

# Chapter 1

## Integrazione 1: i grafici delle funzioni inverse

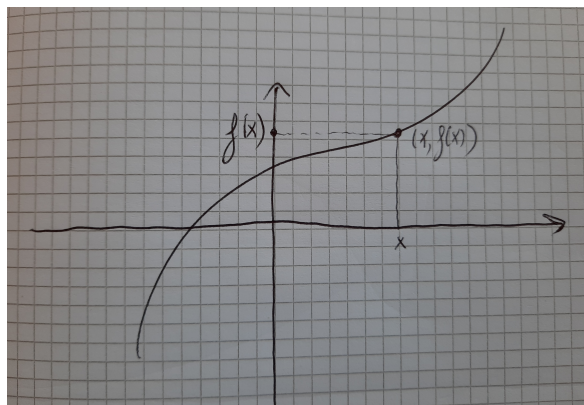
Ricordiamo che data una funzione  $f : X \rightarrow Y$  che sia iniettiva e suriettiva, la sua *funzione inversa*  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  è per definizione la funzione che soddisfa le due uguaglianze

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad f(f^{-1}(y)) = y \quad (1.1)$$

(la prima uguaglianza ci dice che la funzione  $f^{-1}$ , applicata dopo la  $f$ , ci fa "tornare indietro al valore di partenza  $x$ "; la seconda ci dice che vale lo stesso anche se applichiamo prima la  $f^{-1}$  e poi la  $f$ , quindi possiamo dire che  $f$  e  $f^{-1}$  sono una l'inversa dell'altra).

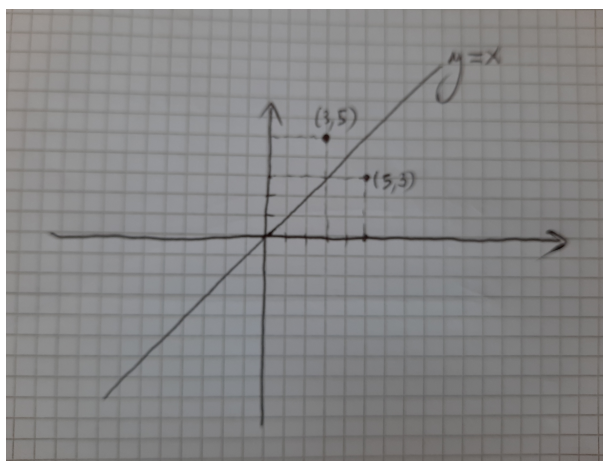
Ci poniamo ora la questione di disegnare il grafico di  $f^{-1}$  una volta noto il grafico di  $f$ .

A questo scopo, ricordiamo che per definizione il grafico di una funzione  $f : X \rightarrow Y$  si ottiene unendo i punti  $(x, f(x))$  di ascissa  $x$  (il valore di partenza) e ordinata  $f(x)$  (il valore di arrivo), al variare di  $x$  nel dominio  $X$  della funzione.



Ora, come suggerisce la prima delle (1.1), la funzione inversa ha come valore di partenza  $f(x)$  e come valore di arrivo  $x$ : di conseguenza, dal momento che nella definizione di grafico il valore di partenza va preso come ascissa e il valore di arrivo come ordinata, il grafico della funzione inversa  $f^{-1}$  sarà dato dai punti del tipo  $(f(x), x)$ , che quindi, rispetto ai punti del grafico della funzione  $f$ , hanno semplicemente ascissa e ordinata scambiate.

In generale, da un punto di vista geometrico, scambiare ascissa e ordinata di un punto corrisponde a prendere il simmetrico del punto rispetto alla retta  $y = x$  (ovvero la cosiddetta prima bisettrice, che divide a metà l'angolo di 90 gradi formato dall'asse  $x$  e l'asse  $y$ ). Non dimostriamo questa affermazione, ma ci limitiamo a illustrarla mediante il seguente disegno

