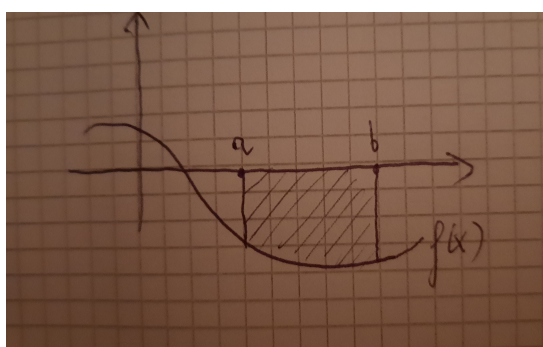
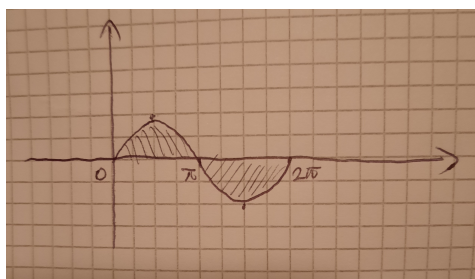


Prima di passare nel prossimo paragrafo al calcolo dell'integrale vediamo le due seguenti osservazioni conclusive sulla sua definizione e sulla sua interpretazione geometrica.

Osservazione 0.1. Abbiamo detto che l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ geometricamente rappresenta l'area del trapezoide compreso tra l'intervallo $[a, b]$ e il grafico di f . In effetti, questo è vero solo se la funzione è maggiore o uguale a zero. Se la funzione è negativa, come nel seguente disegno, l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ è negativo e più precisamente risulta essere l'area del trapezoide ma con un segno meno davanti.



Se la funzione f cambia segno nell'intervallo $[a, b]$, il risultato dell'integrale è dato dalla somma delle aree dei trapezoidi corrispondenti alle porzioni di grafico in cui f è positiva meno le aree dei trapezoidi dati dalle porzioni di grafico in cui f è negativa. Questo implica che l'integrale potrebbe anche essere nullo: ad esempio, se consideriamo $f(x) = \sin x$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$



si può mostrare che $\int_0^{2\pi} \sin x = 0$: geometricamente, questo accade proprio perché l'area della porzione tra 0 e π è uguale all'area della porzione tra π e 2π , ma quest'ultima, essendo la funzione negativa, ha in realtà un segno meno davanti e sommandosi algebricamente le due aree si compensano.

Osservazione 0.2. Nella definizione di integrale $\int_a^b f(x)dx$ abbiamo supposto che a sia il primo estremo dell'intervallo e b il secondo, e quindi che

sia $a < b$. Tuttavia, è possibile definire anche l'integrale $\int_b^a f(x)dx$ in cui l'estremo in basso sia maggiore dell'estremo in alto: in tal caso, si definisce

$$\int_b^a f(x)dx := - \int_a^b f(x)dx \quad (1)$$

cioè, scambiando gli estremi dell'integrale, l'integrale cambia segno. La ragione di questa definizione è rendere coerenti tra loro alcune regole "algebriche" di manipolazione degli estremi dell'integrale, ma per il momento omettiamo i dettagli.

0.1 Integrali e primitive

Ci poniamo ora il problema di trovare un modo di calcolare gli integrali che non passi per la definizione, che, sebbene sia geometricamente intuitiva, è chiaramente poco gestibile dal punto di vista dei calcoli.

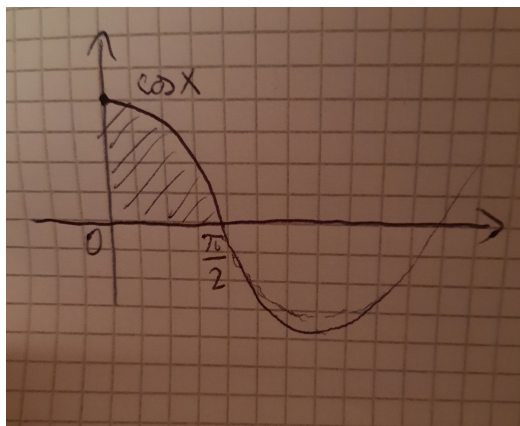
Come stiamo per vedere, c'è in effetti un modo efficace di calcolare gli integrali che ha come fondamento un (a prima vista inaspettato) legame tra l'integrale e l'operazione di derivata.

Questo legame è il seguente: supponiamo che $f(x)$ sia una funzione continua sull'intervallo $[a, b]$ e supponiamo di riuscire a trovare una funzione $F(x)$ derivabile che ha la proprietà che la sua derivata $F'(x)$ coincide con $f(x)$. Allora

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (2)$$

Una funzione $F(x)$ con la proprietà che $F'(x) = f(x)$ si dice *primitiva di f* . Il problema di calcolare l'integrale si riduce quindi al problema di trovare una primitiva della funzione data.

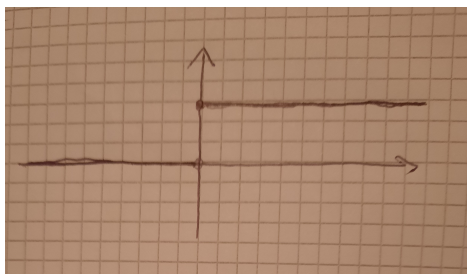
Esempio 0.1. Supponiamo di dover calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x$, che rappresenta l'area della regione evidenziata nel disegno seguente.



