# Autovalori e autofunzioni per il Laplaciano con condizioni di Neumann e loro utilizzo nell'equazione del calore

Nicola Maria Carboni

12 marzo 2021

# Indice

# Introduzione

Lo studio dello spettro di un operatore è molto utile nella risoluzione di alcuni tipi di equazioni differenzili: l'obiettivo di questa tesina è quello di trovare una soluzione per l'equazione del calore con condizioni di Neumann utilizzando la *decomposizione spettrale del laplaciano.*

# 1 Definizioni e teoremi preliminari

## 1.1 Spazi di Hilbert e operatori lineari continui

Prima di addentrarsi negli spazi di Hilbert, è necessario fare un piccola digressione sugli spazi normati e in particolar modo sugli spazi di *Banach*, ricordando le proprietà più importanti.

### 1.1.1 Spazi normati

**Definizione 1.1.** *Sia $X$ uno spazio vettoriale. Una norma su $X$ è una funzione $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}$ tale per cui*

*(i)* $\|x\| \geq 0$ *per ogni* $x \in X$ *ed* $\|x\| = 0$ *se e solo se* $x = 0$

*(ii)* $\|ax\| = |a|\|x\|$ *per ogni* $x \in X$ *e per ogni* $a \in \mathbb{R}$

*(iii)* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *per ogni* $x, y \in X$

**Definizione 1.2.** *La coppia $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio normato*

**Definizione 1.3.** *Uno spazio normato $X$ è detto completo se ogni successione di Cauchy ammette limite in $X$*

**Esempio 1.4.** Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto e $p \geq 1$. Si ha che

$$L^p(\Omega) = \left\{ [f] = \{g\colon \Omega \to \mathbb{R} \text{ misurabili, tali che } f = g \text{ q.o.}\} \text{ tali che } \int_\Omega |f|^p \, dx < \infty \right\}$$

è uno spazio di Banach con la norma

$$\|f\|_p = \left( \int_\Omega |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Un concetto fondamentale all'interno della teoria degli spazi di Banach è quello di operatore lineare continuo.

**Definizione 1.5.** *Siano $X, Y$ due spazi di Banach. Un operatore lineare $A\colon X \to Y$ è detto continuo se esiste una costante $C > 0$ tale che $\|A(x)\| \leq C\|x\|$ per qualsiasi $x \in X$. L'insieme di tutti gli operatori lineari e continui da $X$ in $Y$ è indicato con $\mathcal{L}(X, Y)$*

**Esempio 1.6.** Si consideri l'operatore

$$\begin{aligned} A\colon L^2(0,1) &\to L^2(0,1) \\ f &\mapsto xf \end{aligned}$$

È un operatore lineare e continuo. Infatti

$$A(af+bg) = x(af+bg) = axf + bxg = aA(f) + bA(g)$$

e quindi lineare. Inoltre, poiché $|x| < 1$ si ha che

$$|xf| < |f|$$

e per monotonia dell'integrale si ha che

$$\|A(f)\|_2 \leq \|f\|_2$$

Con $L(X,Y)$ si indicherà l'insieme di tutti gli operatori lineari da $X$ in $Y$. Si indicherà con $X^* = \mathcal{L}(X,R)$ il duale di X, la cui norma è

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{x\in\partial B_1(0)} |f(x)|$$

Uno spazio di Banach si immerge in maniera continua nel suo biduale. Infatti il seguente operatore

$$\begin{aligned} J_X\colon X &\to X^{**} \\ x &\mapsto J_X(x)\colon X^* \to \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad f \mapsto f(x) \end{aligned}$$

È un operatore isometrico (infatti $J_X$ è iniettivo e $\|J_X(x)\| = \|x\|$) ma non sempre suriettivo. Un concetto fondamentale associato all'operatore $J_X$ è quello di riflessività, infatti

**Definizione 1.7.** *Sia $X$ uno spazio di Banach. $X$ si dice riflessivo se l'operatore $J_X$ è surriettivo.*

**Esempio 1.8.** Con le ipotesi dell'Esempio 1.4 e con $p > 1$ si ha che $J_X$ è suriettivo.

Un'altra categoria molto importante tra gli spazi di Banach è la categoria degli spazi *uniformamente convessi*

**Definizione 1.9.** *Sia $X$ uno spazio di Banach. Allora $X$ è uniformemente convesso se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per qualsiasi $x, y \in \overline{B_1(0)}$ e $\|x - y\| > \varepsilon$ si ha che $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta$*

Si può quindi il seguente importante

**Teorema 1.10.** *(di Milmann-Pettis). Sia $X$ uno spazio di Banach uniformente convesso. Allora $X$ è riflessivo.*

È importante notare che l'uniforme convessità è una proprietà *geometrica* della norma, una norma equivalente [1] ad una norma uniformemente convessa non è necessariamente uniformente convessa. Viceversa la riflessività è una proprietà *topologica*: due norme equivalenti, infatti, generano la stessa topologia.

### 1.1.2 Spazi di Hilbert

Si è ora in grado di introdurre gli spazi di Hilbert.

**Definizione 1.11.** *Sia $X$ uno spazio vettoriale reale. Un prodotto scalare su $X$ è una funzione $\langle\ ,\ \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che:*

*(i)* $\langle ax + by, z\rangle = a\langle x, z\rangle + b\langle y, z\rangle$ *per ogni* $x, y, z \in X$ *e per ogni* $a, b \in \mathbb{R}$

*(ii)* $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ *per ogni* $x, y \in X$

*(iii)* $\langle x, x\rangle > 0$ *per ogni* $x \in X \setminus \{0\}$, *con* $\langle 0, 0\rangle = 0$

**Definizione 1.12.** *La coppia $(X, \langle , \rangle)$ è uno spazio pre-hilbertiamo*

**Esempio 1.13.** Con le ipotesi dell' Esempio 1.4 con $p = 2$ si ha che $L^2(\Omega)$ è uno spazio pre-hilbertiano con il prodotto scalare

$$\langle f, g\rangle_2 = \int_\Omega fg\ dx$$

**Proposizione 1.14.** *Sia $\langle\ ,\ \rangle$ un prodotto scalare e si ponga*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

*Allora $(X, \sqrt{\langle x, x\rangle})$ è uno spazio normato.*

**Osservazione 1.15.** Il viceversa non è sempre vero. Una condizione necessaria e sufficiente affiché la norma sia indotta da un prodotto scalare, è che sia verificata la *regola del parallelogramma*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Infatti, ponendo

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$

si ha che quest'ultimo soddisfa le condizioni di prodotto scalare. Si rimanda alla Sezione 5 per maggiori dettagli

**Definizione 1.16.** *La coppia $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ è uno spazio di Hilbert se la coppia $(X, \sqrt{\langle x, x\rangle})$ è uno spazio di Banach.*

[1] due norme $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ si dicono equivalenti se esistono due costanti $a, b > 0$ tali che $a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$

Se si tiene conto dei risultati dell'Osservazione 1.15 e del Teorema 1.14 si ottiene il seguente

**Teorema 1.17.** *Ogni spazio di Hilbert è riflessivo*

Uno spazio di Hilbert, di conseguenza, è isomorfo al suo biduale. È possibile tuttavia estendere questa proprietà anche al biduale. Per verificare questo fatto è necessario introdurre alcuni concetti: il primo tra questi è quello di *complemento ortogonale.*

**Definizione 1.18.** *Sia $A \subset X$, allora l'insieme*

$$A^{\perp} = \{x \in X \text{ tali che } \langle a, x \rangle = 0 \text{ per ogni } a \in A\}$$

*è detto complemento ortogonale*

Si dimostrano i seguenti fatti

**Teorema 1.19.** *Siano le ipotesi della Definizione 1.18. Allora*

*(i)* $A^{\perp}$ *è un insieme chiuso*

*(ii) Se $A$ è un sottospazio, allora* $\overline{A} = \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$

Si rimanda alla Sezione 5 per maggiori dettagli.

**Osservazione 1.20.** $X^{\perp} = \{0\}$. Infatti sia $x \in X^{\perp}$, allora $\langle x, y \rangle = 0$ per qualsiasi $y \in X$ e soprattutto $\langle x, x \rangle = \|x\|^2 = 0$ da cui $x = 0$

**Osservazione 1.21.** Il concetto di complemento ortogonale non esiste negli spazi di Banach, tuttavia è possibile per ogni sottospazio $A \subset X$ definire il complemento ortogonale nel seguente modo

$$A^{\perp} = \{\varphi \in X^* \text{ tali che } \varphi(a) = 0 \text{ per qualsiasi } a \in A\}$$

Si dimostra tuttavia un analogo del *(ii)* del Teorema 1.19

Un ulteriore proprietà, che mette in relazione il prodotto scalare con la sua norma, è la seguente:

**Teorema 1.22.** *(Disuguaglianza di Cauchy). Sia $X$ uno spazio pre-hilbertiano. Allora*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

*per qualsiasi $x, y \in X$*

Grazie alle considerazioni precedenti, si è ora in grado di enunciare

**Teorema 1.23.** *(di rappresentazione di Riesz). Sia $X$ uno spazio di Hilbert, $\varphi \in X^*$. Allora esiste un unico $x \in X$ tale per cui per ogni $y \in X$*

$$\varphi(y) = \langle x, y \rangle$$

*Dimostrazione.* Si costruisca la seguente mappa

$$\begin{aligned} T\colon X &\to X^* \\ x &\mapsto T(x)\colon X \to \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad y \mapsto \langle x, y\rangle \end{aligned}$$

$T$ è un operatore lineare, continuo ed isometrico. Poiché

$$T(x)(ay+bz) = \langle x, ay+bz\rangle = a\langle x, y\rangle + b\langle x, z\rangle = aT(x)(y) + bT(x)(z)$$

Inoltre dalla disuguaglianza di Cauchy si ha che

$$|T(x)(y)| = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

Da cui $T(x) \in X^*$. Sempre dalla disuguaglianza di Cauchy si ottiene che

$$\|T(x)\| = \sup_{y\in\partial B_1(0)} |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|$$

Poiché $\frac{x}{\|x\|} \in \partial B_1(0)$ si ha che

$$\|x\| = \left|\left\langle x, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle\right| \leq \sup_{y\in\partial B_1(0)} |\langle x, y\rangle|$$

Si ottiene quindi che

$$\|T(x)\| = \|x\|$$

Da cui $T$ è continuo ed iniettivo e quindi un'isometria. Inoltre $Im(T)$ è un sottospazio isometrico a $X$ e quindi chiuso. Sia $\xi \in Im(T)^\perp$. Per riflessività di $X$ esiste un $x$ tale che $J_X(x) = \xi$. Inoltre

$$J_X(x)(\varphi) = \varphi(x)$$

per ogni $\varphi \in X^*$. Dunque

$$\langle y, x\rangle = T(y)(x) = J_X(x)(T(y)) = 0$$

per ogni $y \in X$. Dall'Osservazione 1.20 si ha che $x = 0$ da cui $\xi = 0$ per isometria di $J_X$. Dunque

$$Im(T)^\perp = \{0\}$$

Poiché

$$Im(T) = \overline{Im(T)} = \left(Im(T)^\perp\right)^\perp = \{0\}^\perp = X^*$$

Si ha quindi che $T$ è suriettiva $\square$

### 1.1.3 Spazi di Hilbert separabili

In questa sezione verranno introdotti il concetto di spazio di Hilbert *separabile* e quello di *base ortonormale*

**Definizione 1.24.** *Uno spazio di Hilbert $X$ è detto separabile se esiste un insieme $Y$ numerabile tale che $\overline{Y} = X$*

**Definizione 1.25.** *Sia $X$ uno spazio di Hilbert. Una base ortonormale di $X$ è una successione $e_k$ tale che*

*(i)* $\langle e_i, e_j \rangle = \delta^i_j$

*(ii)* $\overline{span(e_k)} = X$

È dunque importante, il seguente

**Teorema 1.26.** *Sia $X$ uno spazio di Hilbert separabile tale che $dim(X) = \infty$. Allora esiste una base ortonormale di $X$*

**Esempio 1.27.** Si consideri lo spazio $L^2(0,1)$. Allora la successione

$$\left\{1, \sqrt{2}\cos(2\pi nx), \sqrt{2}\sin(2\pi nx)\right\}$$

Costituisce una base ortonamale di $L^2(0,1)$.

### 1.1.4 Operatori compatti

Una categoria di operatori tra spazi di Hilbert è quella degli *operatori compatti*

**Definizione 1.28.** *Siano $X, Y$ due spazi di Hilbert. $A \in \mathcal{L}(X,Y)$* [2] *è detto operatore compatto se l'insieme $\overline{A\left(B_1(0)\right)}$ è compatto. Lo spazio degli operatori compatti è denotato con $\mathcal{K}(X,Y)$*

**Teorema 1.29.** *Siano $X, Y, Z$ spazi di Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ e $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$ tale che uno fra $A$ e $B$ è compatto. Allora $B \circ A$ è compatto.*

**Formula preparatoria**

*(i)* $\overline{A\left(B_1(0)\right)}$ *è compatto* $\Leftrightarrow$ *per qualsiasi $S \subset X$ limitato $\overline{A(S)}$ è compatto*

$\boxed{\Rightarrow}$

Sia $S \subset X$ limitato. Si ha che

$$S \subset B_\epsilon(0) = \epsilon B_1(0) \Rightarrow A(S) \subset \epsilon A(B_1(0))$$

[2] La definizione di operatore continuo tra spazi di Hilbert è identica a quella della Definizione 1.5

Poiché $\epsilon A(B_1(0))$ è topologicamente equivalente a $A(B_1(0))$ si ha che $\overline{\varepsilon A(B_1(0))}$ è compatto. Da cui

$$\overline{A(S)} \subset \overline{\epsilon A(B_1(0))}$$

$\overline{A(S)}$ è un compatto in quanto chiuso di un compatto.

$\boxed{\Leftarrow}$

$B_1(0)$ è limitato quindi $\overline{A(B_1(0))}$ è compatto.

*Dimostrazione.*

*(a)* $A \in \mathcal{K}(X, Y)$
$\overline{A(B_1(0))}$ è compatto per ipotesi. Poiché $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$ si ha che $B\left(\overline{A(B_1(0))}\right)$ è compatto. $Z$ è uno spazio metrico, perciò $B\left(\overline{A(B_1(0))}\right)$ è chiuso. Segue dalla continuità di $B$ che

$$B(A(B_1(0))) \subset B\left(\overline{A(B_1(0))}\right) \Rightarrow \overline{B(A(B_1(0)))} \subset \overline{B\left(\overline{A(B_1(0))}\right)} = B\left(\overline{A(B_1(0))}\right)$$

Si ha quindi che $\overline{(B \circ A)(B_1(0))}$ è un chiuso di un compatto e quindi un compatto.

*(b)* $B \in \mathcal{K}(Y, Z)$
Per via della continuità di $A$ si ha che $A(B_1(0))$ è limitato. Poiché $B \in \mathcal{K}(Y, Z)$ e per $(i)$ si ha che $\overline{(B \circ A)(B_1(0))}$ è compatto.

□

## 1.2 Operatori discontinui

Si consideri $D(A)$ sottospazio contenuto in uno spazio di Hilbert $X$ e sia $A \colon D(A) \to Y$ un operatore lineare (non necessariamente *continuo*). Sia ora

$$D(A^*) = \{\varphi \in Y^* \text{ tale che esiste } C > 0 \text{ tale che } |\langle \varphi, A(x) \rangle| \leq C\|x\| \text{ per ogni } x \in D(A)\}$$

$D(A^*)$ è un sottospazio di $Y^*$. Infatti presi $\varphi_1, \varphi_2 \in D(A^*)$ si ha che

$$|\langle a\varphi_1 + b\varphi_2, A(x) \rangle| \leq a|\langle \varphi_1, A(x) \rangle| + b|\langle \varphi_2, A(x) \rangle| \leq C\|x\|$$

Per un opportuna $C > 0$. Per ogni $\varphi \in D(A^*)$ si definisca

$$\langle \widetilde{A}(\varphi), x \rangle = \langle \varphi, A(x) \rangle$$

per ogni $x \in D(A)$. L'operatore $\widetilde{A}$ è lineare su $D(A^*)$ e la funzione $x \mapsto C\|x\|$ è una seminorma. Per il teorema di Helly-Hann-Banach esiste un operatore $A^*(\varphi) \in L(Y, \mathbb{R})$ tale che

$$\begin{cases} \langle A^*(\varphi), x \rangle = \langle \varphi, A(x) \rangle & \text{se } \varphi \in D(A^*) \\ |\langle A^*(\varphi), x \rangle| \leq C\|x\| & \text{se } \varphi \in Y^* \end{cases}$$

Da cui $A^*(\varphi) \in Y^*$.

**Definizione 1.30.** *Siano $X, Y$ due spazi di Hilbert, $D(A) \subset X$ un sottospazio, $A\colon D(A) \to Y$ un operatore lineare. L'operatore $A^*\colon D(A^*) \to X^*$ definito come sopra è detto operatore aggiunto di $A$*

Una categoria molto importante degli operatori sono gli operatori *autoaggiunti*

**Definizione 1.31.** *Un operatore $A\colon D(A) \to X$ lineare è detto autoaggiunto se $D(A) = D(A^*)$ e $\langle A(x), y\rangle = \langle x, A(y)\rangle$*

**Osservazione 1.32.** Si supponga che $A \in \mathcal{L}(X)$. $A$ è un operatore autoaggiunto se e solo se $A = A^*$

**Esempio 1.33.** Si consideri la funzione dell'Esempio 1.6. Si ha quindi

$$\langle A(f), g\rangle_2 = \int_\Omega A(f)g\ dx = \int_\Omega xfg\ dx = \int_\Omega fA(g)\ dx = \langle f, A(g)\rangle_2$$

Poiché

$$|\langle \varphi, A(f)\rangle_2| \leq \|\varphi\|_2 \|f\|_2$$

si ha che $D(A^*) = X^*$, quindi $D(A) = D(A^*)$.

### 1.2.1 Basi e operatori autoggiunti compatti

Questa piccola sezione verrà dedicata alle *proprietà spettrali*, ovvero allo studio dell'equazione

$$A(x) = \mu x$$

dove $A \in \mathcal{L}(X)$ e $\mu \in \mathbb{R}$. Si cominci con la seguente definizione

**Definizione 1.34.** *Sia $A \in \mathcal{L}(X)$. Allora*

*(i) Il risolvente di $A$ è l'insieme $\rho(A) = \{\mu \in \mathbb{R}$ tale che $A - \mu I$ è biunivoco$\}$*

*(ii) Lo spettro di $A$ è l'insieme $\sigma(A) = \mathbb{R} \setminus \rho(A)$*

*(iii) Un numero $\mu$ è detto autovalore di $A$ se $A - \mu I$ non è iniettivo. In tal caso $E_A(\mu) = ker(A - \mu I)$ è detto autospazio associato e $x \in E_A(\mu) \setminus \{0\}$ è un autovettore.*

Lo spettro di un operatore lineare continuo è molto importante per la risoluzione delle equazioni differenziali. Tuttavia è necessario fare ulteriori ipotesi che portano ai seguenti teoremi:

**Teorema 1.35.** *Sia $X$ uno spazio di Hilbert di dimensione infinita, $A \in \mathcal{K}(X)$. Allora*

*(i) $0 \in \sigma(A)$*

*(ii) per ogni $\mu \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ è un autovalore di $A$*

*(iii) l'insieme $\sigma(A) \setminus \{0\}$ è vuoto, finito o una successione convergente a 0*

**Teorema 1.36.** *Siano $X$ uno spazio di Hilbert separabile, $A \in \mathcal{K}(X)$. Allora esiste una base ortonormale di $X$ composta da autovettori di $A$.*

**Osservazione 1.37.** È importante notare che nel caso in cui $A \in \mathcal{K}(X)$, $\sigma(A)$ consiste in tutti gli autovalori di $A$

# 2 Spazi di Sobolev

In questa sezione verranno discusse alcune proprietà degli spazi di Sobolev. Si supporrà che $N \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio limitato di classe $C^1$ e $p = 2$. Con queste considerazioni si ha che

**Definizione 2.1.** *Lo spazio $H^1(\Omega)$ è l'insieme di tutte le funzioni $u \in L^2(\Omega)$ tali che esistono $N$ funzioni $g_1, \cdots, g_N$ che soddisfano*

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\ dx = -\int_\Omega g_i \varphi\ dx$$

*per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$*

Le funzioni $g_i$ vengono dette *derivate deboli* e per comodità verranno indicate con $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. Si indicherà inoltre

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$$

$H^1(\Omega)$ è un sottospazio vettoriale di $L^2(\Omega)$. Inoltre è possibile definire la seguente norma

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left( \|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

dove

$$\|\nabla u\|_2 = \left( \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Si ha il seguente risultato

**Teorema 2.2.** *$H^1(\Omega)$ è uno spazio di Banach separabile e riflessivo*

**Osservazione 2.3.** Si ponga

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + uv\ dx$$

Risulta che $\langle\ ,\ \rangle_{H^1(\Omega)}$ è un prodotto scalare, ma poiché

$$\sqrt{\langle u, u \rangle_{H^1(\Omega)}} = \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

Si ottiene che $H^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert.

Grazie al Teorema di Friedrichs si può affermare che

$$\overline{C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)} = \overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^N)_{|\Omega}} = H^1(\Omega)$$

con la topologia indotta dalla norma $\|u\|_{H^1(\Omega)}$. Grazie a questo risultato è possibile studiare i problemi per *densità* utilizzando le funzioni $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ poiché per queste funzioni il concetto di *derivata debole* e di *derivata classica* coincidono. Un altro risultato molto importante è il seguente: sulla falsa riga della Definizione 2.1 si può definire $H^1(\mathbb{R}^N)$. Grazie alle diseguaglianze di *Sobolev* e di *Morrey*

**Teorema 2.4.** *Esiste un operatore $E \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), H^1(\mathbb{R}^N))$ tale per cui $E(u) = u$ in $\Omega$*

Il Teorema 2.4 porta ad un importante risultato

**Teorema 2.5.** *$H^1(\Omega)$ si immerge in maniera continua in $L^2(\Omega)$. Inoltre, tale immersione è anche compatta.*

# 3 Equazioni alle derivate parziali: problemi stazionari

L'obiettivo di questa sezione è quello di trovare una *base ortonormale* di *autovettori* per il *laplaciano*. Sia, quindi, $\Omega$ un dominio limitato di classe $C^1$. Allora esiste ed è unico il campo normale unitario $\nu(x_1, \cdots, x_N)$ alla frontiera $\partial\Omega$. Sia inoltre $f \in L^2(\Omega)$ e si consideri il seguente problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{se } x \in \Omega \\ \nabla u \cdot \nu = 0 & \text{se } x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

**Definizione 3.1.** *Una soluzione debole del problema (1) è una funzione $u \in H^1(\Omega)$ tale che*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + uv \; dx = \int_\Omega fv \; dx$$

*per ogni $v \in H^1(\Omega)$*

Si consideri l'operatore $T\colon L^2(\Omega) \to H^1(\Omega)$ dove $T(f) = u$ è la soluzione debole del problema (1). $T$ rispetta le seguenti proprietà:

**Lemma 3.2.**

*(i)* $T \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), H^1(\Omega))$

*(ii)* $T$ *è iniettivo*

*Dimostrazione.*

*(i)* $T \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), H^1(\Omega))$

(a) *T è ben definita*

Si consideri il seguente funzionale

$$A\colon H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$v \mapsto \int_\Omega fv\ dx$$

Si ha che

$$A(au+bv) = \int_\Omega (au+bv)f\ dx = aA(u) + bA(v)$$

Inoltre

$$|A(v)| \leq \|f\|_2\|v\|_2 \leq \|f\|_2\|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Quindi $A \in H^1(\Omega)^*$. Poiché $H^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert, per il Teorema 1.23 esiste un unico $u$ tale che

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + uv\ dx = \int_\Omega fv\ dx$$

(b) *T è lineare*

Dalla linearità di $\langle\ ,\ \rangle_{H^1(\Omega)}$ si ottiene

$$\langle T(af+bg) - aT(f) - bT(g), v\rangle_{H^1(\Omega)} = \langle (af+bg) - af - bg, v\rangle_2 = 0$$

per qualsiasi $v \in H^1(\Omega)$. Per l'Osservazione 1.20 si ha che

$$T(af+bg) = aT(f) + bT(g)$$

(c) *T è continuo*

Poiché $T(f) \in H^1(\Omega)$ si ha che

$$\begin{aligned}\|T(f)\|^2_{H^1(\Omega)} &= \int_\Omega |\nabla T(f)|^2 + T(f)^2\ dx \\ &= \int_\Omega fT(f)\ dx \\ &\leq \|f\|_2\|T(f)\|_2 \\ &\leq \|f\|_2\|T(f)\|_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

Quindi si ha che $\|T(f)\|_{H^1(\Omega)} \leq \|f\|_2$. In particolare si ottiene $\|T(f)\|_2 \leq \|f\|_2$, da cui

$$\|T\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \leq 1$$

(ii) *T è iniettivo*

Sia $f \in ker(T)$, poiché $\nabla 0 = 0$ si ha quindi

$$\int_\Omega fv\ dx = 0$$

per ogni $v \in H^1(\Omega)$. Poiché $C_c^\infty(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ e $\overline{C_c^\infty(\Omega)} = L^2(\Omega)$ si ha che $f = 0$

□

Si consideri l'immersione compatta $\iota\colon H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Allora per il Teorema 1.29 l'operatore $\iota \circ T \in \mathcal{K}(L^2(\Omega))$. Per comodità si continuerà a indicare $\iota \circ T$ con $T$. Suddetto operatore ha le seguenti proprietà

**Lemma 3.3.**

*(i)* *$T$ è autoaggiunto*

*(ii)* *$T$ è monotono*

*Dimostrazione.*

*(i)* Infatti siano $f, g \in L^2(\Omega)$ allora

$$\langle T(f), g\rangle_2 = \int_\Omega \nabla T(f) \cdot \nabla T(g) + T(f)T(g)\ dx = \langle f, T(g)\rangle_2$$

Poiché $T \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ si ha che $D(A^*) = D(A)$ e quindi $T$ è autoaggiunto.

*(ii)* Infatti sia $f \in L^2(\Omega)$ allora

$$\langle T(f), f\rangle_2 = \|T(f)\|^2_{H^1(\Omega)} \geq 0$$

Poiché $T$ è iniettivo, si ha che $\langle T(f), f\rangle_2 > 0$ per ogni $f \in L^2(\Omega) \setminus \{0\}$

□

Con i risultati ottenuti dai Lemmi 3.2 e 3.3, dal fatto che $L^2(\Omega)$ è separabile e grazie al Teorema 1.36 si può affermare che esiste una base ortonormale di $L^2(\Omega)$ formata dagli autovettori di $T$. Poiché $Im(T) \subset H^1(\Omega)$ si ha che gli autovettori appartengono a $H^1(\Omega)$. Si vuole dimostrare che

**Teorema 3.4.** *Sia $\mu$ un autovalore di $T$. Allora*

*(i)* $\mu \in (0, 1]$

*(ii)* *1 è un autovalore semplice di $T$*

*Dimostrazione.*

*(i)* Sia $u$ un autovettore relativo a $\mu$, allora da $(ii)$ del Lemma 3.3 si ha che

$$0 < \langle T(u), u\rangle_2 = \mu\langle u, u\rangle_2 = \mu\|u\|_2^2$$

Inoltre

$$\|u\|_2^2 = \langle u, u\rangle_2 = \langle T(u), u\rangle_{H^1(\Omega)} = \mu\|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

Da cui

$$0 < \mu = \frac{\|u\|_2^2}{\|u\|^2_{H^1(\Omega)}} \leq 1$$

*(ii)* Si definisca $C = \{f \in L^2(\Omega)$ tale che $f(x) = c$ con $c \in \mathbb{R}\}$. Sia $f = 1 \in C$ allora $\nabla f = 0$ e

$$\int_\Omega \nabla f \cdot \nabla v + fv \; dx = \int_\Omega fv \; dx$$

per qualsiasi $v \in H^1(\Omega)$. Si ha quindi che

$$T(1) = 1$$

perciò $C \subset E_T(1)$. Viceversa sia $f \in E_T(1)$ allora

$$\int_\Omega \nabla f \cdot \nabla v + fv \; dx = \int_\Omega fv \; dx$$

per qualsiasi $v \in H^1(\Omega)$, da cui $\nabla f = 0$. Grazie alla disuguaglianza di *Poincaré-Wirtinger*, esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\|f - f_M\|_2 \leq C\|\nabla f\|_2 \; , \; f_M = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f \; dx$$

Si ottiene quindi che $f = f_M$, cioè $f$ è costante.

$\square$

## 3.1 Autovalori e autovettori di $-\Delta$

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Si consideri il seguente problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{se } x \in \Omega \\ \nabla u \cdot \nu = 0 & \text{se } x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

Una soluzione debole del problema (2) è una funzione $u \in H^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx = \lambda \int_\Omega uv \; dx$$

per ogni $v \in H^1(\Omega)$. La coppia $(\lambda, u)$ che soddisfa la relazione integrale viene detto autovalore e autovettore di $-\Delta$. Per comodità si indicherà l'insieme degli autovalori di $-\Delta$ con $\sigma(-\Delta)$ e il rispettivi autospazi con $E_{-\Delta}(\lambda)$. Gli autovalori e autovettori di $-\Delta$ sono legati ai rispettivi di $T$. Infatti si ha il seguente risultato:

**Teorema 3.5.** *Lo spettro di $-\Delta$ dipende da quello di $T$, nella fattispecie*

$$\sigma(-\Delta) = \left\{\frac{1}{\mu} - 1, \; \mu \in \sigma(T)\right\}$$

*Dimostrazione.* Sia $\mu \in \sigma(T)$ e $u \in E_T(\mu)$, allora

$$\mu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + uv \; dx = \int_\Omega uv \; dx$$

per ogni $v \in H^1(\Omega)$. Si ha quindi

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx = \left(\frac{1}{\mu} - 1\right) \int_\Omega uv \; dx$$

da cui $\frac{1}{\mu} - 1 \in \sigma(-\Delta)$. Viceversa sia $\lambda \in \sigma(-\Delta)$. Poiché

$$\frac{1}{\frac{1}{\lambda+1}} - 1 = \lambda$$

è sufficiente dimostrare che $\frac{1}{\lambda+1} \in \sigma(T)$. A tal proposito sia $u \in E_{-\Delta}(\lambda)$, allora

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx = \lambda \int_\Omega uv \; dx$$

per ogni $v \in H^1(\Omega)$. Ponendo $v = u$ si ottiene $\lambda \geq 0$, da cui $0 < \frac{1}{\lambda+1} \leq 1$. Dunque, attraverso qualche calcolo,

$$\int_\Omega \nabla \left(\frac{1}{\lambda+1} u\right) \cdot \nabla v + \left(\frac{1}{\lambda+1} u\right) v \; dx = \int_\Omega uv \; dx$$

Per unicità

$$T(u) = \frac{1}{\lambda+1} u$$

da cui $\frac{1}{\lambda+1} \in \sigma(T)$. □

Il Teorema 3.5 permette di studiare il problema dello spettro di $-\Delta$ studiando lo spettro di $T$. Si ottiene il seguente ed importante risultato:

**Teorema 3.6.** *Si consideri l'insieme $\sigma(-\Delta)$, allora*

*(i) Gli autovalori di $-\Delta$ costituiscono una successione di questa forma*

$$\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \to \infty$$

*(ii) L'autovalore $\lambda_0$ è semplice*

*(iii) Per ogni $n \in \mathbb{N}_+$*

$$\lambda_n = \max_{v \in H_n \setminus \{0\}} R(v)$$

*dove*

$$H_n = span \left(\bigcup_{k=0}^{n} E_{-\Delta}(\lambda_n)\right) \;\; e \; R(u) = \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2}$$

*Dimostrazione.*

*(i)* Dal Teorema 1.35 si ha che gli autovalori di $T$ consistono in una successione di questa forma

$$\mu_0 = 1 > \mu_1 \geq \mu_2 \cdots \to 0$$

Perciò

$$0 < \frac{1}{\mu_1} - 1 \leq \frac{1}{\mu_2} - 1 \leq \cdots \to \infty$$

Grazie al Teorema 3.5 si ha quindi la tesi.

*(ii)* Poiché $\mu_0 = 1 \in \sigma(T)$ è semplice, si ha che $\lambda_0 = \frac{1}{\mu_0} - 1 = 0$ è semplice.

*(iii)* Si usi l'induzione. Siano $n = 1$, $u_0 \in E_{-\Delta}(0)$ e $u_1 \in E_{-\Delta}(\lambda_1)$. allora dalla $(i)$ del Teorema 3.4 si ha che

$$\lambda_1 = \frac{\|\nabla u_1\|_2^2}{\|u_1\|_2^2} = R(u_1) \tag{3}$$

da cui

$$\lambda_1 = R(u_1) \leq \max_{u \in H_1 \setminus \{0\}} R(u)$$

Si consideri $u = u_0 + u_1 \in span(E_{-\Delta}(0) \cup E_{-\Delta}(\lambda_1))$. Poiché autovettori di autospazi differenti si ha che

$$\langle u_0, u_1 \rangle_2 = 0$$

Perciò vale il *Teorema di Pitagora*

$$\|u_0 + u_1\|_2^2 = \|u_0\|_2^2 + \|u_1\|_2^2$$

Quindi, poiché $\nabla u_0 = 0$,

$$\begin{aligned}
\|\nabla(u_0 + u_1)\|_2^2 &= \|\nabla u_1\|_2^2 \\
&= \lambda_1 \|u_1\|_2^2 \\
&\leq \lambda_1 \left(\|u_0\|_2^2 + \|u_1\|_2^2\right) \\
&= \lambda_1 \|u_0 + u_1\|_2^2
\end{aligned}$$

Da cui $R(u) \leq \lambda_1$ per qualsiasi $u \in H_1$. Perciò

$$\max_{u \in H_1 \setminus \{0\}} R(u) = \lambda_1$$

Si supponga vero per $n = k$ e si dimostri per $n = k + 1$. Se $\lambda_k = \lambda_{k+1}$ allora per ipotesi induttiva si ha la tesi. Viceversa siano $u_k \in E_{-\Delta}(\lambda_k)$ e $u_{k+1} \in E_{-\Delta}(\lambda_{k+1})$, poiché autovettori si ha anche

$$\int_\Omega \nabla u_k \cdot \nabla u_{k+1} \, dx = \langle u_k, u_{k+1} \rangle_2 = 0$$

Ragionando come nel caso $n = 1$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\|\nabla(u_k + u_{k+1})\|_2^2 &= \|\nabla u_k\|_2^2 + \|\nabla u_{k+1}\|_2^2 \\
&= \lambda_k \|u_k\|_2^2 + \lambda_{k+1} \|u_{k+1}\|_2^2 \\
&\leq \lambda_{k+1} \|u_k + u_{k+1}\|_2^2
\end{aligned}$$

Poiché $\lambda_k < \lambda_{k+1}$, perciò

$$\max_{u \in H_{k+1} \setminus \{0\}} R(u) \leq \lambda_{k+1}$$

Ma

$$\lambda_{k+1} = R(u_{k+1}) \leq \max_{u \in H_{k+1} \setminus \{0\}} R(u)$$

$\square$

# 4 Equazione del calore

Si vogliono dimostrare alcuni concetti fondamentali per i *problemi evolutivi*, ovvero quelle PDE caratterizzate dalla presenza di una variabile indipendente rispetto alla quale la matrice dei coefficienti della forma quadratica del secondo ordine ha un autovalore nullo (*paraboliche*) o negativo (*iperboliche*). In questa sezione si darà spazio allo studio delle proprietà delle equazioni di tipo *parabolico*.

**Definizione 4.1.** *Sia $X$ uno spazio di Hilbert. La derivata di Cauchy di una mappa $u\colon [0,+\infty) \to X$ è*

$$\frac{du}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$

**Definizione 4.2.** *Sia $X$ uno spazio di Hilbert, $A\colon D(A) \to X$ un operatore lineare, $u_0 \in X$. Un problema di Cauchy è una sistema di questa forma*

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + A(u) = 0 & se\ t \in [0,\infty) \\ u(0) = u_0 & se\ t = 0 \end{cases} \tag{4}$$

**Definizione 4.3.** *Una soluzione del problema (4) è una funzione $u \in C^1([0,+\infty),X) \cap C([0,\infty),D(A))$ tale che*

*(i)* $\frac{du}{dt} + A(u(t)) = 0$ *per ogni* $t \in [0,\infty)$

*(ii)* $u(0) = u_0$

Ci si vuole ora occupare di una determinata categoria di operatori utili per questa trattazione.

