &= \Big|\int \sum_{(j,l)\neq(N,N)} a_{j,l}\frac{\partial^2 w}{\partial y_j \partial y_l}\frac{\psi}{a_{NN}}\ dy + \int \Big(\tilde{g} + \frac{\partial a_{NN}}{\partial y_N}\frac{\partial w}{\partial y_N}\Big)\frac{\psi}{a_{NN}}\ dy\Big| \leq \\ &\leq C\Big(\|f\| + \|\tilde{g} + \frac{\partial a_{NN}}{\partial y_N}\frac{\partial w}{\partial y_N}\|\Big)\left\|\frac{\psi}{a_{NN}}\right\| \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\psi\|_{L^2(Q_+)}\end{aligned}$$

Quindi è stimata anche la derivata pura e $\|w\|_{H^2(Q_+)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$. Dal momento che w si può ritrasformare in v tramite H^{-1} e le stime restano vere, anche

$$\|\theta_k u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Da questo e da (3) si deduce la tesi per $m = 0$. Per i casi $m > 0$ si procede per induzione in maniera analoga a quanto fatto nel teorema 14, ma rettificando opportunamente la frontiera ad ogni passaggio e avendo cura del fatto che le traslazioni non possono essere effettuate in direzioni arbitrarie e che quindi la derivata pura debba essere esaminata a parte, come appena fatto nella base dell'induzione. QED

3.4 Conclusioni

A questo punto è possibile invertire la proposizione 5 tramite il seguente

Corollario 16. *Siano $m > \frac{N}{2}$, $f \in H^m(\Omega)$, $u \in H^1(\Omega)$ e Ω un dominio di classe C^{m+2} a frontiera limitata. Se u è d-soluzione di (N), allora $u \in C^2(\overline{\Omega})$ è c-soluzione di (N)*

Dimostrazione. Per i teoremi di immersione vale che

$$m > \frac{N}{p} \Longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \subset C^k(\Omega)$$

con $k = [m - \frac{N}{p}] \geq 0$.[5] Inoltre dal teorema precedente

$$f \in H^m(\Omega) \Longrightarrow u \in H^{m+2}(\Omega)$$

Quindi in particolare $f \in C(\Omega)$ e $u \in C^2(\Omega)$. Dalla formula di Gauß-Green e (1), per ogni $\varphi \in H^1(\Omega)$ si ottiene

$$\int_\Omega f\varphi \; dx = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + u\varphi \; dx = \int_\Omega (-\Delta u + u)\varphi \; dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\varphi \; d\Gamma$$

Dal momento che questo vale in particolare per $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, si ha

$$\int_\Omega (-\Delta u + u - f)\varphi \; dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial \nu}\varphi \; dx = 0$$

Perciò $-\Delta u + u - f = 0$ q.o. e quindi ovunque per continuità. Inoltre per l'arbitrarietà di φ

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial \nu}\varphi \; dx = 0 \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$$

QED

[5] [B] Corollary 9.13 e 9.15

4 Principio del massimo

Un interessante strumento per controllare le soluzioni di EDP ellittiche è rappresentato dal principio menzionato nel titolo. In quanto segue ogni sup e inf è da considerarsi come essenziale (sup ess, inf ess).

Teorema 17. *Siano Ω un dominio regolare, limitato e $f \in L^2(\Omega)$. Se $u \in H^1(\Omega)$ è una soluzione debole di (N), allora per quasi ogni $x \in \Omega$*

$$\inf_\Omega f \leq u(x) \leq \sup_\Omega f \tag{14}$$

Dimostrazione. Dato che u è una soluzione debole, soddisfa per ogni $\varphi \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla\varphi + u\varphi)\ dx = \int_\Omega f\varphi\ dx \tag{15}$$

Sia ora G [fig. 2a] una qualunque funzione reale tale che

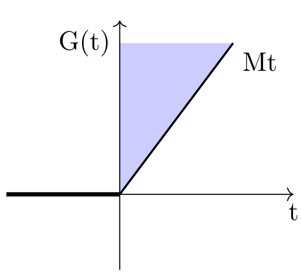
$$\begin{cases} G \in C^1(\mathbb{R}) & \\ G(t) = 0 & \text{se } t \leq 0 \\ 0 < G'(t) \leq M \in \mathbb{R} & \text{altrove} \end{cases}$$

Supponiamo dapprima che $K = \sup_\Omega f < \infty$ (per evitare il caso banale). Dato che $K, u \in H^1(\Omega)$ (il dominio è limitato) e $G \in C^1(\mathbb{R})$

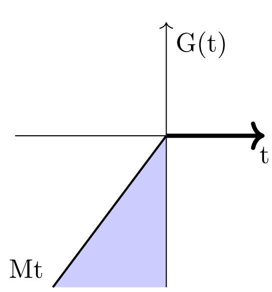
$$v = G(u-K) \in H^1(\Omega) \text{ e ha derivata debole pari a } G'(u-K)\nabla u$$

Quindi può essere usata come funzione test in (15); e addizionando $-K\ G(u-K)$ si ha

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 G'(u-K) + uG(u-K)\ dx = \int_\Omega fG(u-K)\ dx$$
$$\int_\Omega |\nabla u|^2 G'(u-K) + (u-K)\ G(u-K)\ dx = \int_\Omega (f-K)\ G(u-K)\ dx$$