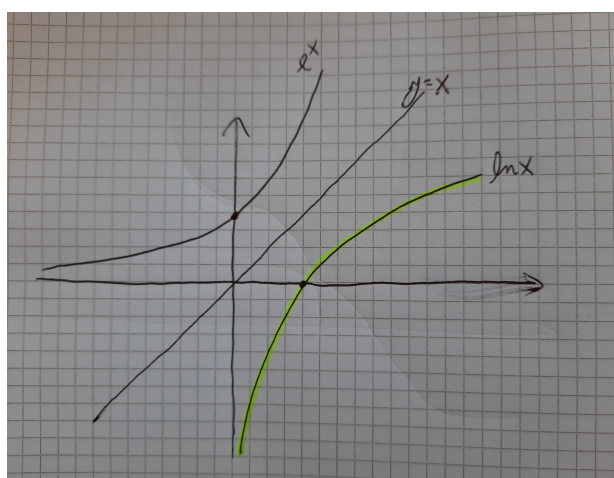


Concludiamo allora che

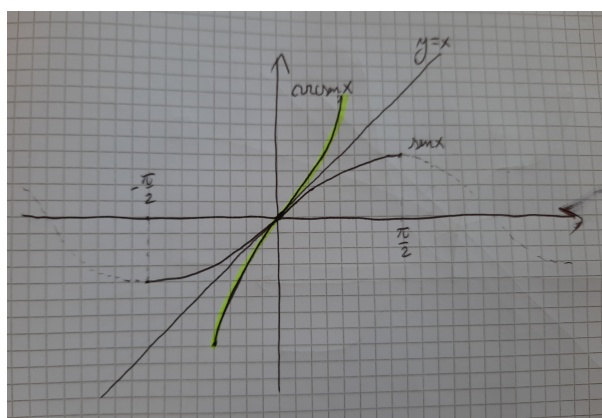
*il grafico della funzione inversa  $f^{-1}$  di una funzione data  $f$  si ottiene semplicemente disegnando il simmetrico (rispetto alla prima bisettrice) del grafico di  $f$*

Illustriamo questa affermazione con un disegno per ognuna delle funzioni inverse viste nel Capitolo 1.

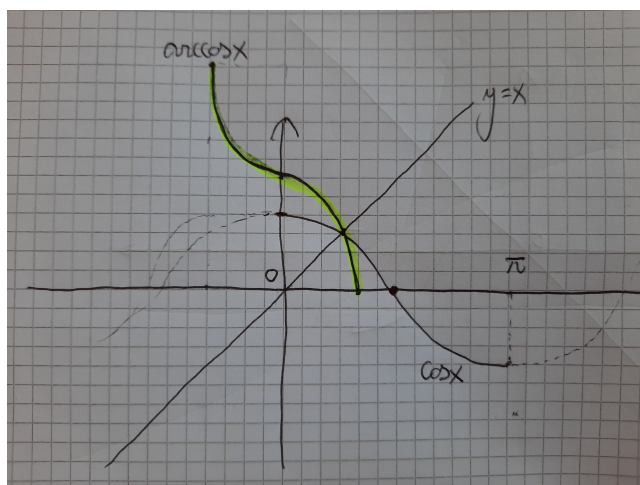
- (1) Come abbiamo visto nel Capitolo 1 a pagina 29, la funzione  $e^x$  è iniettiva e suriettiva (e quindi invertibile) se vista come funzione  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ : la sua inversa  $\ln x$  è quindi una funzione  $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  il cui grafico, come illustrato dal seguente disegno, è simmetrico del grafico di  $e^x$  rispetto alla prima bisettrice:



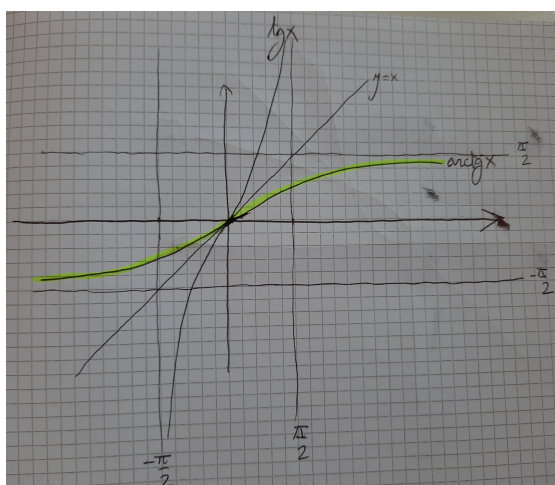
- (2) Come abbiamo visto nel Capitolo 1 a pagina 32, la funzione  $\sin x$  è iniettiva e suriettiva (e quindi invertibile) se vista come funzione  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ : la sua inversa  $\arcsin x$  è quindi una funzione  $[-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  il cui grafico, come illustrato dal seguente disegno, è simmetrico del grafico di  $\sin x$  (ristretto all'intervallo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ) rispetto alla prima bisettrice:



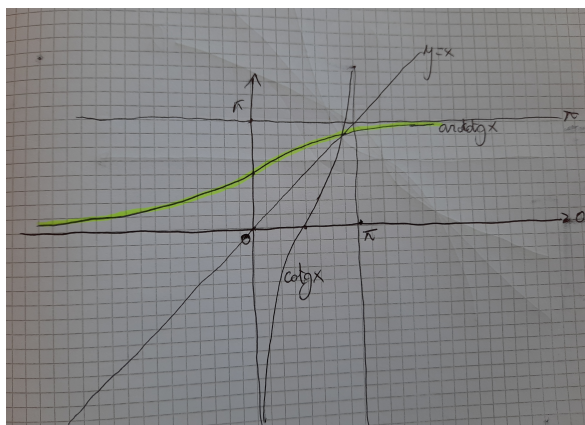
- (3) Come abbiamo visto nel Capitolo 1 a pagina 32, la funzione  $\cos x$  è iniettiva e suriettiva (e quindi invertibile) se vista come funzione  $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ : la sua inversa  $\arccos x$  è quindi una funzione  $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  il cui grafico, come illustrato dal seguente disegno, è simmetrico del grafico di  $\cos x$  (ristretto all'intervallo  $[0, \pi]$ ) rispetto alla prima bisettrice:



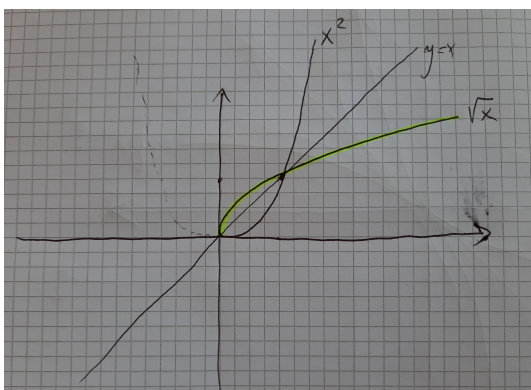
- (4) Come abbiamo visto nel Capitolo 1 a pagina 33, la funzione  $\operatorname{tg} x$  è iniettiva e suriettiva (e quindi invertibile) se vista come funzione  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ : la sua inversa  $\operatorname{arctg} x$  è quindi una funzione  $\mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  il cui grafico, come illustrato dal seguente disegno, è simmetrico del grafico di  $\operatorname{arctg} x$  rispetto alla prima bisettrice:



- (5) Come abbiamo visto nel Capitolo 1 a pagina 34, la funzione  $\cotgx$  è iniettiva e suriettiva (e quindi invertibile) se vista come funzione  $(0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ : la sua inversa  $\operatorname{arccot}gx$  è quindi una funzione  $\mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$  il cui grafico, come illustrato dal seguente disegno, è simmetrico del grafico di  $\cotgx$  rispetto alla prima bisettrice:



- (6) Come abbiamo visto nel Capitolo 1 a pagina 35, la funzione  $x^2$  è iniettiva e suriettiva (e quindi invertibile) se vista come funzione  $[0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ : la sua inversa  $\sqrt{x}$  è quindi una funzione  $[0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  il cui grafico, come illustrato dal seguente disegno, è simmetrico del grafico di  $x^2$  rispetto alla prima bisettrice:



- (7) Come abbiamo visto nel Capitolo 1 a pagina 35, la funzione  $x^3$  è iniettiva e suriettiva (e quindi invertibile) come funzione  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ : la sua inversa  $\sqrt[3]{x}$  è quindi una funzione  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  il cui grafico, come illustrato dal seguente disegno, è simmetrico del grafico di  $x^3$  rispetto alla prima bisettrice:

