

Chapter 1

Derivate

1.1 La definizione di derivata

Dopo quella di limite, la nozione di derivata è la seconda importante definizione del calcolo infinitesimale.

Come stiamo per vedere, tale nozione formalizza, rendendolo rigoroso, il concetto di velocità, intesa ad esempio come velocità con cui un punto o un corpo si stanno muovendo ma più in generale come velocità con cui una qualunque quantità fisica, descritta da una funzione $f(x)$ in cui x rappresenta il tempo, sta variando per l'appunto rispetto al tempo: questo suggerisce l'enorme importanza di tale concetto in fisica e in tutte le applicazioni della matematica alle scienze.

Vediamo subito la definizione rigorosa. Supponiamo di avere una funzione $f(x)$ e di voler appunto misurare la velocità con cui i valori da essa assunti variano al variare di x . Per rendere più facile l'introduzione di questo concetto, possiamo per il momento immaginare che la $f(x)$ rappresenti proprio una distanza percorsa da un corpo in movimento a partire da un certo punto iniziale (al variare del tempo x): allora, è facile definire la velocità media di tale corpo in un certo intervallo di tempo, data dal rapporto tra la distanza percorsa nell'intervallo scelto fratto il tempo trascorso.

Ad esempio, se siamo interessati alla velocità media nell'intervallo di tempo che va a un certo istante x_0 fissato a un certo istante $x_0 + h$, la distanza percorsa in tale intervallo è data dalla differenza tra il valore $f(x_0 + h)$ della distanza totale percorsa al momento $x_0 + h$ meno la distanza $f(x_0)$ che era stata già percorsa all'istante x_0 , ovvero $f(x_0 + h) - f(x_0)$. Il tempo trascorso per percorrere questa distanza è chiaramente dato dalla differenza $(x_0 + h) - x_0 = h$, e quindi la velocità media nell'intervallo considerato è data dal rapporto

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (1.1)$$

(detto anche *rapporto incrementale*). Il risultato di questa operazione dipende chiaramente non solo dall'istante x_0 scelto, ma anche dall'ampiezza h dell'intervallo di tempo scelto per misurare la velocità media.

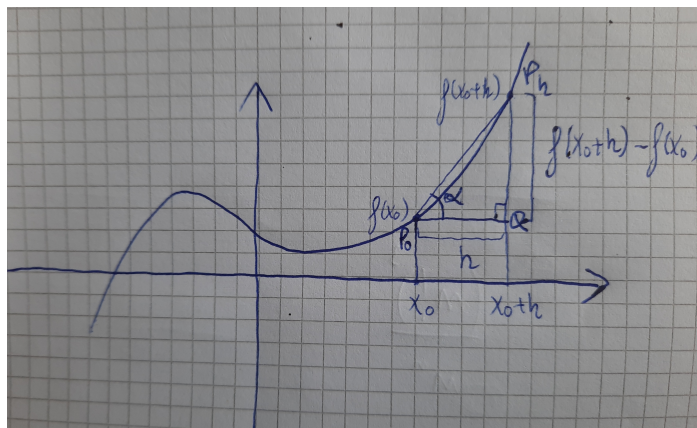
Ebbene, cosa succederebbe se effettuassimo questa misurazione con intervalli di tempo sempre più brevi? Il risultato sarebbe sempre più grande? sempre più piccolo? convergerebbe verso un valore fissato? La risposta è chiaramente suggerita dall'operazione di limite: basta infatti calcolare il limite per h (appunto l'ampiezza dell'intervallo di tempo scelto) che tende a zero della (1.1):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (1.2)$$

Questo limite, intuitivamente, ci dà il concetto di *velocità istantanea*, ovvero la velocità che ha il corpo nell'istante di tempo x_0 : esso costituisce la definizione rigorosa di *derivata di f in x_0* , e si denota $f'(x_0)$ (o, con notazioni alternative, $\frac{df}{dx}(x_0)$ o $\dot{f}(x_0)$).

Accanto all'interpretazione "fisica" appena data di derivata come velocità, esiste anche la seguente interpretazione geometrica, altrettanto importante.

Denotiamo P_0 il punto del grafico di f corrispondente al valore x_0 e P_h il punto del grafico corrispondente al valore $x_0 + h$: dal momento che $f(x_0)$ è l'ordinata di P_0 e $f(x_0 + h)$, la differenza $f(x_0 + h) - f(x_0)$ è la lunghezza del cateto verticale del triangolo rettangolo P_0P_hQ con ipotenusa P_0P_h , mentre $h = (x_0 + h) - x_0$ è chiaramente la lunghezza del suo cateto orizzontale

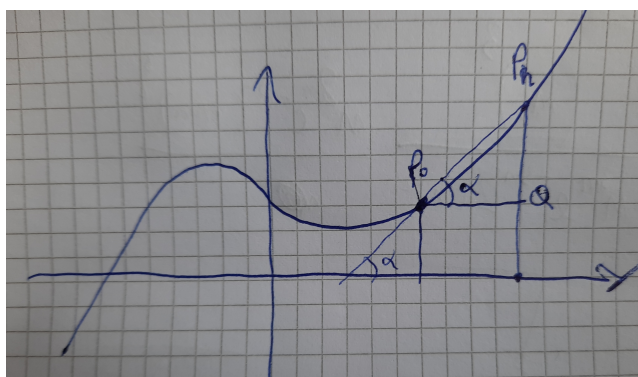


Ora, come sappiamo dalla trigonometria, il rapporto tra le lunghezze dei cateti P_hQ e P_0Q è la tangente¹ dell'angolo α opposto al cateto verticale P_hQ .

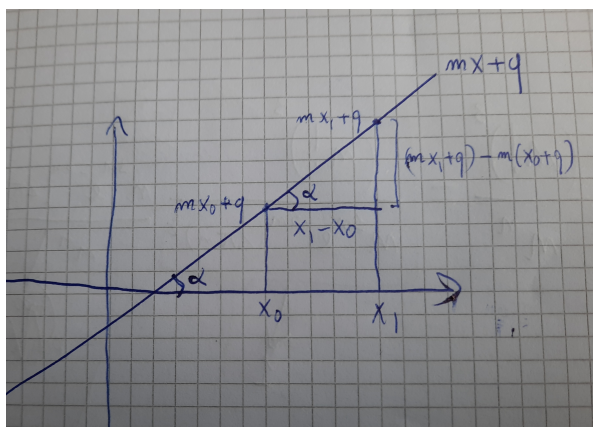
Possiamo allora scrivere

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \operatorname{tg}\alpha$$

Ora, si noti che, in base a ragionamenti di geometria euclidea elementare, l'angolo α è uguale all'angolo formato tra la retta che unisce i punti P_0 e P_h e l'asse x .



Ma se la retta è il grafico della funzione $mx + q$ (come sappiamo, le rette corrispondono a funzioni date da polinomi di primo grado), la tangente $\operatorname{tg}\alpha$ di α è esattamente uguale a m , come suggerito dal seguente disegno



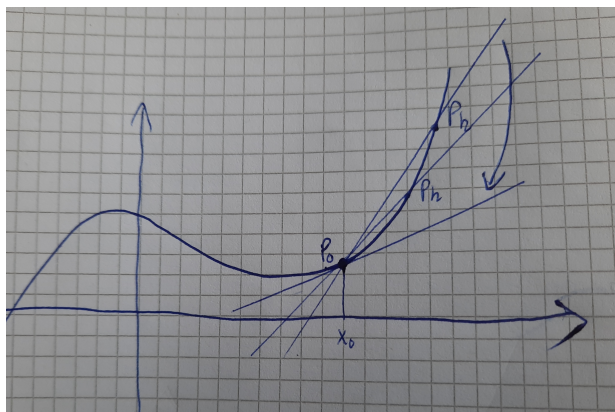
¹In effetti, questo è in accordo con definizione della tangente come rapporto $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, se si pensa che il seno rappresenta l'ordinata del punto corrispondente all'angolo (e quindi la lunghezza del cateto verticale, opposto all'angolo) mentre il coseno l'ascissa di tale punto (e quindi la lunghezza del cateto orizzontale, adiacente all'angolo).

