



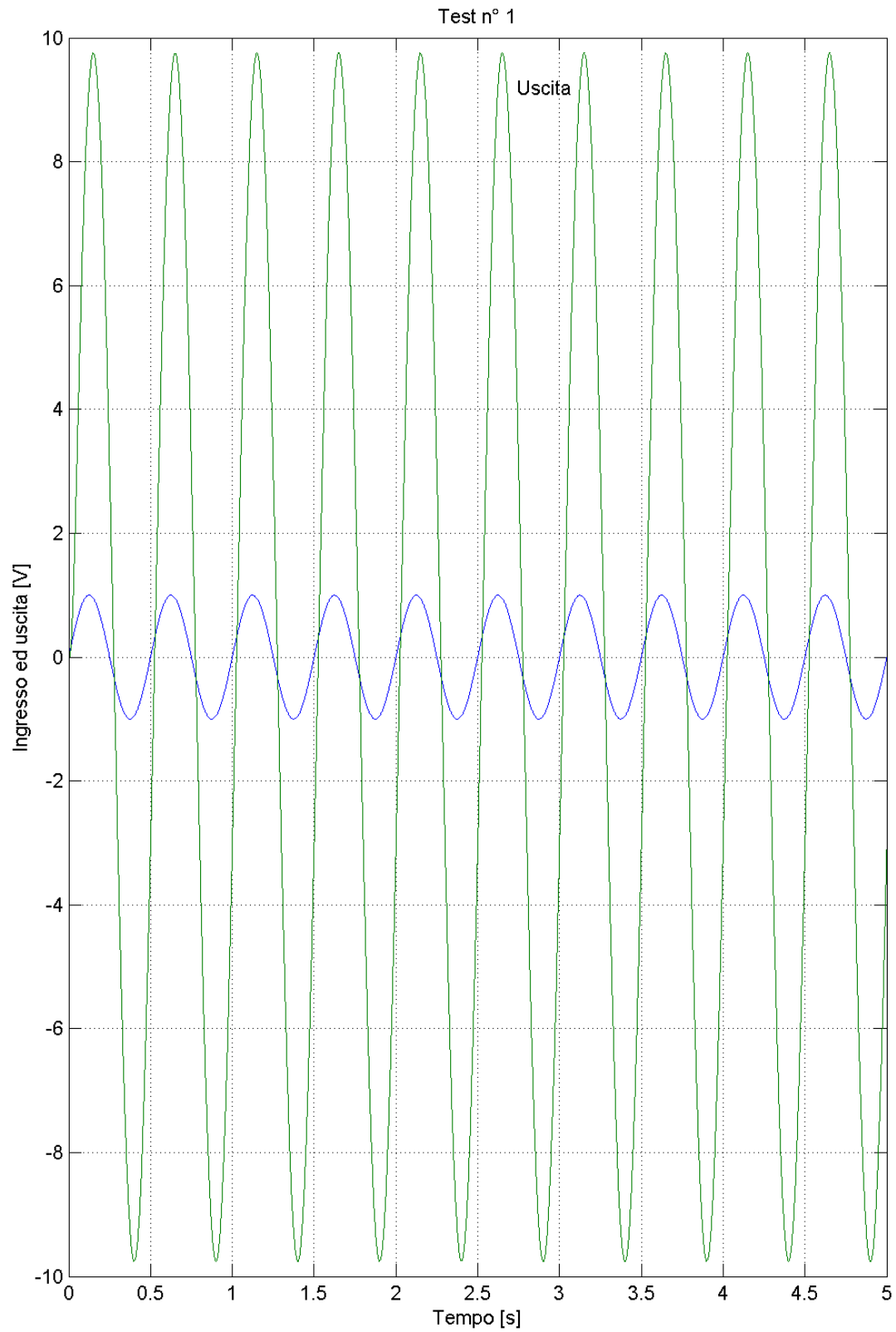
Esercitazione di Controlli Automatici 1 – n°7

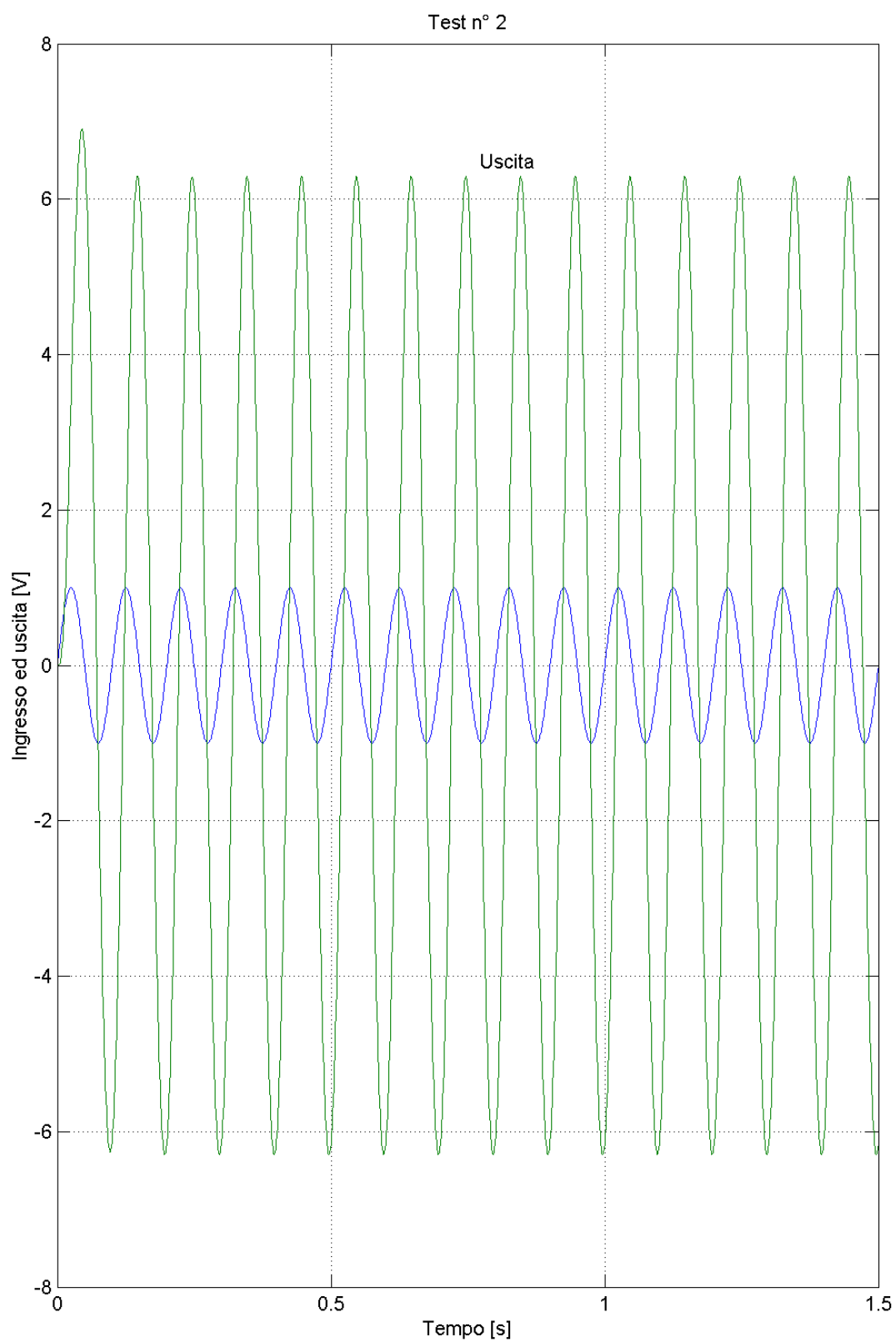
I risultati di 6 prove di risposta armonica di un sistema elettrico di caratteristiche non note sono riportati in allegato. I dati significativi sono riportati nella seguente tabella:

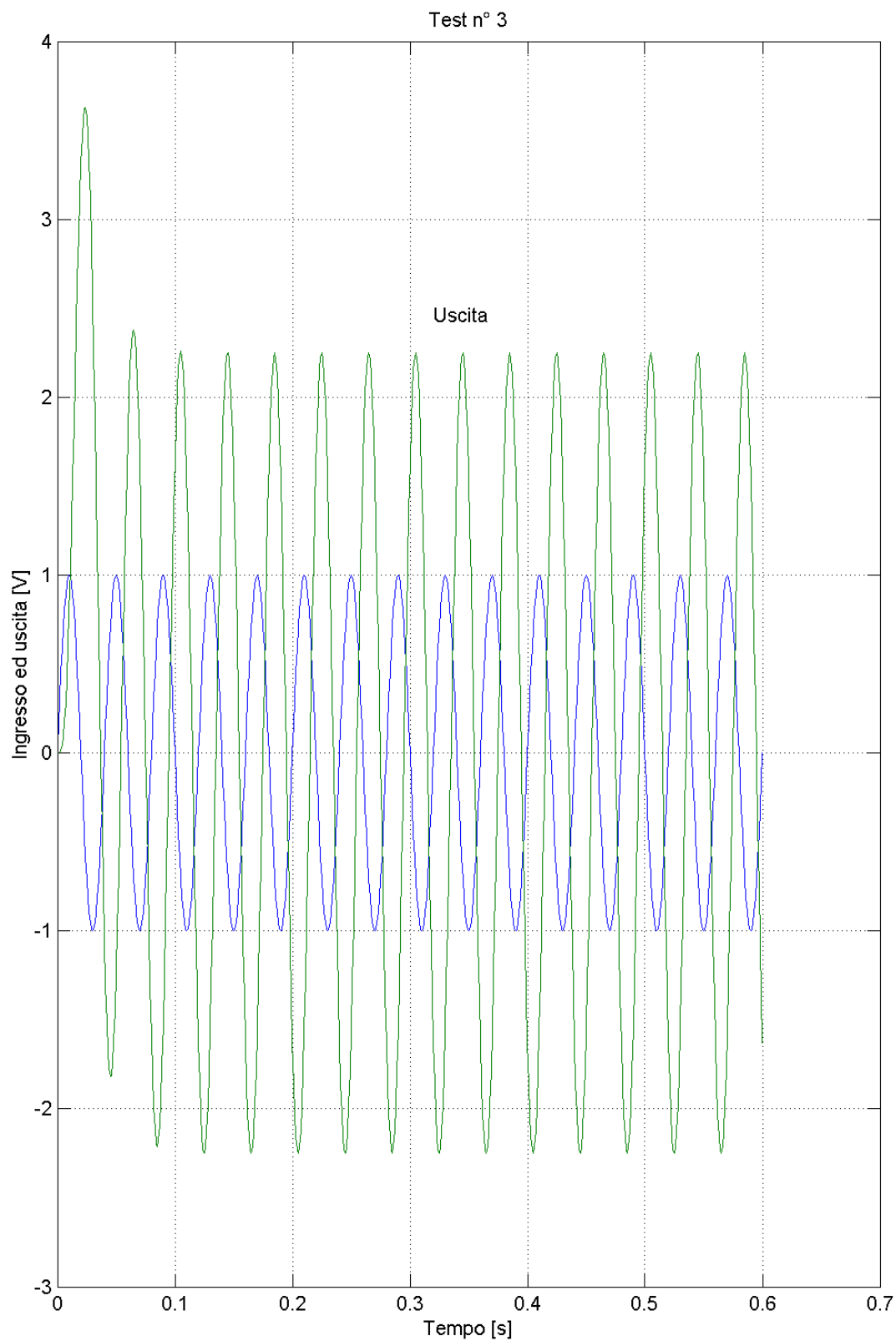
f [Hz]	U_M [V]	Y_M [V]	Δt [msec]
2	1	9.755	-25,3
10	1	6.291	-21,5
25	1	2.250	-14,8
50	5	3.254	-9,6
100	5	0.690	-5,8
500	10	0.017	-1,4

