

Chapter 1

Vettori e matrici

1.1 Le n -uple ordinate (motivazione)

In questo corso ci occupiamo solamente di funzioni di una sola variabile reale, che come sappiamo hanno comunque innumerevoli applicazioni pratiche (la variabile può rappresentare il tempo, una distanza, una temperatura etc.).

Tuttavia, per descrivere molti fenomeni concreti nelle scienze applicate è necessario ricorrere a funzioni di più variabili: ad esempio, se stiamo misurando la temperatura di un filamento metallico rettilineo al variare del tempo, ci serviranno una variabile x che rappresenti il punto sul filamento (modellizzato quindi come un segmento sulla retta reale) e una variabile t che rappresenti appunto il tempo, e la nostra temperatura, che non solo varia nel tempo ma sarà in generale diversa nei vari punti del filamento, sarà una funzione $f(x, t)$ di entrambe le variabili; oppure, pensiamo alla formula dell'indice di massa corporea (usato in medicina per stabilire se una persona è sottopeso, obesa, etc.) $I = \frac{p}{h^2}$, dove p rappresenta il peso della persona (in Kg) e h l'altezza (in centimetri). Si tratta chiaramente di nuovo di una funzione, che dati due valori di p e h ci dà il valore dell'indice, e quindi di una funzione $f(p, h)$ di due variabili indipendenti.

Ovviamente, le variabili coinvolte potrebbero essere anche tre, quattro, o in generale un numero arbitrario n , e in tal caso le si denota solitamente x_1, x_2, \dots, x_n , usando un indice che ci dice se la variabile è la prima, la seconda etc.

Ora, quando andiamo a sostituire alle variabili dei valori numerici per calcolare il valore corrispondente della funzione in quel punto, è chiaramente importante l'ordine in cui sostituiamo questi valori. Per capirci, nella funzione $f(p, h) = \frac{p}{h^2}$ che rappresenta l'indice di massa corporea, i valori numerici 100 e 50 ci danno ovviamente un risultato diverso a seconda che sostituiamo

$p = 100$, $h = 50$ oppure $p = 50$, $h = 100$. Da questa osservazione banale segue un fatto chiave: l'oggetto matematico giusto per raggruppare i dati da assegnare a questa funzione è la cosiddetta *coppia ordinata*, che tiene conto anche dell'ordine in cui sono disposti tali dati: nel nostro esempio, la coppia $(100, 50)$ o la coppia $(50, 100)$ rappresentano dei dati diversi, perché, riferendoci alla funzione $f(p, h) = \frac{p}{h^2}$, la prima coppia ci dice che devo sostituire $p = 100$ e $h = 50$, mentre la seconda coppia ci dice che devo sostituire $p = 50$ e $h = 100$. Questo discorso vale chiaramente per qualunque funzione di due variabili, nelle quali i dati di partenza sono quindi dati da una coppia ordinata di numeri reali (x_1, x_2) , e si estende analogamente alle funzioni di tre variabili, per le quali dovremo considerare le *terne ordinate* (x_1, x_2, x_3) (date da tre numeri reali disposti in un certo ordine preciso) e così via per le funzioni di un qualunque numero di variabili x_1, x_2, \dots, x_n , per le quali il dato da assegnare alla funzione è quindi una cosiddetta *n -upla ordinata* (x_1, x_2, \dots, x_n) .

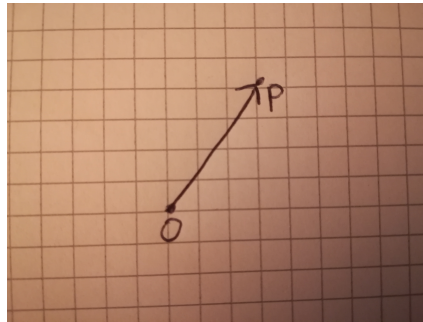
L'insieme di tutte le coppie ordinate (x_1, x_2) di numeri reali si denota \mathbb{R}^2 ; l'insieme di tutte le terne ordinate (x_1, x_2, x_3) di numeri reali si denota \mathbb{R}^3 , e così via: in generale, denoteremo \mathbb{R}^n l'insieme di tutte le possibili n -uple ordinate (x_1, x_2, \dots, x_n) di numeri reali.

1.2 Le n -uple ordinate come vettori

Abbiamo detto che il concetto di n -upla ordinata appare in modo naturale quando introduciamo le funzioni di più variabili. Tuttavia, in matematica tale concetto viene spesso introdotto anche parlando di *vettori*. Vediamo che legame c'è tra queste due nozioni e perché le n -uple ordinate possano essere considerate come vettori.

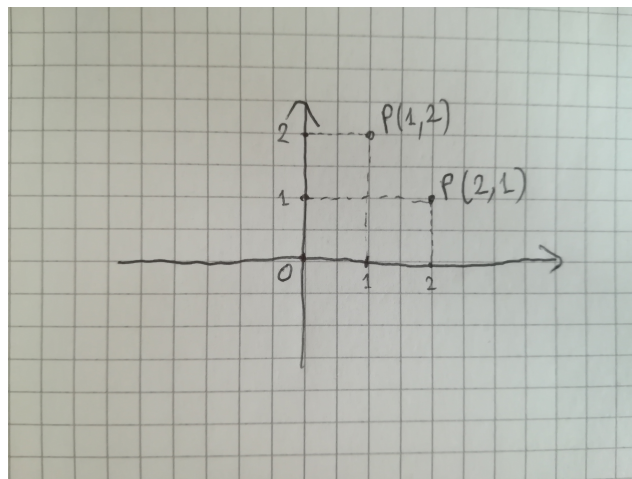
Nel suo significato più semplice e intuitivo, la parola vettore viene usata per indicare quelli che si chiamano i *vettori geometrici*.