Più precisamente, la tangente $\operatorname{tg}\alpha$ è sempre il rapporto tra la lunghezza del cateto verticale e la lunghezza di quello orizzontale, ovvero

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(mx_1 + q) - (mx_0 + q)}{x_1 - x_0} = \frac{mx_1 + q - mx_0 - q}{x_1 - x_0} = \frac{m(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} = m$$

Riassumendo, il rapporto $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ non è nient'altro che il coefficiente angolare della retta che unisce i punti P_0 e P_h .

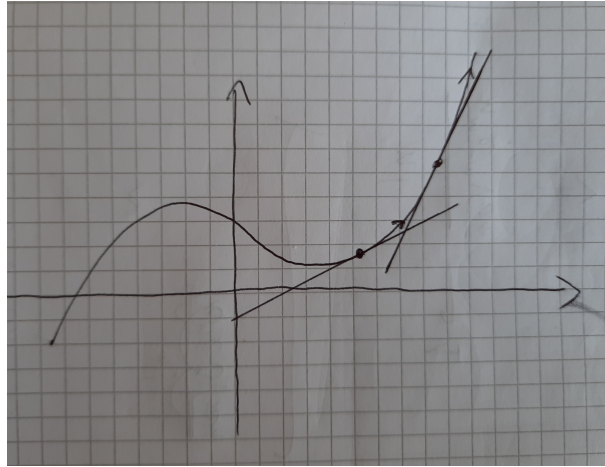
Ma se facciamo tendere h a zero, da una parte il punto P_h si avvicina sempre di più a P_0 fino a coincidere con esso; dall'altra, la retta che unisce P_0 e P_h va a coincidere in questo passaggio al limite con la retta tangente al grafico della funzione in P_0



Possiamo allora affermare che il limite del rapporto $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, cioè la derivata $f'(x_0)$ di f in x_0 , ci dà il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f in x_0 .

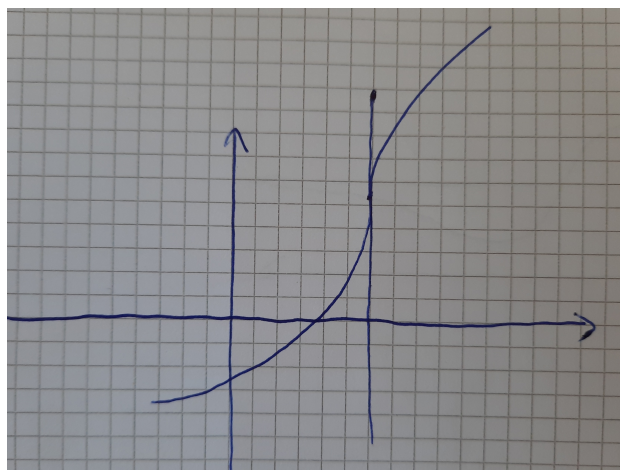
L'importanza di tale fatto in geometria è enorme: consente di definire rigorosamente il concetto di retta tangente a una curva in un punto e di calcolarla (come vedremo in esempi e esercizi).

Osservazione 1.1. Si noti che l'interpretazione "fisica" della derivata come velocità e quella "geometrica" come pendenza della retta tangente sono in perfetto accordo tra loro, come mostra il seguente disegno, nel quale si vede che i punti in cui la tangente ha pendenza maggiore sono effettivamente quelli in cui la funzione sta crescendo più velocemente