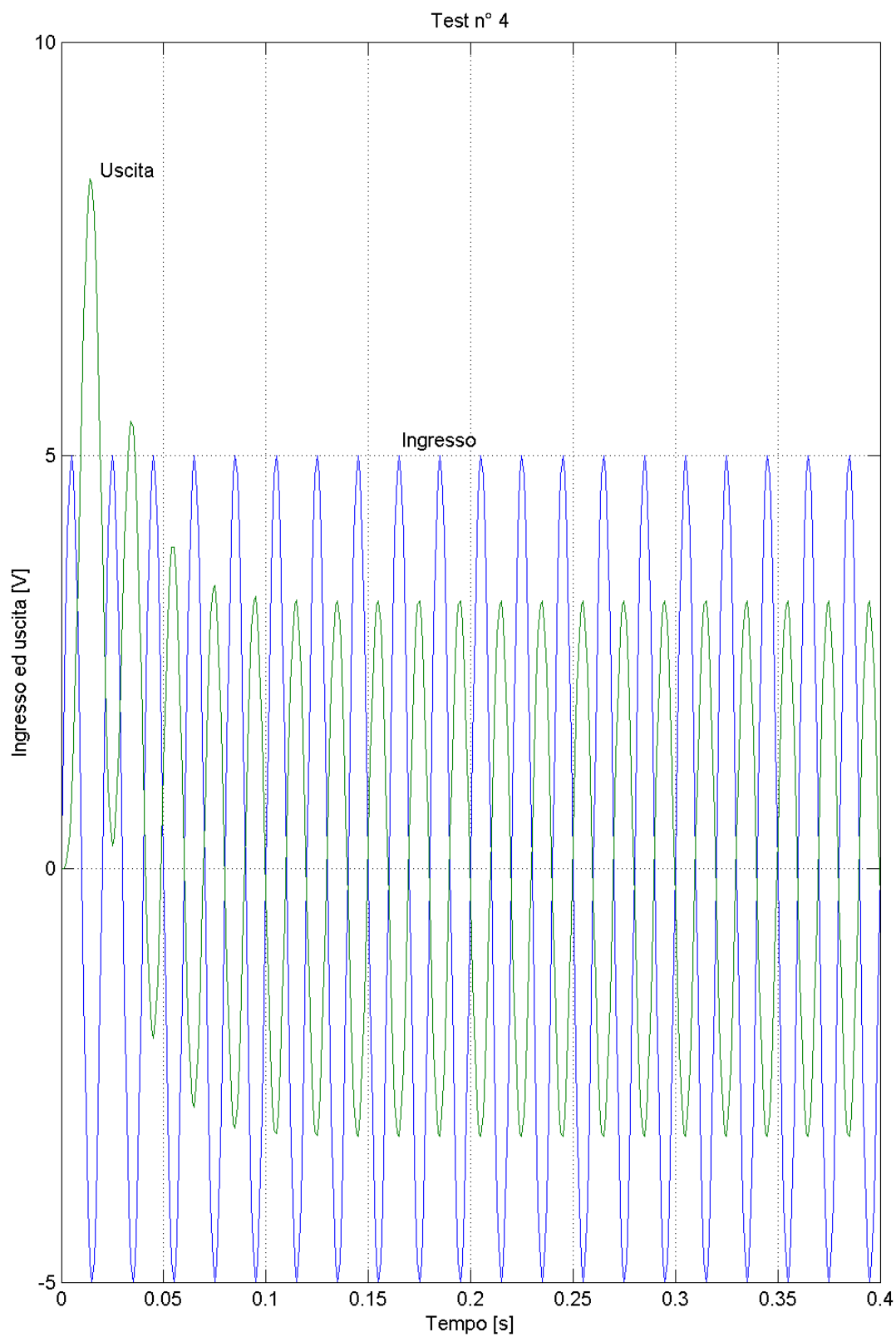
Si individui la struttura e la taratura di un sistema in retroazione stabile che soddisfi le seguenti specifiche:

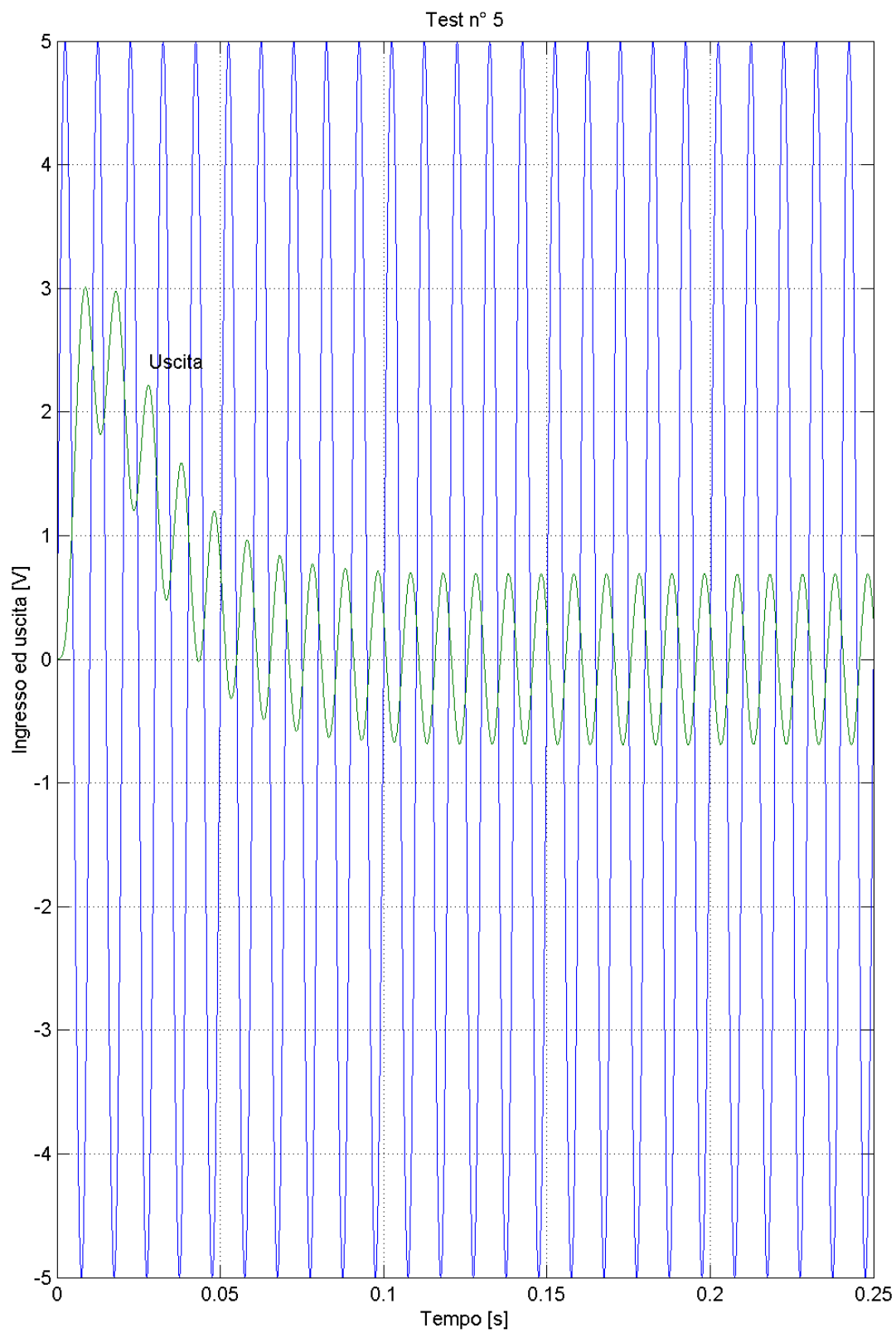
- Guadagno a ciclo chiuso pari a quello del sistema sottoposto a test $\pm 1\%$;

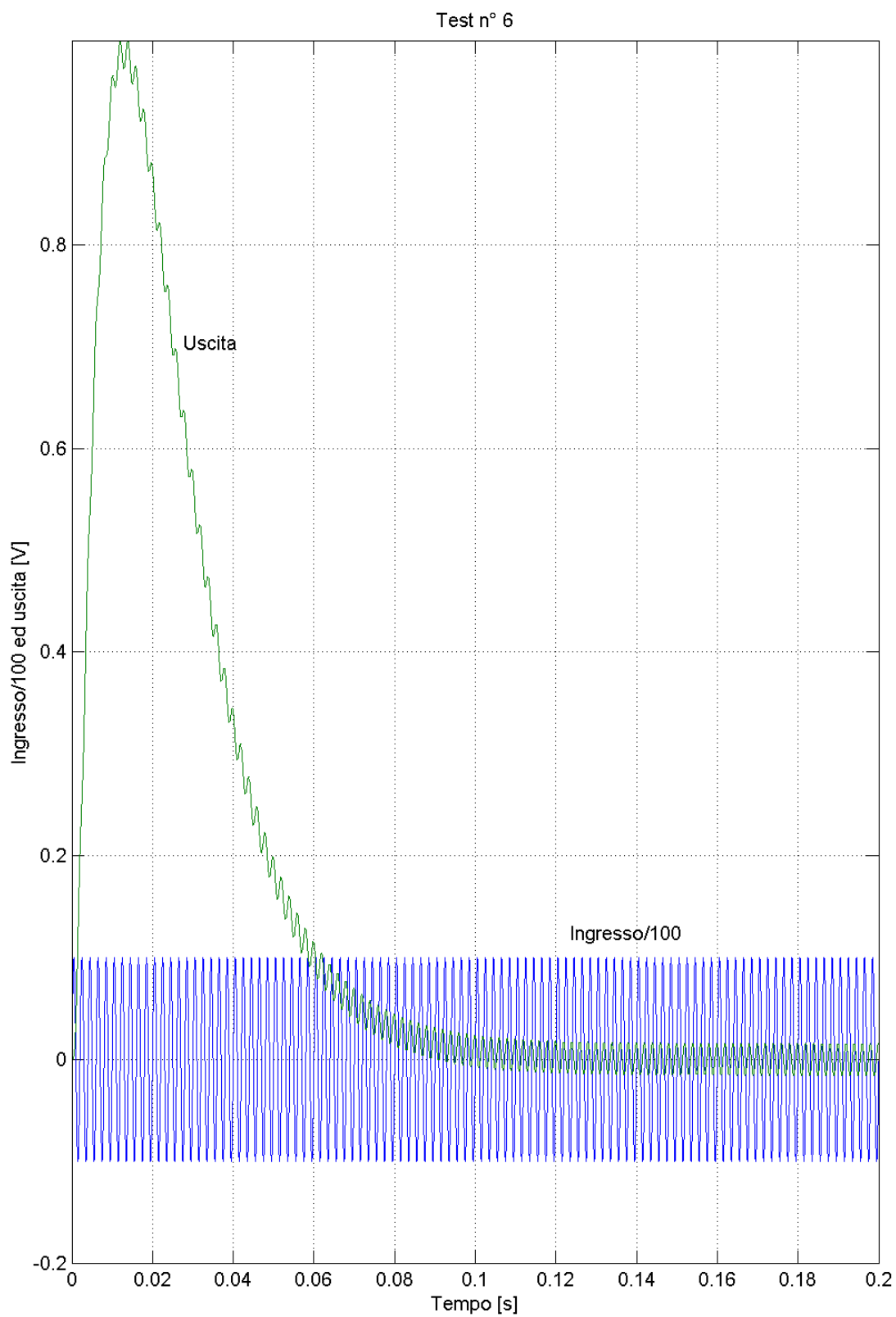


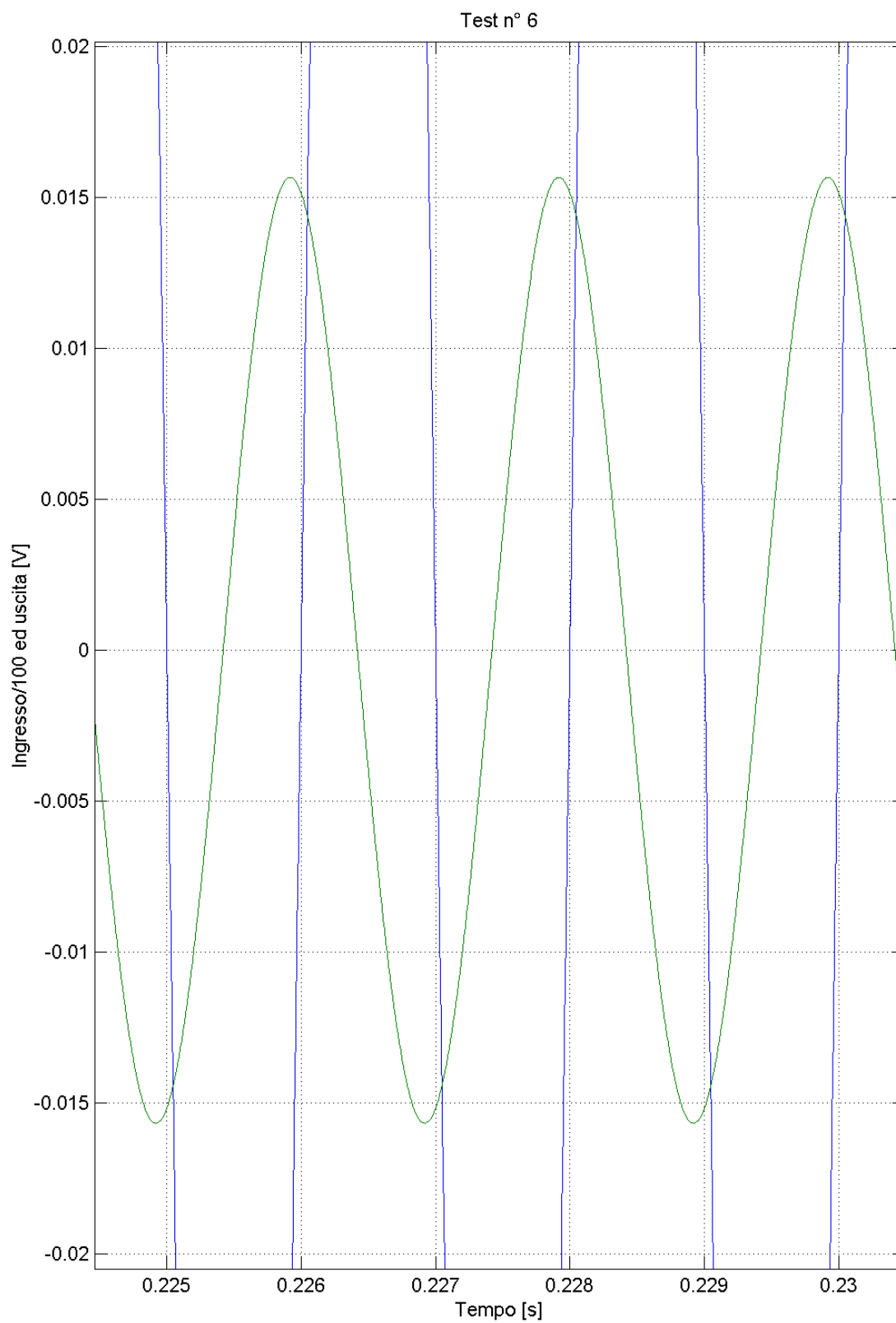












Soluzione esercitazione n° 7

In questa esercitazione viene richiesto di progettare un regolatore per un sistema elettrico di caratteristiche non note tale che il sistema a ciclo chiuso risultante sia stabile e presenti un guadagno a ciclo chiuso pari al guadagno in bassa frequenza del processo a meno di un'incertezza del 1%.

Approccio comune e sistematico per ricavare un modello matematico lineare tempo-invariante che descriva il comportamento di un sistema fisico non noto a priori (black box) è quello di valutare come si propaga nel sistema un segnale sinusoidale del tipo:

$$u(t) = U_M \cdot \sin(\omega^* \cdot t), \quad \omega^* = 2\pi \cdot f^*$$

dove U_M è l'ampiezza di picco del segnale di test e f^* la sua frequenza. In base alla definizione di *risposta armonica* è chiaro che se il sistema è stabile, la sua risposta a regime sarà ancora un segnale sinusoidale del tipo

$$y_r(t) = Y_M \cdot \sin(\omega^* \cdot t + \varphi(\omega^*))$$

avente la stessa frequenza del segnale d'ingresso e rispettivamente ampiezza e sfasamento rispetto al segnale di ingresso pari a:

$$Y_M = M(\omega^*) \cdot U_M, \quad \varphi(\omega^*) = \omega^* \cdot \Delta t$$

Dove $M(\omega^*)$ e $\varphi(\omega^*)$ rappresentano il modulo e la fase della f.d.t. associata al processo $P(s)$ valutata per $s = j\omega^*$. Δt rappresenta invece il ritardo/anticipo tra i due segnali, ad esempio calcolato tra due picchi dei segnali, come mostrato in Figura 1. Eseguendo iterativamente questa procedura per diversi valori di frequenza $\omega^* \in \mathbb{R} > 0$ potremo quindi ricostruire completamente la risposta armonica del processo in analisi.

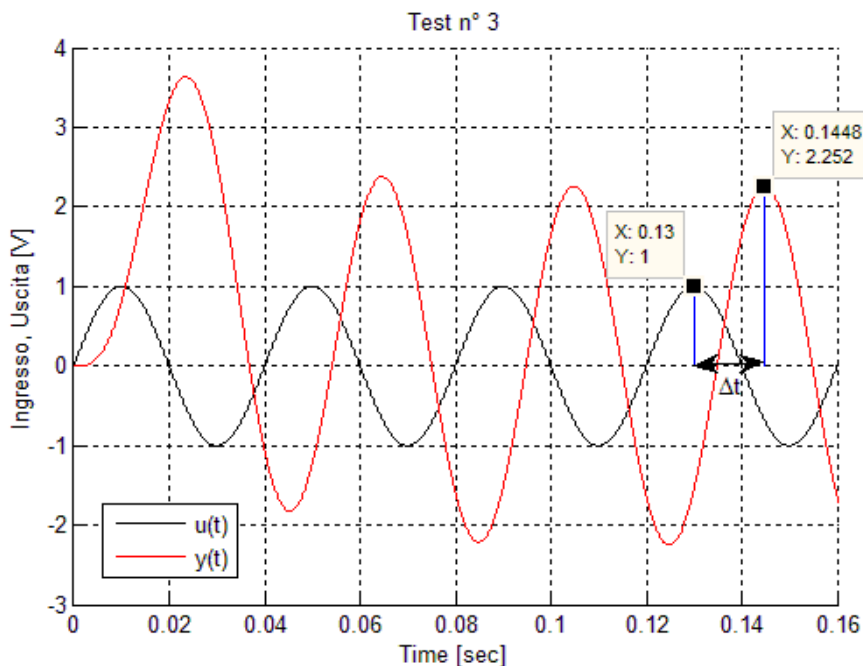


Figura 1. Misura di ritardo tra due segnali relativo al test n° 3.

In base ai risultati delle sei prove di risposta armonica in allegato, in Tabella 2 sulla destra sono riportati le coppie di coordinate $(\omega, M(\omega))$ e $(\omega, \varphi(\omega))$ che ci permetteranno di ricavare per punti le proprietà filtranti del nostro processo vedi Figura 2).

$f[\text{Hz}]$	$U_M[\text{V}]$	$Y_M[\text{V}]$	$\Delta t [\text{msec}]$	$\omega = 2\pi f \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$	$M_{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{Y_M}{U_M} \right)$	$\Delta\varphi_{\text{deg}} = \omega \cdot \Delta t \cdot \left(\frac{180}{\pi} \right)$
2	1	9.755	-25,3	12.57	19.7845	-18.2
10	1	6.291	-21,5	62.83	15.9744	-77.4
25	1	2.250	-14,8	157.08	7.0437	-133.2
50	5	3.254	-9,6	314.16	-3.7310	-172.8
100	5	0.690	-5,8	628.32	-17.2024	-208.8
500	10	0.017	-1,4	3141.60	-55.3910	-252

Tabella 2. Dati significativi per il tracciamento della risposta armonica del sistema ricavati dai 6 test sperimentali.

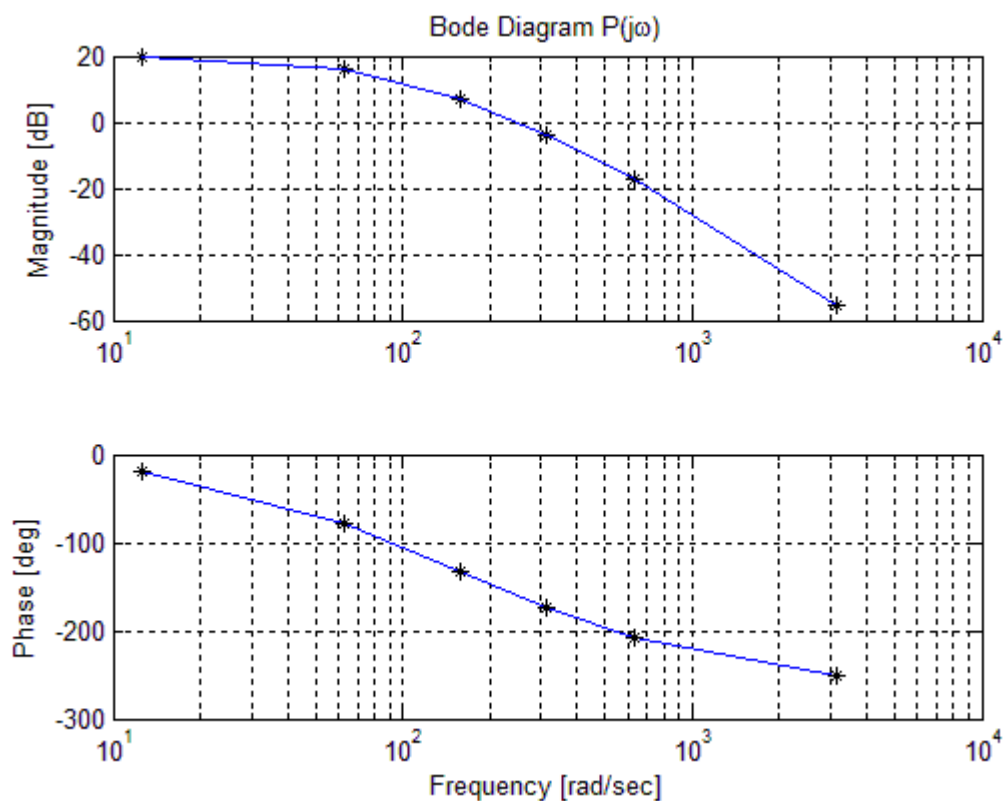


Figure 2. Digramma di Bode del processo ottenuto per interpolazione.

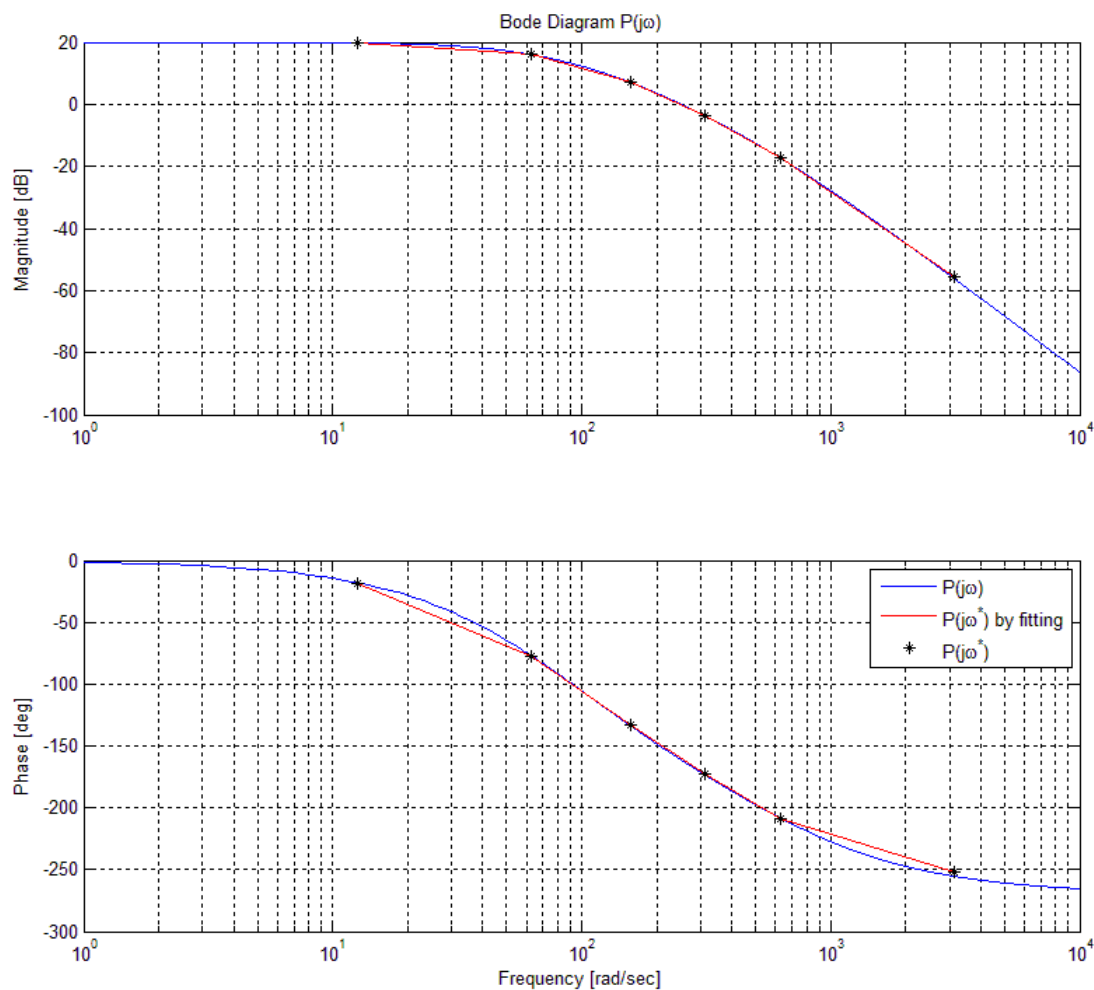


Figure 3. Digramma di Bode del processo ottenuto addolcendo i profili di modulo e fase (curva blu).

Sulla base del Digramma di Bode riportato in Figura 2 ottenuto per interpolazione, addolcendo l'andamento delle spezzate per le curve dei moduli e delle fasi, si può dedurre la seguente struttura per la f.d.t. del processo in analisi:

$$P(s) = \frac{10}{(1 + \tau_1 s) \cdot (1 + \tau_2 s) \cdot (1 + \tau_3 s)} = k_p \cdot P'(s), \quad k_p \approx 10, \quad P'(s) = 1$$

I test n°1 e 2 ci mostrano come il modulo in bassa frequenza presenti un andamento pressoché piatto intorno a $20\text{dB} \rightarrow 10$. Mentre le fasi sono approssimativamente nulle ($k_p > 0$). Da queste considerazioni è facile dedurre che il guadagno in bassa frequenza del processo sarà approssimativamente 10.

Inoltre il sistema presenterà un eccesso poli-zeri pari $n - m = 3$ in quanto le pendenze dei moduli si mantengono costanti negli ultimi 2 test a circa -60 dB/dec con fasi non più lineari ma che invece asintoticamente tendono a -270 deg .

Dai test a 1 Hz e 10 Hz possiamo inoltre notare che $M(j\omega)$ nell'intorno di $\omega = 62.8\text{ rad/sec}$ si riduce di circa 3dB il che significa che il primo punto di rottura sarà per $\omega_1 = 1/|\tau_1| \approx 62.8$ con $\tau_1 < 0$. Per capire invece la posizione dei restanti due poli dovremo analizzare graficamente i cambiamenti di pendenza del modulo $M(\omega)[\text{dB}]$, aiutandoci anche con le informazioni sulle fasi. Da un attenta ispezione del diagramma in Figura 3 è possibile dedurre che i restanti punti di rottura si trovano rispettivamente a $\omega_2 = 1/\tau_2 \approx 125\text{ rad/sec}$ e $\omega_3 = 1/\tau_3 \approx 628\text{ rad/sec}$ e data la monotonicità sia dei moduli che delle fasi saranno associati a poli a parte reale negativa.

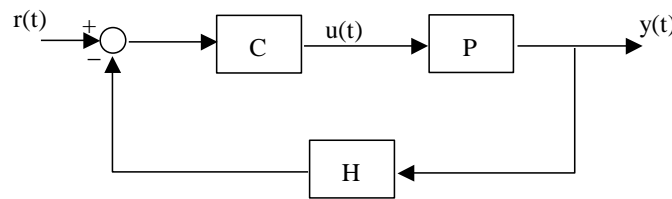


Figura 4. Struttura schema di controllo a retroazione non unitaria.

Ad ogni modo ai fini del progetto tali informazioni risultano superflue in quanto abbiamo a disposizione come criterio di sintesi quello della **Sintesi per tentavi in ω** .

Tale criterio **non necessita di conoscere la distribuzione esatta dei poli e degli zeri del processo**, ma bensì **si affida alla lettura del Diagramma di Risposta Armonica del processo**. Ovviamente sarà però necessario avere a disposizione un set di specifiche consono all'analisi che si conduce.

Per quanto riguarda le specifiche statiche ($t \rightarrow \infty$) non ci sarà differenza rispetto ai criteri di sintesi già visti, mentre le specifiche dinamiche dovranno essere espresse in termini di:

- *Modulo alla Risonanza $M_r(\omega)$ e margine di fase m_ϕ invece che di Sovraelongazione Percentuale $S_\%$ e coefficiente di smorzamento ζ :*

$$M_r = \max \left\{ \frac{F(j\omega)}{F(j0)} \right\} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{con } 0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S_\% = 100e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$\zeta \approx \frac{m_\phi^{\text{deg}}}{100} \quad \text{oppure} \quad \zeta \approx \sin\left(\frac{m_\phi^{\text{rad}}}{2}\right)$$

- *Banda Passante a 3dB a ciclo chiuso B_3 e di pulsazione di attraversamento a ciclo aperto ω_t invece che di costante di tempo equivalente τ^* e tempo di assestamento $t_{a\epsilon\%}$*

$$\omega_t = (3 \div 5) \cdot B_3, \quad B_3 \approx \frac{1}{\tau^*}, \quad t_{a\epsilon\%} \approx K_\epsilon \cdot \tau^*$$

	$\epsilon = 1\%$	$\epsilon = 2\%$	$\epsilon = 5\%$
$t_{a\epsilon\%} \approx K_\epsilon \cdot \tau^*$	$K_\epsilon = 5$	$K_\epsilon = 4$	$K_\epsilon = 3$

Tabella 3. Relazioni tra tempo di assestamento all' $\epsilon\%$ e costante di tempo equivalent τ^* .