Un vettore geometrico nel piano o nello spazio, applicato in un punto fissato O , non è nient'altro che un segmento orientato che va dal punto O a un altro punto P



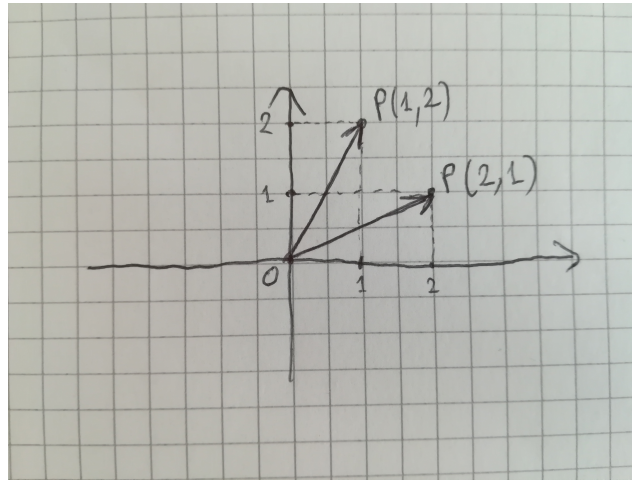
Tra i vari contesti in cui questi oggetti trovano applicazione, uno dei più importanti è forse la fisica, nella quale un vettore geometrico applicato in O viene usato per rappresentare una forza applicata nel punto O : infatti, una forza (che può essere di natura meccanica, gravitazionale, elettrica etc.) tende a "spostare" una massa o una carica presente in O nella direzione e nel verso rappresentati dal vettore, e con un'intensità che è rappresentata dalla lunghezza del vettore stesso.

Ora, per poter lavorare con i vettori geometrici evitando di dover fare ragionamenti e costruzioni di geometria euclidea, è meglio rappresentarli in coordinate: come sappiamo, la costruzione del piano cartesiano ci consente di identificare ogni punto P del piano tramite due coordinate x e y (ottenute proiettando il punto perpendicolarmente sui due assi)



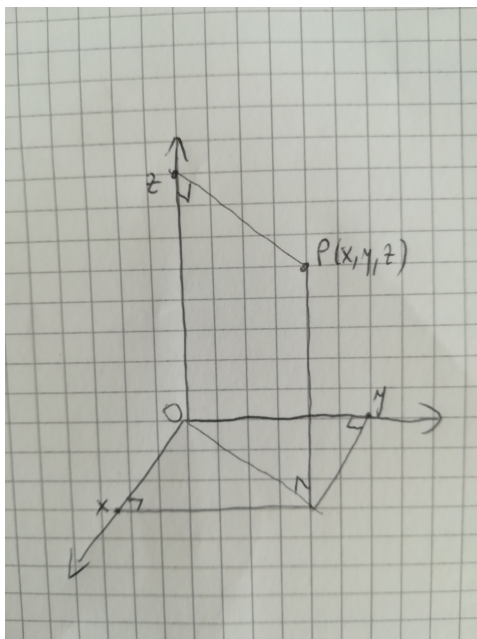
(si noti che chiaramente, l'ordine in cui diamo queste due coordinate è importante, quindi possiamo raccoglierle nella coppia (x, y) , ad esempio, ovviamente $(1, 2)$ e $(2, 1)$ rappresentano punti diversi).

Ora, equivalentemente, (x, y) , identificando il punto P , identifica anche il vettore geometrico \vec{OP} che va dall'origine O del sistema di assi cartesiani al punto P in questione.

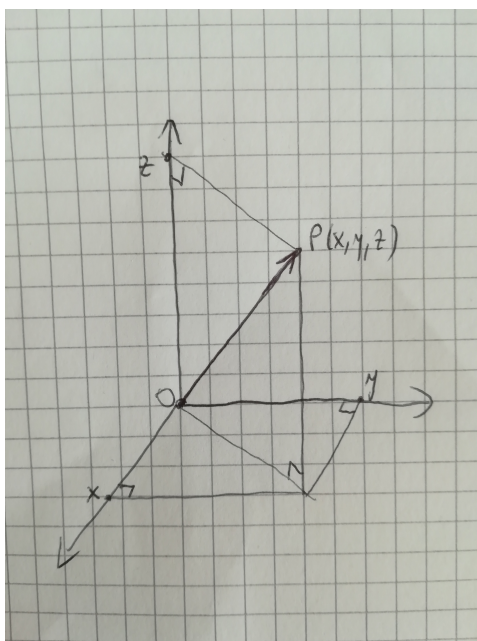


Quando lavoriamo in coordinate, quindi, un vettore geometrico può essere identificato con la coppia ordinata (x, y) delle sue coordinate, e viceversa ogni tale coppia ordinata rappresenterà un vettore (del piano): ecco che capiamo allora in che senso una coppia ordinata di numeri (x, y) possa essere pensata come un vettore.

Una costruzione analoga a quella del piano cartesiano può essere tranquillamente ripetuta nello spazio tridimensionale: fisseremo sempre un punto O come origine del sistema ma stavolta tratteremo tre rette orientate passanti per O e perpendicolari tra loro, dette asse x , asse y e asse z , e stavolta ogni punto dello spazio può essere identificato mediante una terna (x, y, z) di numeri reali, ciascuno determinato proiettando il punto perpendicolarmente sugli assi:



Come prima, (x, y, z) , identificando il punto P , identifica anche il segmento orientato \vec{OP} , che è di nuovo un cosiddetto *vettore geometrico*, stavolta libero di "muoversi" nello spazio tridimensionale (invece che essere limitato al piano bidimensionale come nel piano cartesiano).



Ecco allora perché anche una terna ordinata di numeri (x, y, z) può essere pensata come un vettore: in effetti, essa rappresenta (in coordinate) un

vettore geometrico dello spazio.

Questo ci suggerisce allora di generalizzare e chiamare vettore una qualunque n -upla (x_1, x_2, \dots, x_n) , anche se $n > 3$, nel qual caso perdiamo la possibilità di rappresentarla come un vettore geometrico ma, procedendo per analogia con i due esempi precedenti, possiamo immaginarla come un vettore in uno spazio di dimensione maggiore di 3 (che chiaramente non possiamo visualizzare)¹.

Per questo motivo l'insieme \mathbb{R}^n di tutte le n -uple ordinate di numeri reali viene anche detto uno *spazio vettoriale di dimensione n* .

1.3 Le principali operazioni tra n -uple ordinate

In questa sezione vedremo le operazioni fondamentali che possono essere eseguite tra n -uple ordinate.