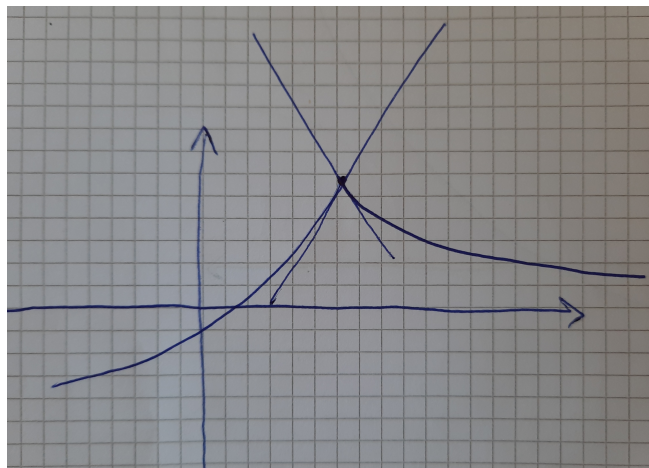


Ora, abbiamo definito la derivata come un limite, ma come sappiamo dalle lezioni precedenti, per un limite abbiamo varie possibilità: esso può essere finito, infinito o può anche non esistere. Cosa significa questo nel contesto delle derivate?

- (1) iniziamo dal caso in cui il limite del rapporto incrementale che definisce la derivata $f'(x_0)$ sia $\pm\infty$: dal momento che, come abbiamo visto, $f'(x_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f in x_0 , ovvero la tangente $\text{tg}\alpha$ dell'angolo α formato tra la retta tangente e l'asse x , otterremo come risultato infinito quando la tangente è infinita, ovvero per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ o $\alpha = -\frac{\pi}{2}$: in entrambi i casi, geometricamente questo significa che la retta tangente è, in quel punto, verticale:

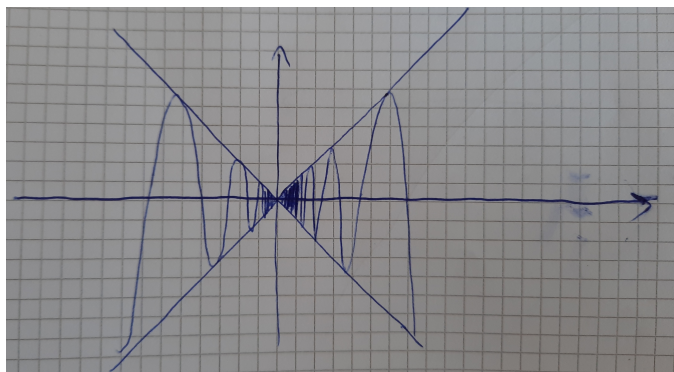


- (2) una seconda possibilità è che il limite del rapporto incrementale non esista perché i limiti destro e sinistro esistono e sono finiti, ma sono diversi: sempre per il significato geometrico della derivata, questo significa che quando ci avviciniamo a x_0 da destra allora la retta tangente ha una certa pendenza, mentre quando ci avviciniamo da sinistra, la pendenza è un'altra, come rappresentato ad esempio nel disegno seguente



Si parla in tal caso di "punto angoloso".

- (3) Infine, come sappiamo un limite può non esistere perché non esistono neanche i limiti destro e sinistro: a pagina 8 della prima parte sui limiti abbiamo visto ad esempio un tale caso, in cui la funzione oscilla sempre più velocemente tra un massimo e un minimo senza mai stabilizzarsi man mano che ci avviciniamo al punto limite. Se questo capita al limite del rapporto incrementale, in tal caso avremo una funzione per cui la pendenza della retta tangente al grafico oscilla sempre più velocemente man mano che ci avviciniamo al punto considerato, e non risulta avere una pendenza ben definita in tale punto. Nel disegno seguente

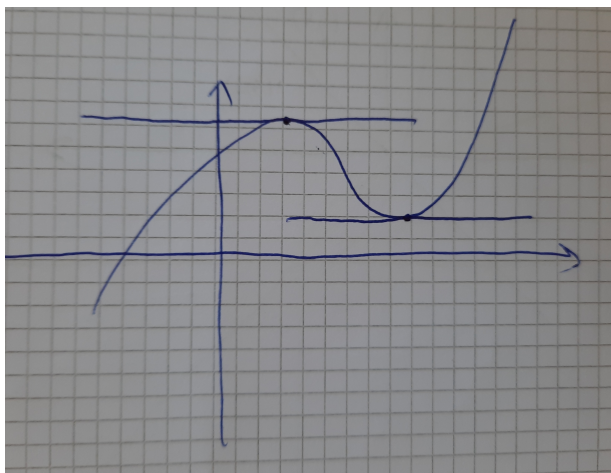


è rappresentato proprio il grafico di una funzione ($f(x) = x \sin \left(\frac{1}{x}\right)$, $f(0) = 0$) per cui la pendenza della retta tangente, avvicinandoci all'origine, continua a variare continuamente oscillando tra -1 e 1 senza stabilizzarsi mai.

