Vediamo altri esempi di integrali indefiniti risolti per sostituzione.

$$\int \mathrm{tg}(2x+5)\ dx$$

Dal momento che conosciamo già una primitiva della tangente tg$x$ (abbiamo visto nella formula (20) a pagina 14 della seconda parte che $\int \mathrm{tg}x\ dx = -\ln|\cos x| + c$), viene spontaneo fare la sostituzione $2x+5=y$ ovvero, invertendo, $x = \frac{1}{2}y - \frac{5}{2}$: si ottiene quindi $dx = \frac{1}{2}dy$ e quindi otteniamo

$$\int \mathrm{tg}y \cdot \frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}\int \mathrm{tg}y\ dy = -\frac{1}{2}\ln|\cos y| + c = -\frac{1}{2}\ln|\cos(2x+5)| + c$$

In generale, quando si applica il metodo di sostituzione, la semplificazione della funzione integranda dovuta alla sostituzione $x = \phi(y)$ rischia di essere vanificata dall'effetto della trasformazione $dx = \phi'(y)dy$ che fa comparire la funzione aggiuntiva $\phi'(y)$. L'esempio appena visto mostra che sostituzioni del tipo $ax+b=y$ in cui y è un polinomio di primo grado rispetto a x (si chiamano anche sostituzioni lineari) non comportano questo rischio dal momento che nel passare da dx a dy compare al più una costante moltiplicativa che porteremo poi fuori dall'integrale.

Ad esempio, consideriamo

$$\int \frac{x^2+1}{x+2}\ dx$$

L'apparente difficoltà dell'integrale consiste nella presenza della costante additiva $+2$ a denominatore: per essere più espliciti, se l'integrale fosse stato $\int \frac{x^2+1}{x}\ dx$ avremmo semplicemente potuto spezzare la frazione e scrivere

$$\int \frac{x^2+1}{x}\ dx = \int \left(\frac{x^2}{x} + \frac{1}{x}\right)\ dx = \int \frac{x^2}{x}\ dx + \int \frac{1}{x}\ dx = \int x\ dx + \int \frac{1}{x}\ dx = \frac{1}{2}x^2 + \ln|x| + c$$

Allo scopo di "eliminare" il $+2$ dal denominatore allora consideriamo la sostituzione $x+2=y$, ovvero $x=y-2$. Dal momento che si ha semplicemente $dx = dy$, si ha

$$\int \frac{x^2+1}{x+2}\ dx = \int \frac{(y-2)^2+1}{y}\ dy = \int \frac{y^2-4y+5}{y}\ dy = \int \left(\frac{y^2}{y} - \frac{4y}{y} + \frac{5}{y}\right)\ dy =$$

$$= \int y\ dy - 4\int 1\ dy + 5\int \frac{1}{y}\ dy = \frac{1}{2}y^2 - 4y + 5\ln|y| + c =$$

$$= \frac{1}{2}(x+2)^2 - 4(x+2) + 5\ln|x+2| + c$$

Come ultimo esempio di risoluzione per sostituzione, rivediamo un integrale che abbiamo già risolto nella seconda parte, ovvero $\int \ln x \; dx$, che con il trucco $\ln x = \ln x \cdot 1$ abbiamo potuto risolvere per parti, ottenendo $\int \ln x \; dx = x \ln x - x$.

Per provare a applicare il metodo di sostituzione, possiamo scegliere $\ln x = y$ sostituendo quindi tutta la funzione integranda. Si ha quindi $x = e^y$ e $dx = e^y dy$, e l'integrale si trasforma come segue

$$\int \ln x \; dx = \int y e^y \; dy$$

L'integrale in y può essere allora risolto per parti[1] scegliendo $f = y$ e $g' = e^y$ (quindi $g = e^y$) e applicando la formula $\int fg' = fg - \int f'g$:

$$\int y e^y \; dy = y e^y - \int 1 \cdot e^y \; dy = y e^y - e^y$$

Risostituendo $y = \ln x$ si ottiene allora

$$y e^y - y = \ln x \cdot e^{\ln x} - e^{\ln x} = \ln x \cdot x - x$$

in accordo col risultato già trovato.

Come abbiamo già detto, in questo corso non faremo una trattazione completa dell'integrazione delle funzioni razionali (ovvero i rapporti tra polinomi) per la risoluzione delle quali esiste un metodo generale. Ci limiteremo qui a mostrare come si risolvono integrali del tipo

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} \; dx$$

in cui il denominatore della funzione integranda è un generico polinomio di secondo grado.

Come stiamo per vedere, la risoluzione dell'integrale passa per tre strade diverse a seconda che il polinomio $ax^2 + bx + c$ sia un quadrato, si scomponga come prodotto di due fattori di primo grado o infine non si scomponga: equivalentemente, a seconda che l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ abbia due soluzioni reali coincidenti, due reali distinte, o nessuna soluzione reale.

Vediamo i tre casi illustrandoli con tre esempi:

[1] Si potrebbe quindi obiettare che questa strada è meno conveniente rispetto ad applicare direttamente l'integrazione per parti, ma abbiamo il vantaggio di non essere dovuti ricorrere al trucco $\ln x = \ln x \cdot 1$.

(1) Consideriamo l'integrale

$$\int \frac{1}{x^2 - 6x + 9}\, dx$$

L'equazione $x^2 - 6x + 9 = 0$, come è facile verificare mediante la celebre formula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, ha l'unica soluzione $x = 3$ (ovvero due soluzioni coincidenti). Questo significa che il polinomio $x^2 - 6x + 9$ si scompone come $(x-3)(x-3) = (x-3)^2$, ovvero è un quadrato. L'integrale si riscrive quindi come

$$\int \frac{1}{x^2 - 6x + 9}\, dx = \int \frac{1}{(x-3)^2}\, dx = \int (x-3)^{-2}\, dx$$

che può essere risolto mediante la semplice sostituzione lineare $x - 3 = y$ (da cui $x = y + 3$ e $dx = dy$) riducendoci all'integrale

$$\int y^{-2}\, dy = -y^{-1} + c = -(x-3)^{-1} + c = -\frac{1}{x-3} + c$$

(nella prima uguaglianza abbiamo usato la formula per l'integrazione delle potenze $\int y^\alpha\, dy = \frac{1}{\alpha+1} y^{\alpha+1} + c$ nel caso $\alpha = -2$).

(2) Consideriamo ora l'integrale

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x - 3}\, dx$$

L'equazione $x^2 - 2x - 3 = 0$, come è facile verificare sempre mediante la formula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, ha le due soluzioni reali distinte $x = 3$ e $x = -1$. Questo significa che il polinomio $x^2 - 2x - 3$ si scompone come $(x-3)(x+1)$, e l'integrale si riscrive quindi come

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x - 3}\, dx = \int \frac{1}{(x-3)(x+1)}\, dx$$

Ora, allo scopo di risolvere l'integrale, dobbiamo riuscire a riscrivere la funzione $\frac{1}{(x-3)(x+1)}$ come somma di due frazioni separando i fattori $x - 3$ e $x + 1$ a denominatore, ovvero nella forma

$$\frac{1}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} \tag{1}$$

con A e B numeri da determinare in modo che questa uguaglianza risulti vera. Allo scopo di determinare questi due numeri, osserviamo che calcolando la somma di frazioni a secondo membro (mettendo a denominatore comune) si ottiene

$$\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-3)}{(x-3)(x+1)}=\frac{Ax+A+Bx-3B}{(x-3)(x+1)}=\frac{(A+B)x+(A-3B)}{(x-3)(x+1)}$$

e quindi perché l'uguaglianza (1) sia vera basta scegliere A e B in modo che il coefficiente di x a numeratore sia nullo, ovvero $A+B=0$, e il termine noto $A-3B=1$. La prima condizione ci dice che $B=-A$, che sostituita nella seconda ci dà $A-3(-A)=1$ ovvero $4A=1$ e quindi $A=\frac{1}{4}$. Essendo $B=-A$ concludiamo $B=-\frac{1}{4}$, e allora la (1) si scrive

$$\frac{1}{(x-3)(x+1)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}$$

Fatta questa manipolazione preliminare algebrica, siamo finalmente pronti a risolvere l'integrale: si ha infatti

$$\int\frac{1}{x^2-6x+9}\,dx=\int\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}\right)\,dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-3}\,dx-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+1}\,dx \tag{2}$$

e ciascuno dei due integrali si risolve con una semplice sostituzione lineare: ponendo $x-3=y$ (da cui $x=y+3$ e $dx=dy$) in $\int\frac{1}{x-3}\,dx$ si trova

$$\int\frac{1}{x-3}\,dx=\int\frac{1}{y}\,dy=\ln|y|+c=\ln|x-3|+c$$

Analogamente ponendo $x+1=y$ (da cui $x=y-1$ e $dx=dy$) in $\int\frac{1}{x+1}\,dx$ si trova

$$\int\frac{1}{x+1}\,dx=\int\frac{1}{y}\,dy=\ln|y|+c=\ln|x+1|+c$$

Sostituendo nella (2) si ottiene finalmente

$$\int\frac{1}{x^2-6x+9}\,dx=\frac{1}{4}\ln|x-3|-\frac{1}{4}\ln|x+1|+c$$

(usando le proprietà del logaritmo $a \ln b = \ln(b^a)$ e $\ln a + \ln b = \ln(ab)$ e ricordando che $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$ questa soluzione può essere riscritta in modo più compatto come $\ln \sqrt[4]{\frac{|x-3|}{|x+1|}} + c$)

(3) Infine, consideriamo l'integrale

$$\int \frac{1}{x^2 + 6x + 11} \, dx$$

L'equazione $x^2 + 6x + 11 = 0$, come è facile verificare sempre mediante la formula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, stavolta non ha nessuna soluzione reale in quanto la quantità sotto radice $b^2 - 4ac = 36 - 44$ è negativa. Di conseguenza, tale polinomio non può essere stavolta scomposto come prodotto di fattori di primo grado e i metodi dei due esempi precedenti non si applicano.

Come stiamo per vedere, in questo caso si riesce sempre a ricondursi mediante una opportuna manipolazione algebrica preliminare e una sostituzione all'integrale $\int \frac{1}{1+y^2} dy$ che ha come risultato $\mathrm{artg} y + c$.

Infatti, iniziamo a osservare che quando un polinomio di secondo grado non si scompone esso può sempre essere scritto come un quadrato più una costante positiva: ad esempio, in questo caso si ha

$$x^2 + 6x + 11 = (x^2 + 6x + 9) + 2 = (x + 3)^2 + 2$$

L'integrale può allora essere scritto come

$$\int \frac{1}{2 + (x + 3)^2} \, dx$$

Mettendo in evidenza il 2 a denominatore si ha

$$\int \frac{1}{2\left[1 + \frac{(x+3)^2}{2}\right]} \, dx = \int \frac{1}{2\left[1 + \left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)^2\right]} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)^2} \, dx$$

A questo punto è facile ricondurci all'integrale $\int \frac{1}{1+y^2} dy = \mathrm{artg} y + c$ mediante la sostituzione $\frac{x+3}{\sqrt{2}} = y$: essendo $x = \sqrt{2}y - 3$, si ha $dx = \sqrt{2}dy$ e quindi l'integrale diventa finalmente

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+y^2}\,\sqrt{2}dy =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{\sqrt{2}}{2}\text{artg}y + c = \frac{\sqrt{2}}{2}\text{artg}\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right) + c$$

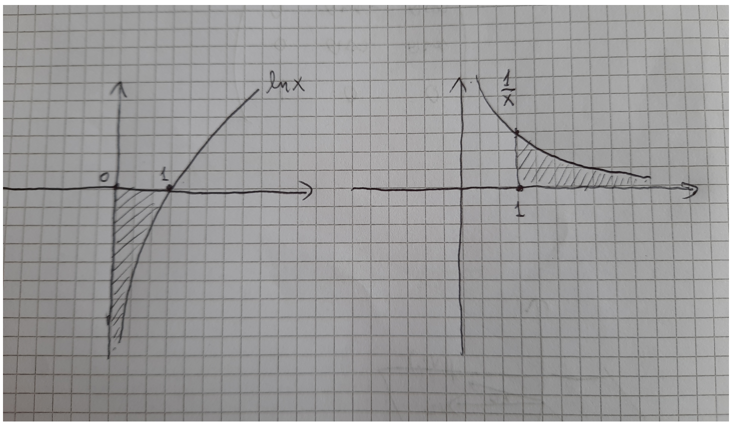
0.1 Integrali impropri

Un integrale improprio è un integrale definito nel quale la funzione è illimitata in corrispondenza di uno degli estremi di integrazione oppure uno degli estremi di integrazione è $\pm\infty$. Ad esempio, sono integrali impropri i seguenti:

$$\int_0^1 \ln x\,dx,\quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx \tag{3}$$

Infatti, nel primo integrale la funzione $\ln x$ non è definita e come sappiamo tende a $-\infty$ per $x \to 0^+$ (il primo estremo); nel secondo integrale, il secondo estremo di integrazione è $+\infty$.

Dal punto di vista dell'intepretazione geometrica dell'integrale, tali integrali corrispondono a calcolare aree di porzioni di piano illimitate, come illustrato nel disegno seguente

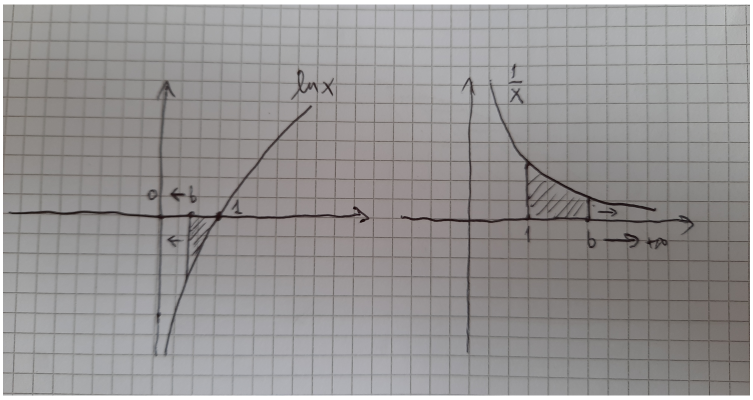


Ora, si potrebbe ingenuamente pensare che essendo figure non limitate tali porzioni debbano avere necessariamente area infinita: tuttavia, come stiamo per vedere, questo non è vero.

Più precisamente, iniziamo a chiarire che l'integrale improprio va calcolato sostituendo l'estremo in cui la funzione è illimitata o l'estremo ∞ con un estremo generico b in modo che la funzione sia definita e limitata nel nuovo intervallo di integrazione e poi, una volta risolto l'integrale, facendo tendere tale estremo al valore in cui la funzione era illimitata o a ∞. Ad esempio, i due integrali in (3) sono da intendersi come

$$\lim_{b \to 0^+} \int_b^1 \ln x \; dx, \quad \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} \; dx$$

ovvero graficamente



Calcoliamo allora i due integrali: per quello che riguarda il primo, sappiamo già che una primitiva di $\ln x$ è $x \ln x - x$, quindi

$$\int_b^1 \ln x \; dx = [x \ln x - x]_b^1 = (1 \ln 1 - 1) - (b \ln b - b) = b - b \ln b - 1$$

Calcolando ora il limite abbiamo

$$\lim_{b \to 0^+} b - b \ln b - 1 = -1$$

dove abbiamo usato il fatto, visto nella formula (12) a pagina 7 della terza parte sui limiti, che $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$.

Quindi possiamo scrivere

$$\int_0^1 \ln x \; dx = -1$$

che ci dice quindi che la figura illimitata rappresentata nel disegno a sinistra a pagina 6 ha in realtà area finita uguale a 1 (il segno meno nel risultato dell'integrale è dovuto come sappiamo al fatto che la funzione è negativa).

Per quello che riguarda invece il secondo integrale in (3), usando il fatto che $\ln x$ è una primitiva di $\frac{1}{x}$ abbiamo

$$\int_1^b \frac{1}{x}\, dx = \ln b - \ln 1 = \ln b$$

Calcolando ora il limite abbiamo

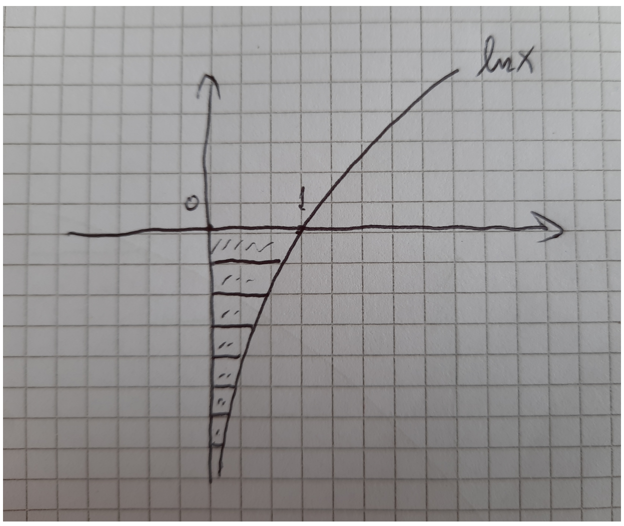
$$\lim_{b\to+\infty} \ln b = +\infty$$

e quindi possiamo scrivere

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = +\infty$$

In tal caso, quindi l'area della porzione illimitata è invece infinita.

Osservazione 0.1. Il fatto che l'area di una figura illimitata possa essere finita non deve stupire se si pensa che tale figura può essere scomposta come somma di porzioni limitate di area sempre più piccola, come illustrato nel disegno seguente



e come sappiamo una somma di infiniti addendi sempre che tendono a zero può essere finita: un tale esempio l'abbiamo già incontrato nella nota a piè di pagina a pagina 6 della quarta parte sulle derivate, dove abbiamo visto che $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = e$.

Si noti comunque che in generale una somma infinita di addendi può dare risultato infinito anche se gli addendi diventano sempre più piccoli tendendo a zero: ad esempio è noto che se consideriamo la stessa somma infinita appena vista ma senza fattoriali, ovvero $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$, il risultato di questa sommatoria è infinito. Intuitivamente, il motivo è che gli addendi tendono a zero ma non abbastanza velocemente da far sì che i loro contributi sommandosi diano una quantità finita (geometricamente, si tratta di quello che sta succedendo all'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ se lo vediamo come somma di porzioni limitate di area sempre più piccola, e in effetti vedremo alla fine del capitolo un collegamento tra questi due fenomeni).

Se un integrale improprio dà risultato finito, diremo che *la funzione è integrabile in senso improprio* (o che l'integrale è *convergente*); se il risultato è infinito, diremo invece che *la funzione non è integrabile in senso improprio* (o che l'integrale è *divergente*).

Una categoria particolarmente significativa di integrali impropri, che possono essere usati come vedremo più avanti come termini di confronto con altri integrali impropri, sono gli integrali

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

delle potenze negative $\frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$ (quindi $\alpha > 0$), o nell'intervallo limitato $(0,1]$ (si tratta di un integrale improprio in quanto la funzione tende a infinito per $x \to 0^+$) o nell'intervallo illimitato $[1,+\infty)$ (si noti che la scelta di 1 come secondo estremo del primo integrale e come primo estremo del secondo integrale è convenzionale e non ha particolare significato, essendo importante soprattutto il comportamento dell'integrale in corrispondenza dell'altro estremo).

Allo scopo di risolvere gli integrali, ricordiamo che la primitiva della potenza $\frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$ è $\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}$ per $\alpha \neq 1$ e $\ln x$ per $\alpha = 1$. Abbiamo allora, per $\alpha \neq 1$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{1-\alpha}b^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}1^{1-\alpha}\right] =$$

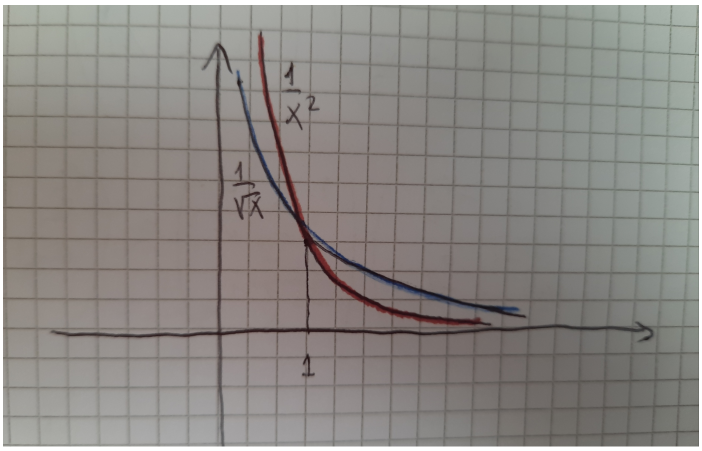
$$= \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{1-\alpha}b^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right] \tag{4}$$

Ora, se $1-\alpha > 0$ (ovvero $\alpha < 1$) si ha che l'esponente della potenza $b^{1-\alpha}$ è positivo e quindi $\lim_{b\to+\infty} b^{1-\alpha} = +\infty$: l'integrale è quindi infinito; se invece $1-\alpha < 0$ (ovvero $\alpha > 1$) si ha che l'esponente della potenza $b^{1-\alpha}$ è negativo e quindi $\lim_{b\to+\infty} b^{1-\alpha} = 0$: l'integrale è quindi finito e il suo risultato, come si vede dalla (4), è $-\frac{1}{1-\alpha}$. Riassumendo,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 1 \\ -\frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

Ad esempio, l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ (corrispondente a $\alpha = \frac{1}{2}$) diverge a infinito, mentre l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ (corrispondente a $\alpha = 3$) converge al valore finito $-\frac{1}{1-\alpha} = -\frac{1}{1-3} = \frac{1}{2}$.

La spiegazione intuitiva di questa differenza sta nel fatto che, per $x \to +\infty$, la funzione $\frac{1}{x^2}$ va a zero più rapidamente della funzione $\frac{1}{\sqrt{x}}$, e quindi la porzione illimitata di cui stiamo calcolando l'area risulta "più schiacciata sull'asse orizzontale" e quindi minore.



Per quello che riguarda l'integrale improprio sull'intervallo $(0, 1]$, il comportamento in funzione di α si rovescia rispetto a quello per l'intervallo $[1, +\infty)$: più precisamente, per $\alpha \neq 1$ abbiamo

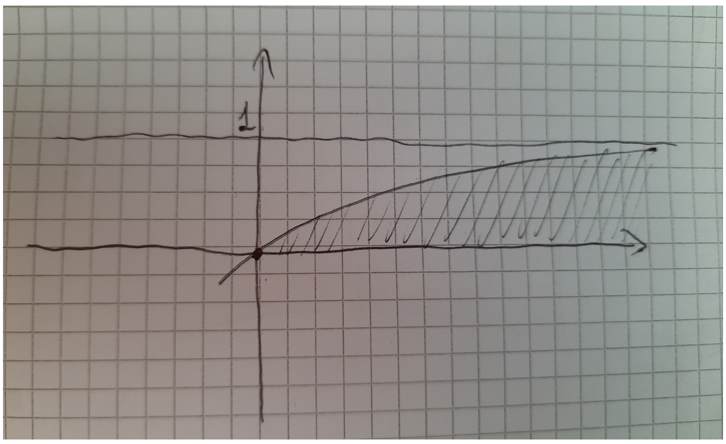
$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{b\to 0^+}\int_b^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{b\to 0^+}\left[\frac{1}{1-\alpha}1^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}b^{1-\alpha}\right] =$$
$$= \lim_{b\to 0^+}\left[\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}b^{1-\alpha}\right] \tag{5}$$

Ora, se $1-\alpha > 0$ (ovvero $\alpha < 1$) si ha che l'esponente della potenza $b^{1-\alpha}$ è positivo e quindi $\lim_{b\to 0^+} b^{1-\alpha} = 0$: l'integrale è quindi finito con valore $\frac{1}{1-\alpha}$; se invece $1-\alpha < 0$ (ovvero $\alpha > 1$) si ha che l'esponente della potenza $b^{1-\alpha}$ è negativo e quindi $\lim_{b\to 0^+} b^{1-\alpha} = +\infty$: l'integrale è quindi infinito. Riassumendo,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

Nel caso $\alpha = 1$, abbiamo già visto a pagina 8 che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$; analogamente, si ha $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to 0^+}\int_b^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to 0^+}[\ln 1 - \ln b] = \lim_{b\to 0^+}[-\ln b] = +\infty$ (quindi nel caso $\alpha = 1$ l'integrale diverge in entrambi i casi).