(a) Caso $K = \sup f$



(b) Caso $H = \inf f$

Ma

$$\begin{cases} f - K \leq 0 & \text{per definizione di } K \\ G(u-K) \geq 0 & \text{perché è strettamente crescente a partire da 0} \\ G' \geq 0 \\ |\nabla u|^2 \geq 0 \end{cases}$$

quindi

$$\int_\Omega (u-K)G(u-K)\ dx = \int_\Omega (f-K)G(u-K) - |\nabla u|^2 G'(u-K)\ dx \leq 0$$

Tuttavia $G(t), tG(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ (e quindi per $u - K$) e per monotonia, tale è anche l'integrale. Ma allora deve valere l'uguaglianza e per definizione di G, $G(t) = 0 \iff t \leq 0$, da cui la prima parte della tesi.
Analogamente sia $H = \inf_\Omega f$ e [fig. 2b]

$$\begin{cases} G \in C^1(\mathbb{R}) \\ G(t) = 0 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 < G'(t) \leq M & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Ancora $v = G(u-K) \in H^1(\Omega)$ e può essere sostituita a φ in (15). Stavolta

$$\begin{cases} f - H \geq 0 \\ G(u-H) \leq 0 \\ G' \geq 0 \end{cases}$$

$$\int_\Omega (u-H)G(u-H)\ dx = \int_\Omega (f-H)G(u-H) - |\nabla u|^2 G'(u-H)\ dx \leq 0$$

Tuttavia in questo caso $G(u-H) \leq 0$ per $t < 0$ e quindi, essendo anche $G(t)t \geq 0$ per $t \leq 0$

$$\int_\Omega (u-H)G(u-H)\ dx \geq 0$$

e vale l'uguaglianza a 0, che si ottiene per $(u-H) \geq 0$. Quindi $H \leq u \leq K$ conduce alla tesi. QED

A Appendice

Definizione A1. Dicesi EDP del secondo ordine lineare un problema del tipo

$$-\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{h=1}^{N} b_h(x)\frac{\partial u}{\partial x_h} + c(x)u = f(x) \ \text{ in } \Omega$$

dove $a_{i,j}, b_h, c, f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ sono funzioni e la matrice $A = [a_{i,j}]$ è simmetrica e può avere (a meno di un cambio di segno)

- autovalori tutti positivi (*equazione ellittica*)
- un autovalore nullo e gli altri positivi (*equazione parabolica*)
- un autovalore negativo e gli altri positivi (*equazione iperbolica*)

Teorema A2 (densità)**.** *Dato Ω un dominio limitato di classe C^1, se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, esiste una successione (u_n) in $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $u_n \longrightarrow u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. In altre parole, l'insieme delle restrizioni a Ω delle funzioni $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ formano un sottospazio denso di $W^{1,p}(\Omega)$.*
La tesi vale anche se Ω è un dominio regolare con frontiera limitata o con frontiera regolare a tratti.

Definizione A3. Data la coppia $(X, \langle, \rangle)$, dove X è uno spazio vettoriale reale e

$$\langle, \rangle\colon X \times X \to \mathbb{R}$$

è una forma bilineare, simmetrica e definita positiva (*prodotto scalare*); essa si dice spazio di Hilbert *sse* il prodotto scalare induce una norma che rende lo spazio completo.

Teorema A4 (Lax-Milgram)**.** *Sia X uno spazio di Hilbert, $a\colon X \times X \to \mathbb{R}$ una forma bilineare, continua e coerciva. Per ogni $\varphi \in X^*$ esiste un unico $x \in X$ tale che*

$$a(x, y) = \varphi(y) \quad \forall y \in X$$

Inoltre, se a è anche simmetrica, x realizza il minimo in X del funzionale

$$\frac{a(y, y)}{2} - \varphi(y)$$

Proposizione A5.

1. *Se $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, $\alpha u + \beta v \in W^{1,p}(\Omega) \quad \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e*

$$\frac{\partial(\alpha u + \beta v)}{\partial x_i} = \alpha\frac{\partial u}{\partial x_i}\beta\frac{\partial v}{\partial x_i} \qquad \forall i = 1, \dots, N$$

2. *Se $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ allora*

$$uv \in W^{1,p}(\Omega) \quad e \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i}v + u\frac{\partial v}{\partial x_i} \qquad \forall i = 1, \dots, N$$

3. Se $G \in C^1(\mathbb{R})$ *t.c.* $G(0) = 0$, $G' \in L^\infty(\mathbb{R})$ *allora* $G \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ *e*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ u) = (G' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i} \qquad \forall i = 1, \dots, N$$

4. Siano

- $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^N$ *aperti*
- $H \in C^1(\Omega', \Omega)$ *un diffeomorfismo*
- $\det(J_H) \in L^\infty(\Omega')$, $\det(J_{H^{-1}}) \in L^\infty(\Omega)$
- $J_H, J_{H^{-1}} \in (L^\infty)^{N \times N}$
- $u \in W^{1,p}(\Omega)$

Allora $u \circ H \in W^{1,p}(\Omega')$ *e*

$$\frac{\partial}{\partial y_i}(u \circ H) = \sum_{j=1}^{N} (\frac{\partial u}{\partial x_j} \circ H)\frac{\partial H_j}{\partial y_i} \qquad \forall i = 1, \dots, N$$

Riferimenti bibliografici

[B] Haim Brezis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer