Chapter 1

Richiami sulle funzioni elementari

In questo corso ci occuperemo di limiti, derivate e integrali, ovvero le tre nozioni fondamentali del cosiddetto calcolo infinitesimale. Come vedremo, tali nozioni, tra gli altri scopi, servono soprattutto per indagare il comportamento di una funzione. Iniziamo quindi con il richiamare cosa è una funzione e vedere gli esempi più importanti per gli scopi di questo corso.

Una funzione può essere definita come una legge che associa a ogni elemento di un insieme di partenza, diciamo X (detto *dominio* della funzione), un elemento di un insieme di arrivo, diciamo Y (detto *codominio* della funzione). Si dice quindi che la funzione, che possiamo denotare f, "va da X a Y" e si scrive $f : X \to Y$. Dato un elemento x appartenente all'insieme X, l'elemento associato a x mediante la funzione si denota $f(x)$.
Le funzioni compaiono in numerosissimi contesti non solo della matematica ma anche delle scienze applicate e nella vita quotidiana: ad esempio, il fatto che a ogni studente di questo corso sia stato assegnato un numero di matricola ci dice che è stata definita una funzione $f : X \to Y$ che va dall'insieme X i cui elementi sono gli studenti del corso all'insieme $Y = \mathbb{N}$ dei numeri naturali, che associa appunto a ogni studente un numero (la sua matricola).
Ancora, una funzione può rappresentare una trasformazione geometrica: se ruotiamo tutti i punti del piano di un certo angolo attorno a un certo punto fissato (il centro della rotazione), tale trasformazione può essere pensata come la funzione $f : X \to X$ che va dal piano X in se stesso (l'insieme di partenza e di arrivo di una funzione possono anche coincidere) e che associa a ogni punto P il punto $f(P)$ in cui si trova dopo la rotazione (si potrebbe quindi dire in questo caso che la funzione "ruota" il punto).
In questo corso penseremo per lo più le funzioni come rappresentazione

dell'andamento di un certo fenomeno, e come tali saranno soprattutto funzioni che vanno dall'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali in se stesso: ad esempio, se ho una sostanza e voglio vedere in che modo il suo volume cambia rispetto alla temperatura, avrò una funzione f che associa a ogni valore della temperatura (un numero reale) il corrispondente valore del volume della sostanza a quella temperatura (un altro numero reale): si tratterà quindi di una funzione f che va dall'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali in se stesso, ovvero $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Oppure, se lancio un oggetto in aria lasciandolo libero di cadere sotto l'azione della forza di gravità, la legge che mi dice a che quota si trova l'oggetto allo scorrere del tempo è ancora una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Osservazione 1.1. A voler essere precisi, anche nei casi in cui sia la variabile di partenza che quella di arrivo sono numeri reali, non è detto che dominio e codominio siano tutto l'insieme $\mathbb{R}$, ma potrebbero essere dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Ad esempio, nell'esempio della funzione che associa a una data temperatura il volume di una certa sostanza, il dominio potrebbe essere l'intervallo $(0, +\infty)$ costituito dai numeri reali maggiori di zero, in quanto probabilmente non considereremo temperature inferiori allo zero assoluto. In generale, i domini delle cosiddette funzioni reali di variabile reale potrebbero essere intervalli di tipo (a, b) (cioè aperti, costituiti dall'insieme dei numeri reali compresi tra a e b estremi esclusi), o $[a, b]$ (cioè chiusi, costituiti dall'insieme dei numeri reali compresi tra a e b estremi compresi), oppure intervalli semichiusi del tipo $[a, b)$ o $(a, b]$ che comprendono un estremo ma non l'altro, o ancora intervalli illimitati chiusi $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ o aperti $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, o ancora unioni di più intervalli disgiunti. Nelle funzioni che richiameremo nei paragrafi successivi vedremo caso per caso il dominio da considerare.

Richiamiamo ora le più importanti funzioni reali di variabile reale.

1.1 La funzione esponenziale

Il primo esempio di funzione che vogliamo richiamare che è particolarmente importante in questa interpretazione delle funzioni come andamenti di un fenomeno è la funzione esponenziale. Si sente infatti spesso dire che una certa quantità ha un "andamento esponenziale" o "cresce esponenzialmente": che cosa significa?

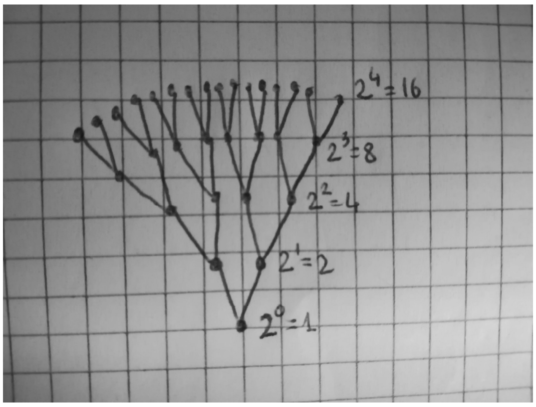
Quando diciamo che un fenomeno ha un andamento esponenziale significa che esso è descritto da una funzione del tipo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, con a un numero reale fissato (positivo e diverso da 1, per motivi che metteremo in evidenza tra poco).

Per esempio: se ogni ammalato di coronavirus contagia altre due persone, il numero di nuovi contagiati a ogni passaggio è descritto dalla funzione $f(x) = 2^x$ (quindi $a = 2$). Infatti, se per semplicità controlliamo i valori che $f(x) = 2^x$ assume in corrispondenza dei numeri naturali $x = 0, 1, 2, 3, 4...$ abbiamo

$$
\begin{gathered}
f(0) = 2^0 = 1 \\
f(1) = 2^1 = 2 \\
f(2) = 2^2 = 4 \\
f(3) = 2^3 = 8 \\
f(4) = 2^4 = 16 \\
\dots
\end{gathered}
$$

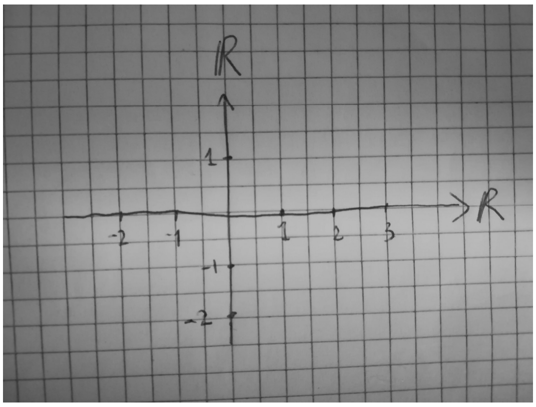
Ovvero il numero di nuovi contagiati raddoppia a ogni passaggio (in quanto ogni contagiato del passaggio precedente ne contagia due nuovi).

Questo andamento può essere rappresentato per esempio mediante il seguente "albero"

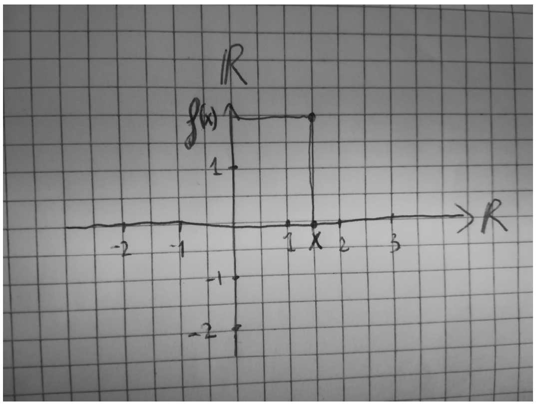


oppure mediante il cosiddetto *grafico della funzione*. In generale, il grafico di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una curva che ci permette di visualizzare l'andamento della funzione costruito nel modo seguente: si rappresenta l'$\mathbb{R}$ di partenza su una retta orizzontale (il cosiddetto asse delle ascisse) e l'$\mathbb{R}$ di arrivo su una retta verticale (il cosiddetto asse delle ordinate), come nel disegno seguente[1]

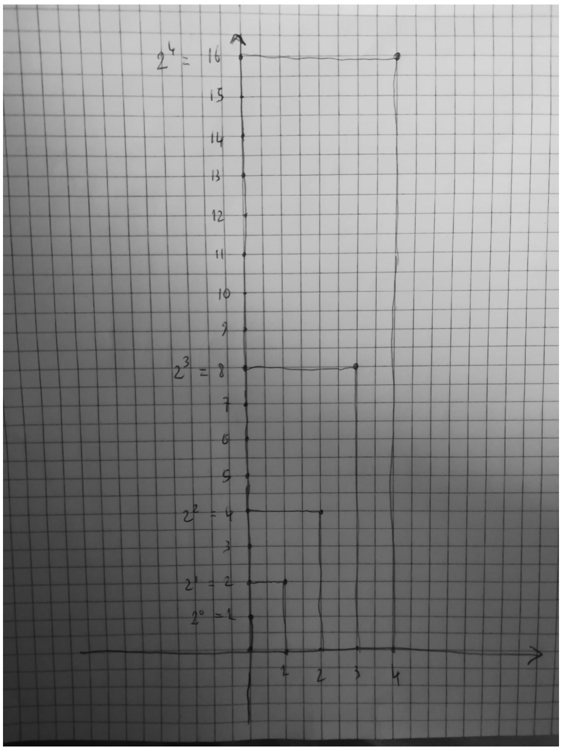
[1]E' il cosiddetto piano cartesiano.



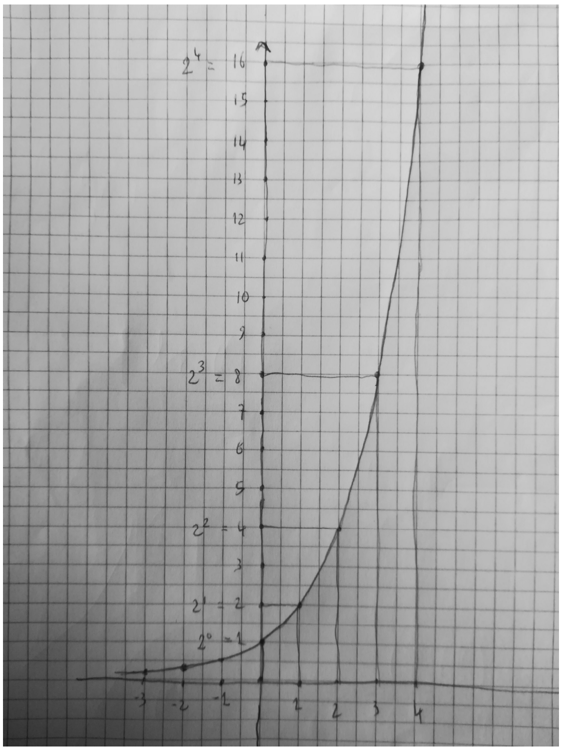
e poi sopra ogni x della retta orizzontale si disegna il punto che si trova a quota $f(x)$ sulla retta verticale



Applicando questa costruzione alla funzione $f(x) = 2^x$, per i valori $x = 0, 1, 2, 3, 4...$ che abbiamo visto sopra otterremmo



Se disegnassimo il punto non solo per gli x numeri naturali ma per ogni valore reale di x troveremmo la seguente curva



che è appunto il grafico della funzione esponenziale 2^x: guardando l'andamento della curva vediamo quanto cresce $f(x)$ per x sempre più grande.

Si noti che abbiamo disegnato il grafico anche in corrispondenza dei valori negativi di x (la parte a sinistra dell'asse verticale): ad esempio, per $x = -1, -2, -3$ abbiamo rispettivamente

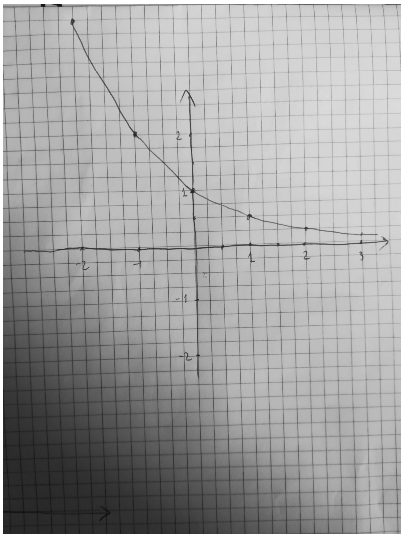
$$f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$$
$$f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$
$$f(-3) = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

(dove abbiamo usato l'identità delle potenze $2^{-x} = \frac{1}{2^x}$).

Se avessimo scelto $a = 3$, cioè avessimo considerato la funzione $f(x) = 3^x$, avremmo avuto un grafico del tutto analogo: in generale, i grafici delle funzioni esponenziali sono tutti di questo tipo quando scegliamo $a > 1$, mentre per $a < 1$ il comportamento della funzione (e quindi il grafico corrispondente) cambia drasticamenrte andamento: ad esempio, supponiamo di scegliere $a = 1/2$. In tal caso abbiamo quindi

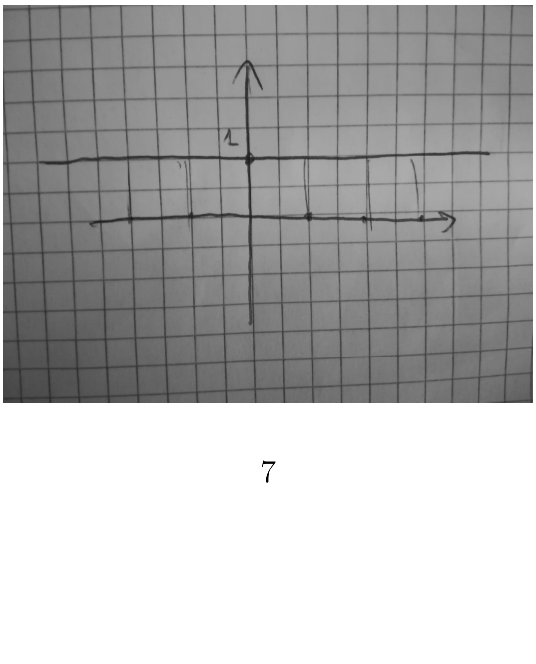
$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$$

da cui deduciamo che i valori che la funzione $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ assume per gli x positivi sono gli stessi che la funzione 2^x assume per i loro opposti $-x$, che sono negativi, e viceversa: quindi il grafico di $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ rispetto a quello di 2^x presenta le parti destra e sinistra del grafico invertite:



Si può vedere che in generale tutti i grafici delle funzioni esponenziali a^x con $a < 1$ hanno questo andamento, ovvero il valore della funzione al crescere di x diminuisce (ad esempio, se $a = \frac{1}{2}$, per ogni numero naturale dimezza rispetto al valore che aveva sul numero naturale precedente, contrariamente alla funzione 2^x dove raddoppiava).

Si osservi che per $a = 1$ la funzione esponenziale sarebbe semplicemente $f(x) = 1^x = 1$. Il suo grafico (poco interessante!) sarebbe quindi una retta orizzontale a quota costante 1:



Stesso discorso per $a = 0$, in quanto $f(x) = 0^x = 0$ costante uguale a 0 qualunque sia x.

Il fatto che stiamo escludendo i valori negativi di a nel definire la nostra funzione esponenziale a^x si spiega con l'osservazione che in tal caso la funzione non sarebbe definita per infiniti valori di x: ad esempio, se scegliessi $a = -1$ avrei che $f(1/2) = (-1)^{1/2} = \sqrt{-1}$ che non è un numero reale.

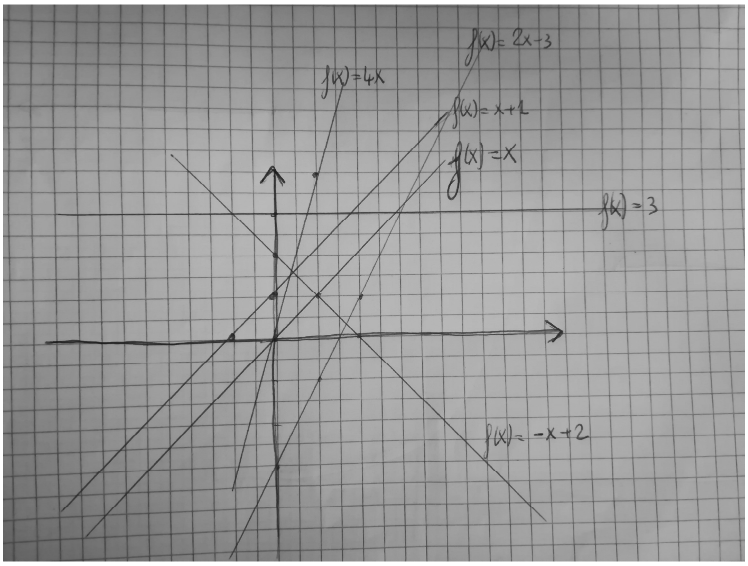
Concludiamo ricordando che, tra tutte le funzioni esponenziali a^x con $a > 1$ ce n'è una particolarmente importante, che si ottiene scegliendo a uguale al cosiddetto *numero di Nepero*, che si denota e e vale approssimativamente $2,71$.

In effetti, e è un numero irrazionale, ovvero non può essere espresso sotto forma di frazione e quindi neanche di decimale finito, ma la sua forma decimale è illimitata e non periodica. Questo è quello che succede ad esempio anche per $\sqrt{2}$ o per π (che è il rapporto tra la misura di una qualunque circonferenza fratto il suo diametro e vale solo approssimativamente $3,14$). Nei capitoli sui limiti e sulla derivata vedremo in che modo nasce il numero e e il perché della sua importanza: senza entrare in dettagli ora, anticipiamo che, a distinguere e^x tra tutte le funzioni esponenziali a^x è una particolarità relativa alla velocità con cui cresce la funzione al crescere di x.

1.2 Funzioni lineari, quadratiche, polinomiali

La crescita esponenziale non è ovviamente l'unico possibile andamento di crescita per un fenomeno. Ad esempio, un fenomeno può avere andamento *lineare*.

Questo significa che esso è descritto da una funzione del tipo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax+b$, dove a e b sono due numeri reali fissati. Il nome di tali funzioni dipende dal fatto che, qualunque siano le costanti a e b fissate, il grafico di $f(x) = ax + b$ è una linea retta. Nel disegno seguente mostriamo a scopo illustrativo alcune possibilità



(In generale, $ax + b$ ha andamento crescente se $a > 0$, è costante se $a = 0$ e ha andamento decrescente se $a < 0$; il valore di b ci dice invece dove il grafico interseca l'asse verticale).

Come esempi di fenomeni il cui andamento è lineare, citiamo ad esempio l'andamento della massa di un corpo di un certo materiale fissato al variare del volume del corpo, oppure l'allungamento di una molla a cui è stato collegato un peso, al crescere del peso.

Osservazione 1.2. Allo scopo di fare un confronto tra l'andamento lineare e quello esponenziale visto nel paragrafo precedente, potremmo prendere ad esempio le funzioni $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 2x + 1$. Per $f(x) = 2^x$ si ha

$$f(0) = 2^0 = 1$$
$$f(1) = 2^1 = 2$$
$$f(2) = 2^2 = 4$$
$$f(3) = 2^3 = 8$$
$$f(4) = 2^4 = 16$$

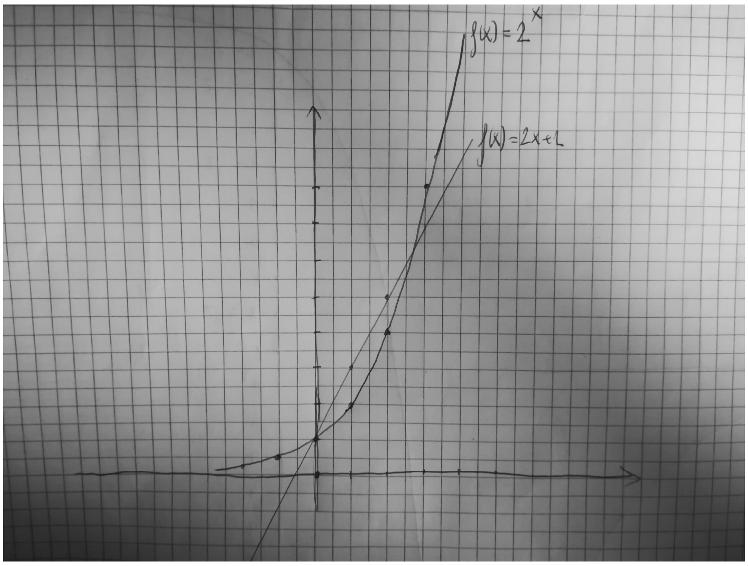
mentre per $f(x) = 2x + 1$

$$f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$
$$f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$
$$f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$f(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$$

Come si può osservare, per i primi tre valori $x = 0, 1, 2$ la funzione lineare sembra superare la funzione esponenziale, mentre a partire da $x = 3$ la funzione esponenziale assume valori maggiori della funzione lineare scelta. Se prendessimo valori ancora più grandi, effettivamente vedremmo che la funzione esponenziale è sempre maggiore di quella lineare (e la differenza diventa sempre più grande). Visualizzando questo tramite il confronto dei grafici, avremmo



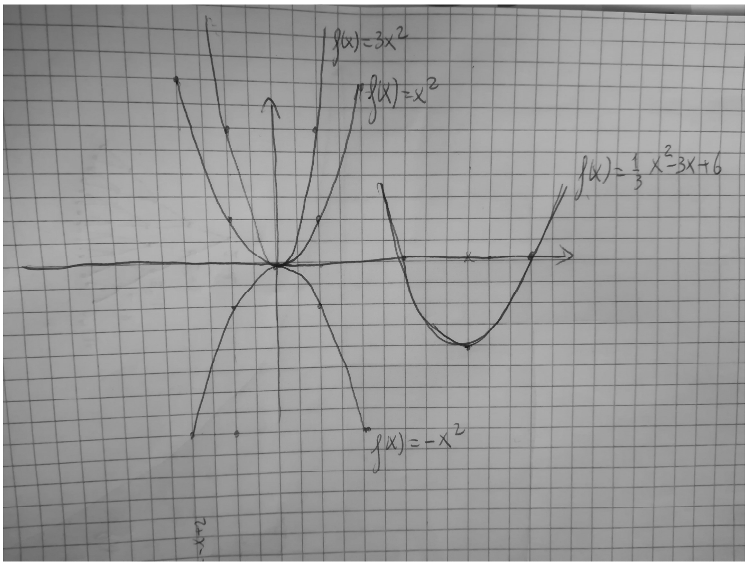
In effetti, questa conclusione non dipende dalle particolari funzioni scelte: si può dimostrare che qualunque funzione lineare $f(x) = ax + b$ prendiamo, anche con valori di a e b molto grandi, se inizialmente questa può assumere valori più grandi dell'esponenziale 2^x, a partire da un certo punto in poi la funzione esponenziale raggiungerà e supererà la funzione lineare.

La dimostrazione rigorosa di questo fatto è compito della teoria dei limiti, che vedremo nel prossimo capitolo. In generale, come vedremo, i limiti ci permettono di confrontare gli andamenti di funzioni diverse, e stabilire ad esempio quale di esse cresce più velocemente dell'altra (cosa che in generale non è immediato stabilire se le funzioni sono abbastanza complicate).

Le funzioni lineari sono un esempio di una categoria più vasta di funzioni, le *funzioni polinomiali*. Ricordiamo che un polinomio in x è un'espressione della forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, dove l'esponente n più grande che compare sulla x si chiama il *grado del polinomio*. Una funzione si dice polinomiale se la sua espressione è data appunto da un polinomio, ovvero $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$.

Le funzioni lineari sono un caso particolare di funzione polinomiale: la loro espressione generale, $ax + b$, non è infatti nient'altro che un polinomio di grado 1.

Al grado successivo, ovvero 2, troviamo funzioni della forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, dette anche funzioni quadratiche. Il grafico di una tale funzione è sempre[2] una parabola. Alcuni esempi nel disegno seguente:

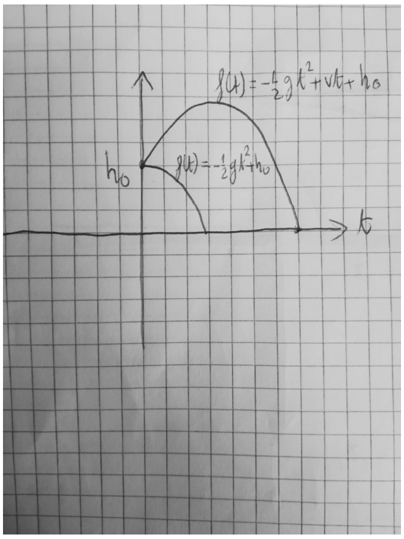


In generale, se $a > 0$ si dice che la parabola ha la concavità verso l'alto (ha un minimo nel vertice) mentre se $a < 0$ si dice che ha la concavità verso il basso (ha un massimo nel vertice). Come suggerito nel disegno, il valore esatto di a (più o meno grande) comporta che la parabola sia più o meno stretta. Dai valori di b e c invece dipende la posizione della parabola nel piano (ad esempio, le intersezioni con gli assi).

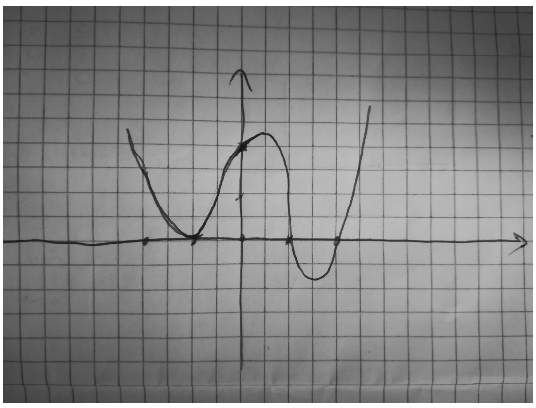
Per fare un esempio concreto di fenomeno il cui andamento è descritto da una funzione quadratica, possiamo considerare, come già accennato all'inizio del capitolo, il moto di un grave lasciato libero di cadere da fermo da una certa altezza di partenza h_0: la quota che l'oggetto ha al tempo t (supponendo che il tempo $t = 0$ sia quello in cui viene lasciato libero) è data dalla funzione quadratica $f(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h_0$ (se invece lo lasciassimo cadere imprimendogli una certa velocità di partenza la funzione corretta sarebbe

[2]Ovviamente a deve essere diverso da zero, altrimenti la funzione si ridurrebbe a $f(x) = bx + c$ e sarebbe lineare.

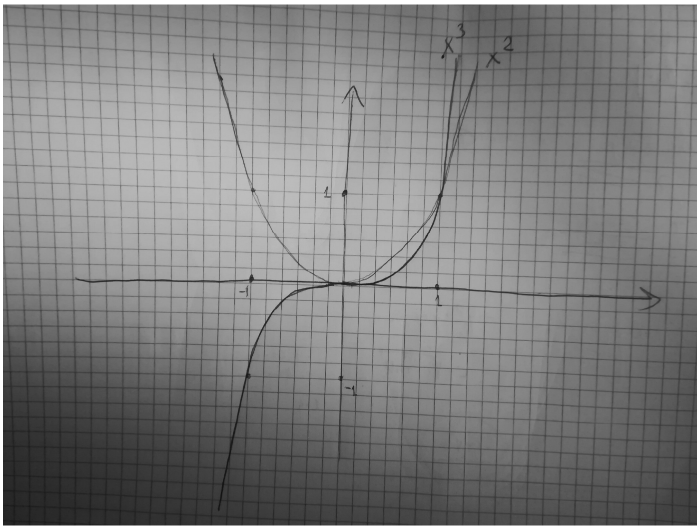
$f(t) = -\frac{1}{2}gt^2+vt+h_0$, dove v è la velocità iniziale che gli imprimiamo). La dimostrazione rigorosa di queste affermazioni può essere svolta grazie alla teoria delle equazioni differenziali, un'importantissima applicazione delle derivate che però non vedremo in questo corso (ma vedrete nel corso di Matematica 3).



Le funzioni polinomiali di grado più alto hanno un andamento più complesso, nel senso che esso non è determinabile a priori come nel caso delle funzioni lineari o di quelle quadratiche, per le quali sappiamo già che il grafico è una retta o una parabola. Esso presenterà in generale dei massimi o dei minimi in numero e posizioni che dipendono dalla funzione specifica considerata. Ad esempio, il seguente disegno mostra il grafico di $f(x) = x^4-x^3-3x^2+x+2$:



A titolo illustrativo, ricordiamo almeno il comportamento dei grafici delle semplici funzioni polinomiali $f(x) = x^n$, con esponente crescente $n = 1, 2, 3, 4$ etc.



Come si intuisce dal disegno, le funzioni $f(x) = x^n$ soddisfano tutte $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$ (in quanto chiaramente $0^n = 0$ e $1^n = 1$ per ogni n) e quindi i loro grafici passano tutti per lo stesso punto in corrispondenza di questi due valori.

Per quello che riguarda i valori di x compresi tra 0 e 1, invece, si vede che all'aumentare dell'esponente il grafico si schiaccia sempre di più verso l'asse orizzontale, mentre per i valori di x maggiori di 1 il grafico cresce sempre più velocemente.

Per quello che riguarda invece i valori negativi di x, per n pari si ha che il grafico è simmetrico rispetto all'asse verticale (ha quindi lo stesso comportamento di una parabola, che infatti corrisponde a $n = 2$) mentre per n dispari il ramo del grafico che corrisponde ai valori negativi di x ha la stessa forma del ramo dei valori positivi, ma rovesciato. Questo succede perché quando n è pari si ha $(-x)^n = x^n$, che spiega la simmetria (un valore positivo di x e il suo opposto $-x$, simmetrico rispetto all'asse verticale, assumono lo stesso valore e quindi corrispondono a punti alla stessa quota), mentre se n è dispari si ha $(-x)^n = -x^n$, che spiega perché il ramo negativo sia rovesciato rispetto al ramo positivo.

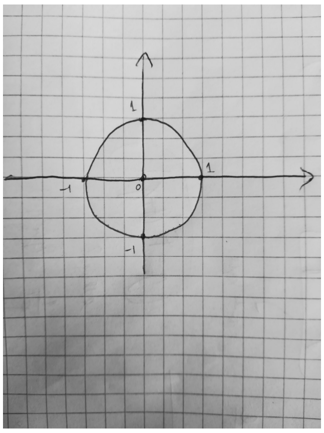
Osservazione 1.3. Nell'osservazione precedente abbiamo visto che una funzione esponenziale cresce più rapidamente di una funzione lineare; d'altra parte, abbiamo appena visto (si veda il disegno precedente) che le funzioni polinomiali crescono sempre più velocemente al crescere del grado del polinomio (x^2 cresce più velocemente di x, x^3 cresce più velocemente di x^2, etc.). Ci possiamo quindi chiedere se, scegliendo un grado sufficientemente alto, si possa trovare una funzione polinomiale che cresca più velocemente di una funzione esponenziale. Come vedremo nel prossimo capitolo studiando la nozione di limite, questo non è possibile: la funzione esponenziale a^x (con $a > 1$) cresce più velocemente di qualunque potenza x^n di x.

1.3 Le funzioni seno e coseno

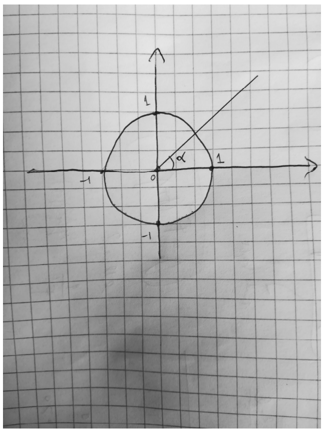
Abbiamo visto finora le funzioni esponenziali e le funzioni polinomiali, tra cui quelle lineari e quadratiche, e abbiamo visto come queste funzioni descrivano fenomeni fisici e naturali di crescita.

Ora, in natura esistono fenomeni il cui andamento è invece oscillatorio e periodico (ad esempio il moto di un'altalena, i sistemi vibranti, anche a livello atomico, o le onde elettromagnetiche): la descrizione dell'andamento di questo tipo di fenomeni avviene tramite le funzioni *seno* e *coseno*.

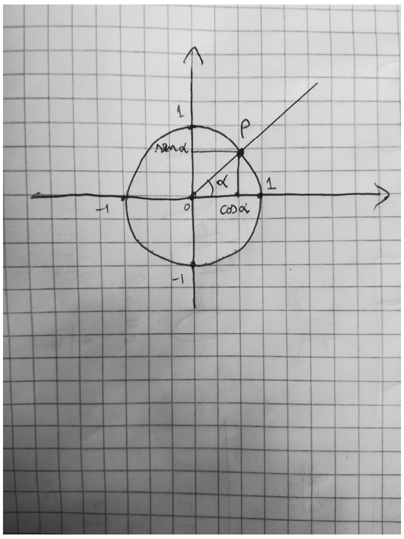
Ricordiamo la definizione mediante l'uso della cosiddetta circonferenza goniometrica: dato un sistema di assi cartesiani, disegniamo la circonferenza con centro l'origine e raggio 1



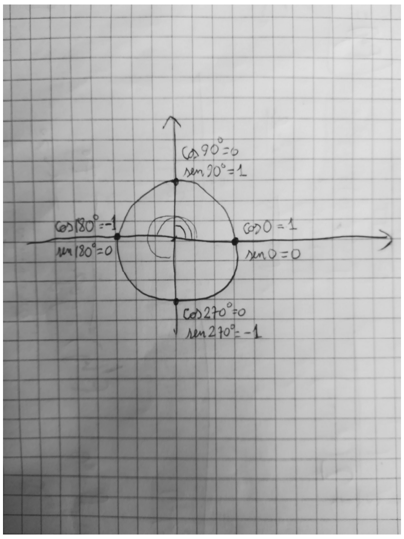
Ora, consideriamo un angolo α formato dall'asse orizzontale e da una semiretta uscente dall'origine



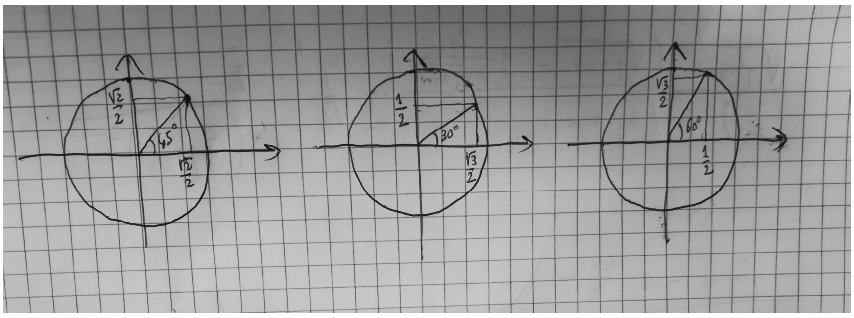
Tale semiretta incontra la circonferenza in un punto P: l'ascissa di tale punto (che si ottiene proiettando P perpendicolarmente sull'asse orizzontale) si chiama coseno dell'angolo α e la indicheremo $\cos\alpha$, mentre l'ordinata di P (che si ottiene proiettando P perpendicolarmente sull'asse verticale) si chiama seno dell'angolo α e la indicheremo $\sin\alpha$.



Seno e coseno sono quindi funzioni che associano a ogni angolo un numero reale. Ad esempio, dal disegno seguente si vedono immediatamente i valori del seno e del coseno per l'angolo nullo (0 gradi) l'angolo retto (90 gradi) l'angolo piatto (180 gradi) e l'angolo di 270 gradi (cioè tre volte un angolo retto)



Altri valori del seno e del coseno per alcuni angoli particolari si ricavano da semplici ragionamenti di geometria euclidea: senza entrare nel dettaglio di tali ragionamenti, vediamo dai seguenti disegni i valori di seno e coseno per tali angoli, che sono 45, 30 e 60 gradi.



$$\cos 45^o = \sin 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

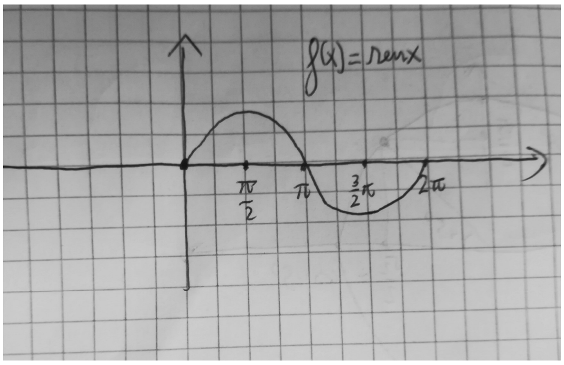
$$\cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 30^o = \frac{1}{2}$$

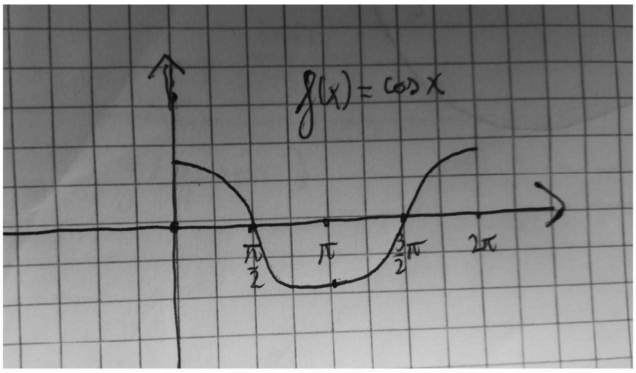
$$\cos 60^o = \frac{1}{2}, \quad \sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Prima di disegnare i grafici di seno e coseno, ricordiamo che una misura degli angoli alternativa a quella in gradi è la misura in *radianti*: ogni angolo determina un arco sulla circonferenza goniometrica la cui misura sarà una frazione della misura della circonferenza totale, che è[3] 2π. Ad esempio, l'arco corrispondente all'angolo piatto è metà della circonferenza, quindi la sua misura è $2\pi/2 = \pi$; all'angolo retto, che è metà dell'angolo piatto, corrisponde quindi un arco lungo $\pi/2$; se dividiamo ancora per due, ovvero consideriamo l'angolo di 45 gradi, avremo un arco che misura $\pi/4$. Ancora, per quello che riguarda gli altri angoli notevoli di cui abbiamo ricordato i valori di seno e coseno poco sopra, abbiamo che 60 gradi, essendo 1/3 dell'angolo piatto di 180 gradi (il cui arco come abbiamo detto è lungo π), corrisponde a un arco lungo $\pi/3$; l'angolo di 30 gradi, che si ottiene dividendo a metà l'angolo di 30, corrisponde quindi a un angolo di $\pi/6$.

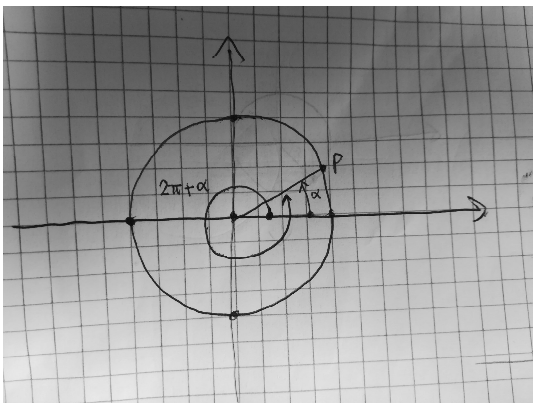
Siamo ora pronti a disegnare i grafici di $\sin(x)$ e $\cos(x)$ per valori di x compresi tra 0 e 2π (e che rappresentano quindi il valore di un angolo tra 0 e 360 gradi, misurato in radianti)

[3]In generale, la misura della circonferenza di raggio R è $2\pi R$, poichè la circonferenza goniometrica ha per definizione raggio $R = 1$ la sua misura sarà appunto 2π.





I grafici che abbiamo disegnato si limitano all'intervallo tra 0 e 2π, tuttavia ha senso considerare anche valori di x maggiori di 2π o minori di 0: per quello che riguarda i valori di x maggiori di 2π, questi vanno interpretati come valori dell'angolo che si ottiene continuando a ruotare (in senso antiorario) anche dopo aver percorso un giro completo. Per essere più espliciti, se dopo aver percorso un intero angolo giro di 2π continuiamo a percorrere la circonferenza goniometrica ruotando di un ulteriore angolo α, possiamo dire che l'angolo totale percorso è $2\pi + \alpha$.

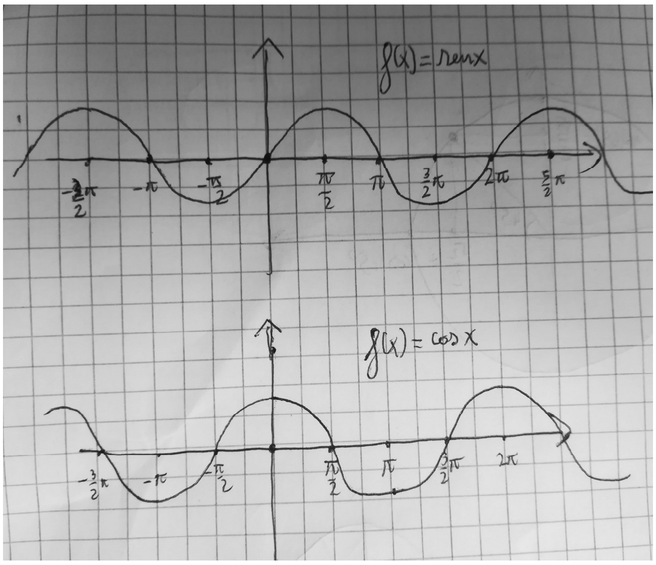


Valori di x minori di 0 vanno invece interpretati come angoli percorsi in senso *orario*: per capire il senso di questa convenzione, pensiamo che se percorro un angolo in senso antiorario e poi ruoto dello stesso angolo in senso orario, torno al punto di partenza: quindi, se l'angolo percorso in senso antiorario è α, ha senso che il secondo angolo, della stessa ampiezza ma percorso in senso opposto, sia $-\alpha$, in modo che l'angolo totale percorso risulti $\alpha + (-\alpha) = 0$, ovvero nullo (dal momento che sono tornato al punto di partenza, è come se non mi fossi mosso, ovvero se avessi percorso un angolo nullo).

Queste osservazioni ci permettono quindi di disegnare i grafici di $\sin(x)$ e $\cos(x)$ per qualunque valore reale di x. Prima di mostrare tale disegno, facciamo la seguente importantissima osservazione: se dopo aver percorso un intero angolo giro sulla circonferenza continuiamo a ruotare (sempre in senso antiorario) di un ulteriore angolo α, considerando quindi un angolo totale di $2\pi + \alpha$, avremmo che il punto P corrispondente a $\alpha + 2\pi$ sulla circonferenza goniometrica è lo stesso corrispondente a α (come si vede anche dal disegno precedente). Quindi coseno e seno, che sono rispettivamente ascissa e ordinata del punto P, devono essere gli stessi sia per α che per $2\pi + \alpha$, ovvero

$$\cos(\alpha) = \cos(\alpha + 2\pi), \quad \sin(\alpha) = \cos(\alpha + 2\pi)$$

Queste relazioni si esprimono dicendo che le funzioni seno e coseno sono 2π-*periodiche*. Siamo quindi pronti a disegnare i loro grafici su tutta la retta reale



La periodicità di seno e coseno si traduce nell'andamento oscillatorio dei loro grafici: come abbiamo anticipato all'inizio, tale andamento rende seno e coseno le funzioni adatte a rappresentare fenomeni di tipo ondulatorio.

Osservazione 1.4. Abbiamo definito seno e coseno mediante la circonferenza goniometrica, che è il modo migliore per introdurre queste funzioni se vogliamo metterne in evidenza la periodicità e pensarle come funzioni che rappresentano un andamento ondulatorio. Ricordiamo però qui a titolo di curiosità che tali funzioni sono nate allo scopo di determinare tutti gli elementi ignoti (lati o angoli) di un triangolo una volta che ne siano noti alcuni. Ad esempio, se di un triangolo si conoscono due lati a e b e l'angolo α tra essi compreso, il terzo lato c risulta avere misura $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$. Tali formule hanno un'enorme utilità pratica: senza entrare in dettagli esse permettono, ad esempio, di determinare indirettamente la distanza tra le cime di due montagne distanti, oppure determinare distanze in astronomia.

1.4 Come costruire nuove funzioni 1: somma, prodotto, quoziente

Le funzioni esponenziali, polinomiali, seno e coseno sono esempi importanti di funzioni che descrivono l'andamento di vari fenomeni naturali e non, che ovviamente non sono però sufficienti a descrivere qualunque fenomeno. Possiamo ottenere molte altre funzioni importanti e interessanti a partire da queste mediante alcune semplici operazioni.

La prima semplice operazione per costruire nuove funzioni è quella di *somma*: date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, queste possono essere sommate nel senso che possiamo considerare la nuova funzione che associa a ogni x il valore $f(x) + g(x)$. Ad esempio,

$$x + \cos x, \quad 2^x + 3^x$$

sono nuove funzioni costruite in questo modo.

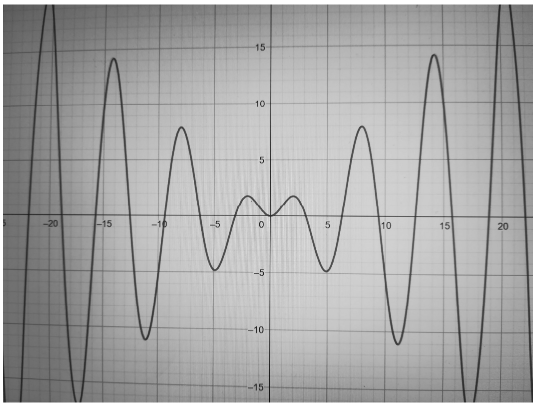
In modo del tutto analogo, possiamo *moltiplicare* tra loro due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, costruendo così la nuova funzione che associa a ogni x il valore $f(x)g(x)$.

Ad esempio,

$$x \sin x, \quad x^3 e^x$$

sono nuove funzioni costruite in questo modo.

Già queste semplici operazioni producono funzioni che possono avere un certo interesse pratico: la funzione $f(x) = x \sin x$ ha il seguente grafico



ovvero rappresenta un fenomeno oscillatorio ma in cui le oscillazioni, invece di avere sempre la stessa ampiezza come nel caso di $\sin x$ e $\cos x$, hanno ampiezza crescente: per spiegare questo, ricordiamo che $\sin x$, come si vede dalla sua definizione mediante la circonferenza goniometrica ma anche dal suo grafico, oscilla tra -1 e 1; se considerassimo la funzione $f(x) = 2 \sin x$, è chiaro che otterremmo una funzione che oscilla invece tra -2 e 2, analogamente $3 \sin x$ oscilla tra -3 e 3 e così via. L'ampiezza delle oscillazioni dipende quindi dal fattore per cui moltiplichiamo $\sin x$: se questo fattore è x, che non è costante ma varia crescendo (linearmente) al crescere di x, l'ampiezza delle oscillazioni, per x crescente, sarà sempre maggiore.

Una funzione di questo tipo è esattamente quella che descrive certi fenomeni di risonanza, nei quali un sistema vibrante, per effetto di sollecitazioni esterne in condizioni opportune l'ampiezza delle oscillazioni inizia ad aumentare esponenzialmente al passare del tempo (situazioni potenzialmente pericolose nel caso in cui, per esempio, il sistema vibrante sia un ponte).

Così come stiamo costruendo nuove funzioni sommando e moltiplicando le funzioni viste nel paragrafo precedente, un ulteriore modo di costruire nuove funzioni è mediante quoziente, ovvero date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, possiamo considerare la nuova funzione che associa a ogni x il valore $\frac{f(x)}{g(x)}$. Tuttavia, questa operazione comporta delle limitazioni: come sappiamo, una frazione non può avere a denominatore lo 0, di conseguenza la funzione $\frac{f(x)}{g(x)}$ non sarà definita su quei valori di x per cui $g(x) = 0$. Ad esempio, le funzioni

$$\frac{x^2+3}{x-1}, \quad \frac{\sin x}{x}$$

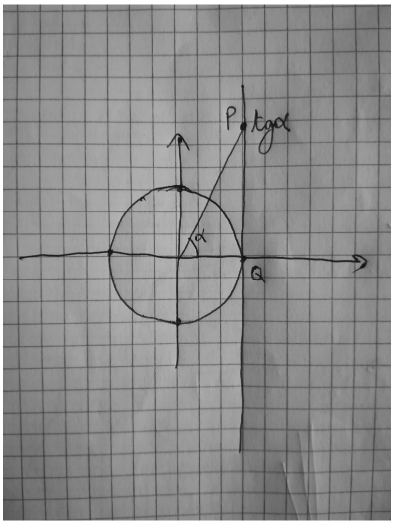
non sono definite rispettivamente per $x = 1$ (valore per cui si annulla il denominatore della prima funzione) e $x = 0$ (valore per cui si annulla il denominatore della seconda funzione. Quindi, ad esempio, il dominio della prima funzione non è tutto l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali ma $\mathbb{R}$ tranne $x = 1$, che può anche essere pensato come l'unione di due intervalli illimitati, l'intervallo $(-\infty, 1)$ costituito dai numeri minori di 1 e l'intervallo $(1, +\infty)$ costituito dai numeri maggiori di 1.

Le funzioni come la prima, ottenute come quoziente di due polinomi, si dicono *funzioni razionali.*

Tra le funzioni ottenute come quoziente, particolarmente importanti sono le funzioni $\frac{\sin x}{\cos x}$ e $\frac{\cos x}{\sin x}$, dette rispettivamente *tangente di* x e *cotangente di* x:

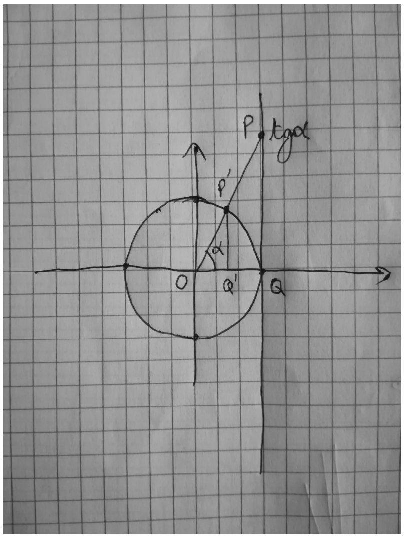
$$\text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \text{cotg } x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Tali funzioni ammettono una definizione alternativa (ma equivalente) analoga a quella che abbiamo visto per definire seno e coseno, ovvero tramite la circonferenza goniometrica: Dato il piano cartesiano e la circonferenza goniometrica, la tangente di un angolo α compreso tra l'asse orizzontale e una semiretta per l'origine è l'ordinata del punto P in cui questa semiretta incontra la retta verticale tangente alla circonferenza nel punto Q del disegno (quello di coordinate $(1, 0)$)

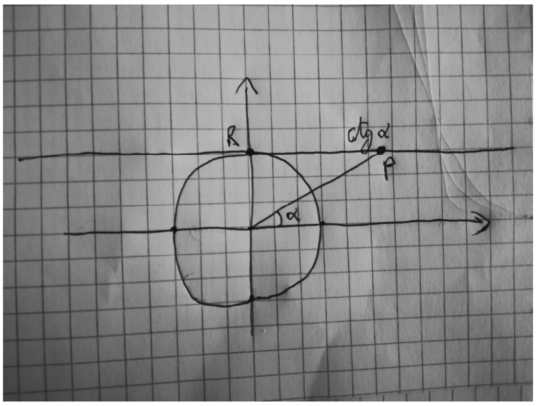


Il motivo per cui la quota del punto P costruito in questo modo coincide con il rapporto tra il seno e il coseno dell'angolo α è da ricercarsi in argomenti che coinvolgono i criteri di similitudine dei triangoli: più precisamente, senza voler fare una dimostrazione rigorosa, si vede che i due triangoli OPQ e

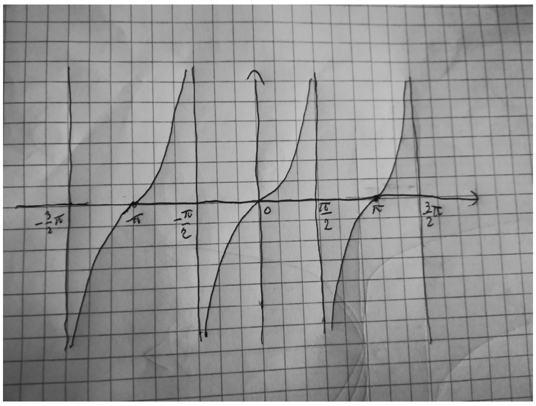
$OP'Q'$ del disegno seguente sono simili, il che per noti teoremi di geometria euclidea comporta che i rapporti $\frac{PQ}{OQ}$ e $\frac{P'Q'}{OQ'}$ sono uguali. Ma poichè OQ misura 1 (è il raggio della circonferenza), il primo rapporto è la quota del punto P; il secondo rapporto è invece chiaramente il rapporto tra seno e coseno, il che dimostra la coincidenza delle due definizioni.



Nel caso della cotangente, si dimostra con argomenti simili che la cotangente di un angolo α, cioè il rapporto tra coseno e seno, può essere equivalentemente definita come ascissa del punto P in cui la semiretta che determina α incontra la retta orizzontale tangente alla circonferenza nel punto R del disegno, ma omettiamo la spiegazione, che è simile a quella data per la tangente.



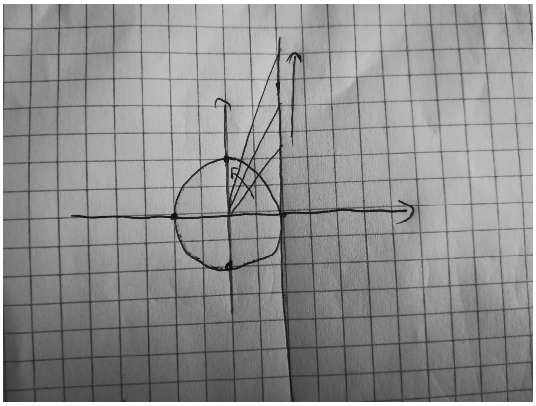
Come già osservato in generale per tutte le funzioni razionali, tangente e cotangente non saranno definite dove i rispettivi denominatori sono nulli: la tangente tg x non sarà quindi definita per quei valori di x per cui $\cos x = 0$, ovvero (si guardi la circonferenza goniometrica) $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$ Il grafico della tangente risulta essere il seguente



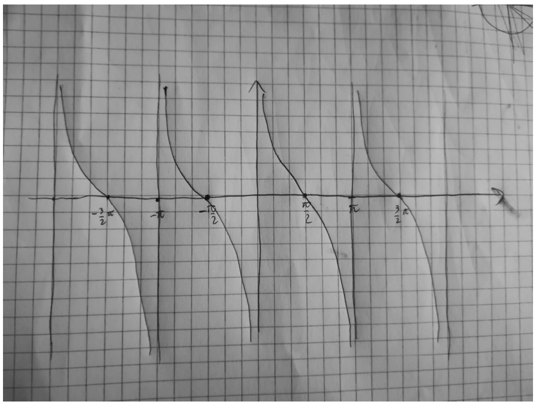
Come si vede, il dominio della tangente risulta quindi essere unione di infiniti intervalli aperti limitati del tipo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ etc.