Iniziamo con l'operazione di somma. Date due n -uple $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, si definisce la loro somma $x + x'$ nel modo seguente:

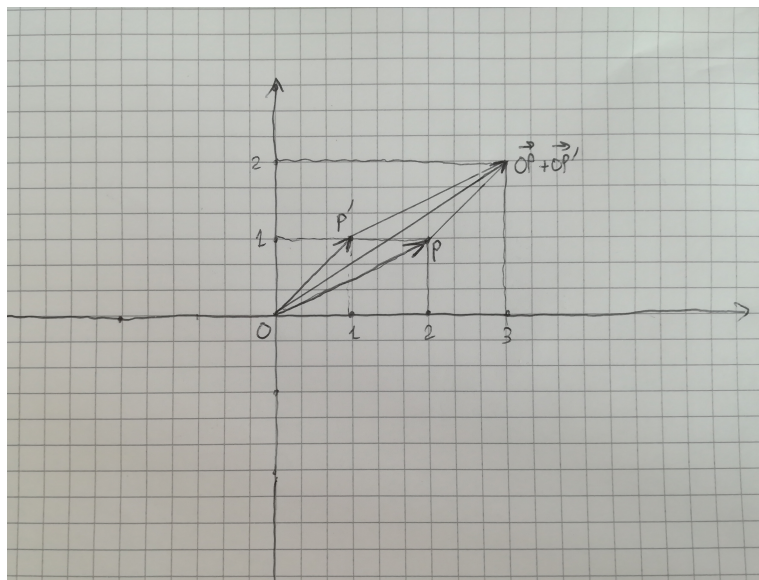
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \dots, x_n + x'_n) \quad (1.1)$$

ovvero sommando la prima componente con la prima, la seconda con la seconda, e così via. Ad esempio,

$$\begin{aligned}(1, 2) + (4, 3) &= (5, 5) \\ (-1, 2, 1) + (1, 5, 2) &= (0, 7, 3)\end{aligned}$$

Perché definire una somma tra n -uple e perché proprio in questo modo? Una giustificazione può essere data ricordando la corrispondenza che c'è nei casi $n = 2$ e $n = 3$ tra n -uple e vettori geometrici. Più precisamente, abbiamo detto che, fissato un sistema di riferimento cartesiano, ogni coppia ordinata può essere pensata come la coppia delle coordinate di un vettore \vec{OP} . Due coppie (x_1, x_2) e (x'_1, x'_2) rappresenteranno quindi due vettori \vec{OP} e \vec{OP}' . Ad esempio, nel disegno seguente rappresentiamo i vettori rappresentati dalle coppie $(x_1, x_2) = (2, 1)$ e $(x'_1, x'_2) = (1, 1)$. Ora, non è difficile dimostrare che, come illustrato nel disegno, la somma delle due coppie $(2, 1) + (1, 1) = (3, 3)$ dà esattamente le coordinate del vettore $\vec{OP} + \vec{OP}'$ somma di \vec{OP} e \vec{OP}' mediante la cosiddetta regola del parallelogramma

¹Segnaliamo per i più curiosi che in matematica esiste una definizione astratta e rigorosa del concetto di vettore, data mediante assiomi.



Quindi la somma (1.3) è stata definita in modo che, nei casi $n = 2$ e $n = 3$, sommando due coppie (o terne) corrispondenti a due vettori geometrici si ottenga la coppia (o terna) delle coordinate del vettore geometrico risultante mediante la regola del parallelogramma (che, lo ricordiamo, è il modo corretto in cui si devono sommare i vettori se, nel caso in cui i vettori rappresentino forze applicate in O , si vuole ottenere la forza risultante).

Veniamo ora a una seconda importante operazione che coinvolge le n -uple. Data una n -upla $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e un numero reale $c \in \mathbb{R}$, si può definire il prodotto $c \cdot x$ nel modo seguente:

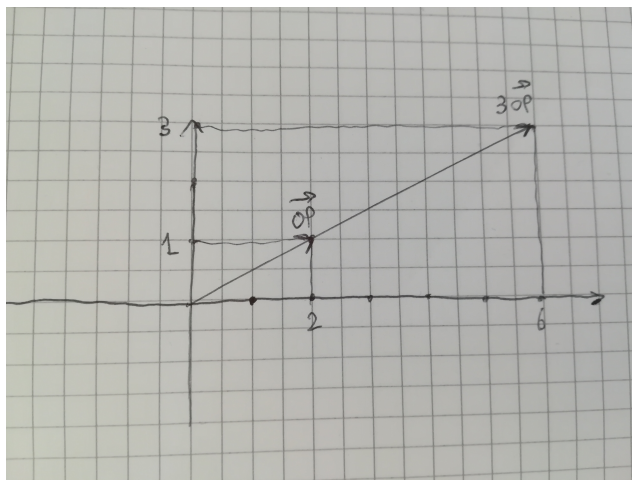
$$c(x_1, x_2, \dots, x_n) = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n) \quad (1.2)$$

ovvero moltiplicando tutte le componenti della n -upla per c . Ad esempio,

$$3(1, 2) = (3, 6)$$

$$\frac{1}{2}(-1, 2, 1) = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$$

Come già la definizione di somma, anche tale definizione ha una sua giustificazione geometrica, almeno nei casi $n = 2$ e $n = 3$. Infatti, come prima, fissato un sistema di riferimento cartesiano consideriamo un vettore geometrico \vec{OP} e la coppia delle sue coordinate (x_1, x_2) . Ad esempio, nel disegno seguente rappresentiamo il vettore rappresentato dalla coppia $(x_1, x_2) = (2, 1)$. Ora, non è difficile convincersi che, come illustrato nel disegno, il prodotto $3(2, 1) = (6, 3)$ dà esattamente le coordinate del vettore $3\vec{OP}$ che ha stesso verso e stessa direzione di \vec{OP} ma lunghezza tripla.



Veniamo ora al cosiddetto *prodotto scalare*. Date due n -uple $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, si definisce il loro prodotto scalare $x \cdot x'$ nel modo seguente:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = x_1x'_1 + x_2x'_2 + \dots + x_nx'_n \quad (1.3)$$

ovvero moltiplicando le componenti corrispondenti delle n -uple (la prima con la prima, la seconda con la seconda etc.) e poi sommando. Ad esempio

$$(2, 1) \cdot (3, 4) = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 6 + 4 = 10$$

$$(1, 0, 3) \cdot (2, 1, -1) = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 2 + 0 - 3 = -1$$

Analogamente a quanto visto sopra per le prime due operazioni, anche la definizione di prodotto scalare ha una notevole giustificazione geometrica nei casi $n = 2$ e $n = 3$.

Più precisamente, sia ad esempio $n = 3$ e supponiamo di avere un vettore geometrico \vec{OP} rappresentato dalla sua terna di coordinate (x_1, x_2, x_3) e un altro vettore \vec{OP}' rappresentato dalla sua coppia di coordinate (x'_1, x'_2, x'_3) . Si può dimostrare che l'angolo α formato dai due vettori è determinato dalla seguente formula:

$$\cos \alpha = \frac{x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}} \quad (1.4)$$

Come si vede, a numeratore del secondo membro c'è esattamente il prodotto scalare tra (x_1, x_2, x_3) e (x'_1, x'_2, x'_3) ; inoltre, le radici a denominatore $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ e $\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}$ si dimostrano essere esattamente le lunghezze dei vettori \vec{OP} e \vec{OP}' rispettivamente e le quantità sotto radice, cioè $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ e

$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$ non sono nient'altro che rispettivamente il prodotto scalare tra (x_1, x_2, x_3) e se stesso e il prodotto scalare tra (x_1', x_2', x_3') e se stesso.