Dopo questo breve inciso sulla forma delle specifiche se si desidera utilizzare come criterio di sintesi la **Sintesi per Tentativi in ω** , torniamo allo svolgimento dell'esercitazione.

Nel testo veniva richiesto un guadagno a ciclo chiuso pari al guadagno in bassa frequenza del processo, a meno di un'incertezza del 1%. E' chiaro che il sistema di controllo per fornire tale amplificazione dovrà necessariamente presentare una retroazione non unitaria del tipo¹:

¹ Il guadagno della f.d.t. a ciclo chiuso relativa ad un sistema a retroazione unitaria $K_d = 1$ è sempre minore o al più uguale ad uno:

$$K_W = \frac{k_c k_p}{K_d \cdot s^{v_c} + k_c k_p} \Big|_{K_d=1} \leq 1$$

$$H(s) = \frac{1}{K_d} = \frac{1}{k_P} = 0.1$$

Il regolatore presenterà invece la solita struttura:

$$C(s) = \frac{k_C}{s^{v_C}} \cdot C'(s), \quad C'(0) = 1$$

dove v_C e k_C verranno scelti in base alle specifiche statiche richieste, mentre $C'(s)$ in base alle specifiche dinamiche e/o per stabilizzare il sistema a ciclo chiuso nel caso in cui risulti instabile.

Si noti che la richiesta non stringente sul guadagno a ciclo chiuso desiderato

$$K_W \in \left(1 \pm \frac{1}{100}\right) \cdot k_P$$

implicitamente ci fornisce un'informazione sulla precisione a regime richiesta, e quindi informazioni sulla scelta dei parametri v_C e k_C del regolatore. Infatti calcolando la f.d.t. ingresso-uscita del sistema si ottiene:

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)H(s)} = K_d \cdot \frac{K_C k_P \cdot C'(s)P'(s)}{K_d \cdot s^{v_C} + K_C k_P \cdot C'(s)P'(s)} \Big|_{K_d=k_P} \\ &= k_P \cdot \frac{k_C k_P \cdot C'(s)P'(s)}{k_P \cdot s^{v_C} + k_C k_P \cdot C'(s)P'(s)} \end{aligned}$$

dopodiché applicando il Teorema del Valore Finale ricaviamo l'espressione a regime del guadagno a ciclo chiuso della $W(s)$

$$K_W = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot W(s) \cdot R(s) \Big|_{R(s)=\frac{1}{s}} = k_P \cdot \frac{k_C k_P}{k_P \cdot s^{v_C} + k_C k_P} = \frac{k_C k_P}{s^{v_C} + k_C}$$

da tale relazione è immediato ricavare il seguente vincolo:

$$0.99 \cdot k_P \leq \frac{k_C k_P}{s^{v_C} + k_C} \leq 1.01 \cdot k_P \rightarrow 0.99 \leq \frac{k_C}{s^{v_C} + k_C} \leq 1.01$$

Ricordando che l'inserimento di un polo nell'origine comporta una riduzione della fase della f.d.t. a ciclo aperto di 90deg, con possibili problemi di instabilità e poiché non viene richiesta né una specifica sul TIPO di sistema da realizzare (es. Tipo 0, 1, 2), ne viene menzionata la necessità di rendere il sistema astatico rispetto ad eventuali disturbi, automaticamente potremo scegliere $v_C = 0$ e trovare il valore di k_C adatto al soddisfacimento della specifica come segue:

$$9.9 \leq k_P \cdot \frac{k_C k_P}{k_P + k_C k_P} = 10 \cdot \frac{k_C}{1 + k_C} \leq 10.1 \rightarrow \begin{cases} v_C = 0 \\ k_C \geq 99 \rightarrow k_C = 100 \end{cases} \rightarrow C_1(s) = 100 \cdot C'_1(s)$$

E' comunque lecito decidere di inserire un polo nell'origine nel regolatore ($v_C = 1$):

$$\begin{cases} v_C = 1 \\ \forall k_C > 0 \end{cases} \rightarrow C_2(s) = \frac{k_C \cdot C'_2(s)}{s} \Big|_{k_C > 0}$$

In quest'ultimo caso avremo che il guadagno a ciclo chiuso sarà esattamente 10 a prescindere dal valore di k_C . Ad ogni modo sebbene questa scelta semplifichi la trattazione in termini di soddisfacimento delle specifiche statiche, essa potrà comportare oltre che una riduzione dei margini di stabilità, una drastica

riduzione della prontezza del sistema in termini di Banda Passante a ciclo chiuso in quanto nel regolatore sarà presente un polo a frequenza zero.

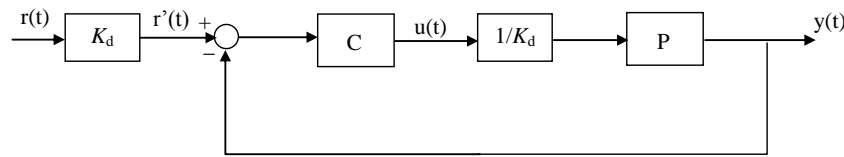


Figura 5. Manipolazione schema a blocchi a retroazione non unitaria.

A questo punto non ci rimane che verificare se i due possibili regolatori $C_1(s)$ e $C_2(s)$ diano luogo ad un sistema stabile a ciclo chiuso. A tal fine andremo a valutare rispettivamente i margini di fase e guadagno nei due casi considerati.

Per semplificare l'analisi, come mostrato in Figura 5, riportiamo lo schema di controllo come se fosse a retroazione unitaria, utilizzando le regole dell'algebra degli schemi a blocchi.

Da notare che la presenza di una **retroazione non unitaria statica** non implica alcuna particolare considerazione riguardo la banda passante a ciclo chiuso del sistema in quanto questa non è influenzata dal blocco statico a monte del sistema con retroazione unitaria di Figura 5.

$$B_3 \equiv B_3 \left\{ W(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} \right\} = B_3 \left\{ W'(s) = \frac{Y(s)}{R'(s)} \right\}$$

Iniziamo con il valutare la funzione di trasferimento a ciclo aperto nel caso in cui si consideri $C_1(s)$ come regolatore:

$$F_1(s) = C(s)P(s)H(s) = C'_1(s) \cdot \frac{k_C}{K_d} \cdot P(s) = 10 \cdot C'_1(s) \cdot P(s)$$

In assenza del controllore dinamico, la risposta armonica della $F_1(s)$ si ottiene da quella del processo $P(s)$ per semplice traslazione della risposta armonica del processo di 20dB verso l'alto, o equivalentemente attraverso una traslazione rigida di -20dB dell'asse delle ascisse del diagramma dei moduli verso il basso. La risposta armonica risultante è mostrata in Figura 6. In base alle seguenti definizioni

$$\mathbf{m}_g|_{dB} = 20 \cdot \log_{10}(1) - 20 \cdot \log_{10} |F(j\omega_c)| = -20 \cdot \log_{10} |F(j\omega_c)|, \omega_c: \angle F(j\omega_c) = -180 \text{ deg}$$

$$\mathbf{m}_\phi|_{deg} = \angle F(j\omega_t) - (-180 \text{ deg}) = \angle F(j\omega_t) + 180 \text{ deg}, \omega_t: |F(j\omega_t)| = 1 \equiv |F(j\omega_t)|_{dB} = 0$$

ricaviamo i valori dei margini di guadagno e fase

$$\mathbf{m}_g|_{dB} = -14 \text{ dB} \quad @ \quad \omega_c = 355 \text{ rad/sec}$$

$$\mathbf{m}_\phi|_{deg} = -33.7 \text{ deg} \quad @ \quad \omega_t = 715 \text{ rad/sec}$$

Poiché il sistema con il controllore $C_1(s)$ che soddisfa la sola specifica statica è instabile, occorrerà progettare una azione correttiva $C'_1(s)$ che stabilizzi il sistema.

Non dovendo soddisfare specifiche particolari sulla banda passante o lo smorzamento a ciclo chiuso, non si hanno vincoli su come scegliere la pulsazione di attraversamento desiderata ω_{td} . Per stabilizzare il sistema sarà quindi possibile una delle seguenti reti di correzione:

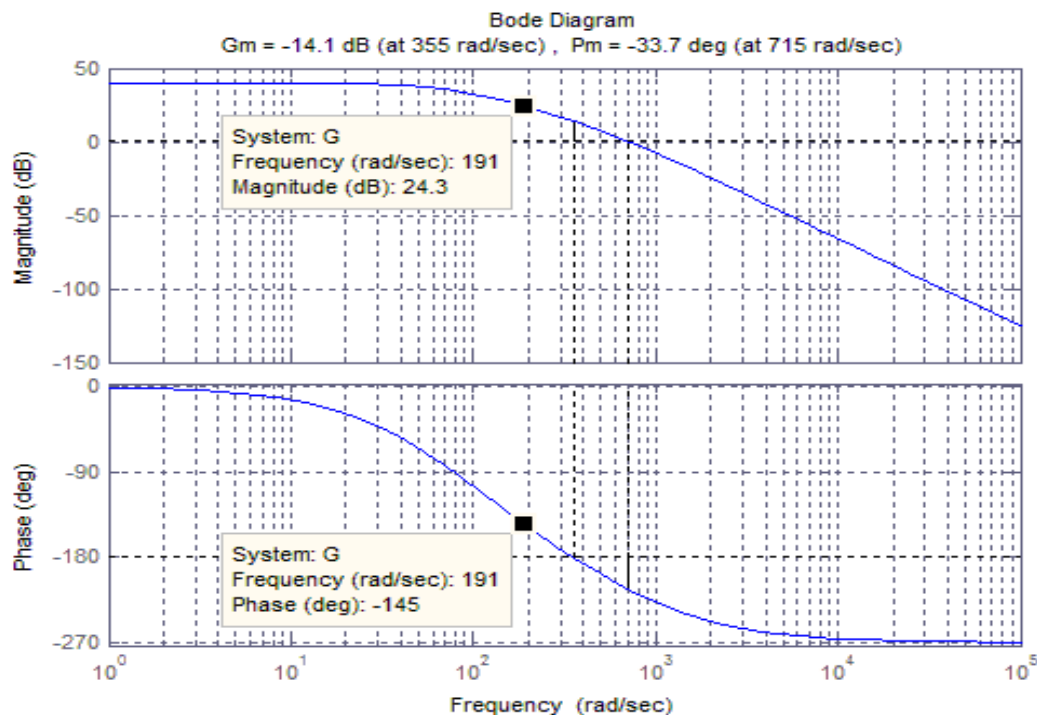


Figura 6. Risposta armonica della f.d.t. $F_1(j\omega) = k_c \cdot P(j\omega)/K_d$.