Si noti che essendo sia seno che coseno due funzioni periodiche, per le quali quindi si ripetono gli stessi valori a ogni intervallo lungo 2π, anche la tangente, che è ottenuta come loro quoziente, ha un andamento periodico, come è evidente dal suo grafico.

Il fatto che la tangente non sia definita per $\frac{\pi}{2}$ e che il suo valore diventi sempre più grande man mano che ci avviciniamo a $\frac{\pi}{2}$ può essere spiegato anche usando la definizione alternativa data sopra: come si vede man mano che ci avviciniamo a $\frac{\pi}{2}$ il punto di intersezione tra la semiretta che determina l'angolo e la retta verticale usata nella costruzione ha ordinata sempre più alta; in corrispondenza di $\frac{\pi}{2}$ non c'è più intersezione, visto che le due rette sono parallele.

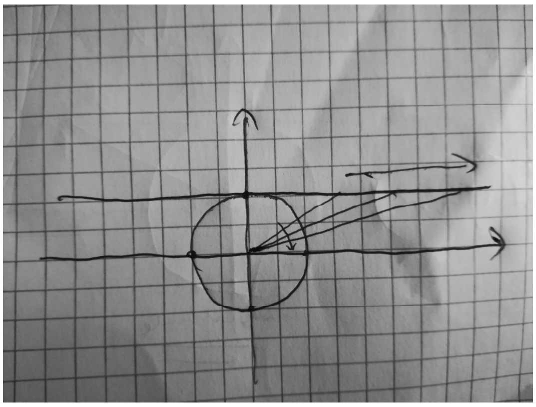


Per la cotangente, valgono considerazioni analoghe: la cotangente cotg x, essendo quoziente di coseno fratto seno, non sarà definita per quei valori di x per cui $\sin x = 0$, ovvero (si guardi la circonferenza goniometrica) $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$. Il grafico della cotangente risulta essere il seguente



Come si vede, il dominio della tangente risulta quindi essere unione di infiniti intervalli aperti limitati del tipo $(-\pi, 0)$, $(0, \pi)$ etc.

Come la tangente, anche la cotangente risulta essere una funzione periodica, e inoltre, analogamente a quanto visto per la tangente, il fatto che la cotangente non sia definita ad esempio per $x = 0$ e che il suo valore diventi sempre più grande man mano che ci avviciniamo a zero può essere spiegato anche usando la sua definizione geometrica alternativa: come si vede man mano che ci avviciniamo a 0 il punto di intersezione tra la semiretta che determina l'angolo e la retta orizzontale usata nella costruzione ha ascissa sempre più alta; in corrispondenza di 0 non c'è più intersezione, visto che le due rette risultano parallele.



Osservazione 1.5. Il fatto che una funzione ottenuta come quoziente di due funzioni date non sia definita per certi valori di x ci spinge a chiederci cosa

succede "nelle vicinanze" di tale punto: a rispondere a tale domanda, come vedremo nel capitolo successivo, sarà la nozione di limite. Come vedremo, i comportamenti possibili sono diversi e determinarli sono è sempre immediato: ad esempio, nelle vicinanze di $x = 0$ la funzione $\frac{1}{x}$ assume valori sempre più grandi, così come succede a $\text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x}$ nelle vicinanze di $x = \pi/2$ o a $\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\sin x}$ nelle vicinanze di $x = 0$ (si vedano i grafici); ma per esempio nelle vicinanze di $x = 0$ la funzione $\frac{\sin x}{x}$ si avvicina sempre di più al valore 1: il motivo di ciò è che l'annullarsi del denominatore è "compensato" dall'annullarsi del numeratore (ricordiamo che $\sin 0 = 0$); tuttavia, ad esempio, benchè il numeratore della funzione $\frac{\cos x - 1}{x^3}$ si annulli per $x = 0$, non riesce a compensare l'annullarsi del denominatore x^3, e si ha che tale funzione assume valori sempre più grandi nelle vicinanze di $x = 0$. Rivedremo in un modo più rigoroso questi fatti nel prossimo capitolo.

Le operazioni precedenti possono chiaramente essere combinate tra loro in modo da ottenere funzioni sempre più complesse: ad esempio,

$$\frac{e^x + x^2 - 1}{x + \cos x}, \quad \frac{x^3 + 2x^2}{5^x} - \frac{1}{x^4}$$

1.5 Come costruire nuove funzioni 2: composizione e l'inversa

Ricordiamo ora un altro modo di combinare due funzioni tra loro allo scopo di ottenere una nuova funzione: la *composizione*.

Comporre due funzioni significa applicare in sequenza prima una e poi l'altra. Più precisamente, dette f e g le due funzioni, la loro composizione, denotata $f \circ g$, è la funzione che associa a ogni x il valore $f(g(x))$, ottenuto applicando alla x prima g e poi f:

$$x \to g(x) \to f(g(x))$$

Come si vede, la prima funzione che applico è g, ottenendo $g(x)$; successivamente, applico la f al valore $g(x)$ già ottenuto (invece che a x). Ad esempio, supponiamo che $f(x) = e^x$ e $g(x) = \sin x$. Allora si ha

$$f(g(x)) = e^{\sin x}$$

Notiamo che la composizione può essere eseguita anche nell'ordine inverso, ovvero applicando prima f e poi g:

$$g(f(x)) = \sin(e^x)$$

Si tratta chiaramente di due funzioni diverse, e questo è vero in generale: la composizione di funzioni non gode della proprietà commutativa, ovvero in generale $f \circ g \neq g \circ f$.

Aggiungendo la composizione a somma, prodotto e quoziente visti nel paragrafo precedente possiamo costruire funzioni ancora più complesse

$$2e^{\frac{x+1}{x-1}}, \quad \cos(2^x + 3^x), \quad \frac{\sin^2 x + 1}{\sin^3 x - 5}$$

Come vedremo nel capitolo sulle derivate, quando dovremo determinare l'andamento di queste funzioni e in particolare capire se crescono o decrescono al crescere di x, o ancora se presentano dei punti di massimo o minimo, sarà fondamentale identificare correttamente di quali funzioni sono composizione e in quale ordine.

Per concludere questo capitolo, vediamo ora l'ultimo concetto che ci permette di presentare nuove funzioni oltre a quelle viste nel primo paragrafo: l'importantissima costruzione della *funzione inversa*.

Quando noi applichiamo una funzione f a un valore x di partenza, otteniamo un valore $f(x)$ di arrivo: la funzione inversa di f è quella funzione che ci permette di "tornare indietro", ovvero di risalire al valore iniziale x a partire da $f(x)$. Più precisamente, se f va da un insieme X a un insieme Y, la funzione inversa di f è una funzione, denotata f^{-1}, che va da Y a X e tale che

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

cioè applicata dopo la f ci ridà il valore iniziale x. Questa è però solo una parte della definizione: la definizione completa di inversa richiede che questa condizione sia verificata anche componendo nell'ordine inverso, ovvero, dato un y nell'insieme Y,

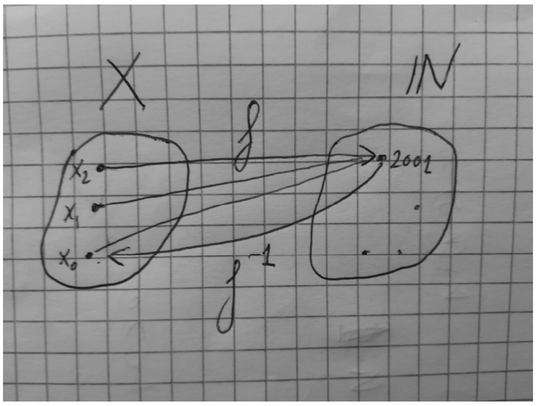
$$f(f^{-1}(y)) = y$$

(in teoria delle funzioni, si esprime questo fatto dicendo che l'inversa f^{-1} è contemporaneamente inversa sinistra e inversa destra di f).

Prima di affrontare il discorso delle inverse delle funzioni esponenziale, seno, coseno, etc. che abbiamo studiato nei paragrafi precedenti, dobbiamo fare alcune considerazioni preliminari generali relative all'inversa.

Per semplicità, consideriamo la funzione f che va dall'insieme X degli studenti di questo corso all'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali e che associa a ogni studente x il suo anno di nascita $f(x)$. Se volessimo invertire questa funzione, incontreremmo due tipi di problemi:

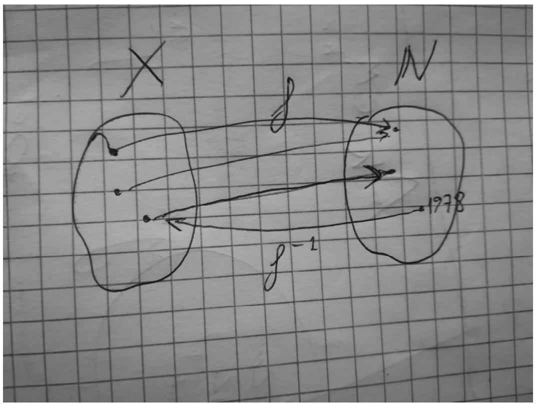
(1) la maggior parte degli studenti del corso è nata nel 2001, ovvero si ha $f(x) = 2001$ per molti x dell'insieme X degli studenti. Questo comporta il seguente problema: l'eventuale funzione f^{-1} inversa di f, che dovrebbe andare dall'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ all'insieme X degli studenti, che per definizione deve soddisfare $f^{-1}(f(x)) = x$, che valore dovrebbe assegnare al numero 2001? il problema è che una volta scelto tale valore, ad esempio $f^{-1}(2001) = x_0$ (dove x_0 è uno studente nato nel 2001, visto che la funzione inversa deve "tornare indietro"), la relazione $f^{-1}(f(x)) = x$ a questo punto è vera solo per x_0 (infatti, $f^{-1}(f(x_0)) = f^{-1}(2001) = x_0$) ma diventa falsa per qualunque altro x nato nel 2001, ovvero tale che $f(x) = 2001$: si ha infatti $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2001) = x_0$ e non x.



In altre parole, se la funzione f è tale che esistono almeno due x diverse che ci danno lo stesso valore, nel definire la funzione inversa, ovvero "tornando indietro" saremmo obbligati a scegliere uno dei due valori di partenza, il che renderebbe la condizione $f^{-1}(f(x)) = x$ vera per tale valore ma falsa per l'altro.

In conclusione, non è possibile costruire l'inversa di una funzione per cui esistono due x diverse che ci danno lo stesso valore di arrivo mediante f.

(2) Il secondo problema è il seguente: la funzione inversa, come abbiamo detto, è una funzione che deve andare dall'insieme dei numeri naturali all'insieme degli studenti del corso, e dovrebbe quindi essere definita per ogni numero naturale. Tuttavia, che valore dovrebbe assegnare ad esempio al numero $n = 1978$? se non ci sono studenti nati nel 1978, la funzione inversa, che per definizione "torna indietro" al valore iniziale, non ha a disposizione uno studente in X nato in quell'anno, e quindi non può assegnargli nessun valore che soddisfi questa condizione.