Tutto questo dimostra che il prodotto scalare interviene fortemente quando si vogliono calcolare angoli o lunghezze tra vettori geometrici, il che giustifica l'importanza della sua definizione.

Osservazione 1.1. Si osservi che dalla formula (1.4) si deduce immediatamente che due vettori sono perpendicolari esattamente quando il loro prodotto scalare è zero: infatti, la perpendicolarità significa che l'angolo α che essi formano è uguale a $\pi/2$, quindi $\cos \alpha = 0$ e quindi è nulla l'espressione a secondo membro della (1.4). Ma questo accade esattamente quando è nullo il suo numeratore, ovvero $x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3' = 0$. Ad esempio, le terne $(1, 2, 3)$ e $(1, 1, -1)$ rappresentano (in coordinate) due vettori dello spazio perpendicolari tra loro, in quanto $(1, 2, 3) \cdot (1, 1, -1) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 1 + 2 - 3 = 0$.

Veniamo infine all'ultima operazione tra n -uple, quella del cosiddetto *prodotto vettoriale*. Si tratta in realtà di un'operazione definita solo tra terne e non tra n -uple in generale; inoltre, diversamente dal prodotto scalare, che moltiplica tra loro due n -uple e dà come risultato un numero, il prodotto vettoriale moltiplica tra loro due terne e dà come risultato una nuova terna.

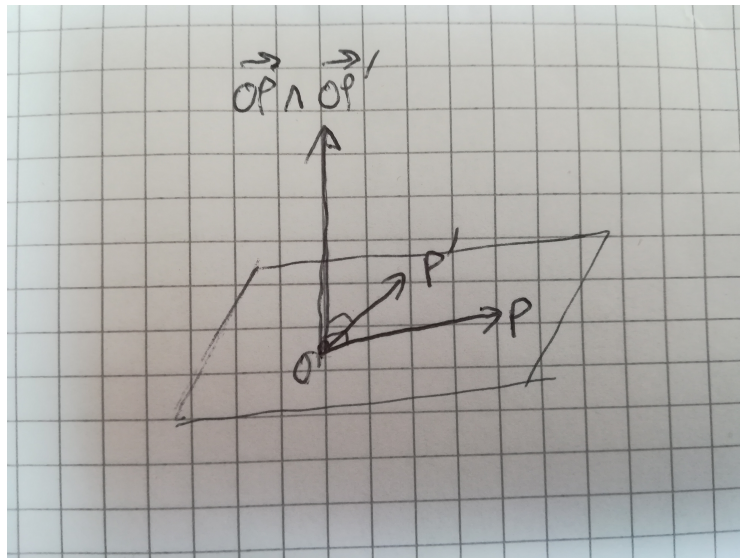
La definizione è la seguente: date due terne $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $x' = (x_1', x_2', x_3')$, si definisce il loro prodotto vettoriale $x \wedge x'$ nel modo seguente:

$$(x_1, x_2, x_3) \wedge (x_1', x_2', x_3') = (x_2x_3' - x_3x_2', x_3x_1' - x_1x_3', x_1x_2' - x_2x_1') \quad (1.5)$$

Ad esempio,

$$(1, 2, 3) \wedge (2, 1, 4) = (2 \cdot 4 - 3 \cdot 1, 3 \cdot 2 - 1 \cdot 4, 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2) = (5, 2, -3)$$

La definizione di prodotto vettoriale può apparire artificiosa e inutilmente complicata, ma in realtà essa (come tutte le definizioni matematiche) ha una motivazione pratica, che possiamo comprendere sempre reinterpretando le terne come vettori geometrici dello spazio ordinario: supponiamo che, in un riferimento cartesiano fissato, (x_1, x_2, x_3) sia la terna delle coordinate di un vettore \vec{OP} e (x_1', x_2', x_3') sia la terna delle coordinate di un vettore \vec{OP}' . Allora, si ha che la terna $(x_2x_3' - x_3x_2', x_3x_1' - x_1x_3', x_1x_2' - x_2x_1')$ data dalla definizione di prodotto vettoriale rappresenta un nuovo vettore perpendicolare sia a \vec{OP} che a \vec{OP}' .



Lo scopo della definizione di prodotto vettoriale è quindi quello di ottenere un vettore perpendicolare a due vettori dati, cosa fondamentale in molti contesti pratici: ad esempio, in fisica la forza \vec{F} che agisce su una particella carica che si muove in un campo magnetico è perpendicolare in ogni momento sia alla velocità della particella che al campo, e infatti essa si esprime come prodotto vettoriale $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ (dove q è la carica della particella, \vec{v} è il vettore che dà la direzione della particella e \vec{B} è il vettore che rappresenta il campo magnetico).

Osservazione 1.2. Il vettore rappresentato dal prodotto vettoriale $(x_2x'_3 - x_3x'_2, x_3x'_1 - x_1x'_3, x_1x'_2 - x_2x'_1)$ oltre ad avere direzione perpendicolare ai due vettori \vec{OP} e \vec{OP}' rappresentati dalle terne di partenza ha ovviamente anche una sua lunghezza, che da un calcolo si scopre essere uguale al prodotto delle lunghezze dei vettori \vec{OP} e \vec{OP}' per il seno dell'angolo α tra essi compreso, e un suo verso, dato dalla cosiddetta "regola della mano destra": tale verso è tale che i tre vettori \vec{OP} , \vec{OP}' e il prodotto vettoriale siano, nell'ordine, disposti come pollice, indice e medio della mano destra (con il medio sollevato in modo da essere perpendicolare alle altre due dita²)

1.4 Le matrici (motivazione)

Una matrice può essere definita come una tabella rettangolare di numeri disposti in righe e colonne: per capirci, sono ad esempio matrici le seguenti

²Si noti che il verso opposto è impossibile da ottenere con la mano destra in quanto dovremmo piegare completamente l'indice verso il dorso della mano, mentre lo è con la mano sinistra.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 7 & \frac{1}{2} & 1 \\ -8 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

La prima matrice ha due righe e quattro colonne; la seconda matrice ha quattro righe e tre colonne; l'ultima matrice ha due righe e due colonne. Matrici come la terza, che hanno lo stesso numero di righe e colonne, si dicono *matrici quadrate*.

I numeri che compaiono in una matrice si dicono le sue *entrate* e la loro posizione all'interno della matrice è ovviamente determinata una volta che si dice in quale riga e in quale colonna si trovano. Ad esempio, il numero 5 nella prima matrice si trova nella prima riga, quarta colonna: si dice allora che è l'elemento "di posto 1 4" e si scrive anche $a_{14} = 5$. In generale, l'entrata di una matrice data che sta nella riga i -esima e nella colonna j -esima si denota a_{ij} . Ad esempio, nella seconda matrice si ha $a_{31} = -8$, o nella terza matrice $a_{22} = \sqrt{2}$.

Le matrici si dimostrano di enorme importanza e utilità in numerosissimi contesti della matematica e delle sue applicazioni. Dal momento che abbiamo iniziato questi appunti parlando delle funzioni a più variabili, che ci hanno aiutato a motivare la definizione di n -upla, daremo ora giusto un'idea di come le matrici compaiano naturalmente nella teoria delle funzioni a più variabili.

Abbiamo visto che per la funzioni f a una variabile le derivate $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ etc. della funzione in un punto x_0 (e in particolare i loro segni) ci danno importanti informazioni sul comportamento della funzione in un intorno di x_0 .

Ora, una funzione a più variabili $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ si può derivare rispetto a ognuna delle variabili x_1, x_2, \dots, x_n separatamente, e per essa si hanno quindi "più derivate prime", ognuna rispetto a una variabile, che si indicano con i simboli $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ (derivata rispetto alla variabile x_1), $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ (derivata rispetto alla variabile x_2), \dots , $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ (derivata rispetto alla variabile x_n)³

Analogamente, ogni derivata seconda sarà fatta rispetto a due variabili: ad esempio possiamo fare due volte la derivata rispetto a x_1 , ottenendo $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}$, oppure potremmo fare prima la derivata rispetto a x_1 e poi rispetto a x_2 , ottenendo $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$, e così via: in generale, la generica derivata seconda $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ dipenderà da due indici i e j , a seconda delle due variabili rispetto a cui stiamo derivando la prima e la seconda volta.

Viene quindi spontaneo disporre le derivate seconde in una matrice che abbia come entrata a_{ij} proprio la derivata $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, ottenendo quindi la matrice

³Si tratta delle cosiddette le cosiddette *derivate parziali*.

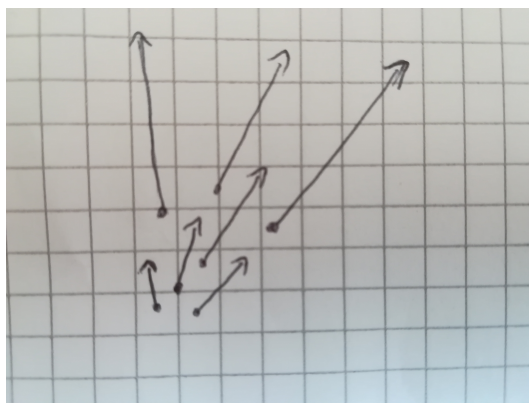
quadrata con n righe e n colonne seguente

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ & & \cdots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Tale matrice si chiama *matrice hessiana di f* e, come si vedrà nel corso di Matematica 3, è usando questa matrice che si deducono criteri analoghi a quelli visti per le funzioni di una sola variabile per capire ad esempio se un dato punto è di massimo o minimo.

Come altro esempio di caso notevole in cui nello studio delle funzioni di più variabili compare in modo naturale una matrice, supponiamo di avere una funzione di n variabili il cui insieme di arrivo però non sia \mathbb{R} ma \mathbb{R}^n , ovvero una funzione $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. In altre parole, la nostra funzione associa a ogni n -upla di numeri reali un'altra n -upla di numeri reali.

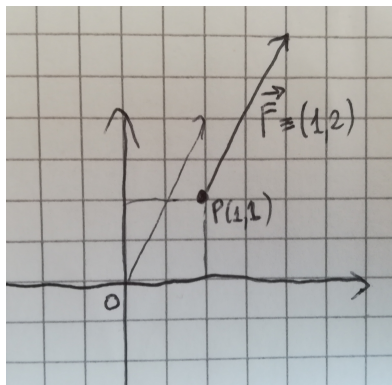
Per capire perché una tale funzione non sia un'astrazione solo matematica, si pensi ad esempio alla seguente situazione: supponiamo di avere un cosiddetto *campo di vettori* nel piano, ovvero di avere per ogni punto del piano un vettore geometrico applicato in quel punto, come nel seguente disegno



Un campo di vettori potrebbe rappresentare ad esempio un campo di forze nel piano, ovvero rappresentare punto per punto la forza (rappresentata appunto da un vettore geometrico) che "sentirebbe" una particella che si trovasse in quel punto. Come nel disegno, la forza che agisce può variare (sia di direzione che di intensità) passando da un punto all'altro, come in effetti accade esattamente se abbiamo a che fare con un campo di forze di natura gravitazionale, cioè dovuto a una massa che esercita su tutti i punti del piano un'attrazione (che dipende ovviamente dal punto), oppure dovuto a un campo elettrico o magnetico; ancora, per pensare a un'altra situazione concreta in

cui i campi di vettori hanno applicazione, si pensi a un fluido in movimento: in ogni punto in cui passa il fluido, abbiamo un vettore che rappresenta la velocità della particella di fluido passante in quel punto (chiaramente il vettore punto per punto può variare: ci possono essere variazioni di velocità, di direzione, ci possono essere vortici etc.).

Ora, come si traduce matematicamente un campo di vettori? per cominciare, esso può chiaramente essere interpretato come una funzione che assegna a ogni punto del piano un vettore (che stia sempre sul piano): ma come sappiamo i punti del piano, fissato un sistema di riferimento cartesiano, possono essere rappresentati da coppie di numeri reali, e come abbiamo già osservato sopra anche i vettori (del piano) possono essere rappresentati da coppie di numeri reali. Quindi il campo di vettori può essere pensato come una funzione che associa a ogni coppia di numeri reali (che rappresenta il punto) un'altra coppia di numeri reali (che rappresenta il vettore in quel punto) e quindi come una funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.



(Chiaramente, se il campo di vettori fosse stato nello spazio tridimensionale, avremmo ottenuto una funzione $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$).

Ora che ci siamo convinti che le funzioni $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ hanno un'importanza pratica, torniamo al problema iniziale, cioè vediamo in che modo da una tale funzione si ricavi in modo naturale una matrice.

