Chapter 1

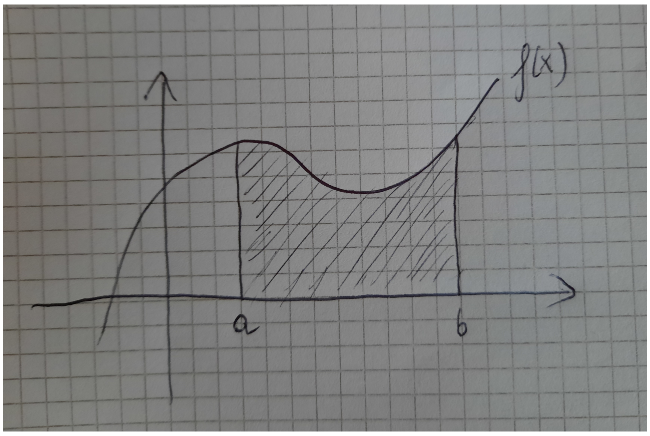
L'integrale

Quella di integrale è la terza grande importante nozione del calcolo infinitesimale dopo quelle di limite e derivata. Prima di vederne la definizione rigorosa, diamo alcune anticipazioni sul suo significato e le sue applicazioni alla matematica e alle scienze applicate.

Consideriamo una funzione $f(x)$ definita su un intervallo $[a, b]$. L'*integrale*[1] *di* $f(x)$ *in* dx *tra* a *e* b, denotato

$$\int_a^b f(x)dx$$

rappresenta l'area della figura evidenziata nel disegno, limitata superiormente dalla porzione grafico di f compresa tra a e b.



(tale figura viene spesso anche chiamata "trapezoide").

Questa prima interpretazione geometrica dell'integrale come area ne suggerisce già le evidenti implicazioni pratiche (tramite gli integrali si possono

[1]Supposto che esista, visto che come vedremo l'integrale può anche non esistere.

calcolare aree di qualunque figura piana[2]); tuttavia, vi sono numerose altre interpretazioni di altrettanta se non superiore importanza per le applicazioni. Per limitarci a una, ricordiamo che la densità di una sostanza è definita come il rapporto tra la sua massa e il suo volume. Se la sostanza è omogenea, la densità non dipende dalla porzione di sostanza che consideriamo; ma se essa non è omogenea la densità può variare da parte a parte e anzi può capitare che essa vari addirittura in modo continuo da punto a punto. Supponendo che il corpo in questione abbia estensione lineare, ad esempio un filo rettilineo, in questo caso possiamo allora pensare la densità come una funzione $\rho(x)$ che varia al variare del punto x sul segmento (se la funzione fosse quella rappresentata nel disegno precedente, ad esempio, la densità sarebbe minima all'interno del segmento mentre il segmento sarebbe "più denso" avvicinandosi ai bordi).

Ebbene, in tal caso l'integrale $\int_a^b \rho(x)dx$ ci dà la massa contenuta nella porzione del segmento data dall'intervallo $[a,b]$.

Per convincere ulteriormente il lettore dell'importanza di questo caso, sottolineiamo che la parola densità può riferirsi a numerosi contesti e non necessariamente essere ristretta alla definizione di rapporto tra massa e volume. Ad esempio, esistono le cosiddette *funzioni di densità di probabilità* che sono alla base della descrizione quantistica del comportamento di una particella: senza entrare in troppi dettagli e supponendo per semplicità che essa sia confinata su una retta rappresentata dai numeri reali, la particella risulta descritta da una funzione $f(x)$ (che si ottiene risolvendo un'equazione differenziale, l'equazione di Schroedinger) e che rappresenta appunto la cosiddetta densità di probabilità, nel senso che l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ di questa densità tra due valori a e b ci dà la probabilità che la particella si trovi tra il punto a e il punto b (ricordiamo che in meccanica quantistica non ha senso dire dove si trova esattamente la particella ma possiamo dire qual è la probabilità che essa si trovi in una data porzione di spazio).

1.1 La definizione di integrale

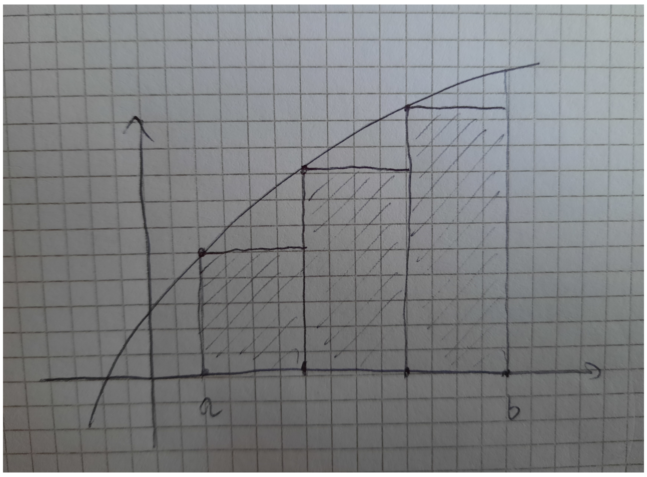
Come stiamo per vedere e come già visto per la derivata, l'integrale viene definito come un limite.

Per introdurre tale definizione rigorosa, aiutiamoci con l'interpretazione geometrica vista sopra ricordando che l'integrale è definito in modo da darci

[2]Non solo, ma è possibile ricorrere all'integrale per calcolare lunghezze di curve e, come si vede nella teoria delle funzioni di più variabili, anche per calcolare volumi di figure tridimensionali.

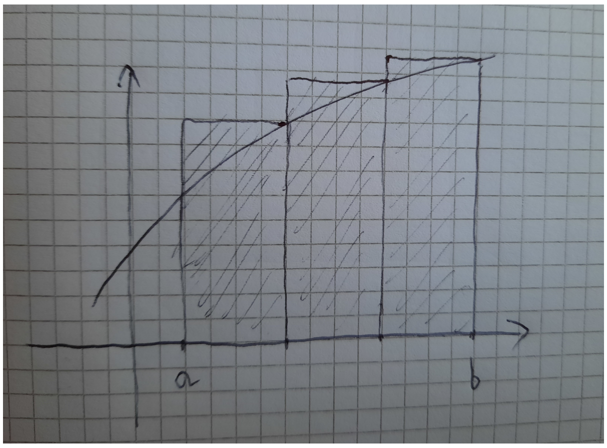
l'area del trapezoide limitato dalla porzione di grafico di f compresa tra gli estremi dell'integrale a e b.

Ora, tale area può essere approssimata mediante rettangoli nel modo seguente: dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in un numero n di sottointervalli tutti della stessa ampiezza (che sarà $\frac{b-a}{n}$), e consideriamo per ognuno di questi sottointervalli il rettangolo che ha come base il sottointervallo stesso e come altezza il minimo assunto dalla funzione sul sottointervallo, come rappresentato nel disegno seguente (dove $n = 3$)



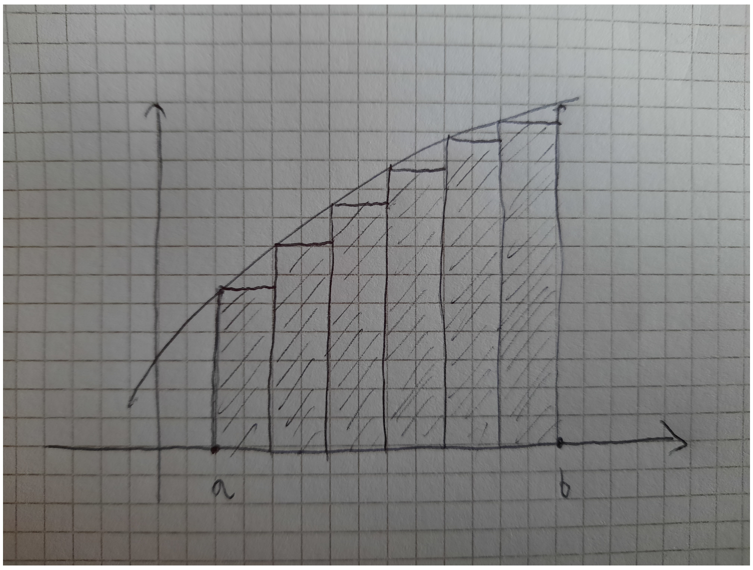
La somma delle aree di tali rettangoli (ognuna data dal prodotto della base per l'altezza) può essere considerata un'approssimazione dell'area del trapezoide, e più precisamente un'approssimazione per difetto visto che, avendo scelto per ogni sottointervallo il valore minimo della funzione come altezza del rettangolo, la somma delle aree dei rettangoli risulta inferiore all'effettiva area del trapezoide (come si vede anche nel disegno, sopra ogni rettangolo rimane una piccola porzione del trapezoide che non è considerata nel calcolo dell'area).