> In altre parole, il problema è che la funzione inversa come sappiamo deve soddisfare anche la relazione $f(f^{-1}(y)) = y$: ma se $y = 1978$ questa relazione non può mai essere soddisfatta, perché se scelgo uno studente x e definisco $f^{-1}(1978) = x$, avrò $f(f^{-1}(1978)) = f(x) \neq 1978$, in quanto nessuno studente x è nato nel 1978.

I due punti che abbiamo appena messo in evidenza mostrano che una funzione $f : X \to Y$, per poter essere invertita, deve soddisfare necessariamente due condizioni:

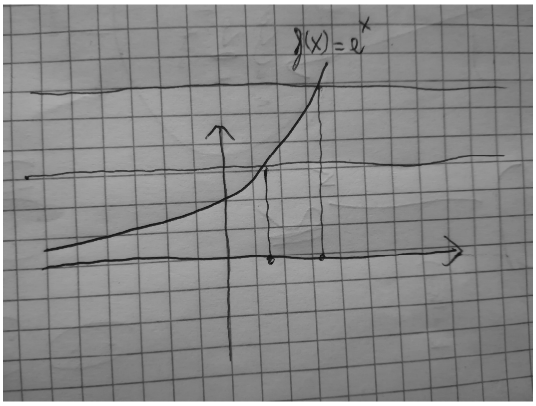
(1) non deve succedere che esistano due diversi valori di x, diciamo x_1 e x_2, che hanno lo stesso valore, ovvero tali che $f(x_1) = f(x_2)$. Quindi, deve succedere che dati x_1 e x_2 con $x_1 \neq x_2$, si deve avere $f(x_1) \neq f(x_2)$: la funzione si dice allora *iniettiva*.

(2) non deve succedere che esista un valore y nell'insieme di arrivo Y che non è immagine di nessun elemento x di partenza. Quindi, deve succedere che qualunque y prendiamo nell'insieme di arrivo, deve esistere un x nell'insieme di partenza tale che $f(x) = y$: la funzione si dice allora *suriettiva*.

In teoria delle funzioni, si dimostra che le condizioni di iniettività e suriettività per una funzione non sono solo necessarie ma anche sufficienti per l'esistenza dell'inversa: le uniche funzioni a ammettere un'inversa (si dice *invertibili*) sono quindi le funzioni che sono sia iniettive che suriettive: tali funzioni si chiamano *biiettive*.

A volte, in caso una funzione non sia invertibile perché non è iniettiva o non è suriettiva, è possibile modificarne il dominio o il codominio (senza modificare la f in sè) e renderla biiettiva, in modo che poi si possa scrivere la sua inversa. Come vedremo ora, questo è quello che succede per la costruzione delle inverse delle funzioni viste nel paragrafo precedente.

Iniziamo con la funzione esponenziale $f(x) = e^x$. Nel paragrafo precedente, l'abbiamo vista come una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Con questi dominio e codominio, la funzione è iniettiva (come si vede dal suo grafico, riprodotto nel disegno seguente, non ci sono mai due x diverse che hanno la stessa quota $f(x)$)



ma essa non è però suriettiva (e quindi non è invertibile): infatti, dato un qualunque numero reale y nel codominio minore o uguale di zero, non esiste nessun x nel dominio che viene mandato in y, ovvero nessun x tale che $e^x = y$, in quanto e^x è sempre positivo (come si vede nel grafico, la curva si mantiene sempre sopra l'asse orizzontale). Tuttavia, a questo problema si può ovviare restringendo il codominio all'insieme $(0, +\infty)$ dei numeri reali positivi: come funzione da $\mathbb{R}$ a $(0, +\infty)$, l'esponenziale $f(x) = e^x$ è ora suriettiva, e quindi, essendo anche iniettiva, è come abbiamo detto sopra invertibile: esiste quindi una funzione $f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ (dominio e codominio sono invertiti rispetto a f) e tale che $f^{-1}(f(x)) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $f(f^{-1}(y)) = y$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, ovvero

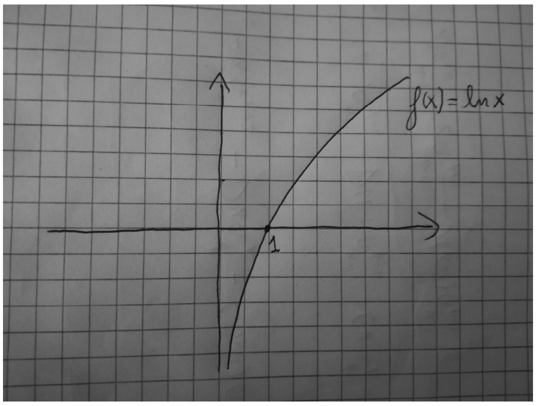
$$f^{-1}(e^x) = x, \quad e^{f^{-1}(y)} = y \tag{1.1}$$

Questa funzione si chiama *logaritmo in base* e e si denota $\log_e y$ oppure $\ln y$ (dalle iniziali di "logaritmo naturale"). Possiamo quindi riscrivere le formule (1.1) come

$$\ln(e^x) = x, \quad e^{\ln y} = y \tag{1.2}$$

La seconda di queste due uguaglianze non è nient'altro che l'espressione matematica dell'affermazione che il logaritmo di y è l'esponente che devo dare alla base (in questo caso e) per ottenere y. Ad esempio, $\ln 1 = 0$, perché 0 è esattamente l'esponente che devo dare a e per ottenere 1 (infatti, $e^0 = 1$).

Il grafico del logaritmo ln è il seguente.



In generale, data una funzione esponenziale $f(x) = a^x$, con a positivo e diverso da 1, si possono ripetere le stesse cose appena dette per l'esponenziale in base e. In quel caso, si definisce il *logaritmo in base* a e si denota $\log_a y$. Esattamente come per la base e, il logaritmo in base a di y può essere pensato come l'esponente che devo dare a a per ottenere y. Ad esempio, $\log_2 8 = 3$, perché $2^3 = 8$.

I logaritmi, in qualunque base, hanno delle proprietà molto importanti che possono essere facilmente dedotte dalle (1.2), come

$$\log_1(y_1 y_2) = \log_a(y_1) + \log_a(y_2)$$

(ovvero il logaritmo di un prodotto si spezza come somma dei logaritmi), e

$$\log_a (y^\alpha) = \alpha \log_a y$$

che, scegliendo come caso particolare $\alpha = -1$ e ricordando che $y^{-1} = \frac{1}{y}$, ci dice che

$$log_a \left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a y \tag{1.3}$$

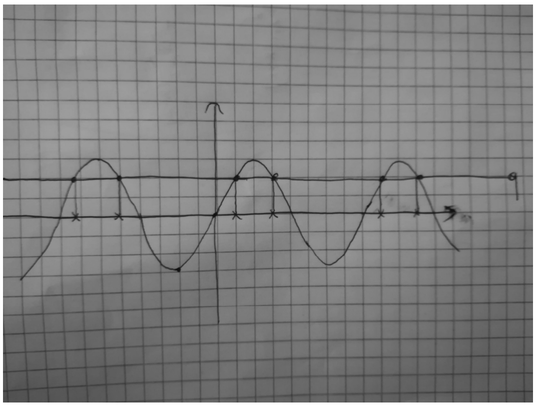
Il logaritmo è una funzione che interviene spesso in molte formule delle scienze applicate e in particolare in fisica e in chimica. Per citarne una, ricordiamo che il Ph di una sostanza è definito esattamente come un logaritmo, e più precisamente come

$$Ph = \log_{10}\left(\frac{1}{a_{H^+}}\right)$$

ovvero come il logaritmo in base 10 dell'inverso di a_{H^+}, che senza entrare in dettagli[4] rappresenta una misura della concentrazione degli ioni responsabili dell'acidità. Ad esempio, quando questa concentrazione è massima, ovvero 1, nella definizione troviamo $\log_{10} 1 = 0$, che rappresenta infatti il massimo valore di acidità. Si noti che in base alla formula (1.3), il Ph può essere equivalentemente definito anche come $-\log_{10} a_{H^+}$.

Passiamo ora alle inverse delle funzioni trigonometriche: seno e coseno. Pensate come funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, queste funzioni presentano intanto come per l'esponenziale il problema della non suriettività: essendo funzioni che assumono solo valori compresi tra -1 e 1, dato un numero reale y nel codominio che sia fuori da questo intervallo (ovvero maggiore di 1 o minore di -1) non esiste nessun $x \in \mathbb{R}$ tale che $\sin x = y$ o che $\cos x = y$. Analogamente a quanto fatto per l'esponenziale, si può ovviare a questo problema restringendo il codominio all'intervallo $[-1, 1]$ e pensarle come funzioni $\mathbb{R} \to [-1, 1]$: in questo modo diventano funzioni suriettive.

Tuttavia, diversamente dall'esponenziale, seno e coseno presentano anche un problema di iniettività: essendo funzioni periodiche, dato un qualunque y nel codominio ristretto $[-1, 1]$, esistono infiniti valori x nel dominio tali che $\sin x = y$ o $\cos x = y$: in altre parole, come si vede nel grafico, scelta una qualunque quota y compresa tra -1 e 1 esistono infiniti punti del grafico che si trovano a quella quota.

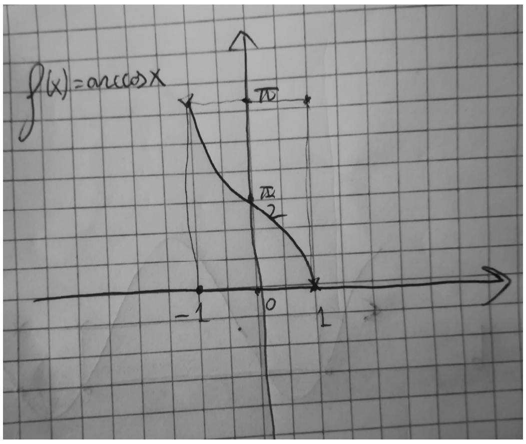


Per garantire l'iniettività e avere quindi una funzione invertibile, bisogna quindi restringere anche il dominio e limitarsi a un intervallo in cui non esistano due x diversi con lo stesso seno o con lo stesso coseno.

[4]L'autore di questi appunti non potrebbe neanche volendolo, non essendo un chimico.

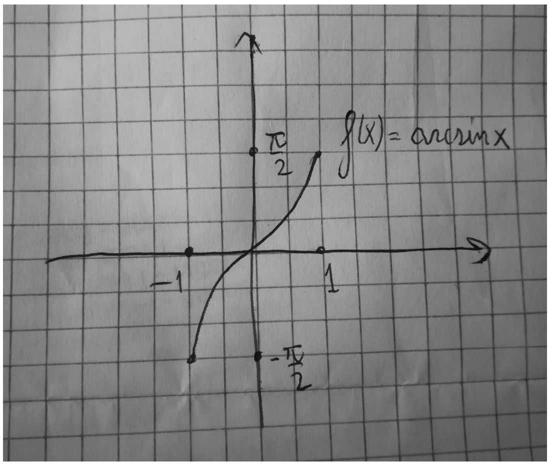
La scelta di questo intervallo può essere fatta in molti modi diversi: ad esempio, per il coseno basta scegliere l'intervallo $[0, \pi]$: come si vede dalla circonferenza goniometrica, se ci limitiamo a prendere x in questo intervallo non esistono due x diverse con lo stesso coseno.