In una funzione di questo tipo, noi partiamo da una n -upla (x_1, \dots, x_n) di variabili di partenza e arriviamo a un'altra n -upla, chiamiamola (F_1, \dots, F_n) , in cui ognuna delle componenti F_1, \dots, F_n dipende dalle variabili x_1, \dots, x_n . Per esempio, la funzione potrebbe essere quella che alla coppia (x_1, x_2) associa $(x_1^2 + x_2^2, x_1 - x_2)$ e quindi le sue componenti di arrivo sarebbero $F_1 = x_1^2 + x_2^2$ e $F_2 = x_1 - x_2$.

Ora, ognuna delle componenti F_1, \dots, F_n di arrivo, essendo funzione di più variabili x_1, \dots, x_n , come abbiamo già visto sopra può essere derivata

separatamente rispetto a queste variabili: potremmo ad esempio derivare F_1 rispetto a x_1 , ottenendo la derivata parziale $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}$, oppure derivare sempre F_1 ma rispetto a x_2 , ottenendo la derivata parziale $\frac{\partial F_1}{\partial x_2}$, oppure derivare F_2 rispetto all'ultima variabile x_n , ottenendo la derivata parziale $\frac{\partial F_2}{\partial x_n}$, e così via: in generale, la generica derivata che si può ottenere è del tipo $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$, dove deriviamo una delle componenti di arrivo F_i rispetto a una delle variabili di partenza x_j . Ma allora, dipendendo queste generiche derivate da due indici, viene spontaneo disporle in una matrice che abbia come entrata a_{ij} proprio la derivata $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$, ottenendo quindi la matrice quadrata con n righe e n colonne seguente

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Tale matrice si dice *matrice Jacobiana della funzione F* e ha un ruolo fondamentale nello studio di queste funzioni (si veda ad esempio l'Osservazione 1.6 alla fine di questi appunti).

1.5 Il rango di una matrice

Consideriamo la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Guardando le sue righe, possiamo fare la seguente osservazione: ogni entrata della terza riga è somma delle entrate corrispondenti delle prime due righe. Detto in modo più conciso, se pensiamo le righe come gli elementi di \mathbb{R}^4 $(1, 2, 1, 1)$, $(2, 5, 1, 3)$, $(3, 7, 2, 4)$ possiamo scrivere, concordemente con il modo in cui abbiamo definito la somma tra n -uple, che

$$(3, 7, 2, 4) = (1, 2, 1, 1) + (2, 5, 1, 3)$$

Se indichiamo le righe con R_1, R_2, R_3 possiamo anche scrivere $R_3 = R_1 + R_2$.

In generale, in una matrice possono presentarsi relazioni di questo tipo tra le righe anche più elaborate. Ad esempio, date le tre matrici seguenti

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & -6 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

nella prima i coefficienti della prima riga sono differenza tra i corrispondenti coefficienti della seconda e della terza (cioè, nella notazione introdotta sopra, $R_1 = R_2 - R_3$); nella seconda matrice la seconda riga è la prima più due volte la quarta ($R_2 = R_1 + 2R_4$); nella terza matrice, come è facile verificare, abbiamo la relazione ancora più elaborata $R_4 = R_1 + 3R_2 - 2R_3$)

Relazioni di questo tipo, in cui una riga si scrive come *combinazione* di altre (ovvero come somma di altre righe con eventualmente dei coefficienti a moltiplicare), si dicono *relazioni di dipendenza lineare*, e quando in una matrice si verifica una di queste relazioni le righe si dicono *linearmente dipendenti*. Se, al contrario, tra le righe non vi è nessuna relazione di questo tipo allora le righe si dicono *linearmente indipendenti*. Ad esempio, si può mostrare che le righe delle seguenti matrici sono linearmente indipendenti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

(Nel caso della prima matrice, l'affermazione si giustifica osservando che, essendoci solo due righe, l'unica possibile relazione di dipendenza lineare è che una delle due righe sia multipla dell'altra, ovvero o $R_2 = cR_1$ oppure $R_1 = cR_2$ per qualche $c \in \mathbb{R}$: ma questo è chiaramente falso)

Siamo allora pronti a dare la seguente importante definizione: si dice *rango di una matrice* il numero massimo delle sue righe indipendenti. Ad esempio, la prima matrice di (1.8) ha rango 2, in quanto ha una riga dipendente dalle altre (come abbiamo detto, $R_1 = R_2 - R_3$) mentre le righe restanti sono indipendenti tra loro essendo non proporzionali. Anche la prima matrice di (1.9) ha rango 2, avendo le due sue (sole) righe indipendenti, mentre la seconda matrice di (1.9) ha rango 3, avendo tutte e tre le sue righe indipendenti.

La terza matrice di (1.8) non ha sicuramente rango 4, in quanto la sua quarta riga dipende dalle altre: a questo punto potrebbe avere rango 3 se le restanti tre righe fossero indipendenti, ma anche rango più basso se anche tra la prima, la seconda e la terza riga ci fosse una relazione di dipendenza lineare.

Osservazione 1.3. Una matrice ha rango 1 se e solo se le sue righe sono

tutte proporzionali, ad esempio ha rango 1 la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ 5 & 10 & 5 & 5 \end{pmatrix}$,
mentre si dice che una matrice ha rango zero se e solo se tutte le sue entrate
sono nulle, ad esempio $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Il rango ha tantissime applicazioni nella matematica e nelle scienze applicate. Citiamone, illustrandola tramite un esempio, una su tutte, quella relativa alla risoluzione dei sistemi di equazioni di primo grado: supponiamo di avere un tale sistema, ad esempio il seguente sistema di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + y + z = -1 \\ x + 4y + z = 2 \end{cases}$$

Possiamo associare al sistema due matrici: la prima, detta matrice incompleta, è la matrice che ha nelle sue righe i coefficienti delle incognite delle varie equazioni, ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

(nella prima riga ci sono i coefficienti di x, y, z della prima equazione, nella seconda riga i coefficienti di x, y, z della seconda equazione e così via); la seconda, la matrice completa, è ottenuta dalla matrice incompleta aggiungendo un'ultima colonna data dai termini noti delle equazioni⁴, ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

Ora, si può dimostrare che dal calcolo e dal confronto del rango di queste due matrici si può dedurre se il sistema ha soluzioni o no, se ne ha una sola o infinite, e se ne ha infinite da quanti parametri dipende la soluzione generale.

⁴Giustamente, il nome "matrice completa" viene dal fatto che una volta che conosciamo sia i coefficienti delle incognite che i termini noti abbiamo un'informazione per l'appunto completa sul sistema.