Osservazione 0.2. Si noti che, integrando su un intervallo illimitato, possiamo sperare che l'integrale converga solo se la funzione tende a zero per $x \to \infty$. Ad esempio, la funzione $f(x) = \frac{x}{x+1}$ è tale che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$ (abbiamo diviso numeratore e denominatore per x per sciogliere la forma indeterminata). Quindi essa ha un asintoto orizzontale a quota 1 e quindi, come illustrato nel seguente disegno che rappresenta il suo grafico da 0 a $+\infty$,per x abbastanza grande tende a approssimare sempre meglio un rettangolo di altezza 1 e base illimitata, la cui area è chiaramente infinita.



Per avere una conferma analitica rigorosa di questa osservazione grafica, calcoliamo l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x+1}\, dx$: per quello che riguarda la primitiva della funzione integranda, calcoliamola come segue:

$$\int \frac{x}{x+1}\, dx = \int \frac{x+1-1}{x+1}\, dx = \int \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx =$$

$$= \int 1\, dx - \int \frac{1}{x+1}\, dx = x - \ln|x+1| + c$$

(l'integrale $\int \frac{1}{x+1}\, dx$ è del tipo $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx$, con $f(x) = x+1$).
Quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x+1}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{x}{x+1}\, dx = \lim_{b\to+\infty} [(b - \ln|b+1|) - (0 - \ln|0+1|)] =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} b - \ln(b+1)$$

(per semplicità abbiamo riscritto l'argomento del logaritmo senza valore assoluto in quanto per $b \to +\infty$ la quantità $b+1$ è sicuramente positiva). Ora, risolviamo la forma indeterminata "infinito meno infinito" $\lim_{b\to+\infty} b - \ln(b+1)$ riscrivendola come segue:

$$\lim_{b\to+\infty} b \cdot \left(1 - \frac{\ln(b+1)}{b}\right) \tag{6}$$

Dal momento che $\lim_{b\to+\infty} \frac{\ln(b+1)}{b} = 0$ (come può essere immmediatamente verificato col metodo di de L'Hopital o ricordando che il logaritmo va a infinito più lentamente di qualunque potenza) si vede allora che la quantità tra parentesi tonde nella (6) tende a 1 e quindi essendo moltiplicata per b che tende a infinito otteniamo come risultato $+\infty$, confermando che l'integrale diverge.

0.2 Integrali non elementari e integrali impropri

Nell'Osservazione 0.5 a pagina 19 della seconda parte, abbiamo già avuto modo di accennare al fatto che esistono funzioni (come $f(x) =$

$e^{(x^2)}$) la cui primitiva non può essere determinata esplicitamente come funzione elementare. In questo paragrafo vedremo altri esempi di funzioni non integrabili elementarmente e vedremo che tuttavia esiste un metodo, basato sul confronto tra infinitesimi, per capire almeno se un integrale improprio non elementare può essere convergente o meno.

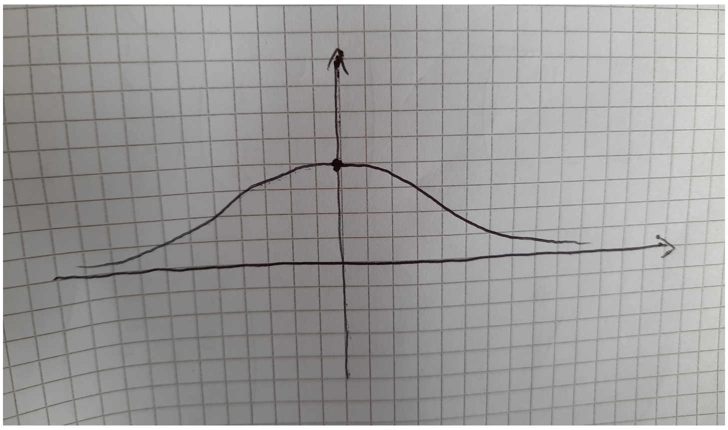
Iniziamo con elencare alcuni importanti integrali non elementari

(1) Per ogni $a \neq 0$ l'integrale

$$\int e^{(ax^2)}\, dx$$

non può essere espresso come funzione elementare (la funzione citata sopra corrisponde al caso $a = 1$).

Per $a < 0$ tali integrali sono molto importanti in probabilità e statistica in quanto, senza pretendere di entrare in dettagli, la funzione integranda ci dà la densità di probabilità corrispondente a una cosiddetta distribuzione normale, rappresentata dal famoso grafico "a campana" seguente



e la primitiva data dall'integrale definito rappresenta la cosiddetta funzione degli errori.

(2) L'integrale

$$\int \frac{1}{\ln x}\, dx$$

chiamato anche *funzione logaritmo integrale*, non può essere espresso come funzione elementare.

La sua importanza è dovuta soprattutto al celebre teorema dei numeri primi, il quale afferma che tale funzione, per $x \to +\infty$, è un infinito dello stesso ordine della funzione che per ogni x ci dice quanti sono i numeri primi minori di x, e può quindi essere usata per stimare il numero di primi minori di un dato x, quando x è abbastanza grande.

(3) Gli integrali

$$\int \cos(x^2)\ dx, \quad \int \sin(x^2)\ dx$$

sono detti *integrali di Fresnel* e non possono essere espressi come funzioni elementari.