In base alla (2), dobbiamo prima trovare una funzione $F(x)$ derivabile per cui $F'(x) = \cos x$. Ma questa uguaglianza è soddisfatta chiaramente se $F(x) = \sin x$, e quindi la (2) diventa

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1 - 0 = 1$$

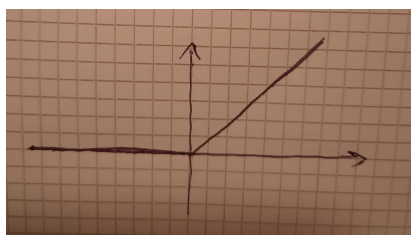
Osservazione 0.3. L'ipotesi che $f(x)$ sia continua tra a e b per la validità della (2) è fondamentale in quanto una funzione non continua potrebbe non avere primitiva¹. Ad esempio, consideriamo la funzione non continua rappresentata nel seguente disegno



definita cioè come la funzione costante uguale a 1 per $x \geq 0$ e come la costante uguale a 0 per $x < 0$ (tale funzione è nota anche come *gradino di Heaviside*).

¹Diciamo "potrebbe" in quanto esistono funzioni non continue che invece ammettono primitiva: ad esempio, la funzione $f'(x)$ data dalla formula (1) a pagina 1 della quarta parte sulle derivate è la derivata della funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$, che risulta quindi essere la sua primitiva. Tuttavia, come abbiamo osservato alla pagina successiva il limite del rapporto incrementale di $f'(x)$ in zero (ovvero la derivata seconda $f''(0)$) non esiste, e quindi f' non è continua.

In tal caso, una primitiva dovrebbe essere una funzione $F(x)$ derivabile tale che $F'(x) = 1$ per $x \geq 0$ e $F'(x) = 0$ per $x < 0$. Tuttavia, non è difficile convincersi che non è possibile soddisfare entrambe queste condizioni garantendo la derivabilità di F : ad esempio, ponendo $F(x) = x$ per $x \geq 0$ si ha sicuramente $F'(x) = 1$ e ponendo $F(x) = 0$ per $x < 0$ si ha sicuramente $F'(x) = 0$, ma definendo così la F si ha evidentemente un punto angoloso nell'origine, nel quale quindi la funzione non è derivabile.



La formula (2) può sorprendere per la sua semplicità ma soprattutto per l'apparente mancanza di legame tra l'integrale come l'abbiamo definito all'inizio del capitolo e il concetto di funzione primitiva. Vediamo ora una veloce spiegazione di tale legame.

Innanzitutto, nell'integrale $\int_a^b f(x)dx$ supponiamo di mantenere il primo estremo fisso uguale ad a ma di far variare il secondo estremo tra a e b : in tal modo, l'integrale diventa a sua volta una funzione del secondo estremo, che possiamo chiamare G e definire formalmente come

$$G(t) = \int_a^t f(x)dx$$

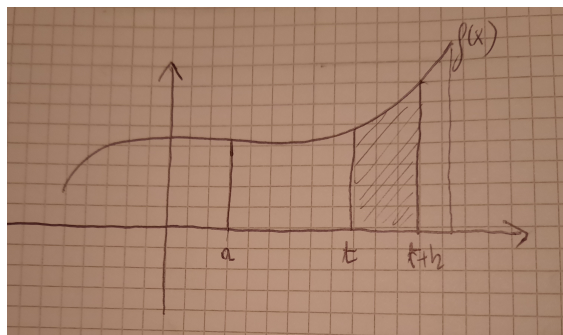
Ora, calcoliamo la derivata di tale funzione G (rispetto alla variabile t). A questo scopo, usiamo la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale

$$G'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(t+h) - G(t)}{h}$$

Dalla definizione di G questo limite può essere riscritto come

$$G'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{t+h} f(x)dx - \int_a^t f(x)dx}{h} \quad (3)$$

Ora, l'espressione $\int_a^{t+h} f(x)dx - \int_a^t f(x)dx$ che compare a numeratore, da un punto di vista geometrico, è la differenza tra l'area del trapezoide compreso tra a e $t+h$ e l'area del trapezoide compreso tra a e t



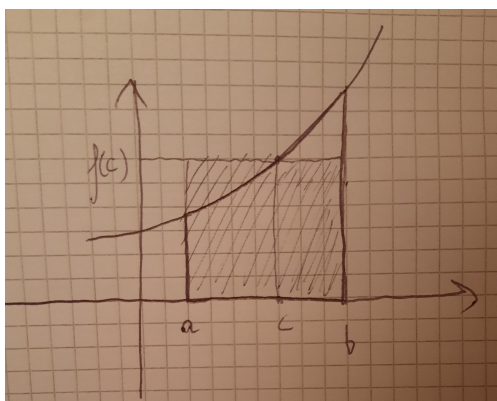
Ma come si vede nel disegno, tale differenza è chiaramente l'area compresa tra t e $t+h$, ovvero $\int_t^{t+h} f(x)dx$. Quindi possiamo riscrivere la (3) come

$$G'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_t^{t+h} f(x)dx}{h} \quad (4)$$

Ora, per valutare l'integrale $\int_t^{t+h} f(x)dx$ useremo un risultato noto come *teorema della media* che afferma quanto segue:

Dato un integrale $\int_a^b f(x)dx$ di una funzione continua $f(x)$, esiste sempre un valore di c compreso tra a e b per cui $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$

Il significato geometrico del teorema della media può essere visualizzato nel modo seguente: : la quantità $(b-a)f(c)$ si può pensare come l'area del rettangolo che ha come base l'intervallo $[a, b]$ (che è lungo per l'appunto $b-a$) e altezza il valore $f(c)$, che è la quota del punto del grafico di f corrispondente al valore c



Il teorema sta quindi affermando che esiste sempre un punto sul grafico di f tale che il rettangolo che ha per base l'intervallo e per altezza la quota del punto ha area esattamente uguale all'area del trapezoide (la quota $f(c)$ può

quindi essere pensata come una sorta di media per il valore della funzione, da cui il nome del teorema).

Ora, applicando il teorema all'integrale $\int_t^{t+h} f(x)dx$ che compare nella (4), quindi con $a = t$ e $b = t + h$, e denotando c_h il punto c del teorema (per mettere in evidenza il fatto che dipende da h) otteniamo

$$\int_t^{t+h} f(x)dx = (t + h - t)f(c_h) = hf(c_h)$$

Ma allora, sostituendo nella (4) otteniamo

$$G'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hf(c_h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c_h) \quad (5)$$

Ora, il punto c_h è compreso tra i due estremi t e $t + h$: ma allora, visto che quando facciamo tendere h a zero il segmento $[t, t + h]$ si va a schiacciare sul punto t necessariamente $c_h \rightarrow t$ per $h \rightarrow 0$. Essendo la funzione continua si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(c_h) = \lim_{c_h \rightarrow t} f(c_h) = f(t)$$

e quindi la (5) ci dà finalmente

$$G'(t) = f(t)$$

Tale uguaglianza ci sta dicendo che *la funzione $G(t) = \int_a^t f(x)dx$, ottenuta facendo variare il secondo estremo di integrazione, è una primitiva di f .*

Tale importante conclusione, che stabilisce un primo legame tra il concetto di primitiva e l'operazione di integrale, prende il nome di *teorema fondamentale del calcolo integrale*.

Ora siamo finalmente pronti a spiegare la formula (2): iniziamo col notare che tale formula è vera se come primitiva di f scegliamo proprio la G definita dal teorema fondamentale del calcolo integrale. Infatti, dal momento che $G(t) = \int_a^t f(x)dx$ si ha

$$G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \quad (6)$$

in quanto l'addendo $\int_a^a f(x)dx$ è nullo (geometricamente, rappresenta l'area del trapezoide con base "schiacciata tra a e a ", che è quindi chiaramente zero).

Tuttavia, noi vogliamo mostrare la validità della (2) per una qualunque primitiva F di f : a questo scopo, basta osservare che qualunque primitiva F di f prendiamo allora essa differirà dalla G del teorema fondamentale del

calcolo integrale per una costante. Infatti, dal momento che F e G sono entrambe primitive di f si ha

$$(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$$

ovvero la derivata della loro differenza $F - G$ è sempre nulla: ma questo ci dice che $F - G$ è una costante, che possiamo chiamare c , e quindi possiamo scrivere $F = G + c$.

Ma allora

$$F(b) - F(a) = (G(b) + c) - (G(a) + c) = G(b) + c - G(a) - c = G(b) - G(a)$$

e questo, combinato con la (6) ci dà finalmente la (2).

0.2 Il calcolo dell'integrale

La (2) ci dice che per calcolare l'integrale di una funzione $f(x)$ è sufficiente trovare una primitiva $F(x)$ della f . Vedremo allora in questo paragrafo le tecniche fondamentali per trovare una primitiva di una funzione elementare data.

Prima di cominciare, fissiamo per comodità la seguente notazione: ispirati dal teorema fondamentale del calcolo integrale, che afferma che una primitiva di $f(x)$ si ottiene integrando la f , ma lasciando il secondo estremo libero di variare, scriveremo

$$\int f(x)dx$$

per indicare una generica primitiva di $f(x)$, appunto come un integrale privo degli estremi (si parla allora in questo caso di *integrale indefinito*).

Ora, seguendo la stessa impostazione che abbiamo visto nel calcolo delle derivate, inizieremo innanzitutto a determinare le primitive delle funzioni potenza x^α , delle funzioni esponenziali a^x , e delle funzioni trigonometriche $\sin x$ e $\cos x$; vedremo poi cosa succede se consideriamo somme, prodotti, quozienti, composizioni e inverse di tali funzioni.

Iniziamo con le potenze $f(x) = x^\alpha$, facendoci guidare per semplicità dall'esempio di $f(x) = x^2$. Trovare una primitiva di x^2 significa trovare una funzione $F(x)$ la cui derivata sia uguale a x^2 : ora, come sappiamo, quando deriviamo una potenza il suo esponente si abbassa di uno (e l'esponente iniziale va a finire davanti alla funzione come coefficiente). Quindi, se vogliamo ottenere x^2 come derivata, iniziamo col considerare una potenza più alta di

uno, ovvero x^3 : ma in base alla regola di derivazione delle potenze, la derivata di x^3 è in realtà $3x^2$ e non x^2 . Allo scopo di eliminare il coefficiente 3, basterà allora aggiungere un coefficiente $\frac{1}{3}$ davanti a x^3 . Infatti, dal momento che le costanti escono fuori dalla derivata, si ha

$$\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3}(x^3)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$$

Il ragionamento appena fatto funziona in generale per una qualsiasi potenza x^α con $\alpha \neq -1$, per cui è immediato verificare che una primitiva si ottiene aumentando l'esponente di uno, ovvero considerando la potenza $x^{\alpha+1}$, con l'aggiunta di un coefficiente $\frac{1}{\alpha+1}$ a compensare il coefficiente $\alpha+1$ che compare quando deriviamo: più formalmente, si ha infatti

$$\left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = \frac{1}{\alpha+1}(x^{\alpha+1})' = \frac{1}{\alpha+1} \cdot (\alpha+1)x^\alpha = x^\alpha$$

Possiamo quindi riassumere scrivendo, con la notazione introdotta sopra per indicare le primitive come integrali indefiniti,

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c \quad (7)$$

dove abbiamo aggiunto la costante c in quanto come sappiamo tutte le primitive differiscono tra loro per una costante, e quindi, una volta appurato che $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ è una primitiva, la generica primitiva sarà ottenuta appunto aggiungendo una costante a essa.

Nel caso $\alpha = -1$ (ovvero $x^{-1} = \frac{1}{x}$) la formula (7) non si applica in quanto in tal caso la quantità $\alpha+1$ è uguale a zero e quindi non può stare a denominatore nella (7).

In questo caso, ricordiamo dal capitolo sulle derivate che la derivata del logaritmo naturale $\ln x$ è proprio $\frac{1}{x}$: tuttavia, non sarebbe del tutto corretto affermare che $\ln x$ è una primitiva di $\frac{1}{x}$ in quanto questa affermazione è vera solo per $x > 0$ dal momento che la funzione $\ln x$ è definita solo per tali valori. Riusciamo a trovare una primitiva di $\frac{1}{x}$ per $x < 0$? La risposta, come stiamo per vedere, è data dalla funzione $\ln(-x)$ (che è ben definita per $x < 0$ in quanto $-x > 0$). Infatti, vedendo $\ln(-x)$ come funzione composta $f(g(x))$ con $f(x) = \ln x$ e $g(x) = -x$, applicando la regola di derivazione delle funzioni composte $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ e usando $g'(x) = -1$ otteniamo,

$$[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

che conferma che $\ln(-x)$ è una primitiva di $\frac{1}{x}$ per $x < 0$.

Riassumendo, per $x > 0$ la primitiva corretta è $\ln x$ mentre per $x < 0$ la primitiva è $\ln(-x)$. Ma come sappiamo la funzione che coincide con x per $x > 0$ ed è uguale $-x$ per $x < 0$ è per definizione il valore assoluto $|x|$. Possiamo allora riassumere dicendo che la primitiva di $\frac{1}{x}$, sia per $x > 0$ che per $x < 0$, è $\ln|x|$, e scrivere quindi

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \quad (8)$$

Passiamo ora alla ricerca di una primitiva per la funzione esponenziale a^x . Nel caso $a = e$, la risposta è immediata in quanto da $(e^x)' = e^x$ vediamo subito che una primitiva di e^x è e^x stesso. In generale, abbiamo invece $(a^x)' = (\ln a)a^x$ e quindi non possiamo dire che a^x è una primitiva di a^x a causa del coefficiente $\ln a$ che compare quando deriviamo: ma allora, con un aggiustamento simile a quello visto per le potenze notiamo che

$$\left(\frac{1}{\ln a} a^x\right)' = \frac{1}{\ln a} (a^x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln a)a^x = a^x$$

e quindi possiamo scrivere

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c \quad (9)$$

Infine, per quello che riguarda le funzioni trigonometriche $\sin x$ e $\cos x$, dal momento che $(\sin x)' = \cos x$ possiamo subito scrivere

$$\int \cos x dx = \sin x + c \quad (10)$$

Dal momento invece che $(\cos x)' = -\sin x$, abbiamo, aggiungendo un ulteriore segno meno, $(-\cos x)' = -(\cos x)' = -(-\sin x) = \sin x$ e quindi possiamo scrivere

$$\int \sin x dx = -\cos x + c \quad (11)$$

Come ultima primitiva citiamo il caso della primitiva di una funzione costante $f(x) = a$: è immediato verificare che una tale primitiva è $F(x) = ax$. Possiamo quindi scrivere, con la notazione dell'integrale indefinito,

$$\int a dx = ax + c \quad (12)$$

Avendo concluso la determinazione delle primitive delle funzioni x^α , a^x , $\sin x$, $\cos x$, possiamo ora vedere cosa succede per funzioni più complicate ottenute combinando queste quattro mediante somma, prodotto, quoziente, composizione e inversa.

Iniziamo dalla somma: in tal caso, è facile verificare che la primitiva della somma $f(x) + g(x)$ di due funzioni è data dalla somma di una primitiva di f più una primitiva di g : con la notazione degli integrali indefiniti possiamo quindi scrivere

$$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \quad (13)$$

Ad esempio, dal momento che una primitiva di $f(x) = x$ è $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ e una primitiva di $f(x) = \cos x$ è $F(x) = \sin x$, possiamo dire che una primitiva di $x + \cos x$ è $\frac{1}{2}x^2 + \sin x$, come è facile verificare calcolando la derivata di quest'ultima e sfruttando la proprietà delle derivate $(F + G)' = F' + G'$:

$$\left(\frac{1}{2}x^2 + \sin x\right)' = \left(\frac{1}{2}x^2\right)' + (\sin x)' = x + \cos x$$

Un'altra operazione rispetto alla quale le primitive si comportano in modo molto semplice è il prodotto di una funzione $f(x)$ per una costante c . Infatti, è facile verificare che se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, allora $cF(x)$ è una primitiva di $cf(x)$, in quanto (usando la proprietà per cui le costanti "escono fuori" dalla derivata), si ha subito

$$(cF(x))' = cF'(x) = cf(x)$$

Ad esempio, sapendo che una primitiva di $\cos x$ è $\sin x$ possiamo subito scrivere che una primitiva di $3 \cos x$ è data da $3 \sin x$.

Nella notazione degli integrali indefiniti per cui $\int f(x)dx$ denota una primitiva di $f(x)$, possiamo tradurre l'affermazione "una primitiva di $cf(x)$ è data da c per una primitiva di $f(x)$ " nel modo seguente

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx \quad (14)$$

che è molto efficace negli esercizi, nei quali le costanti potranno quindi essere "portate fuori" o "portate dentro" il segno di integrale.

Le proprietà (13) e (14), assieme alla (7) che ci dà la primitiva di una potenza, ci consentono di trovare una primitiva di qualunque polinomio, che è appunto somma di potenze moltiplicate per dei coefficienti costanti. Ad esempio, supponiamo di voler calcolare

$$\int (5x^3 + 2x^2 + 7) dx$$

Decomponendo l'integrale in base alla (13) e portando fuori i coefficienti in base alla (14) possiamo scrivere

$$5 \int x^3 dx + 2 \int x^2 dx + \int 7 dx$$

Usando ora la (7) (e la (12) per integrare la costante 7) si ottiene allora il risultato

$$5 \cdot \frac{x^4}{4} + 2 \cdot \frac{x^3}{3} + 7x + c = \frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 7x + c$$

Veniamo ora alla primitiva del prodotto $f(x) \cdot g(x)$ di due funzioni.

Per capire subito i problemi che emergono in questo caso, supponiamo ad esempio di voler calcolare una primitiva di $x \cdot \cos x$. Si potrebbe per un attimo ingenuamente pensare che valga una regola simile a quella appena vista per la somma e che tale primitiva sia data dal prodotto $\frac{1}{2}x^2 \cdot \sin x$ tra una primitiva di x e una primitiva di $\cos x$. Tuttavia, è immediato verificare che questo non è vero, in quanto, dalla regola di Leibniz $(FG)' = F'G + FG'$ per la derivata del prodotto si ha

$$\left(\frac{1}{2}x^2 \cdot \sin x\right)' = \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \sin x + \frac{1}{2}x^2(\sin x)' = x \sin x + \frac{1}{2}x^2 \cos x$$

che è ben diverso dal risultato $x \cdot \cos x$ che avremmo voluto ottenere.

In effetti, per il calcolo della primitiva di un prodotto non c'è una regola generale come per la primitiva di una somma: bisogna analizzare caso per caso e ogni prodotto può dover essere calcolato con una tecnica differente. Vediamo ora le tecniche più utilizzate².

0.2.1 Derivate di funzioni composte (integrali "immediati")

Il primo caso che vediamo è una conseguenza della regola di derivazione delle funzioni composte

²Mettiamo comunque in guardia che tali tecniche non sono esaustive, nel senso che un prodotto potrebbe non essere trattabile con nessuna di esse.

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

In base a tale regola, se dobbiamo integrare un prodotto della forma $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ allora possiamo immediatamente³ dire che una sua primitiva è proprio $f(g(x))$, ovvero scrivere

$$\int g'(x) \cdot f'(g(x)) dx = f(g(x)) + c \quad (15)$$

Vediamo subito alcuni esempi:

(1) Ad esempio, se $f(x) = \sin x$, essendo $f'(x) = \cos x$ la (15) diventa

$$\int g'(x) \cdot \cos(g(x)) dx = \sin(g(x)) + c \quad (16)$$

Ad esempio, se fosse $g(x) = x^2$, avremmo

$$\int 2x \cos(x^2) dx = \sin(x^2) + c$$

Si noti che se non avessimo avuto il coefficiente 2 davanti alla x avremmo comunque risolto immediatamente l'integrale moltiplicando e dividendo per 2 e sfruttando la proprietà per cui le costanti escono fuori dall'integrale, ovvero

$$\int x \cos(x^2) dx = \int \frac{1}{2} 2x \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int 2x \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sin(x^2) + c$$

(2) Se $f(x) = e^x$, essendo $f'(x) = e^x$ la (15) diventa

$$\int g'(x) \cdot e^{g(x)} dx = e^{g(x)} + c \quad (17)$$

Ad esempio, se fosse $g(x) = \sin x$ avremmo

$$\int \cos x \cdot e^{\sin x} dx = e^{\sin x}$$

³In questo senso, gli integrali che si riescono a risolvere grazie a questa osservazione si dicono anche *integrali immediati*.