- *Azione Attenuatrice o polo-zero (Lag-Lead)*, capace di attenuare il modulo a ciclo aperto in una certa banda di frequenze. Essa ha un effetto stabilizzante se inserita nella zona delle basse frequenze, rispetto alla pulsazione di attraversamento.

$$C_{att}(s) = \frac{\left(1 + \frac{\tau_i}{m_i} \cdot s\right)}{\left(1 + \tau_i \cdot s\right)}, \quad m_i > 1$$

- *Azione Anticipatrice o zero-polo (Lead-Leg)*, capace di inserire un anticipo di fase a ciclo aperto in un certo campo di frequenze. Tale azione risulta stabilizzante se esercitata nella banda di frequenze che interessa l'attraversamento dell'asse delle ascisse del diagramma di Bode dei moduli.

$$C_{ant}(s) = \frac{\left(1 + \tau_a \cdot s\right)}{\left(1 + \frac{\tau_a}{m_a} \cdot s\right)}, \quad m_a > 1$$

Risulta importante rimarcare che l'utilizzo di una Azione Attenuatrice tende ad aumentare le proprietà filtranti del sistema, e quindi ridurne la prontezza in termini di Banda Passante dato che la pulsazione di attraversamento ω_t tende a spostarsi in bassa frequenza ($B_3 \propto \omega_t$), mentre una azione anticipatrice la aumenta.

Questa affermazione non vuole far intendere che sia preferibile scegliere un azione Anticipatrice piuttosto che una Attenuatrice, infatti tale scelta sarà sempre legata alle specifiche sulla Banda Passante e sullo smorzamento richieste. Ad ogni modo se non esplicitamente richiesto garantire una maggiore prontezza del sistema a ciclo chiuso può essere considerato un vantaggio.

Di seguito presentiamo la sintesi del blocco $C'_1(s)$ al fine di stabilizzare il sistema, utilizzando entrambe le reti di correzione.

1. Progetto Azione Attenuatrice:

Al fine di stabilizzare il sistema mediante una azione Attenuatrice dovremo innanzitutto decidere che valori per i margini voler ottenere e di conseguenza scegliere dalla carta dei diagrammi universali una coppia (u_i, m_i) che ci permetta di soddisfare la specifica. Supponiamo di voler garantire le seguenti specifiche:

$$m_\varphi \geq 25\text{deg} \quad , \quad \forall m_g > 0$$

In questo caso dovremo modificare il minimo possibile la fase del diagramma originario e contemporaneamente ridurre i moduli in modo da posizionare la ω_t ad una frequenza che permetta di avere il margine di fase desiderato.

Sulla base di questa considerazione, lavoreremo sulla porzione destra dei Diagrammi Universali evidenziata in Figura 7, ovvero nella regione dove sono introdotti gli sfasamenti minori. In particolare notiamo che per $u_i \geq 100$ gli sfasamenti introdotti dalla rete sono dell'ordine di $\Delta\varphi = -10\text{deg}$.

Come mostrato nel diagramma delle fasi in Figura 6 la frequenza che ci permetterebbe di garantire il seguente vincolo:

$$\bar{\omega} : m_\varphi \approx 25\text{deg} = \angle F_1(j\bar{\omega}) + \Delta\varphi + 180$$

risulta $\omega_{td} = 191\text{rad/sec}$ per la quale abbiamo:

$$\bar{\omega} = 191\text{rad/sec} : \begin{cases} \angle F_1(j\bar{\omega}) = -145\text{deg} \\ |F(j\bar{\omega})| = 24.3\text{dB} \end{cases}$$

La nostra rete di correzione dovrà quindi essere tale da attenuare i moduli di circa 24dB. Una possibile coppia di valori per la rete sono

$$\begin{matrix} u_i = 101 \\ m_i = 20 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} \Delta M \approx 26\text{dB} \\ \Delta\varphi \approx -5\text{deg} \end{cases}$$

Da cui, ricordando che

$$u_i = \bar{\omega} \cdot \tau_i \rightarrow \tau_i = \frac{u_i}{\bar{\omega}} = 0.5236$$

si ottiene la seguente rete di correzione:

$$C_{att}(u) = \frac{(1 + j \cdot \frac{u_i}{m_i})}{(1 + j \cdot u_i)} \rightarrow C'_{1att}(s) = C_{att}(s) = \frac{(1 + \frac{0.5236}{20} \cdot s)}{(1 + 0.5236 \cdot s)}$$

In Figura 8 è riportato il diagramma di risposta armonica della f.d.t. a ciclo aperto finale. Come possiamo notare entrambe le specifiche risultano soddisfatte.

2. Progetto Azione Anticipatrice

Supponiamo di voler ancora garantire le seguenti specifiche:

$$m_\varphi \geq 25\text{deg} \quad , \quad \forall m_g > 0$$

Come detto precedentemente la Rete Anticipatrice deve essere progettata in modo da lavorare in un intorno della pulsazione di attraversamento della f.d.t. a ciclo aperto. Dal Diagramma di Bode in Figura 6 ricaviamo che a tale frequenza modulo e fase della f.d.t. in analisi valgono:

$$\bar{\omega} = \omega_t = 715\text{rad/sec} : \begin{cases} \angle F_1(j\bar{\omega}) = -214\text{deg} \\ |F(j\bar{\omega})| = 0\text{dB} \end{cases}$$

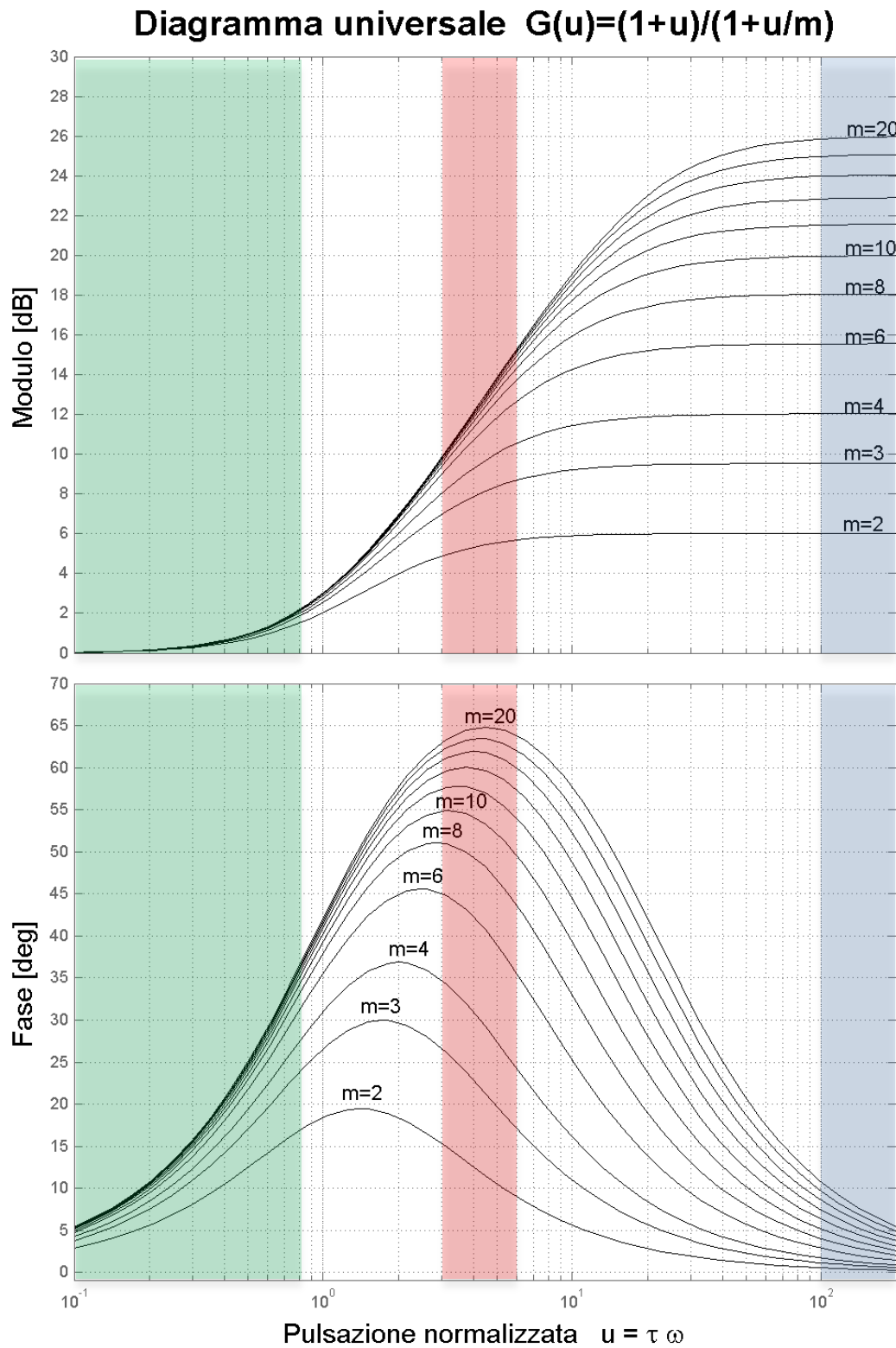


Figura 7. Digramma Universali per la Sintesi per Tentativi in ω .

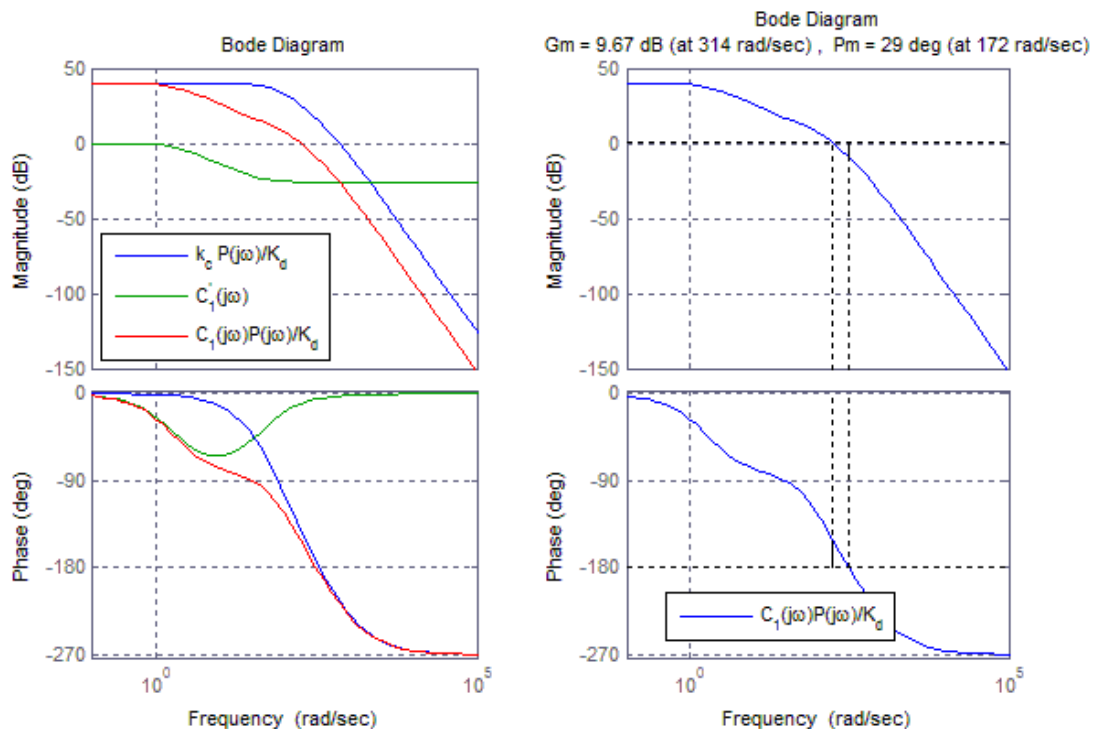


Figura 8. Diagrammi di Risposta Armonica relativi alla sintesi delle Rete Attenuatrice $C'_1(j\omega)$.