**Definizione 4.4.** *Un operatore lineare $A\colon D(A) \to X$ è detto massimale monotono se*

*(i)* $\langle A(x), x\rangle \geq 0$ *per qualsiasi* $x \in D(A)$

*(ii)* *Im(I+A)=X*

Attraverso gli operatori massimali monotoni si può arrivare ad un importantissimo risultato:

**Teorema 4.5.** *(Hille-Yosida) Sia $A$ massimale monotono, $u_0 \in D(A)$, allora esiste un'unica soluzione del problema (4) $u \in C^1([0,+\infty),X) \cap C([0,+\infty),D(A))$ tale che*

*(i)* $\|u\| \leq \|u_0\|$

*(ii)* $\left\|\frac{du}{dt}\right\| = \|A(u)\| \leq \|A(u_0)\|$

*Dimostrazione.* La dimostrazione si articola in sei passi.

**Passo 1:** unicità della soluzione. Siano $u_1$ e $u_2$ soluzioni di (4), allora

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_1-u_2\|^2\right) = \left\langle \frac{d}{dt}(u_1-u_2), u_1-u_2 \right\rangle = -\langle A(u_1-u_2), u_1-u_2\rangle \leq 0$$

Perciò la funzione $g(t) = \|u_1 - u_2\|^2$ è non crescente in $[0, \infty)$ e poiché $\|u_1(0) - u_2(0)\| = 0$ si ha quindi che $u_1(t) = u_2(t)$

**Passo 2:** Sia $\lambda > 0$. Si consideri il seguente problema

$$\begin{cases} \frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda(u_\lambda) = 0 & \text{se } t \in [0, +\infty) \\ u_\lambda(0) = u_0 \in D(A) \end{cases} \tag{5}$$

Poiché $A_\lambda$ [3] è lipschitziana si ha che esiste una funzione $u_\lambda \in C^1([0, +\infty), X)$ soluzione del problema (5). Ragionando come nel punto precedente si ottiene che la funzione $g(t) = \|u_\lambda(t)\|$ è non crescente in $[0, +\infty)$, da cui si ha che

$$\|u_\lambda\| \leq \|u_0\|$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{du_\lambda}{dt}\right) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{du_\lambda}{dt}(t+h) - \frac{du_\lambda}{dt}(t)\right) \\ &= -\lim_{h\to 0} \frac{A(u_\lambda(t+h)) - A(u_\lambda(t))}{h} \\ &= -A_\lambda\left(\lim_{h\to 0} \frac{u_\lambda(t+h) - u_\lambda(t)}{h}\right) \\ &= -A_\lambda\left(\frac{du_\lambda}{dt}\right) \end{aligned}$$

Si ha quindi che $\frac{du_\lambda}{dt}(0) = A_\lambda(u_0)$ da cui $\frac{du_\lambda}{dt}$ risolve un problema analogo al (5) con dato iniziale $A_\lambda(u_0)$. Come sopra

$$\left\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right\| \leq \|A_\lambda(u_0)\|$$

Poiché $u_0 \in D(A)$ si ha che $\|A_\lambda(u_0)\| \leq \|A(u_0)\|$. Perciò si ha

*(i)* $\|u_\lambda\| \leq \|u_0\|$

*(ii)* $\left\|\frac{du_\lambda}{dt}\right\| = \|A_\lambda(u_\lambda)\| \leq \|A(u_0)\|$

per ogni $t \in [0, +\infty)$ e per ogni $\lambda \in (0, +\infty)$.

**Passo 3:** $u_\lambda$ converge a qualche funzione $u(t)$ se $\lambda \to 0$. Infatti, siano $\lambda, \mu > 0$, allora

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\lambda - u_\mu\|^2 &= -\langle A_\lambda(u_\lambda) - A_\mu(u_\mu) \ , \ u_\lambda - u_\mu\rangle \\ &= -\langle A_\lambda(u_\lambda) - A_\mu(u_\mu) \ , \ u_\lambda - J_\lambda(u_\lambda) + J_\lambda(u_\lambda) - J_\mu(u_\mu) + J_\mu(u_\mu) - u_\mu\rangle \\ &= -\langle A_\lambda(u_\lambda) - A_\mu(u_\mu) \ , \ \lambda A_\lambda(u_\lambda) - \mu A_\mu(u_\mu)\rangle - \langle A_\lambda(J_\lambda(u_\lambda) - J_\mu(u_\mu)) \ , \ J_\lambda(u_\lambda) - J_\mu(u_\mu)\rangle \\ &\leq 2(\lambda + \mu)\|A(u_0)\|^2 \end{aligned}$$

[3] Si veda la Sezione 5 per maggiori informazioni sulle proprietà del risolvente e dell'approssimante di Yosida

Da cui, integrando e estraendo la radice,

$$\|u_\lambda - u_\mu\| \leq 2\sqrt{\lambda+\mu}\|A(u_0)\|\sqrt{t}$$

Per ogni $t \geq 0$ si ottiene che $u_\lambda$ è una successione di Cauchy se $\lambda \to 0$ e perciò converge ad una funzione $u(t)$. Se $\mu$ tende a zero si ha

$$\|u_\lambda - u\| \leq 2\sqrt{\lambda}\|A(u_0)\|\sqrt{t}$$

Da cui $u_\lambda$ converge uniformente in ogni intervallo $[0, T]$, perciò $u \in C([0, +\infty), X)$

**Passo 4:** si supponga che $u_0 \in D(A^2)$, allora, lavorando come nel Passo 3, $\frac{du_\lambda}{dt}$ converge puntualmente ad una funzione se $\lambda \to 0$ ed uniformente in $[0, T]$

**Passo 5:** sia $u_0 \in D(A^2)$. Allora, grazie ai Passi 3 e 4, si ottiene che $u \in C^1([0, +\infty), X)$ con $\frac{du_\lambda}{dt} \to \frac{du}{dt}$. Si noti che

$$J_\lambda(u_\lambda) \to u$$

Infatti

$$\|J_\lambda(u_\lambda) - u\| \leq \|J_\lambda(u_\lambda) - J_\lambda(u)\| + \|J_\lambda(u) - u\| \leq \|u_\lambda - u\| + \|J_\lambda(u) - u\|$$

e l'ultimo termine tende a zero se $\lambda \to 0$. Ora

$$(J_\lambda(u_\lambda), A_\lambda(u_\lambda)) = (J_\lambda(u_\lambda), A(J_\lambda(u_\lambda))) \in gr(A)$$

Inoltre

$$\lim_{\lambda \to 0}(J_\lambda(u_\lambda), A_\lambda(u_\lambda)) = \left(u, -\frac{du}{dt}\right)$$

Da cui, poiché $gr(A)$ è chiuso, $u \in D(A)$ e

$$\frac{du}{dt} + A(u) = 0$$

con $u(0) = u_0$. Dunque $u \in C^1([0, +\infty), D(A))$ e risolve il (4).

**Passo 6:** $D(A^2)$ è denso $D(A)$. Infatti sia $u_0 \in D(A)$ e $\lambda > 0$, allora si ha

$$\widetilde{u_0} = J_\lambda(u_0) \in D(A)$$

Inolte

$$\widetilde{u_0} + \lambda A(\widetilde{u_0}) = u_0$$

Da cui

$$A(\widetilde{u_0}) = \frac{1}{\lambda}(u_0 - \widetilde{u_0})$$

Poiché

$$\lim_{\lambda\to 0} J_\lambda(u_0) = u_0\ ,\ \lim_{\lambda\to 0} A(J_\lambda(u_0)) = \lim_{\lambda\to 0} J_\lambda(A(u_0)) = A(u_0)$$

Perciò si può costruire una successione $\widetilde{u_n} \to u_0$ e $A(\widetilde{u_n}) \to A(u_0)$. Dal Passo 5, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si può trovare una soluzione $u_n$ tale che

$$\begin{cases} \frac{du_n}{dt} + A(u_n) = 0 & \text{se } t \in [0, +\infty) \\ u_n(0) = \widetilde{u_n} \end{cases}$$

Da cui

$$\begin{cases} \frac{d(u_n - u_m)}{dt} + A(u_n - u_m) = 0 & \text{se } t \in [0, +\infty) \\ u_n(0) - u_m(0) = \widetilde{u_n} - \widetilde{u_m} \end{cases}$$

Perciò, con le stime del Passo 2

$$\|u_n - u_m\| \leq \|\widetilde{u_n} - \widetilde{u_m}\|$$

$$\left\| \frac{du_n}{dt} - \frac{du_m}{dt} \right\| \leq \|A(\widetilde{u_n} - \widetilde{u_m})\|$$

