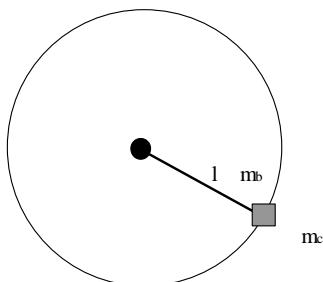




Esercitazione di Controlli Automatici 1 – n°5

Si consideri un braccio robotico utilizzato per la movimentazione di oggetti secondo lo schema in figura



Il braccio, di lunghezza $l = 2 \text{ m}$ e massa $m_b = 1 \text{ kg}$, è azionato da un motore in corrente continua a magneti permanenti tipo D4M3511, le cui caratteristiche sono allegate, a cui è stata aggiunta una bobina di spianamento (*smoothing choke coil*) con induttanza $L_s = 50 \text{ mH}$.

Il braccio deve movimentare dei pezzi, di massa $m_c = 2 \text{ kg}$, effettuando delle rotazioni di 90 deg .

Considerando come ingresso la tensione di armatura del motore e come uscita la posizione angolare del motore, si definisca la funzione di trasferimento del sistema elettromeccanico costituente il processo da controllare.

Il sistema di controllo in controreazione single-loop con controllore in serie al processo deve soddisfare le seguenti specifiche a regime, definite anche sulla base delle limitazioni intrinseche alla struttura di controllo scelta:

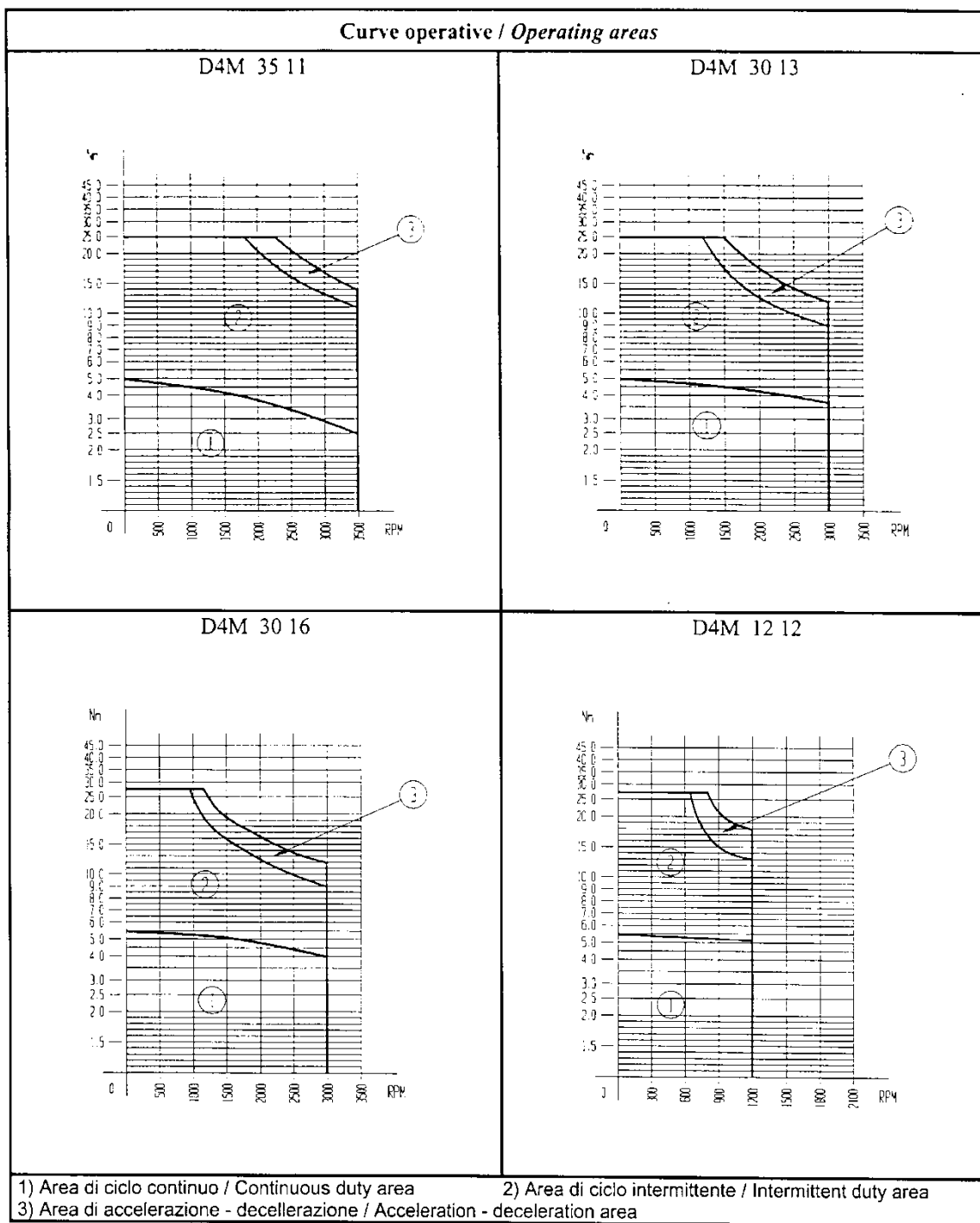
- posizione angolare a regime uguale al segnale di riferimento costante;
- influenza del disturbo costante di coppia sulla posizione di uscita non superiore a 8.6 deg/N m ;

Si valuti la stabilità del sistema di controllo in tali condizioni.



DATI MOTORE Motor ratings		SIMBOLI Symbols	UNITA' Units	SERIE Serie D4M COPPIA Torque Nm 5.5			
S E O M O T O R E	TIPO DI AVVOLGIMENTO Type of winding			35 11	30 13	30 16	12 12
	VELOCITA' NOMINALE Rated speed	n	RPM	3500	3000	3000	1200
	COPPIA ROTORE BLOCCATO Cont. stall torque	Cn	Nm	5	5	5.5	5.5
	CORRENTE A ROTORE BLOCCATO Stall current	In	A	15.6	11.6	10.8	5.9
	PICCO DI COPPIA ALLO SPUNTO Peak torque	C max	Nm	25	25	27.5	27.5
	CORRENTE AL PICCO DI COPPIA Peak current	I max	A	78	58	54	31.5
	F.C.E.M ALLA VELOC. NOM. B.E.M.F at rated speed	E	V	113	135	163	120
	MAX VELOCITA' Max speed	n max	RPM	4000	3500	3500	1700
	N° POLI N° poles			4	4	4	4
	DATI MECCANICI Mechanical data						
S E O M O T O R E	MOMENTO D' INERZIA Moment of inertia	J	Kgm ²	0.003	0.003	0.003	0.003
	MAX. ACC. TEORICA Max theoretical acceleration	α max	rad/s ²	8300	8300	9170	9170
	COSTANTE TEMPO MECC. Mechanical time constant	Tm	ms	33	24	16.5	8
	COPPIA SMORZ. K RPM Damping constant K RPM	Td	Nm	0.19	0.19	0.19	0.19
	COPPIA ATTRITO STATICO Static friction torque	Tf	Nm	0.16	0.16	0.16	0.16
	MAX CARICO ASSIALE Max axial load	Fa	N	170	170	170	170
	MAX CARICO RADIALE Max radial load	Fr	N	795	795	795	795
	PESO Weight	G	Kg	12.5	12.5	12.5	12.5
	DATI ELETTRICI Winding data						
	COSTANTE DI TENSIONE Voltage constant	Ke	Vs/rad	0.31	0.43	0.52	0.95
D T T O R E	COSTANTE DI COPPIA Torque constant	Kt	Nm/A	0.32	0.43	0.51	0.93
	COSTANTE TEMPO Elett. Electrical time constant	Te	ms	2	2.2	2.9	2.9
	COSTANTE TEMPO TERMICA Thermal time constant	Tt	min	45	45	45	45
	RESISTENZA ARM. Armature resistance	Ra	Ohm	0.3	0.52	0.65	2.2
	RESISTENZA ARM. CON SPAZZ. Terminal resistance	Rm	Ohm	0.4	0.62	0.75	2.3
	INDUTTANZA D'ARMATURA Armature inductance	La	mH	0.79	1.38	2.15	6.8
	GRADO DI PROTEZIONE Protection (IEC 34.5)		IP	54	54	54	54
	CLASSE ISOLAMENTO Insulation class			F	F	F	F
	TOLLERANZE Tolerances		%	±5	±5	±5	±5
	COSTANTE DI TENSIONE Voltage constant	Ke	Vs/rad	0.0955 (10 V/1000 RPM)			
D T T O R E	ONDULAZIONE DI PICCO Ripple		%	1.6			
	LINEARITA' A 6000 RPM Linearity at 6000 RPM		%	0.5			
	ERRORE DI REVERSIBILITA' Reversibility error		%	0.5			
	COEFFICIENTE DI TEMP. Temperature coefficient		%	-0.043			
	MOMENTO D'INERZIA Moment of inertia	J	g/cm ²	90			
	RESISTENZA Resistance	Ra	Ohm	90			
	INDUTTANZA Inductance	La	mH	10			
	N° POLI N° poles			4			
	TIPO Type			FMPR 102			
	COPPIA STATICA Static torque	C	Nm	10			
F B R R E A N K O E	TENSIONE DI ALIM. Power supply voltage	E	V	24			
	CORRENTE Current	I	A	1.1			
	POTENZA ASSORBITA Input power	P	W	26			

Altre tensioni a richiesta Other voltages on request



SERIE
Serie

D 4

DIMENSIONI
Dimensions

VERSIONE STANDARD Standard version

Technical drawing of the D4 servomotor. The left view is a side profile showing the cylindrical body, mounting flange, and output shaft. The right view is a front view showing the circular motor housing with cooling fins and four mounting holes. A dashed line indicates the center of rotation.

B14

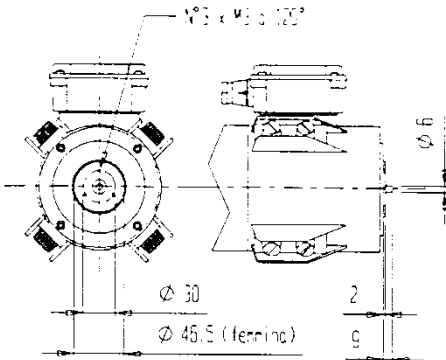
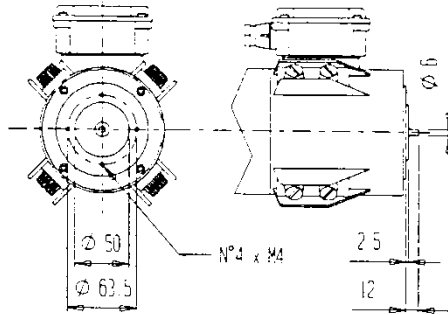
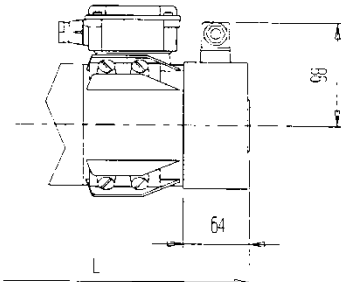
Technical drawing of the B14 servomotor. The left view is a side profile with dimensions: $\phi 70$ for the main body diameter, $\phi 0$ for the shaft diameter, and a length of 2.5. The right view is a front view with dimensions: $\phi 65$ for the mounting flange diameter, $\phi 115$ for the motor housing diameter, and a length of 2.5. Labels include "FILETTI M6 **" pointing to the mounting holes and "N°4 x M5" pointing to the mounting holes on the flange.

B5

Technical drawing of the B5 servomotor. The left view is a side profile with dimensions: $\phi 110$ for the main body diameter, $\phi 0$ for the shaft diameter, and a length of 2.5. The right view is a front view with dimensions: $\phi 45$ for the mounting flange diameter, $\phi 165$ for the motor housing diameter, and a length of 2.5. Labels include "FILETTI M6 **" pointing to the mounting holes and "N°4 x Ø 11" pointing to the mounting holes on the flange.

SIZE	D	E	C	L
D4 S	14	30	5x5x25	311
D4 S	19	40	6x6x30	311
D4 M	19	40	6x6x30	383
D4 L	19	40	6x6x30	455

** Solo su albero $\phi 19$ Shaft $\phi 19$ only

SERIE Serie		D 4	OPZIONI Optionals								
ENCODER E46		ENCODER E72									
											
FRENO Brake FMPR 102											
											
<table border="1"><tr><th>TYPE</th><th>D4S</th><th>D4M</th><th>D4L</th></tr><tr><td>L</td><td>325</td><td>397</td><td>469</td></tr></table>		TYPE	D4S	D4M	D4L	L	325	397	469		
TYPE	D4S	D4M	D4L								
L	325	397	469								

Soluzione esercitazione n° 5

La schematizzazione di un motore in corrente continua con controllo sulla tensione d'armatura ed eccitazione costante è riportato in Figura 1. La macchina in corrente continua (macchina in DC, dall'inglese Direct Current) è stata la prima macchina elettrica realizzata ed è tuttora utilizzata ampiamente per piccole e grandi potenze.

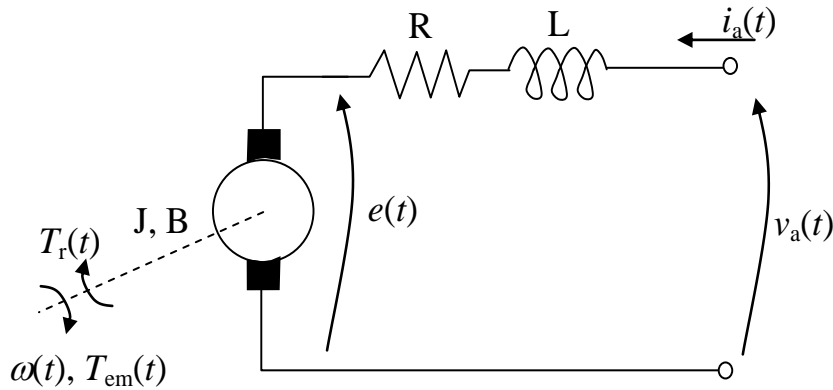


Figura 1. Schematico motore in corrente continua.

Le grandezze $v_a(t)$, $i_a(t)$, R ed L rappresentano rispettivamente tensione, corrente, resistenza ed induttanza del circuito elettrico di statore o d'armatura comprensivo dell'induttanza di spianamento. Un motore in DC alimentato con una tensione $v_a(t)$ genera per accoppiamento magnetico tra gli avvolgimenti di statore e rotore una coppia elettromagnetica $T_{em}(t)$ che consente di mettere in rotazione l'albero della macchina ad una velocità $\omega(t)$. Ovviamente la parte meccanica della macchina ruotando si comporta come un carico per la maglia elettrica e tale effetto viene rappresentato attraverso la tensione $e(t)$ che rappresenta la cosiddetta forza contro-elettromotrice.

E' chiaro quindi che le grandezze meccaniche ed elettriche della macchina per natura dovranno essere mutuamente accoppiate. Tali legami sono di seguito riportati:

$$\begin{aligned} T_{em} &= k_t \cdot i_a(t) \\ e(t) &= k_e \cdot \omega(t) \end{aligned}$$

dove k_t e k_e sono rispettivamente la *costante di coppia* la *costante di tensione* k_e . J e B rappresentano invece il momento d'inerzia dell'albero della macchina, comprensivo dell'inerzia dell'asta e del pezzo, ed il coefficienti di attrito viscoso della parte meccanica della macchina. $T_r(t)$ rappresenta la coppia resistente che è intrinseca al tipo di applicazione considerata e rappresenta il carico della parte meccanica. Principale differenza tra $T_r(t)$ e le coppie di attrito $T_{attr}(t) = B \cdot \omega(t)$ è che alla prima è associato un lavoro di tipo *meccanico* mentre alla seconda è associata un dissipazione energetica, ad esempio in calore.