Per cui, al fine di stabilizzare il sistema dovremo cercare di modificare il meno possibile i moduli del diagramma originario e contemporaneamente inserire un anticipo di fase tale da garantire il margine di fase desiderato per $\omega = \bar{\omega}$.

In questo caso sarebbe richiesto un anticipo di fase $\Delta\varphi$ pari a:

$$\mathbf{m}_\varphi \approx 25\text{deg} = \angle F_1(j\omega_{td}) + \Delta\varphi + 180 \rightarrow 25 = -214 + \Delta\varphi + 180 \rightarrow \Delta\varphi \approx 59\text{deg}$$

Dalle curve dei Diagrammi Universali in Figura 7 vediamo che per introdurre un anticipo di fase così consistente sarebbe necessario utilizzare un $m_a > 10$ ed un $3 \leq u_a \leq 6$.

In questa zona però (evidenziata in rosso in Figura 7) la rete introdurrebbe delle amplificazioni sui diagrammi dei moduli non trascurabili (dai 9 ai 15dB) che comporterebbero la vanificazione della nostra sintesi in quanto la pulsazione di attraversamento si sposterebbe rispetto alla ω_{td} verso destra, mentre il valore di \mathbf{m}_φ alla nuova pulsazione di attraversamento risulterebbe non di facile valutazione.

Per cui al fine di soddisfare le nostre specifiche andremo a lavorare sulla porzione sinistra dei Diagrammi Universali (in verde in Figura 7) che permette di introdurre buoni anticipi di fase modificando di poco i moduli.

Da notare che, essendo necessario una correzione di circa +60deg saremo costretti ad utilizzare una doppia rete di correzione.

Essendo arbitraria la scelta della struttura della rete, possiamo decidere di progettare due reti identiche in cascata tali da compensare metà del contributo di fase necessario per la stabilizzazione ciascuna e contemporaneamente modificando il minimo possibile i moduli.

In tale regione (evidenziata in verde in Figura 7), gli incrementi sui moduli risultano dell'ordine di +2dB, per cui al fine di raffinare la nostra sintesi andremo scegliere come nuova pulsazione di attraversamento desiderata quella tale per cui:

$$\bar{\omega} = \omega_{td} : |F_1(j\bar{\omega})| = -4\text{dB} \rightarrow \bar{\omega} = 854\text{rad/sec}$$

Poiché la fase a tale pulsazione angolare risulta $\angle F_1(j\bar{\omega}) = -221\text{rad}$, possiamo ricavare il valore di anticipo di fase che ciascuna rete dovrà inserire come segue:

$$\mathbf{m}_\phi \approx 25\text{deg} = \angle F_1(j\bar{\omega}) + 2 \cdot \Delta\phi + 180 \rightarrow 25 = -221 + 2 \cdot \Delta\phi + 180 \rightarrow \Delta\phi \approx 33\text{deg}$$

Una coppia di valori che soddisfano il nostro vincolo sono ad esempio

$$\begin{matrix} u_a = 0.8 \\ m_a = 10 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} \Delta M \approx 2\text{dB} \\ \Delta\phi \approx 35\text{deg} \end{cases} \rightarrow \mathbf{m}_\phi \approx -221 + 2 \cdot 35 + 180 = 29\text{deg}$$

Da cui, ricordando che

$$u_a = \bar{\omega} \cdot \tau_a \rightarrow \tau_a = \frac{u_a}{\bar{\omega}} = 9.398 \cdot 10^{-4}$$

Si ottiene la seguente rete di correzione:

$$C_{ant}(u) = \frac{(1 + j \cdot u_a)}{(1 + j \cdot \frac{u_a}{m_a})} \rightarrow C'_{1ant}(s) = C_{ant}(s)^2 = \frac{(1 + 9.398 \cdot 10^{-4} \cdot s)^2}{(1 + \frac{9.398 \cdot 10^{-4}}{10} \cdot s)^2}$$

In Figura 8 è riportato il diagramma di risposta armonica della f.d.t. a ciclo aperto finale. Come possiamo notare anche in questo caso il valore per il margine di fase ottenuto soddisfa le specifiche e risulta molto prossimo a quello di progetto che era di 29 gradi.

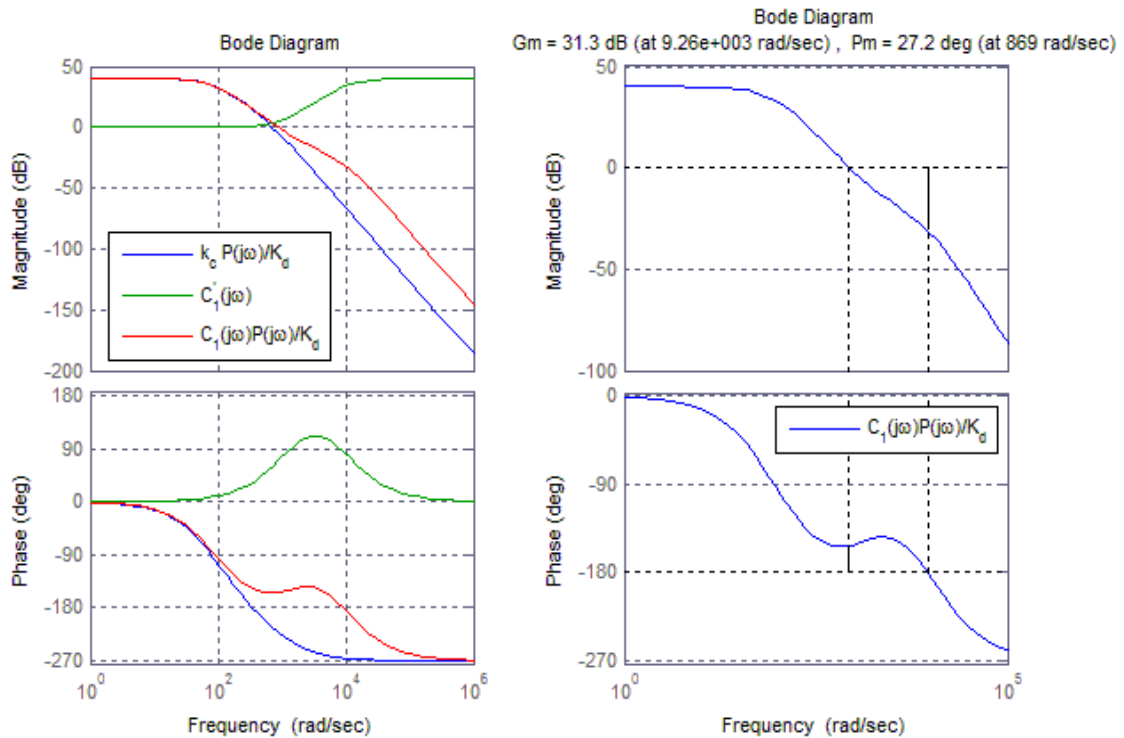


Figura 9. Diagrammi di Risposta Armonica relativi alla sintesi delle Rete Anticipatrice $C'_1(j\omega)$.

Per concludere di seguito riportiamo la sintesi del regolatore nel caso si fosse scelta una azione integrale per il soddisfacimento delle specifiche a regime:

$$\begin{cases} v_C = 1 \\ \forall k_C > 0 \end{cases} \rightarrow C_2(s) = \frac{k_C \cdot C'_2(s)}{s} \Big|_{k_C > 0}$$

Come possiamo vedere dal diagramma di bode in Figura 10, in questo caso il sistema risulta già stabile a ciclo chiuso. Ad ogni modo supponendo ancora una volta di voler garantire a ciclo la specifica:

$$m_\varphi \geq 25\text{deg} \quad , \quad \forall m_g > 0$$

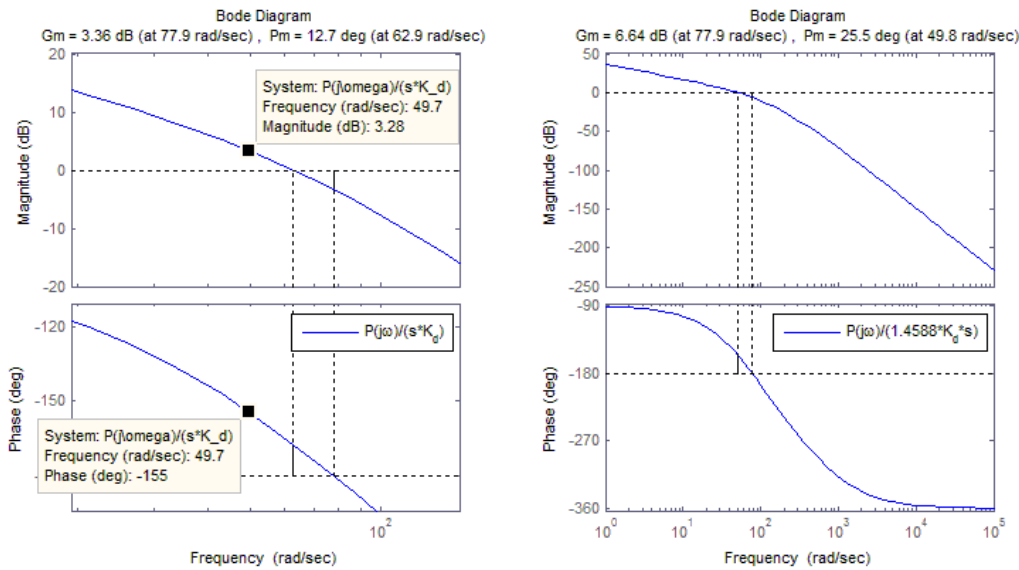


Figura 10. Diagrammi di Risposta Armonica relativi alla sintesi mediante l'azione integrale.