Si tratta di integrali che compaiono in problemi di ottica (e in particolare di diffrazione) e nel problema pratico della determinazione di una curva la cui curvatura, partendo da zero, aumenti in maniera lineare (tali curve sono usate in ingegneria stradale per raccordare in modo più soft possibile[2] tratti rettilinei, che hanno curvatura zero, con tratti in cui la strada inizia a curvare).

(4) Altri due esempi di integrali non elementari famosi sono i seguenti

$$\int \frac{\sin x}{x}\ dx, \quad \int \frac{\cos x}{x}\ dx$$

Osservazione 0.3. La lista degli integrali non elementari appena vista non è assolutamente esaustiva: esistono chiaramente infiniti altri esempi di integrali non elementari, ad esempio per scriverne uno che non coinvolge funzioni trigonometriche, esponenziali o logaritmi, l'integrale $\int x\sqrt{1+x^3}\ dx$ (che fa parte di una categoria di integrali detti *integrali di Chebyschev*); comunque, se un integrale dato si riduce a uno degli integrali non elementari (1)-(4) visti sopra (ad esempio mediante una trasformazione per sostituzione o a un'applicazione del metodo per parti) sicuramente esso non è elementare.

Ad esempio, l'integrale $\int x^2 \cos(x^2)\ dx$ è non elementare in quanto, vedendo la funzione integranda come prodotto $x \cdot x\cos(x^2)$ e applicando

[2]Se raccordassimo un tratto rettilineo per esempio con un tratto di circonferenza, la curvatura passerebbe improvvisamente da zero (la curvatura della retta) a un valore costante diverso da zero (la curvatura della circonferenza risulta costante e tanto più grande quanto più piccolo è il raggio della circonferenza), e questo cambio brusco di curvatura creerebbe dei problemi pratici.

il metodo per parti a $g = x$ e $f' = x\cos(x^2) = \frac{1}{2}2x\cos(x^2)$ (quindi $f = \frac{1}{2}\sin(x^2)$) si ottiene

$$\int x^2\cos(x^2)\,dx = x\cdot\frac{1}{2}\sin(x^2) - \int 1\cdot\frac{1}{2}\sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}x\sin(x^2) - \frac{1}{2}\int\sin(x^2)\,dx$$

e essendo non elementare l'integrale $\int\sin(x^2)\,dx$ che è comparso con l'applicazione del metodo, non può essere elementare neanche l'integrale iniziale.

Nonostante integrali indefiniti come $\int e^{(-x^2)}\,dx$ non possano essere calcolati esplicitamente, tuttavia è possibile dire qualcosa sulla convergenza o meno di integrali impropri come

$$\int_0^{+\infty} e^{(-x^2)}\,dx$$

Infatti, l'idea è la seguente: la funzione integranda $e^{(-x^2)}$ è per $x \to +\infty$ un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\frac{1}{x^2}$ in quanto

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{(-x^2)}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{(x^2)}} = 0$$

dove per ottenere il risultato finale abbiamo sfruttato il fatto che l'esponenziale va a infinito più rapidamente di qualsiasi potenza di x (per vederlo in modo più chiaro, può essere utile applicare la sostituzione $y = x^2$, con la quale il limite diventa $\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^y}$).

A questo punto, possiamo dedurre subito la convergenza dell'integrale $\int_0^{+\infty} e^{(-x^2)}\,dx$ mediante il seguente principio:

Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni non negative[3]*. Se l'integrale improprio $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ è finito, e $g(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $f(x)$ per $x \to +\infty$, allora anche l'integrale improprio $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ è finito.*

(il principio vale anche per integrali impropri della forma $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$).

Non dimostriamo tale principio, ma esso è facilmente comprensibile se si pensa che il fatto che $g(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore

[3] L'ipotesi serve a evitare situazioni particolari, ma omettiamo i dettagli.

rispetto a $f(x)$ per $x \to +\infty$ implica che $g(x)$ sia, a partire da un certo x sufficientemente grande in poi, necessariamente minore di $f(x)$, che a sua volta implica che l'area della porzione illimitata determinata dal grafico di $g(x)$ è minore dell'area della porzione illimitata determinata dal grafico di $f(x)$, e quindi se quest'ultima è finita lo è anche la prima.

Concludiamo questa parte sugli integrali impropri con un cenno alla relazione che esiste tra convergenza di un integrale improprio e *convergenza di una serie numerica.*

Una serie numerica può essere pensata come una somma

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

di infiniti addendi (scritta anche nella notazione compatta col simbolo Σ di sommatoria come $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$).

Una tale sommatoria può convergere[4] a una quantità finita oppure può dare come risultato infinito.

Ad esempio, abbiamo già detto a pagina 6 della quarta parte sulle derivate (nella nota a piè di pagina) che la sommatoria

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

degli inversi dei fattoriali di tutti i numeri naturali positivi converge al numero di Nepero e.

É intuitivamente chiaro che una condizione necessaria perché la serie converga è che i suoi addendi diventino sempre più piccoli (in modo da compensare il fatto che stiamo aggiungendo sempre più addendi) ma tale condizione è anche sufficiente?