Sulla base di queste considerazioni e dallo schematico in Figura 1 si evince l'equazione che regola la dinamica della maglia elettrica come segue:

$$\begin{cases} v_a(t) = R \cdot i_a(t) + L \cdot \frac{di_a(t)}{dt} + e(t) \\ e(t) = k_e \cdot \omega(t) \end{cases} \longrightarrow L \cdot \frac{di_a(t)}{dt} + R \cdot i_a(t) = -k_e \cdot \omega(t) + v_a(t)$$

mentre l'equazione dell'equilibrio meccanico risulta:

$$\begin{cases} T_{em}(t) = J \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} + B \cdot \omega(t) + T_r(t) \\ T_{em}(t) = k_t \cdot i_a(t) \end{cases} \longrightarrow J \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} + B \cdot \omega(t) = k_t \cdot i_a(t) - T_r(t)$$

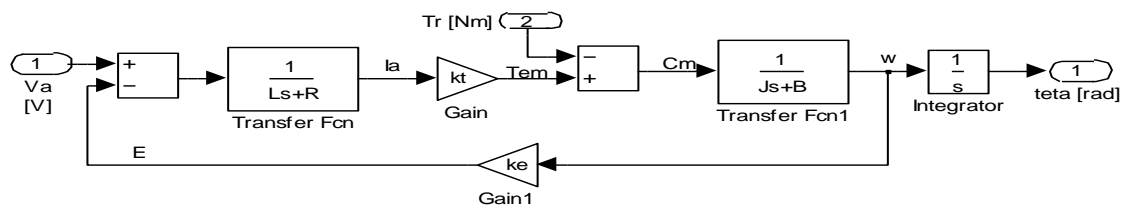


Figura 2. Schematico Simulink.

Sulla base delle ultime due equazioni risulta immediato ricavare lo schema a blocchi del sistema in analisi nel dominio di Laplace. In Figura 2 è riportato tale schematico realizzato mediante MatLab-Simulink.

Ricordando che posizione e velocità sono legate dal seguente rapporto integro-differenziale

$$\dot{\theta}(t) = \omega(t) \longrightarrow s \cdot \Theta(s) - \Theta(0) = \Omega(s), \quad \Theta(0) = 0$$

al fine di rendere accessibile la posizione dell'albero della macchina è stato necessario inserire nello schematico Simulink un blocco integratore a valle della velocità $\omega(t)$ come mostrato in Figura 2.

Per cui, considerando come ingresso la tensione di armatura del motore e come uscita la posizione angolare del motore, la funzione di trasferimento del sistema elettromeccanico costituente il processo da controllare risulta:

$$P(s) = \frac{\Theta(s)}{V_a(s)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{k_t}{1 + k_e \cdot \frac{k_t}{JL \cdot s^2 + (LB + RJ) \cdot s + RB}} = \frac{k_t}{s \cdot (JL \cdot s^2 + (LB + RJ) \cdot s + (RB + k_t k_e))}$$

Siccome è richiesto esplicitamente che la **posizione angolare del braccio** meccanico a regime **sia uguale al segnale di riferimento** è chiaro che sarà richiesto un sistema a **retroazione unitaria**.

Inoltre, poiché la **coppia resistiva** $T_r(t)$, può essere trattata alla stregua di un **disturbo** (anche non noto a priori) **da dover compensare**, come visto nelle precedenti esercitazioni, al fine di rendere più semplice la fase di progetto e di analisi del nostro sistema di controllo, si è deciso di considerare tale disturbo di coppia come un disturbo agente direttamente sulla tensione di armatura attraverso la seguente f.d.t. :

$$Z(s) = \frac{L \cdot s + R}{k_t}$$

Sulla base di queste considerazioni, in Figura 3 è riportato lo schema a blocchi risultante del loop di controllo in analisi.

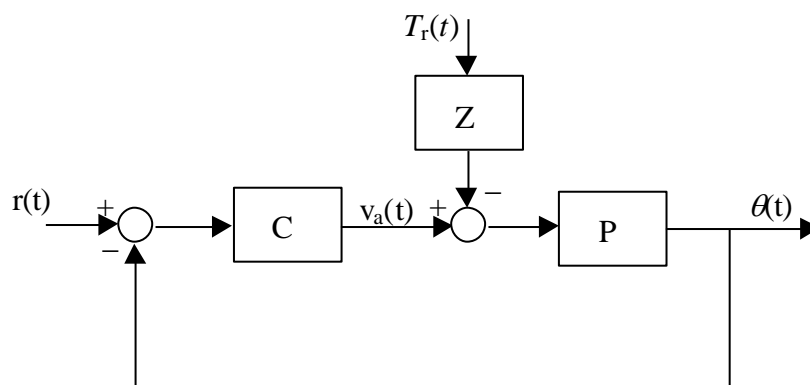


Figura 3. Loop di controllo.

A questo punto è possibile ricavare i valori numerici dei parametri della macchina direttamente dalle specifiche di progetto e dai dati tecnici del motore D4M 3511 forniti in allegato. In particolare avremo:

$$R = R_m = 0.4 \, \Omega \quad , \quad L = L_a + L_s = 50.79 \, mH, \quad k_e = 0.31 Vs/rad, \quad k_t = 0.32 \, N \, m/A$$

$$B = \frac{J_m}{T_m} = 0.091 \, N \frac{ms}{rad}, \quad J_m = 0.003 \, kg \, m^2$$

Poiché all'albero del motore sono calettati rigidamente un asta di lunghezza l e che durante le manovre il pezzo meccanico da movimenterà sarà ad esempio fissato al braccio ad esempio attraverso una pinza, allora considerando il tutto come un unico corpo rigido, abbiamo che il momento d'inerzia complessivo risulta:

$$J = J_m + \frac{1}{2} m_c \cdot l^2 + \frac{1}{3} \cdot m_b \cdot l^2 = 0.003 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2^2 + \frac{1}{3} \cdot 2^2 = 5.336 \, kg \, m^2$$

dove i termini $m_c \cdot l^2/2$ ed $1/3 \cdot m_b l^2$ rappresentano rispettivamente il momento d'inerzia del pezzo da movimentare modellato come un punto materiale ed il momento d'inerzia associato al braccio meccanico, modellato come un asta di lunghezza l e massa m_b con l'asse di rotazione al suo estremo come mostrato in Tabella 1.

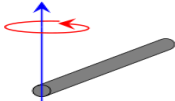
Descrizione	Figura	Momento di inerzia
Massa puntiforme m a distanza r dall'asse di rotazione.		$J = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$
Asta di lunghezza L e massa m (asse di rotazione alla fine dell'asta)		$J = \frac{1}{3} \cdot m \, L^2$

Tabella 1. Momento d'inerzia (Tratto da it.wikipedia.org).

Sostituendo i valori numerici, le funzioni di trasferimento dei blocchi del sistema di controllo risultano:

$$P(s) = \frac{2.316}{s \cdot (1 + 27.58 \cdot s + 3.498 \cdot s^2)} = \frac{k_p}{s} \cdot P'(s); \quad P'(0) = 1$$

$$Z(s) = \frac{T_m(s)}{V_a(s)} = 1.25 \cdot (1 + 0.127 \cdot s) = k_z \cdot Z'(s); \quad Z'(0) = 1$$

Il regolatore verrà invece rappresentato dalla seguente f.d.t.:

$$C(s) = \frac{k_c}{s^{v_c}} \cdot C'(s); \quad C'(0) = 1$$

E' bene rimarcare che tutte le f.d.t. sono state poste in forma di Bode.

Poiché è richiesto di soddisfare le seguenti specifiche a regime:

- posizione angolare a regime uguale al segnale di riferimento costante;
- influenza del disturbo costante di coppia sulla posizione di uscita non superiore a 8.6 deg/N m;

è chiaro che tali specifiche si traducono in specifiche sull'**errore a regime ammissibile** per le f.d.t. ingresso-uscita e disturbo-uscita:

$$W_r(s) = \frac{\Theta(s)}{R(s)} = \frac{C(s) \cdot P(s)}{1 + C(s) \cdot P(s)} = k_d \cdot \frac{k_c k_p C'(s) P'(s)}{k_d \cdot s^{v_c+1} + k_c k_p C'(s) P'(s)} \quad \text{con} \quad k_d = 1$$

$$W_{T_r}(s) = \frac{\Theta(s)}{T_r(s)} = -Z(s) \cdot \frac{P(s)}{1 + C(s) \cdot P(s)} = -k_z \cdot Z'(s) \cdot \frac{s^{v_c} \cdot k_p P'(s)}{s^{v_c+1} + k_c k_p C'(s) P'(s)}$$

Dove, data la presenza di un polo nell'origine nel processo $P(s)$, la specifica sull'errore a regime nullo per i segnali di riferimento risulta automaticamente soddisfatta (vedi sistema TIPO 1). Dove per completezza riportiamo la dimostrazione:

$$e(\infty)|_{r(t)=\delta_{-1}(t)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot [k_d R(s) - W_r(s) \cdot R(s)]_{R(s)=\frac{1}{s}} =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left[k_d - k_d \cdot \frac{k_c k_p C'(s) P'(s)}{k_d \cdot s^{\nu_c+1} + k_c k_p C'(s) P'(s)} \right]_{R(s)=\frac{1}{s}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{\nu_c+1} \cdot k_d^2}{k_d \cdot s^{\nu_c+1} + k_c k_p C'(s) P'(s)} = 0$$

Con riferimento alla specifica sull'influenza di una coppia disturbante costante sulla posizione a regime, attraverso una analoga analisi, posto $r(t) = 0$, ricaviamo:

$$\vartheta(\infty)|_{T_r(t)=\delta_{-1}(t)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot W_{T_r}(s) \cdot T_r(s) \Big|_{T_r(s)=\frac{1}{s}} = - \lim_{s \rightarrow 0} k_z \cdot \frac{s^{\nu_c} \cdot k_p}{s^{\nu_c+1} + k_c k_p}$$

la quale ci permette di definire la parte del regolatore che influenza la precisione a regime del nostro sistema, ovvero i valori per ν_c e k_c .

Convertendo la specifica a regime tra disturbo ed uscita in radianti abbiamo:

$$|\vartheta(\infty)| \leq 8.6 \frac{\text{deg}}{\text{Nm}} = 0.15 \frac{\text{rad}}{\text{Nm}}$$

da cui si ottiene il seguente vincolo di progetto:

$$k_z \cdot \frac{s^{\nu_c} \cdot k_p}{s^{\nu_c+1} + k_c k_p} \Big|_{s \rightarrow 0} \leq 0.15$$

Poiché il processo presenta già un polo nell'origine che però è situato a valle rispetto al disturbo (quindi ininfluenza sull'errore a regime disturbo-uscita), e siccome non è possibile inserire un ulteriore polo nell'origine nel controllore, in quanto questo destabilizzerebbe permanentemente il processo ($\mathbf{m_g} \leq 0 \forall k_c$) non possiamo che scegliere $\nu_c = 0$ e quindi ricavare il k_c tale per cui l'errore sia minore di 0.15.

$$k_z \cdot \frac{k_p}{s + k_c k_p} \Big|_{s \rightarrow 0} \leq 0.15 \quad \rightarrow \quad \frac{k_z}{k_c} \leq 0.15 \quad \rightarrow \quad k_c \geq \frac{1.25}{0.15} = 8.34$$

Valori dei parametri del regolatore $C(s)$ che soddisfano le specifiche statiche possono essere ad esempio:

$$C(s) = \frac{k_c}{s^{\nu_c}} \cdot C'(s) \rightarrow \begin{cases} \nu_c = 0 \\ k_c = 9 \end{cases}$$

Dopo questa prima fase di progettazione non siamo però ancora certi che il sistema controllato si comporti a regime come richiesto, in quanto non abbiamo certezza del fatto che il sistema a ciclo chiuso sia effettivamente stabile.

Infatti l'analisi mediante il **Teorema del Valore Finale** sull'errore a regime è **valida** solo nell'ipotesi che il **sistema a ciclo chiuso sia asintoticamente stabile**.