Da cui si ottiene che $u_n$ e $A(u_n)$ sono due successioni di Cauchy. Poiché $gr(A)$ è chiuso, si ottiene che $u \in C^1([0, +\infty), X) \cap C([0, +\infty), D(A))$ con

$$\lim_{n\to\infty} \frac{du_n}{dt} = \frac{du}{dt}$$

□

## 4.1 Caso autoaggiunto

Nel caso in cui $A$ sia anche autoaggiunto si estende il Teorema *Hille-Yosida* per un arbitrario $u_0 \in X$. Tuttavia si può perdere il controllo per $t = 0$. Si riformula il (4) nel seguente modo

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + A(u) = 0 & \text{se } t \in (0, \infty) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{6}$$

**Teorema 4.6.** *Sia $A$ un operatore autoggiunto, massimale monotono, $u_0 \in X$. Allora esiste un unica soluzione di (6) tale che $u \in C([0, \infty), X) \cap C^1((0, \infty), X) \cap C((0, \infty), D(A))$. Inoltre per ogni $t > 0$*

*(i)* $\|u\| \leq \|u_0\|$

*(ii)* $\left\|\frac{du}{dt}\right\| = \|A(u(t))\| \leq \frac{\|u_0\|}{t}$

## 4.2 Equazione del calore con condizioni di Cauchy-Neumann

L'equazione del calore è l'esempio più semplice di una equazione parabolica. Viene chiamata così perché studia il comportamento della temperatura in una determinata regione spazio-temporale sotto opportune condizioni. In questa sezione verrà studiato il problema sotto le condizioni di *Cauchy-Neumann.* A tal proposito sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato di classe $C^\infty$, $Q = \Omega \times (0, \infty)$, $\Sigma = \partial\Omega \times (0, \infty)$. Si consideri il seguente problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{in } Q \\ \nabla u \cdot \nu = 0 & \text{in } \Sigma \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{7}$$

**Definizione 4.7.** *Una soluzione debole del problema* (7) *è una funzione* $u \in C([0, \infty), L^2(\Omega)) \cap C^1((0, \infty), L^2(\Omega)) \cap C([0, \infty), D(A))$ *tale che*

*(i)* $\frac{\partial u}{\partial t}(t) + A(u(t)) = 0$ *per ogni* $t \in (0, \infty)$

*(ii)* $u(0) = u_0$.

Si introduca $D(A) = \{u \in H^2(\Omega)$ tali che $\nabla u \cdot \nu = 0$ in $\partial\Omega$[4]$\}$ e si definisca il seguente operatore

$$\begin{aligned} A\colon D(A) \subset L^2(\Omega) &\to L^2(\Omega) \\ u &\mapsto -\Delta u \end{aligned}$$

Si vuole dimostrare che esiste una soluzione del problema (6) utilizzando il Teorema 4.6. Infatti

*(i) A è autoaggiunto*

$$\langle A(u), v\rangle_2 = \int_\Omega -\Delta u \cdot v \; dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx = \int_\Omega u \cdot (-\Delta v) \; dx = \langle u, A(v)\rangle_2$$

Per qualsiasi $u, v \in D(A)$

*(ii) A è massimale monotono*

Infatti sia $u \in D(A)$, allora

$$\langle A(u), u\rangle_2 = \int_\Omega -\Delta u \cdot u \; dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 \; dx \geq 0$$

Inoltre sia $f \in L^2(\Omega)$, allora esiste una soluzione debole del problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{se } x \in \Omega \\ \nabla u \cdot \nu = 0 & \text{se } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Per i teoremi di regolarità si ha che $u \in D(A)$

[4] Quando si dice "$\nabla u \cdot \nu = 0$ in $\partial\Omega$" non si intende il senso classico del termine, ovvero che *il prodotto scalare tra il gradiente di u e ν si annulla nella frontiera*, poiché, per definizione di $L^2(\Omega)$, i valori che una funzione ammette in un insieme di misura nulla (come $\partial\Omega$) non sono importanti. Ciò che si intende è che la *traccia* di $\nabla u \cdot \nu$ è uguale 0 (inteso però come *funzione nulla* di un determinato spazio). Per maggiori dettagli si guardi la Sezione 5.2

Per il Teorema 4.6 esiste una $u$ soluzione del problema (7). Si vuole cercare una soluzione nella forma

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n(t) e_n(x)$$

dove $e_n$ costituisce una base ortonormale di $L^2(\Omega)$ trovata grazie ai risultati della Sezione 3. Da cui

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n'(t) + \lambda_n a_n(t)) e_n(x) = 0$$

Poiché $e_n(x)$ è una base ortonormale si ha che

$$a_n'(t) + \lambda_n a_{n(t)} = 0$$

Se $n = 0$ allora $\lambda_0 = 0$. Si ha

$$a_0'(t) = 0$$

da cui

$$a_0(t) = a_0(0)$$

Viceversa se $n \neq 0$ allora

$$a_n(t) = a_n(0) \mathrm{e}^{-\lambda_n t}$$

D'altra parte si ottiene

$$u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(0) e_n(x)$$

Grazie al fatto che $e_n$ è una base ortonormale si ottiene che

$$a_n(0) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \int_\Omega u_0 \ dx & \text{se } n = 0 \\ \int_\Omega u_0 e_n dx & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$

Da cui si ha che

$$u(x,t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_0 \ dx + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_n t} \left( \int_\Omega u_0 e_n \ dx \right) e_n(x)$$

# 5 Dimostrazioni e concetti aggiuntivi

## 5.1 Dimostrazioni aggiuntive

Qui di seguito alcune dimostrazioni aggiuntive, le quali fanno parte di alcuni esercizi proposti durante il corso.

**Teorema 5.1.** *Sia $X$ uno spazio normato*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \iff \|\cdot\| \text{ è indotto da un prodotto scalare}$$

**Formula preparatoria**

*(i)* $\|\lambda x + y\|^2 = \lambda\|x+y\|^2 + \lambda(\lambda-1)\|x\|^2 - (\lambda-1)\|y\|^2$ *per qualsiasi* $\lambda \in \mathbb{R}$

Si dimostri per $\lambda \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

$\boxed{\lambda = 2}$

Si ha quindi, sfruttando anche l'ipotesi

$$\begin{aligned}\|2x+y\|^2 &= \|(x+y)+x\|^2\\ &= 2\|x+y\|^2 + 2\|x\|^2 - \|x+y-x\|^2\\ &= 2\|x+y\|^2 + 2\|x\|^2 - \|y\|^2\end{aligned}$$

Si supponga vero per $\lambda = k$, cioè

$$\|kx+y\|^2 = k\|x+y\|^2 + k(k-1)\|x\|^2 - (k-1)\|y\|^2$$

Si dimostri per $\lambda = k+1$

$$\begin{aligned}\|(k+1)x+y\|^2 &= \|kx+(y+x)\|^2\\ &\overset{i.i.}{=} k\|x+(y+x)\|^2 + k(k-1)\|x\|^2 - (k-1)\|y+x\|^2\\ &= 2k\|x+y\|^2 + 2k\|x\|^2 - k\|y\|^2 + k(k-1)\|x\|^2 - (k-1)\|x+y\|^2\\ &= (k+1)\|x+y\|^2 + (k+1)k\|x\|^2 - k\|y\|^2\end{aligned}$$

Si dimostra per induzione per $\lambda = \frac{1}{n}, -n$ con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ che porta alla dimostrazione dell'identità per i numeri razionali.

Sia ora $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}$ una successione tale che $\lim_{n\to\infty} p_n = \lambda$. Grazie alla continuità della norma, si ha

$$\begin{aligned}\|\lambda x+y\|^2 &= \|\lim_{n\to\infty} p_n x + y\|^2\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(p_n\|x+y\|^2 + p_n(p_n-1)\|x\|^2 - (p_n-1)\|y\|^2\right)\\ &= \lambda\|x+y\|^2 + \lambda(\lambda-1)\|x\|^2 - (\lambda-1)\|y\|^2\end{aligned}$$

*Dimostrazione.*

$\boxed{\Rightarrow}$

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$

*è un prodotto scalare*

(a) $\langle\ ,\ \rangle$ *è simmetrica*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|y+x\|^2 - \|y\|^2 - \|x\|^2\right) = \langle y, x\rangle$$

(b) $\langle\ ,\ \rangle$ *è additiva*

$$\begin{aligned}
\langle x+y, z\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|x+y+z\|^2 - \|x+y\|^2 - \|z\|^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\|x+y+z\|^2 - \frac{1}{2}\|x+y\|^2 - \frac{1}{2}\|x+y\|^2 - \|z\|^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\|x+y+z\|^2 + \|z\|^2 - \frac{1}{2}\|x+y\|^2 - \left(\frac{1}{2}\|x-y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) - 2\|z\|^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\|x+y+z\|^2 + \|z\|^2 - \frac{1}{2}\|x+y\|^2\right) - \frac{1}{2}\|x-y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 - 2\|z\|^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\|2z+x+y\|^2 - \frac{1}{2}\|x-y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 - 2\|z\|^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\|2z+x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) - \|x\|^2 - \|y\|^2 - 2\|z\|^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\|x+z\|^2 - \|x\|^2 - \|z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y\|^2 - \|z\|^2\right)\\
&= \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle
\end{aligned}$$

(c) $\langle\ ,\ \rangle$ *è omogeneo*

$$\begin{aligned}
\langle \lambda x, y\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|\lambda x+y\|^2 - \|\lambda x\|^2 - \|y\|^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\lambda\|x+y\|^2 + \lambda(\lambda-1)\|x\|^2 - (\lambda-1)\|y\|^2 - \lambda^2\|x\|^2 - \|y\|^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\lambda\|x+y\|^2 - \lambda\|x\|^2 - \lambda\|y\|^2\right)\\
&= \lambda\langle x, y\rangle
\end{aligned}$$