Osservazione 1.4. Non affrontiamo in questi appunti il problema del calcolo del rango, ovvero su come si determina quante siano effettivamente le righe indipendenti di una matrice data (ad esempio: come essere sicuri che la seconda matrice di (1.9) abbia effettivamente rango 3, ovvero che non esista nessuna relazione di dipendenza tra le sue righe?) Per chi volesse approfondire, citiamo il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan, detto anche metodo di riduzione a gradini, che è forse il più semplice e famoso metodo per dire quante siano le righe indipendenti di una matrice e calcolarne quindi il rango.

Osservazione 1.5. Abbiamo definito il rango di una matrice come il numero massimo delle righe indipendenti che la compongono: cosa succederebbe se provassimo a definire il rango come il numero massimo di colonne indipendenti? La risposta è che si dimostra che otterremmo lo stesso valore (si dice che il rango per righe è uguale al rango per colonne). Ad esempio, abbiamo osservato che la prima matrice in (1.8) ha rango 2 in quanto le sue righe soddisfano la relazione di dipendenza $R_1 = R_2 - R_3$. Dunque, da quello che abbiamo appena detto, si evince che anche il suo rango per colonne deve essere 2, ovvero una delle sue colonne deve essere dipendente dalle altre. In effetti, come è immediato verificare, si ha che la terza colonna è tre volte la prima meno la seconda ($C_3 = 3C_1 - C_2$).

1.6 Il determinante di una matrice

Il determinante è un numero che si calcola a partire da una matrice quadrata data usando le sue entrate e che ha l'importante proprietà di essere diverso da zero se e solamente se le righe della matrice sono tutte indipendenti (cioè se e solamente se il rango della matrice è il massimo possibile).

Non daremo in questi appunti la definizione rigorosa e più generale di determinante (che coinvolge alcune nozioni di teoria delle permutazioni che vanno al di là degli scopi del corso) ma spiegheremo come calcolarlo per qualunque matrice quadrata mediante il cosiddetto *sviluppo di Laplace*.

Iniziamo dal semplice caso delle matrici quadrate di ordine 2. Per una tale generica matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ si definisce il determinante $\det(A)$ nel modo seguente

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1.12)$$

cioè il prodotto degli elementi della cosiddetta *diagonale della matrice*

(quelli con gli indici di riga e di colonna uguali, a_{11} e a_{22}) meno il prodotto degli altri due.

E' facile convincersi che la formula data dia come risultato zero esattamente quando le righe della matrice sono dipendenti, ovvero quando una delle due è multipla dell'altra. Senza voler fare dimostrazioni rigorose, si considerino ad esempio le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

la prima delle quali ha le righe dipendenti (infatti, la seconda riga è 3 volte la prima) mentre la seconda ha le righe indipendenti (essendo le righe non proporzionali).

Ebbene, il determinante della prima matrice, in base alla formula (1.12), è uguale a $1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 6 - 6 = 0$, mentre il determinante della seconda è $1 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 5 - 6 = -1 \neq 0$, concordemente con quanto affermato sopra.

Passiamo ora al determinante di una matrice di ordine tre $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

La formula generica per il determinante di tale matrice è molto più complessa che nel caso delle matrici di ordine 2 e non vale la pena di impararla a memoria, dal momento che come stiamo per vedere essa può essere ridotta al calcolo di tre determinanti di ordine 2.

Allo scopo di mostrare ciò nel modo più pratico e snello possibile, lavoreremo direttamente su un esempio. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

Si procede nel modo seguente:

- (i) si sceglie prima di tutto una riga o una colonna della matrice, ad esempio scegliamo la prima riga (1 2 3).
- (ii) per ognuna delle entrate della riga scelta, cancellando la riga e la colonna a cui essa appartiene vediamo che le entrate che rimangono formano una matrice di ordine 2. Ad esempio cancellando la prima riga e la prima colonna, alle quali appartiene l'entrata $a_{11} = 1$, rimane la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; analogamente, cancellando la prima riga e la

seconda colonna alle quali appartiene l'entrata $a_{12} = 2$ rimane la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ e infine, cancellando la prima riga e la terza colonna alle quali appartiene l'entrata $a_{13} = 3$, rimane la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

- (iii) calcoliamo i determinanti di ciascuna delle tre matrici di ordine due così ottenute usando la formula (1.12), ma con segni alterni $+, -, +$

$$+\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -3, \quad -\det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = 7, \quad +\det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = -5$$

I tre valori così ottenuti prendono il nome di *cofattori* delle entrate a_{11}, a_{12}, a_{13} rispettivamente.

- (iv) Infine, moltiplichiamo ogni entrata della riga scelta per il suo cofattore, calcolato nel punto (iii):

$$+1 \cdot (-3) + 2 \cdot 7 + 3 \cdot (-5) = -3 + 14 - 15 = -4$$

Tale risultato ottenuto è esattamente il determinante della matrice A iniziale.

Il procedimento appena descritto non dipende dalla scelta iniziale della riga o della colonna fatta in (i), ma occorre fare attenzione ai segni alterni che abbiamo anteposto ai determinanti di ordine 2 nel passo (iii) per ottenere i cofattori: infatti, tali segni dipendono in effetti dall'entrata di cui stiamo calcolando il cofattore, e più precisamente sono dati dallo schema seguente "a scacchiera"

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Facciamo subito un esempio di scelta di un'altra riga o colonna (sempre dalla stessa matrice (1.13)) per essere più chiari: supponiamo ad esempio di scegliere la seconda colonna, che ha le entrate $a_{12} = 2, a_{22} = 1, a_{32} = 1$.

Come indicato nel passo (ii), cancelliamo la prima riga e la seconda colonna alle quali appartiene l'entrata $a_{12} = 2$ e rimane la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; cancelliamo la seconda riga e la seconda colonna alle quali appartiene l'entrata

$a_{22} = 1$ e rimane la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; cancelliamo la terza riga e la seconda colonna alle quali appartiene l'entrata $a_{32} = 1$ e rimane la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ora, in base al passo (iii), possiamo calcolare i cofattori, ovvero i determinanti di queste matrici, stavolta con anteposti i segni alterni $-$, $+$, $-$, come si vede nello schemino a scacchiera (1.14) guardando la seconda colonna:

$$-\det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = 7, \quad +\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = -13, \quad -\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -5$$

Infine, come indicato nel passo (iv), moltiplichiamo ogni entrata della colonna scelta per il suo cofattore: si ottiene allora

$$2 \cdot 7 + 1 \cdot (-13) + 1 \cdot (-5) = 14 - 13 - 5 = -4$$

Il risultato è lo stesso ottenuto sopra quando abbiamo effettuato il calcolo rispetto alla prima riga, confermando così il fatto che il calcolo non dipende dalla scelta della riga o della colonna.