Diremo che una funzione è *derivabile* in un punto x_0 se il limite che definisce $f'(x_0)$ esiste ed è finito. In caso contrario, la funzione si dice *non derivabile* in tale punto.

Osservazione 1.2. Un caso particolarmente degno di attenzione, per motivi che vedremo più avanti, è quello in cui la derivata $f'(x_0)$ è uguale a zero. In tal caso, in base all'interpretazione geometrica, il coefficiente angolare m della retta tangente nel punto P_0 (corrispondente al valore x_0) è nullo, ovvero la retta tangente è grafico della funzione $0x + q = q$ costante. Dal momento che una funzione costante ha come grafico una retta orizzontale, concludiamo che i punti in cui la derivata si annulla sono punti in cui la tangente al grafico è orizzontale.

Come vedremo, l'importanza di questo caso consiste nel suo legame con il problema della ricerca dei cosiddetti massimi e dei minimi locali di una funzione: senza pretesa di dare ora la definizione, che vedremo più avanti, si tratta dei punti come quelli rappresentati nel disegno seguente



nei quali la funzione cresce e poi decresce (assumendo un picco locale²) o viceversa. La ricerca di questi punti è di fondamentale importanza nelle applicazioni, dalla fisica all'economia, dove essi rappresentano in un certo senso punti di equilibrio per il sistema descritto dalla funzione.

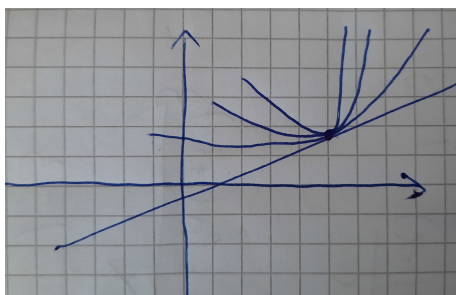
²L'aggettivo "locale" è dovuto al fatto che dopo il picco, per valori successivi di x "lontani dal punto di massimo" la funzione può anche ricominciare a crescere e il suo valore può anche superare quello che aveva nel picco.

Osservazione 1.3. Una volta data la funzione $f(x)$, la sua derivata dipende dal punto x_0 scelto per calcolare il limite del rapporto incrementale: se f è derivabile, per ogni scelta di x_0 otterrò un numero reale, e questo ci definisce quindi una nuova funzione, che denotiamo $f'(x)$ (che associa appunto a ogni x la derivata di f in x). Se la derivata $f'(x)$, vista come nuova funzione, è a sua volta derivabile, possiamo calcolarne la derivata: otterremo allora quella che si denota $f''(x)$ e si chiama *derivata seconda di f* (in altre parole, è la funzione che si ottiene derivando due volte f). Continuando in questo modo, avremo la derivata terza $f'''(x)$ e tutte le derivate successive, che dopo la terza si denotano con notazione in numeri romani $f^{(iv)}(x)$, $f^{(v)}(x)$ etc.

Nella notazione di derivata come $\frac{df}{dx}$, per le derivate successive si utilizza invece la notazione $\frac{d^2f}{dx^2}$, $\frac{d^3f}{dx^3}$, $\frac{d^4f}{dx^4}$ etc.

Osserviamo che nell'interpretazione "fisica" di derivata, per cui essa rappresenta la velocità con cui i valori di $f(x)$ variano al variare di x , la derivata seconda risulta essere la derivata della derivata prima, cioè la derivata della velocità, che ci dice quindi quanto velocemente sta variando la velocità: da un punto di vista fisico, si tratta dell'accelerazione.

Anticipiamo che nell'interpretazione geometrica, invece, la derivata seconda in un punto ha a che fare con la maggiore o minore concavità del grafico della funzione nel punto considerato.



Torneremo più approfonditamente su questo significato della derivata seconda (e sul significato delle derivate successive) tra qualche paragrafo.

Siamo ora pronti a imparare come calcolare le derivate delle funzioni elementari.

1.2 Calcolo delle derivate

Nel primo capitolo di questo corso, abbiamo costruito le funzioni elementari combinando le funzioni potenza x^α , esponenziale a^x , seno $\sin x$ e coseno $\cos x$ mediante le operazioni di somma, prodotto, rapporto, composizione e inversa.

Allo scopo quindi di imparare a calcolare la derivata di qualunque funzione elementare, impareremo prima a calcolare le derivate delle funzioni x^α , a^x , $\sin x$, $\cos x$ e poi vedremo come si comporta la derivata rispetto a quelle cinque operazioni.

Iniziamo dalla funzione potenza: si può mostrare che per un qualunque numero reale α vale la formula

$$f(x) = x^\alpha, \quad f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \quad (1.3)$$

Ad esempio, se $\alpha = 1$, ovvero $f(x) = x$, la formula dà $f'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$; se $\alpha = 2$, ovvero $f(x) = x^2$, la formula dà $f'(x) = 2 \cdot x^{2-1} = 2x$; se $\alpha = 3$, ovvero $f(x) = x^3$, la formula dà $f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$; se $\alpha = -1$, ovvero $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$, la formula dà $f'(x) = (-1) \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ etc.

Non diamo una dimostrazione della (1.3) in generale, ma non è difficile dimostrare direttamente dalla definizione di derivata che ad esempio la derivata di x^2 è $2x$:

$$(x^2)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x$$

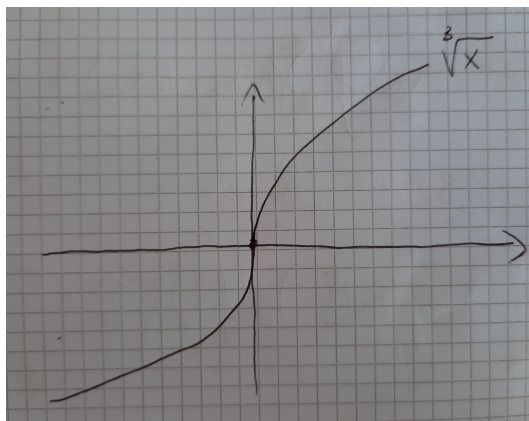
dove abbiamo usato il quadrato di binomio³ $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ per sviluppare $(x+h)^2$.

Osservazione 1.4. Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Essendo $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, possiamo usare la formula (1.3) di derivazione delle potenze, che ci dà

$$(\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Possiamo osservare che la derivata non è definita per $x = 0$ e che il limite per x che tende a zero di $\frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ è $+\infty$. Questo è in accordo con l'interpretazione geometrica di derivata come pendenza della retta tangente e con il grafico di $\sqrt[3]{x}$

³Per dimostrare invece che per ogni numero naturale n si ha $(x^n)' = nx^{n-1}$ si dovrebbe usare la formula per la potenza generale di un binomio $(A+B)^n$, ma omettiamo i dettagli.



che mostra appunto che la retta tangente nell'origine è verticale (coincide in effetti con l'asse y)

Per quello che riguarda le funzioni esponenziali a^x , la formula per la derivata è la seguente:

$$f(x) = a^x, \quad f'(x) = (\ln a)a^x \quad (1.4)$$

Ad esempio, il caso più notevole di questa formula è quello in cui scegliamo $a = e$: essendo $\ln e = 1$, si ottiene che la derivata di e^x è e^x stessa.

Osservazione 1.5. La (1.4) ci sta dicendo che la derivata di una funzione esponenziale è la funzione stessa moltiplicata per un coefficiente $\ln a$: in altre parole, ogni funzione esponenziale $f = a^x$ verifica un'identità del tipo $f' = kf$ (dove stiamo scrivendo k al posto di $\ln a$ per semplicità). La condizione $f' = kf$ è un semplice esempio di *equazione differenziale* (ovvero un'equazione nella quale compaiono come incognite una funzione f e le sue derivate) che costituisce un primo, elementare modello per la descrizione di fenomeni di dinamica di popolazioni, decadimenti radioattivi etc. Senza entrare troppo nei dettagli, se la $f(x)$ rappresenta il numero di individui di una "popolazione" (animali, batteri, ma anche atomi, particelle etc.) in funzione del tempo x , scrivere $f' = kf$ significa dire che il tasso di crescita di questa popolazione in ogni istante è proporzionale alla popolazione in quel momento (con coefficiente di proporzionalità k , che può rappresentare ad esempio la fertilità della popolazione): in tal caso, la crescita risulterà essere appunto esponenziale. Modelli più elaborati (nei quali si tenga per esempio in considerazione che se la popolazione è troppo grande allora la sua crescita risulta ostacolata, per ragioni ambientali o di difficoltà di reperimento risorse per tutti) portano a equazioni differenziali più complicate e quindi a soluzioni diverse da quella esponenziale. Una trattazione più dettagliata delle equazioni

differenziali in generale e di queste questioni verrà affrontata nel corso di Matematica 3.

Veniamo ora alle derivate delle funzioni trigonometriche $\sin x$ e $\cos x$: abbiamo le seguenti

$$f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x \quad (1.5)$$

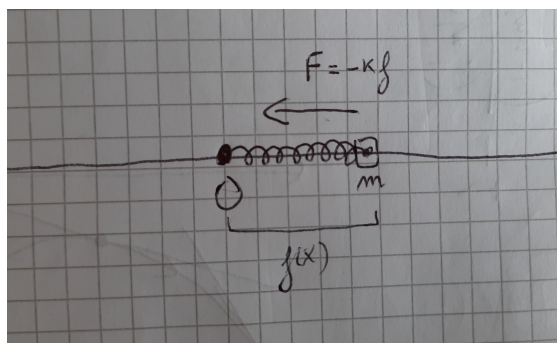
$$f(x) = \cos x, \quad f'(x) = -\sin x \quad (1.6)$$

Osservazione 1.6. La derivata seconda $(\sin x)''$ della funzione $\sin x$ è per definizione la derivata della sua derivata prima, e quindi, in base alle (1.5) e (1.6),

$$(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$$

Questa uguaglianza ci dice che la funzione $f(x) = \sin x$ verifica l'equazione differenziale $f'' = -f$ (in effetti, si può vedere altrettanto facilmente che lo stesso è vero per la funzione $\cos x$).

Tale fatto ha la seguente importante interpretazione fisica. Supponiamo di avere un corpo di massa m collegato a un punto fissato O mediante una molla e supponiamo che la funzione $f(x)$ ci dia il valore della distanza del corpo da O in ogni istante di tempo x .



Per effetto della molla, il corpo percepisce in ogni istante una forza F che tende a riportarlo in O (e quindi diretta in senso opposto allo spostamento) e proporzionale allo spostamento f stesso, diciamo $F = -kf$ (dove k è il coefficiente di proporzionalità). Combinando questa uguaglianza con la seconda legge di Newton $F = ma$ che ci dice che la forza è uguale alla massa per l'accelerazione, e ricordando che l'accelerazione coincide con la derivata seconda f'' , otteniamo $mf'' = -kf$, ovvero $f'' = -\frac{k}{m}f$. Se per semplicità supponiamo che i valori di k e m siano tali per cui $\frac{k}{m} = 1$, otteniamo proprio

l'equazione differenziale $f'' = -f$, che come abbiamo detto è soddisfatta dalle funzioni periodiche oscillanti $f(x) = \sin x$ e $f(x) = \cos x$.

Questo è in accordo col fatto che (in condizioni ideali di assenza di attrito⁴) il moto del corpo sarà esattamente un moto oscillante attorno al punto O di applicazione della molla .

Accanto ai quattro casi di funzioni elementari appena viste, segnaliamo che per una funzione costante $f(x) = c$, la derivata $f'(x)$ è uguale identicamente a zero: questo può essere visto immediatamente dalla definizione di derivata, ma alternativamente, possiamo usare l'interpretazione fisica o quella geometrica: se vediamo la derivata come velocità, una funzione costante non varia e quindi ha giustamente velocità di variazione nulla; se vediamo invece la derivata come coefficiente angolare della retta tangente al grafico, abbiamo che una funzione costante rappresenta una retta orizzontale, per cui la tangente in ogni punto coincide con la retta stessa e il coefficiente angolare è quindi 0 ovunque.

Come preannunciato, vediamo ora come si comporta la derivata rispetto alle operazioni di somma, prodotto, quoziente, composizione e inversa.

Derivata della somma di due funzioni

$$(f + g)' = f' + g' \quad (1.7)$$

Ad esempio, da $(x^4)' = 4x^3$ e $(\cos x)' = -\sin x$ si ha

$$(x^4 + \cos x)' = 4x^3 - \sin x$$

Derivata del prodotto di due funzioni

$$(fg)' = f'g + fg' \quad (1.8)$$

Questa regola è chiamata anche *regola di Leibniz*. Ad esempio, se devo derivare $x^2 \sin x$, ottengo

$$(x^2 \sin x)' = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

⁴Altrimenti, nell'equazione differenziale dovremo inserire dei termini correttivi che la complicano e producono come soluzione delle funzioni oscillanti ma con ampiezza di oscillazione decrescente.

Dalla regola di Leibniz, usando il fatto che la derivata di una costante è zero, può essere ricavata subito come caso particolare la seguente regola

$$(cf)' = cf' \quad (1.9)$$

ovvero "le costanti escono dalla derivata" (ma la enunciamo come regola a parte per la sua semplicità).

La (1.7) e la (1.9) ci consentono ad esempio di calcolare la derivata di qualunque polinomio, che è appunto somma di monomi (ovvero potenze moltiplicate ciascuna per una costante). Ad esempio, ho

$$(3x^5 - 2x^4 + 6x - 7)' = 3(x^5)' - 2(x^4)' + 6(x)' + (-7)' = 3 \cdot 5x^4 - 2 \cdot 4x^3 + 6 \cdot 1 + 0 = 15x^4 - 8x^3 + 6$$

Osservazione 1.7. Un esempio di funzione polinomiale con un significato fisico notevole, come abbiamo accennato anche nel primo capitolo di questo corso, è la funzione che rappresenta l'andamento della quota di un corpo lanciato in aria a partire da una quota iniziale x_0 e con una velocità iniziale v_0 : tale quota è data, al variare del tempo x , dal polinomio di secondo grado $f(x) = x_0 + v_0x - \frac{1}{2}gx^2$ (dove g rappresenta l'accelerazione di gravità terrestre). Ora, se calcoliamo le derivate prima e seconda di questo polinomio, tenendo conto che x_0 , v_0 e g sono costanti, otteniamo

$$f'(x) = v_0 - gx, \quad f''(x) = -g$$

Come si vede, l'accelerazione (rappresentata dalla derivata seconda) è costante, in accordo con il fatto che il moto si svolge sotto l'effetto dell'accelerazione di gravità terrestre (che si può supporre costante).

Derivata del rapporto di due funzioni

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (1.10)$$

Questa regola ci consente ad esempio di calcolare le derivate di tutte le funzioni razionali (ovvero quelle che si ottengono come rapporto di due polinomi):

$$\left(\frac{3x + 5}{x^2 + x + 1}\right)' = \frac{(3x + 5)'(x^2 + x + 1) - (3x + 5)(x^2 + x + 1)'}{(x^2 + x + 1)^2} =$$

$$\begin{aligned} \frac{3(x^2 + x + 1) - (3x + 5)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} &= \frac{3x^2 + 3x + 3 - 6x^2 - 13x - 5}{(x^2 + x + 1)^2} = \\ &= \frac{-3x^2 - 10x - 2}{(x^2 + x + 1)^2} \end{aligned}$$

Altro esempio di notevole interesse è dato dalle funzioni $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ e $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Si ha rispettivamente

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{(\sin x)^2} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{(\sin x)^2} = -\frac{1}{(\sin x)^2}$$