A questo punto, quindi, $f(x) = \cos x$, pensata come funzione $[0, \pi] \to [-1, 1]$ è una funzione sia iniettiva che suriettiva, e quindi ammette un'inversa, che sarà una funzione $[-1, 1] \to [0, \pi]$, che si chiama "arcocoseno" e che si denota arccos. Il suo grafico è il seguente.



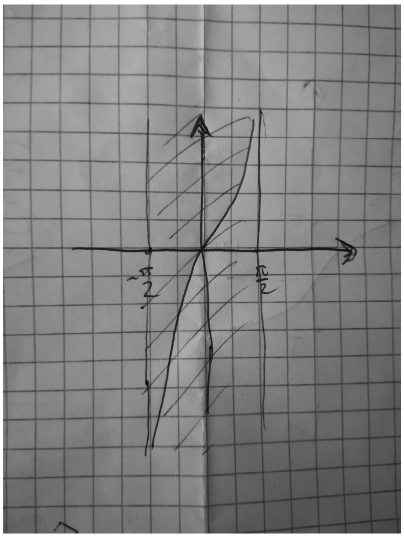
Per l'inversa del seno si procede in modo esattamente analogo: come si vede dalla circonferenza goniometrica, se ci limitiamo a prendere x nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ non esistono due x diverse con lo stesso seno (mentre si noti che l'intervallo $[0, \pi]$ che avevamo preso per il coseno non va invece più bene).

A questo punto, quindi, $f(x) = \sin x$, pensata come funzione $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ è una funzione sia iniettiva che suriettiva, e quindi ammette un'inversa, che sarà una funzione $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, che si chiama "arcoseno" e che si denota arcsin. Il suo grafico è il seguente.

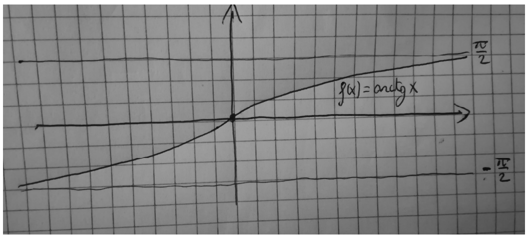


Veniamo ora alle funzioni inverse della tangente e della cotangente.

Per quello che riguarda la tangente $f(x) = \text{tg}x$, come abbiamo fatto per le funzioni precedenti prima di determinare l'inversa dobbiamo restringere dominio e codominio a intervalli in cui la funzione sia definita (ricordiamo che la tangente non è definita su tutto $\mathbb{R}$), iniettiva e suriettiva. Ad esempio, è facile vedere che se la pensiamo come funzione $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ (l'intervallo è aperto perché la tangente non è definita sugli estremi $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$) la tangente ha tutte queste proprietà. In quest'intervallo non esistono due x diverse con la stessa tangente, e inoltre per ogni numero reale y esiste sempre un x che ha y come tangente.

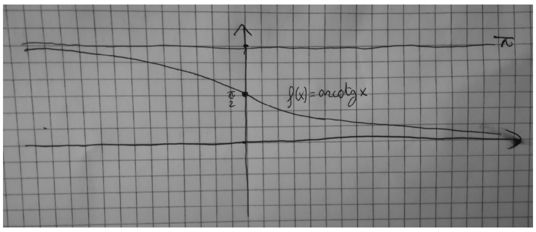


Possiamo quindi invertire la tangente con questo dominio e questo codominio, ottenendo quindi la funzione inversa $\mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ che si chiama "arcotangente", si indica con artg, e ha il seguente grafico



Analogamente, per quello che riguarda la cotangente $f(x) = \text{cotg}x$, dobbiamo restringere dominio e codominio a un intervallo in cui la funzione sia definita, iniettiva e suriettiva. Ad esempio, è facile vedere che se la pensiamo come funzione $(0, \pi) \to \mathbb{R}$ la cotangente ha tutte queste proprietà. In quest'intervallo non esistono due x diverse con la stessa cotangente, e inoltre per ogni numero reale y esiste sempre un x che ha y come cotangente.

Possiamo quindi invertire la cotangente con questo dominio e questo codominio, ottenendo quindi la funzione inversa $\mathbb{R} \to (0, \pi)$ che si chiama "arcocotangente", si indica con arcotg, e ha il seguente grafico

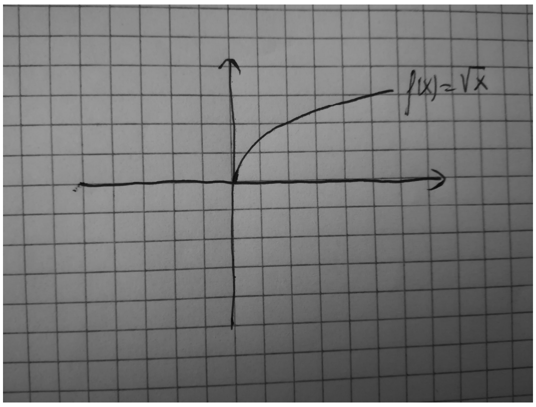


Per quello che riguarda le inverse delle funzioni polinomiali o razionali, non esiste in generale una formula esplicita, in quanto come abbiamo messo in evidenza una funzione polinomiale può avere un comportamento anche molto complicato; tuttavia, ad esempio le funzioni potenza $f(x) = x^n$ hanno un'inversa esplicita ben precisa: la *radice n-esima*.

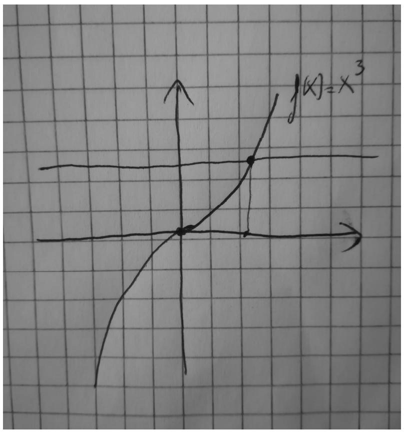
Ad esempio, la funzione $f(x) = x^2$ se la pensiamo come funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è né suriettiva (se $y \in \mathbb{R}$ è negativo, non esiste nessun x tale che $x^2 = y$, da cui la non suriettività se il codominio è tutto $\mathbb{R}$) né iniettiva (per ogni x nel dominio, si ha $x^2 = (-x)^2$, quindi esistono due valori, x e $-x$, che hanno lo stesso valore, da cui la non iniettività se il dominio è tutto $\mathbb{R}$).

Se però restringiamo sia dominio che codominio al solo insieme $[0, +\infty)$ dei numeri reali maggiori o uguali a zero, la funzione x^2 diventa sia iniettiva che suriettiva, e quindi possiamo costruirne l'inversa, che sarà quella funzione $f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ tale che per ogni $y \geq 0$ si ha $f^{-1}(x^2) = x$ e $(f^{-1}(y))^2 = y$. Questa seconda uguaglianza, a parole, significa semplicemente che per ogni $y \geq 0$, $f^{-1}(y)$ è quel numero reale che al quadrato è uguale a y: ma questa non è nient'altro che la definizione di radice quadrata $\sqrt{y}$.

Quindi, la radice quadrata è l'inversa della funzione $f(x) = x^2$. Il grafico della radice quadrata è il seguente

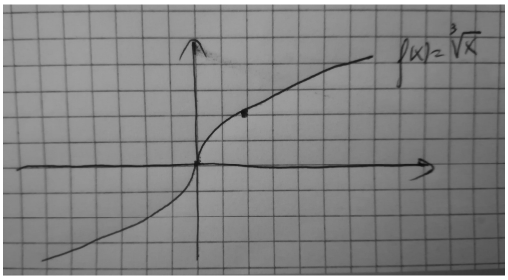


Se prendiamo invece la funzione $f(x) = x^3$, non è difficile vedere che essa è già sia iniettiva che suriettiva come funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, senza bisogno di restringere né dominio né codominio: per ogni numero reale y nel codominio esiste un x tale che $y = x^3$, e non esistono due numeri reali x diversi con lo stesso cubo x^3.



Possiamo quindi costruire l'inversa, che sarà quella funzione $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che per ogni y reale si ha $f^{-1}(x^3) = x$ e $(f^{-1}(y))^3 = y$. Questa seconda uguaglianza, a parole, significa semplicemente che per ogni y reale, $f^{-1}(y)$ è quel numero reale che al cubo è uguale a y: ma questa non è nient'altro che la definizione di radice cubica $\sqrt[3]{y}$.

Quindi, la radice cubica è l'inversa della funzione $f(x) = x^3$. Il grafico della radice cubica è il seguente



Quanto detto per $f(x) = x^2$ e $f(x) = x^3$ vale per tutte le potenze x^n: più precisamente, se n è pari, esattamente come per la funzione quadrato, la funzione x^n è invertibile come funzione $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$, mentre se n è dispari, esattamente come per la funzione cubo, x^n è invertibile come funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. In entrambi i casi, l'inversa è la radice n-esima $\sqrt[n]{x}$. I grafici delle radici n-esime hanno lo stesso andamento della radice quadrata (se n è pari) e della radice cubica (se n è dispari).

Osservazione 1.6. Ricordiamo che anche le radici possono essere pensate come potenze, e più precisamente si ha $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$. In generale, si può definire la potenza x^α per qualunque numero reale α: se α è un numero razionale, cioè $\alpha = \frac{m}{n}$, allora $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$, mentre se α è un numero non razionale (ad esempio $\sqrt{2}$, o π, oppure e) non entriamo in dettagli sulla definizione (che coinvolge concetti non banali della definizione di numero reale), ma segnaliamo che, limitandosi a $\alpha > 0$ e $x \geq 0$ per non avere problemi di definibilità, il grafico di x^α ha lo stesso andamento delle potenze x^2, x^3 etc. se $\alpha > 1$, mentre ha lo stesso andamento delle radici $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$ etc. se $\alpha < 1$.

Osservazione 1.7. L'invertibilità di una funzione e i problemi collegati all'esistenza dell'inversa possono essere interpretati in termini di risoluzione di un'equazione. Infatti, supponiamo di avere una funzione f e di voler risolvere l'equazione $f(x) = c$, ovvero determinare tutti gli x che vengono mandati in c mediante la funzione f. Se la funzione f è invertibile, basta applicare l'inversa a c per ottenere x (l'inversa come sappiamo è la funzione che "torna indietro" dal valore c al valore iniziale x), ottenendo così $x = f^{-1}(c)$: in questo modo abbiamo risolto l'equazione determinando x, l'unica soluzione dell'equazione. Ad esempio, se l'equazione è $\cos x = 1/3$, applicando l'inversa del coseno possiamo scrivere che la soluzione è $x = \arccos(1/3)$ (ovvero, in parole, l'angolo il cui coseno è $1/3$, anche se non si tratta di un angolo notevole).

Se f non è iniettiva significa semplicemente che potrebbero esserci due o più x diversi che vengono mandati in c, ovvero potrebbe esserci più di una soluzione; se f non è suriettiva potrebbe accadere che per il valore di c dato non esiste nessun x che viene mandato in c mediante f, ovvero potrebbe non esistere nessuna soluzione.