- (3) Supponiamo di voler calcolare una primitiva di $\cos x \sin^3 x$, ovvero l'integrale indefinito

$$\int \cos x \cdot (\sin x)^3 dx$$

Si tratta di un integrale immediato nel senso visto sopra: infatti, il secondo fattore $(\sin x)^3$ è una composizione del tipo $f'(g(x))$ con $g(x) = \sin x$ e $f'(x) = x^3$ (ovvero $f(x) = \frac{1}{4}x^4$) e il primo fattore $\cos x$ è proprio la derivata $g'(x)$ della funzione interna $g(x)$. Ma allora, la funzione integranda in base alla regola $f'(g(x)) \cdot g'(x) = [f(g(x))]'$ è proprio la derivata della composizione $f(g(x)) = \frac{1}{4}(\sin x)^4$, e quindi possiamo scrivere

$$\int \cos x \cdot (\sin x)^3 dx = \frac{1}{4}(\sin x)^4 + c$$

- (4) Un esempio molto significativo della (15) si ha quando $f(x) = \ln x$, nel qual caso, essendo $f'(x) = \frac{1}{x}$, si ottiene $g'(x) \cdot f'(g(x)) = g'(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ e possiamo scrivere direttamente

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)| + c \quad (18)$$

Il valore assoluto in $|g(x)|$ è necessario per il motivo già spiegato quando abbiamo mostrato che la primitiva di $\frac{1}{x}$ è $\ln |x|$: essendo il logaritmo definito solo per valori positivi, nel caso in cui $g(x)$ sia negativa non sarebbe corretto scrivere $\ln g(x)$, mentre si può verificare facilmente che la primitiva corretta in tal caso è $\ln(-g(x))$.

La (18) ci dà quindi la primitiva di un quoziente nel quale il numeratore è la derivata del denominatore. Torneremo più avanti sul caso dei quozienti, ma possiamo già dare alcuni esempi significativi: ad esempio, la funzione cotangente $\cot g x = \frac{\cos x}{\sin x}$ è esattamente di questa forma in quanto il numeratore $\cos x$ è la derivata del denominatore $\sin x$. Possiamo quindi scrivere in base alla (18)

$$\int \cot g x dx = \ln |\sin x| + c \quad (19)$$

Analogamente, la tangente può essere scritta come $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{-\sin x}{\cos x}$ (i due segni meno sono stati aggiunti per mettere avere a numeratore $-\sin x$ che è la derivata di $\cos x$) da cui

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int -\frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln |\cos x| + c \quad (20)$$

Ancora, per concludere (prima di riprendere più avanti il caso dei quozienti) vediamo un esempio di funzione razionale (rapporto tra due polinomi) che si risolve in questo modo: supponiamo di voler determinare

$$\int \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2 + 5}$$

La derivata del denominatore $g(x) = x^3 + 3x^2 + 5$ è $g'(x) = 3x^2 + 6x$: a prima vista non si tratta della funzione al numeratore, ma vediamo subito che quest'ultimo differisce da $g'(x)$ semplicemente per un fattore costante 3. In altre parole, basta quindi moltiplicare e dividere per 3 per aggiustare la frazione e poter applicare la (18):

$$\int \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2 + 5} = \int \frac{1}{3} \frac{3x^2 + 6x}{x^3 + 3x^2 + 5} = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2 + 6x}{x^3 + 3x^2 + 5} = \frac{1}{3} \ln |x^3 + 3x^2 + 5| + c$$

0.2.2 Integrazione per parti

Vediamo ora un'altra tecnica molto utilizzata per la risoluzione di integrali di prodotti. Essa è una conseguenza della formula di derivazione del prodotto, che afferma che $(fg)' = f'g + fg'$. Se applichiamo l'integrale indefinito a entrambi i membri di questa uguaglianza, usando la (13) otteniamo

$$\int (fg)' \, dx = \int (f'g + fg') \, dx = \int f'g \, dx + \int fg' \, dx$$

Ma il primo integrale indefinito $\int (fg)' \, dx$ è semplicemente una primitiva di $(fg)'$, che è evidentemente fg . Quindi possiamo scrivere

$$fg = \int f'g \, dx + \int fg' \, dx$$

ovvero equivalentemente

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx \quad (21)$$

Questa uguaglianza ci dice che se dobbiamo trovare la primitiva di un prodotto della forma $f(x)g'(x)$ (ovvero un prodotto tra due funzioni di cui una delle due è una derivata $g'(x)$, o in altre parole conosciamo una sua primitiva $g(x)$), allora possiamo ridurci a calcolare una primitiva di $f'(x)g(x)$, ovvero "spostare la derivata da g a f ".