Al fine di soddisfare la specifica desiderata introdurremo semplicemente una correzione statica, dato che non abbiamo alcun vincolo sul k_C . In particolare dovremo portare la pulsazione di attraversamento della f.d.t.:

$$F_2(s) = \frac{P(s)}{K_d \cdot s}$$

ad un valore

$$\bar{\omega} : \angle F_2(j\bar{\omega}) = -155$$

Dal diagramma a destra di Figura 10 risulta che la pulsazione di attraversamento desiderata sarà a $\omega_{td} = 49.7\text{rad/sec}$ alla quale abbiamo:

$$\bar{\omega} = \omega_{td} = 49.7\text{rad/sec} : \begin{cases} \angle F_1(j\bar{\omega}) = -155\text{deg} \\ |F(j\bar{\omega})| = 3.28\text{dB} \end{cases}$$

Per cui il regolatore dovrà compensare un guadagno di $10^{\frac{3.28}{20}} = 1.4588$. Il regolatore integrale che soddisfa le specifiche richieste sarà:

$$C_2(s) = \frac{k_C}{s} = \frac{1}{1.4588 \cdot s}$$

In Figura 10, sulla destra il diagramma di bode della f.d.t. a ciclo aperto risultante conferma quanto affermato.

Da notare che, in entrambe le sintesi nel caso in cui si volessero incrementare ulteriormente le prestazioni occorrerà inserire ulteriori azioni correttive.

Per concludere in Figura 11 sono riportati i Diagrammi di risposta armonica delle f.d.t. a ciclo aperto nei tre casi considerati:

- Correzione Attenuatrice
- Correzione Anticipatrice
- Correzione Integrale

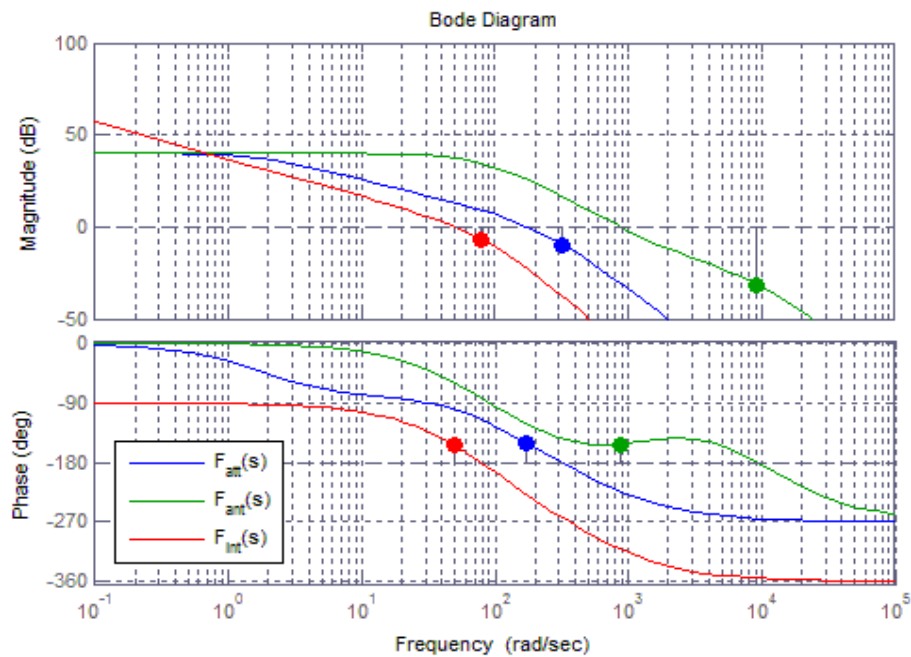


Figura 11. Diagrammi di Risposta Armonica relativi alle tre possibili scelte di controllo.

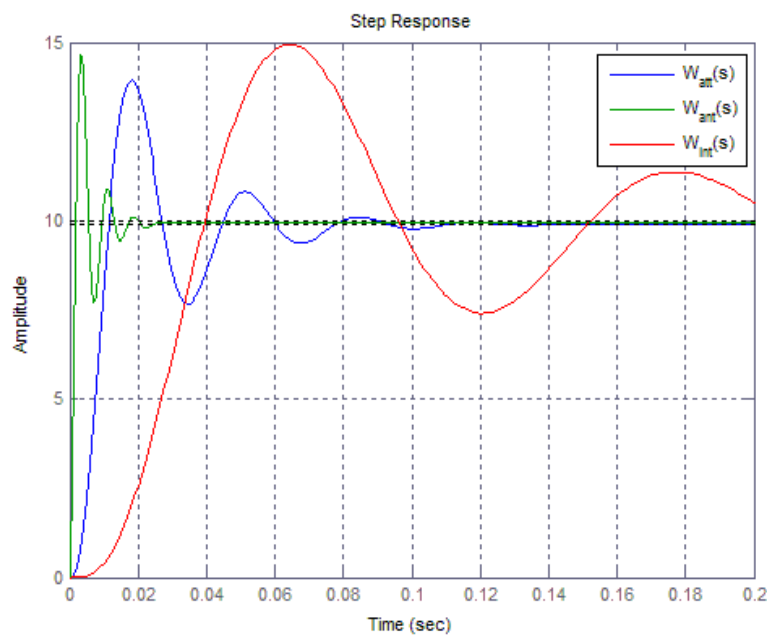


Figura 12. Risposta Indiaciale delle f.d.t. a ciclo chiuso risultanti dalle tre possibili scelte di controllo.

A conferma di quanto precedentemente annunciato riguardo la riduzione della banda passante del sistema a ciclo chiuso ($B_3 \propto \omega_T$), si può facilmente notare che il regolatore $C_2(s)$ e $C_{1att}(s)$ presentano una pulsazione di attraversamento decisamente più a sinistra di quella relativa all'azione anticipatrice. Per contro la complessità del regolatore $C_{1ant}(s)$ è decisamente maggiore rispetto agli altri due. In Figura 12 è riportato l'andamento della risposta indiciale delle f.d.t. a ciclo a chiuso risultanti nei tre casi considerati.

Come possiamo notare i valori di sovraelongazione percentuale sono pressoché uguali in tutti i casi essendo questa grandezza direttamente legata al margine di fase dalle seguenti relazioni:

$$S_{\%} = 100 \cdot e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} , \quad \zeta \approx \frac{m_{\phi}^{\text{rad}}}{100}$$

Essendo invece i tempi di risposta del sistema legati alla B_3 della f.d.t. a ciclo chiuso e quindi alla pulsazione di attraversamento ω_t della f.d.t. a ciclo aperto, non deve assolutamente stupirci il fatto che il sistema controllato attraverso l'azione anticipatrice risulti decisamente più pronto rispetto alle sue controparti attenuatrici.

Si noti infatti che l'azione integrale pura altro non è che un caso limite di una rete attenuatrice in cui lo zero si trova in altissima frequenza ($s \rightarrow -\infty$) mentre il polo in $s = 0$.

Per completezza di seguito è riportato il codice MatLab relativo all'esercitazione appena discussa. Copiare ed incollare il seguente codice in un MatLab m-file per eseguire in blocco tutte le istruzioni

```
%% Esercitazione 7 Controlli Automatici
clc, clear all, close all
% Tabella risultati risposta armonica
dt=[1e-3 1e-3 1e-5 1e-5 1e-5 1e-5]';
Tfinal=[5 1.5 0.7 0.4 0.25 0.235]';

fe=[2 10 25 50 100 500]';
UM=[1 1 1 5 5 10]';
YM=[9.755 6.291 2.250 3.254 0.690 0.017]';
dT=[-25.3 -21.5 -14.8 -9.6 -5.8 -1.4]'*1e-3;

MdB=20*log10(YM./UM)
omgae=2*pi*fe
dPhi=(180/pi)*omgae.*dT

% Stima delle costanti di tempo del processo
wp1=2*pi*10; wp2=2*pi*20; wp3=2*pi*100
% F.d.t. P(s)
P=tf(10,conv([1/wp1 1],conv([1/wp2 1],[1/wp3 1])) )

% Blocco di retroazione
Kd=10; H=tf(1,Kd);

kc=100; G=kc*P*H

figure(1)
margin(G)

%% Progetto Correzione Attenuatrice
wdes=191; ui=100; mi=20;
taui=ui/wdes;

Catt=tf([taui/mi 1],[taui 1])
Flatt=Catt*G;
figure(2)
subplot(121)
bode(G,Catt,Flatt), grid
```

```

        legend('k_c
P(j\omega)/K_d', 'C_1^{''}(j\omega)', 'C_1(j\omega)P(j\omega)/K_d')
subplot(122)
        margin(Flatt), grid
        legend('C_1(j\omega)P(j\omega)/K_d')

%% Progetto Correzione Anticipatrice

wdes=854; ui=0.8; mi=10;
taui=ui/wdes;
Cant=tf([taui 1],[taui/mi 1])
Flant=Cant*Cant*G;

figure(3)
subplot(121)
        bode(G,Cant*Cant,Flant), grid
        legend('k_cP(j\omega)/K_d', 'C_1^{''}(j\omega)', ...
                'C_1(j\omega)P(j\omega)/K_d')
subplot(122)
        margin(Flant), grid
        legend('C_1(j\omega)P(j\omega)/K_d')

%% Progetto con regolatore integrale
I=tf(1,[1 0])
Flint=(1/10^(3.28/20))*I*G

figure(4)
subplot(121)
        margin(I*G)
        legend('P(j\omega)/(s*K_d)')
subplot(122)
        margin(Flint)
        legend('P(j\omega)/(1.4588*K_d*s)')

%% Analisi comportamento a ciclo chiuso
Watt=feedback(kc*Catt*P,H);
Want=feedback(kc*Cant*Cant*P,H);
Wint=feedback((1/10^(3.29/20))*kc*I*P,H)

figure(5)
        bode(Flatt,Flant,Flint), grid
        legend('F_{att}(s)', 'F_{ant}(s)', 'F_{int}(s)')
figure(6)
        step(Watt,Want,Wint), grid
        xlim([0 .2])
        legend('W_{att}(s)', 'W_{ant}(s)', 'W_{int}(s)')

```

Authors: Prof. Elio Usai¹, Ing. Alessandro Pilloni¹.

E. Usai and A. Pilloni are with the Department of Electrical and Electronic Engineering (DIEE), University of Cagliari, Cagliari 09123, Italy. E-mail addresses: {eusai,alessandro.pilloni}@diee.unica.it



This work is licensed under the Creative Commons Attribuzione 3.0 Italia License.
To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/it/>.