(d) $\langle\ ,\ \rangle$ *è definito positivo*

$$\langle x, x\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+x\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2\right) = \|x\|^2 > 0$$

Inoltre

$$\langle x, x\rangle = \|x\|^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

con questo prodotto scalare si ha che $\sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\|$

$\boxed{\Leftarrow}$

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ &= 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)\end{aligned}$$

$\square$

**Teorema 5.2.** *Sia $X$ uno spazio di Hilbert e $A \subset X$ . Allora*

*(i)* *$A^{\perp}$ è un sottospazio chiuso*

*(ii)* *Se $A$ è un sottospazio, allora $\overline{A} = \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$*

*Dimostrazione.*

*(i)* La dimostrazione si articola in due parti:

*(a)* *$A$ è un sottospazio*
Siano $a_1^{\perp}, a_2^{\perp} \in A^{\perp}$, allora

$$\langle \alpha a_1^{\perp} + \beta a_2^{\perp}, a\rangle = \alpha\langle a_1^{\perp}, a\rangle + \beta\langle a_2^{\perp}, a\rangle = 0$$

per qualsiasi $a \in A$

*(b)* *$A$ è chiuso*
Sia $a_n^{\perp}$ una successione di Cauchy a valori in $A^{\perp}$. Allora $\lim_{n\to\infty} a_n^{\perp} = a_{lim}^{\perp} \in X$ in quanto $X$ è completo. Sia $a \in A$. Allora

$$\langle a_{lim}^{\perp}, a\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} a_n^{\perp}, a\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle a_n^{\perp}, a\rangle = 0$$

per ogni $a \in A$. Perciò $a_{lim}^{\perp} \in A^{\perp}$, dunque $A^{\perp}$ è un sottospazio completo e quindi chiuso.

*(ii)* *Se $A$ è un sottospazio, allora $\overline{A} = \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$*

*(a)* $\overline{A} \subseteq \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$
Sia $a \in A$ allora

$$\langle a, a^{\perp}\rangle = 0$$

per ogni $a^{\perp} \in A^{\perp}$, allora $a \in \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$. Poiché $\left(A^{\perp}\right)^{\perp}$ è chiuso si ha che

$$\overline{A} \subseteq \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$$

*(b)* $\left(A^\perp\right)^\perp \subseteq \overline{A}$
Sia $a^{\perp\perp} \in \left(A^\perp\right)^\perp$. Per ipotesi esiste una coppia $\left(\overline{a}, \overline{a}^\perp\right) \in \overline{A} \times \overline{A}^\perp$ tali che

$$a^{\perp\perp} = \overline{a} + \overline{a}^\perp$$

Poiché $\overline{A}^\perp \subseteq A^\perp$, si ha

$$\langle a^{\perp\perp}, \overline{a}^\perp \rangle = 0$$

Dunque

$$\langle \overline{a} + \overline{a}^\perp, \overline{a}^\perp \rangle = \langle \overline{a}, \overline{a}^\perp \rangle + \langle \overline{a}^\perp, \overline{a}^\perp \rangle = \|\overline{a}^\perp\|^2 = 0$$

Dunque $\overline{a}^\perp = 0$ e si ha che $a^{\perp\perp} = \overline{a} \in \overline{A}$

□

**Osservazione 5.3.** Grazie a questo risultato, si può dimostrare che un sottospazio $Y$ è denso in $X$ se e solo se $Y^\perp = \{0\}$. Infatti, sia $Y$ denso e $x \in X$, allora $x \in \overline{Y}$. Dunque $x \in \left(Y^\perp\right)^\perp$. Inoltre esistono $y^\perp \in Y^\perp$ e $y^{\perp\perp} \in \left(Y^\perp\right)^\perp$ tali che

$$x = y^{\perp\perp} + y^\perp$$

Dunque

$$x - y^{\perp\perp} = y^\perp \in \left(Y^\perp\right)^\perp$$

Perciò $y^\perp \in \left(Y^\perp\right)^\perp \cap Y^\perp = \{0\}$, per qualsiasi $x \in X$, quindi

$$Y^\perp = \{0\}$$

Viceversa, si ha che

$$\overline{Y} = \left(Y^\perp\right)^\perp = \{0\}^\perp = X$$

### 5.1.1 Proprietà del risolvente e dell'approssimante di Yosida

Sia $A \colon D(A) \subset X \to X$ un operatore massimale monotono e $\lambda > 0$. Si considerino i seguenti operatori.

$$(I - \lambda A)^{-1} = J_\lambda \colon X \to D(A)$$
$$A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$$

Allora si hanno le seguenti proprietà:

*(i)* $D(A)$ è denso in $X$

*(ii)* $A$ è un operatore chiuso

*(iii)* Per ogni $\lambda > 0$, $J_\lambda^{-1}$ è bigettivo, $J_\lambda$ è un operatore continuo con $\|J_\lambda\| \leq 1$

*(iv)* $A_\lambda(x) = A(J_\lambda(x))$ per ogni $x \in X$

*(v)* $A_\lambda(x) = J_\lambda(A(x))$ per ogni $x \in D(A)$

*(vi)* $\|A_\lambda(x)\| = \|A(x)\|$ per ogni $x \in D(A)$

*(vii)* $\lim_{\lambda\to 0} J_\lambda(x) = x$ per ogni $x \in X$

*(viii)* $\lim_{\lambda\to 0} A_\lambda(x) = A(x)$ per ogni $x \in D(A)$

*(ix)* $\langle A_\lambda(x), x\rangle \geq 0$ per ogni $x \in X$

*(x)* $\|A_\lambda(x)\| \leq \frac{1}{\lambda}\|x\|$ per ogni $x \in X$

## 5.2 Teoria della traccia

Per quanto $C^\infty(\overline{\Omega})$ sia un insieme denso in $H^1(\Omega)$, una funzione generica $u \in H^1(\Omega)$ potrebbe non essere continua o nemmeno definita nella frontiera $\partial\Omega$, in quanto quest'ultimo è un insieme di misura nulla. Il concetto di *traccia* risolve questo problema.

**Teorema 5.4.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio limitato di classe $C^1$. Allora esiste un operatore*

$$T \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), L^2(\partial\Omega))$$

*tale che*

$$T(u) = u_{|\partial U} \text{ se } u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$$

*Dimostrazione.* Si consideri prima $v \in C^1(\overline{Q_+})$ tale che $v(y', 1) = 0$, allora

$$\begin{aligned}\int_{Q_0} |v(y',0)|^2 dy' &= \int_{Q_0} \left| -\int_0^1 \frac{\partial v(y, y_N)}{\partial y_N} dy_N \right|^2 dy' \\ &\leq \int_{Q_+} \left| \frac{\partial v(y, y_N)}{\partial y_N} \right|^2 dy \\ &\leq \|v\|^2_{H^1(Q_+)}\end{aligned}$$

Sia $\Omega$ un generico aperto di classe $C^1$. Allora esistono $m+1$ aperti $U_0, \cdots, U_m$ e $m+1$ diffeomorfismi $H_0 \in C^1(\overline{Q}, \overline{U_0}), \cdots, H_m \in C^1(\overline{Q}, \overline{U_m})$ tali che

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{k=1}^m U_k \ , \ U_0 \subset \Omega \ , \ \overline{\Omega} \subset \bigcup_{k=0}^m U_k \ , \ H_k(Q_+) = U_k \cap \Omega \ , \ H_k(Q_0) = U_k \cap \partial\Omega$$

Inoltre dal teorema della partizione dell'unità esistono $m+1$ funzioni $\theta_0, \cdots, \theta_{m+1} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ tali che

$$supp(\sigma_k) \subset U_k \ , \ \sum_{k=0}^m \theta_k = 1$$

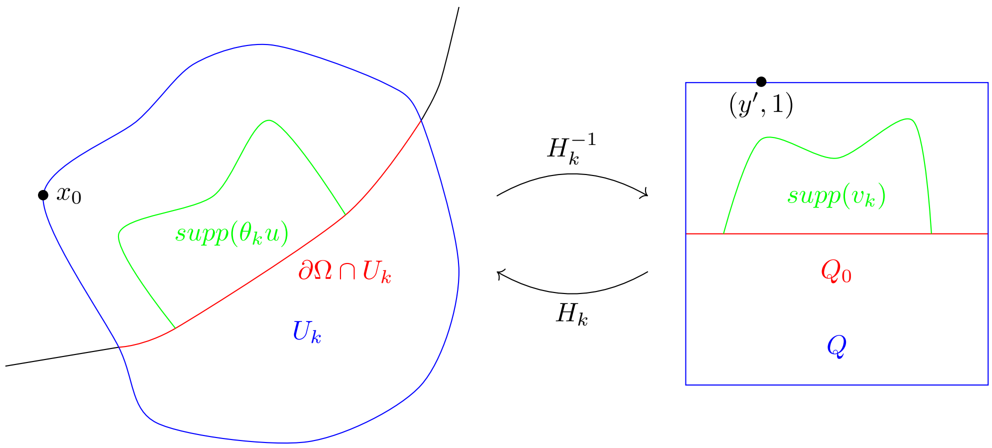


Figura 1: Visualizzazione di $H_k$ e di $H_k^{-1}$

Sia $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Allora la funzione $v_k(y) = (\theta_k u \circ H_k)(y) \in C^1(\overline{Q_+})$ con $v_k(y', 1) = 0$. Infatti si consideri $(y', 1) \in \overline{Q_+}$. Dalla bigettività e dalla continuità di $H_k$ si può affermare che esiste un $x_0 \in \partial U_k \cap \Omega$ tale che $H_k(y', 1) = x_0$. Poiché $supp(\theta_k) \subset U_k$ si ha che $\theta_k(x_0)u(x_0) = 0$. Da cui