Per cui dovremo a questo punto andare a valutare la f.d.t. a ciclo aperto del sistema tenendo conto della sola correzione statica e quindi andare a valutare i margini di stabilità della sua risposta armonica

$$\mathbf{m_g}|_{\text{dB}} = -20 \cdot \log_{10} |F(j\omega_c)|, \quad \omega_c: \angle F(j\omega_c) = -180 \text{ deg}$$

$$\mathbf{m_\phi}|_{\text{deg}} = \angle F(j\omega_t) + 180 \text{ deg}, \quad \omega_t: |F(j\omega_t)|_{\text{dB}} = 0$$

In Figura 4 è riportato il digramma di Bode della f.d.t. in analisi

$$F(s) = k_c \cdot P(s) = \frac{21.249}{s \cdot (1 + 27.58 \cdot s + 3.498 \cdot s^2)}$$

dal quale è possibile riscontrare una evidente condizione di instabilità a ciclo chiuso in quanto entrambi i margini di stabilità risultano minori di zero e pari rispettivamente a:

$$\begin{aligned} m_g|_{dB} &= -8.61 & @ \omega_c &= 0.535 \text{ rad/sec} \\ m_\phi|_{deg} &= -4 & @ \omega_t &= 0.879 \text{ rad/sec} \end{aligned}$$

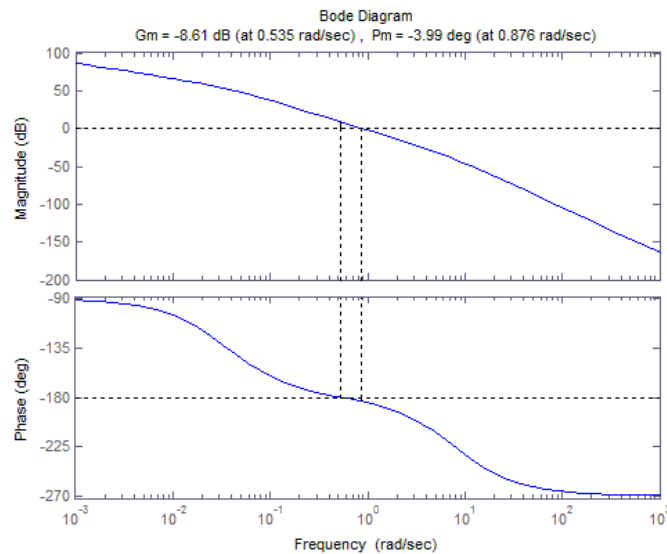


Figura 4. Diagramma di Bode della f.d.t. ad anello aperto $F(j\omega)$.

Il sistema risulta pertanto instabile a ciclo chiuso in presenza della sola correzione statica. Al fine di stabilizzare il sistema a ciclo chiuso sarà dunque necessario progettare opportunamente la parte dinamica del regolatore $C'(s)$ al fine di rendere positivi entrambi i margini di stabilità.

Per completezza di seguito è riportato il codice MatLab relativo all'esercitazione appena discussa. Copiare ed incollare tali istruzioni in un MatLab m-file per eseguire in blocco tutte le istruzioni.

```
clc, clear all, close all
% Esercitazione 5 Controlli Automatici
% Parametri elettrici:
R=0.4; La=0.79e-3; Ls=50e-3; L=La+Ls;
% Parametri meccanici:
Tm=33e-3; Jm=0.003; B=Jm/Tm;
l=2; mb=1; mc=2;
J=Jm+mc*l^2+1/3*mb*l^2;
% Costante di tensione e di coppia della macchina
ke=0.31; kt=0.32;
% F.d.t. Posizione-Tensione
P=tf(kt/(R*B+kt*ke), conv([1 0], [(J*L)/(R*B+kt*ke)
(L*B+R*J)/(R*B+kt*ke) 1]))
% Parametri del regolatore che soddisfano le specifiche statiche:
kc=9;
C=kc;
% F.d.t. a ciclo aperto e margini di stabilità:
F=kc*P
figure
margin(F)
```

Authors: Prof. Elio Usai¹, Ing. Alessandro Pilloni¹.

E. Usai and A. Pilloni are with the Department of Electrical and Electronic Engineering (DIEE), University of Cagliari, Cagliari 09123, Italy. E-mail addresses: {eusai,alessandro.pilloni}@diee.unica.it



This work is licensed under the Creative Commons Attribuzione 3.0 Italia License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/it/>.