Quanto appena fatto mostra che il calcolo del determinante di una matrice di ordine 3 si può ridurre al calcolo di determinanti di matrici di ordine 2 (che sono semplici da calcolare). Questo metodo si generalizza in effetti al calcolo del determinante di una matrice di qualunque ordine n , riducendolo al calcolo di determinanti di matrici ordine $n - 1$.

Ad esempio, consideriamo la seguente matrice di ordine 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Scegliamo per esempio di sviluppare il determinante seguendo i passi (i)-(iv) di sopra rispetto alla terza riga, che ha le entrate $a_{31} = 1$, $a_{32} = 0$, $a_{33} = 0$, $a_{34} = 1$.

Come sappiamo, ci servono i cofattori di tali entrate: tuttavia, poiché alla fine dovremo moltiplicare tali cofattori per le entrate stesse, dal momento che $a_{32} = a_{33} = 0$ non è necessario calcolare i corrispondenti cofattori. Ci servono quindi solo i cofattori di a_{31} e a_{34} .

Per ottenere il cofattore di a_{31} , cancelliamo la terza riga e la prima colonna della matrice A : le entrate rimanenti vanno a formare la matrice

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; per ottenere invece il cofattore di a_{34} , cancelliamo analogamente la terza riga e la quarta colonna della matrice A : le entrate rimanenti vanno a formare la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Ora, di queste due matrici ci servirà calcolare i determinanti: ma con quale segno davanti? il principio è lo stesso visto per la matrice dell'esempio precedente, ovvero i segni sono determinati dal seguente schema a scacchiera

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

Come si vede allora guardando la terza riga, per il cofattore di a_{31} dobbiamo usare il segno $+$, mentre per il cofattore di a_{34} dobbiamo usare il segno $-$. Quindi il cofattore di a_{31} sarà $+\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, mentre il cofattore di a_{34} sarà $-\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Come spiegato allora nel passo (iv) di sopra, il determinante di A si ottiene moltiplicando ogni entrata della riga per il suo cofattore (ma come abbiamo detto bastano a_{31} e a_{34} perché gli altri sono zero), ovvero

$$\det(A) = 1 \cdot \left(+\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) + 1 \cdot \left(-\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right). \tag{1.16}$$

Ora, ciascuno dei due determinanti di ordine 3 che compaiono in questa uguaglianza va di nuovo calcolato usando l'algoritmo spiegato. Ad esempio, per calcolare il primo determinante è molto conveniente applicare l'algoritmo scegliendo la prima riga perché ha una sola entrata diversa da zero ($a_{11} = 1$) e quindi basterà moltiplicare quell'entrata per il suo cofattore: cancellando la prima riga e la prima colonna, otteniamo la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi il cofattore sarà $+\det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$ (abbiamo anteposto il segno $+$ come previsto dallo schemino (1.14)); quindi,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \left(+ \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right) = -1 \quad (1.17)$$

Analogamente, se per l'altro determinante di ordine 3 che compare in (1.16) scegliamo di nuovo la prima riga (si noti che non c'è una riga o una colonna più conveniente, ovvero che contenga più zeri), dovremo calcolare il cofattore di $a_{11} = 1$, che è $+ \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3$, il cofattore di $a_{12} = 1$, che è $- \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1$, e poi come al solito moltiplicare ogni entrata per il suo cofattore e sommare, ottenendo quindi

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \left(+ \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right) + 1 \cdot \left(- \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = 3 - 1 = 2. \quad (1.18)$$

Sostituendo allora quanto ottenuto in (1.17) e (1.18) nella (1.16), si trova finalmente

$$\det(A) = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) = -3.$$

Ora, se dovessimo calcolare il determinante di una matrice di ordine 5, basterebbe seguire i soliti passi: scegliere una riga o una colonna (possibilmente con più zeri possibile) e moltiplicare ogni elemento della riga o colonna scelta per il suo cofattore. Naturalmente, poiché i cofattori si ottengono cancellando una riga e una colonna, stavolta essi sarebbero determinanti di matrici di ordine 4, per calcolare ognuno dei quali dovremmo riapplicare lo stesso algoritmo, riducendoci poi a calcolare determinanti di matrici di ordine 3 e da queste, come abbiamo visto, a matrici di ordine 2.

La formula che stiamo usando è quindi una cosiddetta *formula ricorsiva*: riduce il calcolo del determinante di una matrice di ordine n al calcolo di più determinanti di matrici di ordine più basso $n - 1$, e così via.

Osservazione 1.6. Così come il rango, anche il determinante trova numerosissimi utilizzi nella matematica e nelle scienze applicate. Citiamone alcune:

- (1) Il determinante può essere usato per risolvere un sistema di equazioni di primo grado in cui il numero di equazioni sia uguale al numero di incognite. Più precisamente, se il determinante della matrice incompleta del

sistema (si veda pagina 16) non è zero, la soluzione del sistema si dimostra essere unica e si può ottenere calcolando determinanti di matrici quadrate opportune costruite a partire dalla matrice incompleta e dalla colonna dei termini noti (omettiamo i dettagli segnalando, per chi volesse saperne di più, che tale metodo si chiama *metodo di Cramer*).

- (2) Nel paragrafo 1.4, nella nostra introduzione alle matrici abbiamo spiegato come nella teoria delle funzioni di più variabili compaiano in modo naturale delle matrici quadrate molto importanti, l'hessiana di una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (si veda (1.6)) e la Jacobiana di una funzione $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (si veda (1.7)).

Per quello che riguarda l'hessiana, abbiamo già detto che essa costituisce l'analogo della derivata seconda per funzioni $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e che le sue proprietà servono a capire se un punto è di massimo o minimo. Ebbene, così come nella teoria delle funzioni di una variabile si va a vedere il segno della derivata seconda per capire ciò, in questo caso si va a vedere il segno del determinante della matrice hessiana e di altre sottomatrici estratte dalla stessa.

Per quello che riguarda la matrice Jacobiana di una funzione $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, il suo determinante è di fondamentale importanza ad esempio per il calcolo degli integrali di più variabili (che servono a calcolare aree di superfici nello spazio e volumi). Più precisamente, senza entrare in troppi dettagli, così come per risolvere un integrale in una sola variabile x può essere necessario un cambiamento di variabile $x = \phi(t)$, in seguito al quale nell'integrale appare la derivata $\phi'(t)$, negli integrali di più variabili i cambi di variabile sono dati da funzioni $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e effettuando tale cambio all'interno dell'integrale appare il determinante della matrice Jacobiana di F .