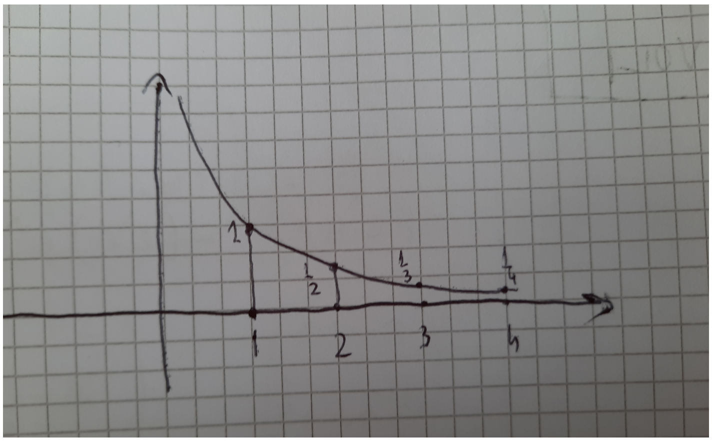
Ad esempio, la serie analoga a quella appena scritta, ma senza i fattoriali

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

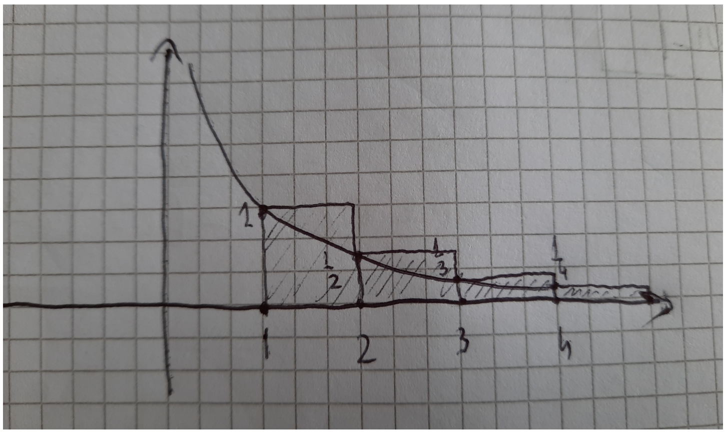
converge?

[4] In effetti, la definizione precisa di convergenza di una serie si dà mediante la definizione di limite.

La risposta è negativa e una spiegazione può essere data graficamente usando proprio gli integrali impropri: infatti, si consideri la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$: in corrispondenza dei numeri naturali positivi $1, 2, 3, 4 \ldots$ tale funzione assume i valori $f(1) = 1, f(2) = \frac{1}{2}, f(3) = \frac{1}{3}, f(4) = \frac{1}{4} \ldots$



Ora, se consideriamo i rettangoli con base gli intervalli $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4]$ etc. (tutti di lunghezza 1) e altezza data dai valori $f(1) = 1, f(2) = \frac{1}{2}, f(3) = \frac{1}{3}, f(4) = \frac{1}{4} \ldots$ etc. come nel disegno seguente



possiamo osservare due fatti:

(1) I rettangoli, in base alla formula base per altezza, hanno aree uguali a $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots$ e quindi la figura formata dall'unione di questi rettangoli ha area proprio uguale alla sommatoria della serie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$

(3) La figura formata dall'unione dei rettangoli contiene il trapezoide illimitato determinato dal grafico di $f(x) = \frac{1}{x}$ (per $x > 1$), e quindi l'area dell'unione dei rettangoli sarà maggiore dell'area del trapezoide.

Poiché l'area del trapezoide è proprio l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$, e quest'ultimo integrale come abbiamo visto a pagina 8 è infinito, a maggior ragione sarà infinita la sommatoria $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$, come volevamo.

Concludiamo qui la nostra trattazione degli integrali. Ci teniamo a sottolineare come l'importanza di questo concetto per le applicazioni vada anche molto oltre gli esempi che abbiamo fatto all'inizio del capitolo e nei vari esempi. Per ribadire questo concetto e chiudere il capitolo citando un'ultima importante situazione in cui gli integrali hanno un ruolo essenziale, citiamo quello delle *serie di Fourier*: una funzione periodica $f(x)$, che rappresenta quindi un'onda (ad esempio un'onda sonora) può essere sotto opportune ipotesi sempre scritta come combinazione di funzioni del tipo $\sin(nx)$ e $\cos(nx)$, al variare di n, dette armoniche elementari (che all'aumentare di n rappresentano onde di frequenza sempre più alta)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\ a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)\ )$$

I coefficienti reali a_n e b_n che moltiplicano rispettivamente $\sin(nx)$ e $\cos(nx)$ danno una misura del "contributo" della frequenza n-esima all'onda complessiva rappresentata dalla funzione $f(x)$, e quindi sono particolarmente importanti da determinare per capire la composizione dell'onda.

Ebbene, dalla teoria di queste serie (dette appunto di Fourier) risulta che tali importanti coefficienti si calcolano proprio mediante un integrale:

$$a_n = \int_0^T f(x) \sin(nx)\ dx, \quad b_n = \int_0^T f(x) \cos(nx)\ dx$$

dove T è il periodo dell'onda.