Quindi questa formula non ci sta dando direttamente una primitiva della funzione integranda $f g'$ ma ci dà un modo per trasformare l'integrale in un altro che molto spesso, come stiamo per vedere negli esempi, è più semplice da risolvere: tale metodo si chiama di *integrazione per parti*.

Vediamo subito alcuni esempi.

- (1) Supponiamo di voler trovare una primitiva del prodotto $x \cos x$, ovvero, nella notazione dell'integrale indefinito,

$$\int x \cos x dx$$

Si tratta proprio di un prodotto della forma $f(x)g'(x)$, con $f(x) = x$ e $g'(x) = \cos x$ (e quindi $g(x) = \sin x$). In base alla formula (21) di integrazione per parti abbiamo allora, essendo $f'(x) = 1$,

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x$$

Come si vede, l'integrale $\int f'(x)g(x) dx$ al quale ci siamo ridotti "spostando la derivata da g a f " è molto più semplice da calcolare dell'integrale iniziale.

- (2) Uno degli aspetti a cui fare attenzione nell'applicazione dell'integrazione per parti è la scelta, nel prodotto che dobbiamo integrare, di quale funzione considerare f e quale considerare g' . Per essere più chiari, supponiamo di voler calcolare

$$\int e^x \cdot x dx$$

Se ponessimo $f(x) = e^x$ e $g'(x) = x$ (ovvero $g(x) = \frac{1}{2}x^2$), la formula di integrazione per parti darebbe

$$\int e^x \cdot x \, dx = e^x \cdot \frac{1}{2}x^2 - \int e^x \cdot \frac{1}{2}x^2 \, dx$$

e l'integrale da calcolare si è trasformato in uno più complicato. Scegliendo invece⁴ $f(x) = x$ e $g'(x) = e^x$ (quindi $g(x) = e^x$) si ha

$$\int e^x \cdot x \, dx = e^x \cdot x - \int e^x \, dx = e^x \cdot x - e^x$$

- (3) A volte il metodo richiede un'applicazione iterata. Ad esempio, se dobbiamo calcolare

$$\int x^2 e^x \, dx$$

scelto $f(x) = x^2$ e $g'(x) = e^x$ (ovvero $g(x) = e^x$) abbiamo

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2x e^x \, dx$$

e ci siamo ridotti quindi all'integrale $\int 2x e^x \, dx = 2 \int x e^x \, dx$ al quale come abbiamo visto sopra si può nuovamente applicare l'integrazione per parti. Per completezza, sostituendo il risultato $\int x e^x \, dx = x e^x - e^x$ ottenuto sopra si ottiene quindi

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x$$

- (4) In alcuni casi, le funzioni $f(x)$ e $g'(x)$ possono non essere così evidenti come nei casi precedenti. Ad esempio, si può applicare la regola di integrazione per parti per ottenere una primitiva del logaritmo $\ln x$ vedendolo come prodotto $\ln x \cdot 1$ e considerando quindi $f(x) = \ln x$ e $g'(x) = 1$ (da cui $g(x) = x$). Si ha allora, in base alla formula di integrazione per parti,

$$\int \ln x \cdot 1 \, dx = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = \ln x \cdot x - \int 1 \, dx = \ln x \cdot x - x$$

Come esempio riassuntivo dei metodi visti, mostriamo come si può determinare una primitiva dell'arcotangente applicando più tecniche all'interno dello stesso esercizio:

⁴Essendo il prodotto commutativo, $e^x \cdot x = x \cdot e^x$ e questo ci consente di scegliere come preferiamo chi è f e chi è g'

$$\int \operatorname{artg} x \, dx = \int \operatorname{artg} x \cdot 1 \, dx =$$

(applicando la regola di integrazione per parti a $f(x) = \operatorname{artg} x$ e $g'(x) = 1$, da cui $g(x) = x$)

$$= x \cdot \operatorname{artg} x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx \quad (22)$$

(dove abbiamo usato il fatto che $f'(x) = (\operatorname{artg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$).

Ora l'integrale $x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx = \int \frac{x}{1+x^2} \, dx$ è del tipo (18) una volta che moltiplichiamo e dividiamo per 2, ovvero

$$\int \frac{x}{1+x^2} \, dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + c$$

Sostituendo nella (22) si trova quindi

$$\int \operatorname{artg} x \, dx = x \cdot \operatorname{artg} x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + c$$

0.2.3 Integrazione per sostituzione

Vediamo ora un'altra tecnica di integrazione usata spesso quando la funzione integranda è una funzione composta. Per illustrarla con un esempio, supponiamo di voler calcolare l'integrale indefinito

$$\int e^{\sqrt{x}} \, dx \quad (23)$$

La difficoltà dell'integrale consiste evidentemente nel fatto che l'argomento dell'esponenziale è la radice di x anziché x , ovvero la funzione integranda si presenta come composizione $f(g(x))$, con $f(x) = e^x$ e $g(x) = \sqrt{x}$.