$$v_k(y', 1) = (\theta_k u \circ H_k)(y', 1) = \theta_k(x_0)u(x_0) = 0$$

Inoltre poiché $v_k$ è composizione di funzioni $C^1$ si ha $v_k \in C^1(\overline{Q_+})$. Perciò, tenendo conto delle stime precedenti e dal fatto che

$$v_k(y', 0) = (\theta_k u \circ H_k)(y', 0) = \theta_k u(U_k \cap \partial\Omega) = \theta_k u_{|\partial\Omega}$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{U_k \cap \partial\Omega} |\theta_k u|^2 \, d\Gamma &= \int_{Q_0} |v_k(y', 0)|^2 |J_{H_k}| \, dy' \\ &\leq C\|v_k\|^2_{H^1(Q_+)} \\ &\leq C\|u\|^2_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

Poiché $u = \sum\limits_{k=0}^{m} \theta_k u$

$$\|u_{|\partial\Omega}\|_2 \leq \sum_{k=1}^{m} \|\theta_k u\|_{H^1(U_k \cap \Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)} \tag{8}$$

per qualiasi $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Sia $u \in H^1(\Omega)$ e $u_n = \xi_n(\rho_n * u)$ [5] $\in C^\infty(\overline{\Omega})$, allora $u_n \to u$ in $H^1(\Omega)$. Dunque

$$\|(u_n - u_m)_{|\partial\Omega}\|_2 = \|u_{n|\partial\Omega} - u_{m|\partial\Omega}\|_2 \leq C\|u_n - u_m\|_{H^1(\Omega)}$$

[5] $\xi_n(x) = \xi(\frac{x}{n})$, dove $\xi$ è una funzine cut-off nella corona $C_{1,2}(0)$ e $p_n$ è una successione di mollificatori

Da cui $u_n$ è una successione di Cauchy in $L^2(\partial\Omega)$. Si può definire

$$T\colon H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$$
$$u \to \lim_{n\to\infty} u_{n|\partial\Omega}$$

Siano dunque $a, b \in \mathbb{R}$ e $u, v \in H^1(\Omega)$ allora

$$T(au + bv) = \lim_{n\to\infty}(au + bv)_{n|\partial\Omega} = \lim_{n\to\infty} au_{n|\partial\Omega} + bv_{n|\partial\Omega} = aT(u) + bT(v)$$

Sia ora $u \in H^1(\Omega)$. Allora per la (8) si ha che

$$\|u_{n|\partial\Omega}\| \le C\|u_n\|_{H^1(\Omega)} \le C(\|\xi\| + 1)\|u\|_{H^1(\Omega)}$$

Poiché la norma è continua si ha che

$$\|T(u)\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|u_{n|\partial\Omega}\|_2 \le C\|u\|_{H^1(\Omega)}$$

Si ha quindi che $T \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), L^2(\Omega))$. Sia ora $u \in H^1(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$. La successione $u_n(x)$ converge uniformemente ad $u(x)$ e dunque anche puntualmente per ogni $x \in \partial\Omega$, perciò

$$\lim_{n\to\infty} |u_{n|\partial\Omega} - u_{|\partial\Omega}| = 0$$

Inoltre per ogni $x \in \partial\Omega$

$$\begin{aligned}|\xi_n(p_n * u)(x) - u(x)| &\le \int_{\mathbb{R}^N} |\xi_n u(x-y) - u(x)||p_n(y)|dy \\ &\le 2\max_{x\in\partial\Omega}|u| \int_{\mathbb{R}^N} |p_n(y)|dy = 2\max_{x\in\partial\Omega}|u| = \text{ cost } \in L^2(\partial\Omega)\end{aligned}$$

Dunque, grazie al teorema della convergenza dominata,

$$u_{n|\partial\Omega} \to u_{|\partial\Omega} \text{ in } L^2(\partial\Omega)$$

Ma $T(u_n) = u_{n|\partial\Omega} \to T(u)$ e per unicità del limite si ha che $T(u) = u_{|\partial\Omega}$ □

Grazie al Teorema 5.4 è possibile estendere la formula di *Gauss-Green* a tutto $H^1(\Omega)$, infatti, siano $u, v \in H^1(\Omega)$. Prese le successioni $u_n, v_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$ definite in precedenza, si ottiene

$$\int_\Omega u_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_i} v_n\, dx + \int_{\partial\Omega} u_{n|\partial\Omega} v_{n|\partial\Omega}\, \nu_i\, d\Gamma$$

Da cui, per densità,

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\, dx + \int_{\partial\Omega} T(u)T(v)\nu_i\, d\Gamma$$

Si è ora interessati al $ker(T)$. Se $u \in C_c^\infty(\Omega)$ allora $T(u) = u_{|\partial\Omega} = 0$ da cui $C_c^\infty(\Omega) \subset \ker(T)$. Per densità $H_0^1(\Omega) \subset ker(T)$. Viceversa sia $u \in ker(T)$ e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ [6], allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{u} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = \int_\Omega u \frac{\partial \varphi_{|\Omega}}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi_{|\Omega}\, dx + \int_{\partial\Omega} T(u)T(\varphi_{|\Omega})\, \nu_i\, d\Gamma = -\int_{\mathbb{R}^N} \overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}} \varphi\, dx$$

[6] Sia $\Omega$ un aperto di classe $C^1$, allora $u \in H_0^1(\Omega)$ se e solo se $\overline{u} = u(x)I_\Omega(x) \in H^1(\mathbb{R}^N)$

Poiché $\overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}} \in L^2(\Omega)$ si ha che $\overline{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Da cui $u \in H_0^1(\Omega)$. Si ottiene di conseguenza il seguente teorema

**Teorema 5.5.** *Sia $T$ definito come nel Teorema 5.4, allora*

$$H_0^1(\Omega) = ker(T)$$

Si può fare un ragionamento analogo per quanto riguarda la derivata normale di una funzione. Infatti si può definire il seguente

**Teorema 5.6.** *Siano le ipotesi del Teorema 5.4 e $\nu$ il campo normale sulla frontiera. Allora esiste un operatore $T_\nu \in \mathcal{L}(H^2(\Omega)), L^2(\partial\Omega))$*

*Dimostrazione.* Per ogni $u \in H^1(\Omega)$ si ponga

$$T(\nabla u) := \left( T\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right), \cdots, T\left(\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)\right)$$

Si definisca il seguente operatore:

$$\begin{aligned} T_\nu \colon H^2(\Omega) &\to L^2(\partial\Omega) \\ u &\mapsto T(\nabla u) \cdot \nu \end{aligned}$$

poiché $|\nu(x)| = 1$ per ogni $x \in \partial\Omega$, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} |T(\nabla u) \cdot \nu|^2 \; d\Gamma &\leq \int_{\partial\Omega} |T(\nabla u)|^2 \; d\Gamma \\ &= \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial\Omega} \left| T\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right|^2 \; d\Gamma \\ &\leq C \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C\|u\|^2_{H^2(\Omega)} \end{aligned}$$

per ogni $u \in H^2(\Omega)$. Dunque $T_\nu$ è ben definita e continua. La linearità è dovuta alla linearità di $T$. □

Come mostrato precedentemente, si può estendere la formula di *Gauss-Green* a tutto $H^2(\Omega)$. Infatti siano $u \in H^2(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$. Prese le due successioni $u_n, v_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$ definite nel Teorema 5.4, si ottiene

$$\int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla v_n \; dx = -\int_\Omega \Delta u_n \; v_n \; dx + \int_{\partial\Omega} \nabla u_{n|\partial\Omega} \cdot \nu \; v_{n|\partial\Omega} \; d\Gamma$$

Da cui per densità,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx = -\int_\Omega \Delta u \; v \; dx + \int_{\partial\Omega} T_\nu(u) \; T(v) \; d\Gamma$$

## Riferimenti bibliografici

[1] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev Space and partial differential equation*, Springer (2011)

[2] D. Motreanu, V. V. Motreanu, N. Papageorgiou, *Topological and Variational Methods with Applications to Nonlinear Boundary Value Problems*, Springer-Verlag (2014)

[3] L. C. Evans, *Partial Differential Equations. Second Edition*, American Mathematical Society (2010)

[4] A. Iannizzotto, *Spazi di Hilbert e operatori lineari* (2019)

[5] A. Iannizzotto, *Spazi di Sobolev* (2019)

[6] A. Iannizzotto, *Equazioni alle derivate parziali/1: problemi stazionari* (2019)

[7] A. Iannizzotto, *Equazioni alle derivate parziali/2: problemi evolutivi* (2019)