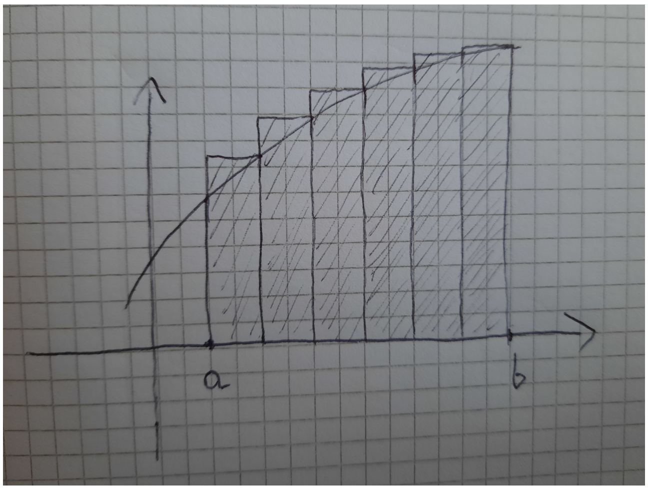
Un'approssimazione per eccesso può essere ottenuta invece scegliendo come altezza dei rettangoli il massimo assunto dalla funzione su ogni sottointervallo, come rappresentato nel disegno seguente



dove stavolta la somma delle aree dei rettangoli è chiaramente superiore rispetto all'area del trapezoide (i rettangoli "sbordano" fuori dal trapezoide).

Ora, l'accuratezza di queste approssimazioni (sia di quella per difetto che di quella per eccesso) dovrebbe migliorare al crescere del numero n di sottointervalli considerati e al crescere di n l'errore commesso dovrebbe diventare intuitivamente sempre più piccolo, come suggerito dai seguenti disegni dove abbiamo aumentato a $n = 6$ la suddivisione dell'intervallo





Viene allora naturale definire l'area della figura come il limite per n che tende a infinito delle aree approssimate: tale limite potrebbe in effetti anche non esistere, o anche se esistesse potrebbe essere diverso a seconda che si considerano le approssimazioni per difetto e quelle per eccesso. Ma se questo non accade, ovvero *se i limiti per* $n \to +\infty$ *delle approssimazioni per difetto e per eccesso esistono e sono uguali allora la funzione si dice integrabile e il risultato comune di tali limiti si dice l'integrale di* $f(x)$ *in* dx *sull'intervallo* $[a, b]$*, e si denota* $\int_a^b f(x)dx$.

Non vedremo esempi di situazioni in cui i limiti per difetto e per eccesso che definiscono l'integrale non esistono o sono diversi tra loro, che si presentano solo per funzioni molto particolari. Più precisamente, segnaliamo i due importanti fatti seguenti, che ci rassicurano sul fatto che le funzioni che incontreremo in questo corso sono praticamente tutte integrabili.

Se f *è continua sull'intervallo* $[a, b]$*, allora è integrabile*

Se f *ha un numero finito di punti di discontinuità sull'intervallo* $[a, b]$*, allora è integrabile*[3]

[3]In effetti, esiste un ulteriore teorema che afferma che i punti di discontinuità possono essere anche infiniti, ma con delle condizioni che per essere precisate qui richiederebbero nozioni di teoria degli insiemi infiniti che vanno oltre gli scopi di questo corso.