Si può allora in tal caso risolvere l'integrale tramite la sostituzione $\sqrt{x} = y$, in modo del tutto analogo al metodo di sostituzione visto per la risoluzione dei limiti. Più precisamente, con tale sostituzione l'integrale va trasformato come segue:

- (1) si trasforma la funzione integranda tramite la sostituzione scelta: in questo caso, avendo posto $\sqrt{x} = y$ la funzione integranda diventa e^y . In generale, se la funzione è più complessa, può essere necessario esprimere

la x in funzione della y , ovvero in questo caso $x = y^2$ (in altre parole, invertire la sostituzione scelta) e sostituire dappertutto nella funzione y^2 ovunque compaia la x .

- (2) si trasforma il dx che compare nell'integrale in base alla regola seguente: detta $x = \phi(y)$ la trasformazione fatta (con la x espressa in funzione di y), si pone

$$dx = \phi'(y) dy$$

Nel nostro caso in cui $x = y^2$, sarà quindi $dx = 2y dy$

Con questo procedimento, l'integrale (23) diventa quindi

$$\int e^y \cdot 2y dy = 2 \int ye^y dy$$

L'integrale così trasformato in y si può allora risolvere facilmente per parti ottenendo $2ye^y - 2e^y$ (a parte il coefficiente 2 e il diverso nome dato alla variabile, è lo stesso che abbiamo già calcolato a pagina 16 dove abbiamo appunto scritto $\int xe^x dx = xe^x - e^x$). A questo punto, si torna alla variabile x risostituendo $y = \sqrt{x}$ in $2ye^y - 2e^y$ e ottenendo finalmente

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}}$$

Osservazione 0.4. Se il problema fosse stato calcolare l'integrale definito $\int_2^3 e^{\sqrt{x}} dx$, avremmo potuto procedere tramite il metodo di sostituzione in due modi diversi (anche se sostanzialmente equivalenti): uno è trovare prima la primitiva $F(x)$ di $e^{\sqrt{x}}$ come abbiamo appena fatto, ovvero $F(x) = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}}$, e poi in base alla formula (2) scrivere

$$\int_2^3 e^{\sqrt{x}} dx = F(3) - F(2) = (2\sqrt{3}e^{\sqrt{3}} - 2e^{\sqrt{3}}) - (2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}} - 2e^{\sqrt{2}}) \quad (24)$$

In alternativa, il metodo di sostituzione può essere applicato direttamente all'integrale definito e non solo per la ricerca della primitiva: più precisamente, oltre ai passi (1) e (2) descritti sopra che ci dicono di trasformare la funzione integranda e il dx mediante la sostituzione scelta, si aggiunge l'ulteriore passo

- (3) gli estremi $x = 2$ e $x = 3$ si trasformano in base alla regola di sostituzione $y = \sqrt{x}$ e più precisamente diventano gli estremi corrispondenti rispetto alla nuova variabile $y = \sqrt{2}$ (corrispondente all'estremo $x = 2$) e $y = \sqrt{3}$ (corrispondente all'estremo $x = 3$). Assieme agli altri passi (1) e (2) l'integrale definito diventa quindi

$$2 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} ye^y dy$$

Essendo la primitiva rispetto alla y , come abbiamo visto, $F(y) = 2ye^y - 2e^y$, possiamo senza rieffettuare la sostituzione sulla primitiva applicare direttamente la (2) e scrivere

$$2 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} ye^y dy = F(\sqrt{3}) - F(\sqrt{2}) = (2\sqrt{3}e^{\sqrt{3}} - 2e^{\sqrt{3}}) - (2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}} - 2e^{\sqrt{2}})$$

che è ovviamente lo stesso risultato ottenuto sopra nella (24).

Osservazione 0.5. Ovviamente il metodo di sostituzione, come già per le tecniche viste nelle pagine precedenti, può rivelarsi inutile per risolvere l'integrale. Ad esempio, supponiamo di voler calcolare l'integrale indefinito

$$\int e^{(x^2)} dx \tag{25}$$

La forma della funzione integranda potrebbe suggerire di usare la sostituzione $x^2 = y$ per trasformarla in e^y ; tuttavia, come abbiamo visto sopra dobbiamo anche modificare il dx usando l'inversa della sostituzione, ovvero $x = \sqrt{y}$, e derivando:

$$dx = (\sqrt{y})' dy = \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$$

L'integrale si trasforma quindi come segue:

$$\int e^{(x^2)} dx = \int e^y \frac{1}{2\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \int \frac{e^y}{\sqrt{y}} dy$$

ed è facile verificare che l'integrale in y non si riesce comunque a risolvere (per esempio per parti).

In effetti, è possibile dimostrare che l'integrale (25) è un esempio di cosiddetto *integrale non elementare*: si tratta di integrali che non sono esprimibili in termini di funzioni elementari, ovvero non è possibile scrivere la primitiva di $e^{(x^2)}$ (che pur esiste) come somma, prodotto, quoziente o composizione di esponenziali, potenze, funzioni trigonometriche e loro inverse.

Vedremo più avanti altri esempi di integrali non elementari, alcuni dei quali sono molto importanti per le applicazioni.