Derivata della composizione di due funzioni

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{1}$$

Ad esempio, sia $f(x) = \sin x$ e $g(x) = x^3$, di modo che $f(g(x)) = \sin(x^3)$. Essendo $f'(x) = \cos x$ e $g'(x) = 3x^2$, dalla (1) otteniamo subito

$$[\sin(x^3)]' = \cos(x^3) \cdot 3x^2$$

(come si vede, una volta calcolata la derivata di f questa va valutata sostituendo $g(x)$ al posto di x).

Per mettere in evidenza come sia importare identificare nell'ordine corretto le funzioni coinvolte nella composizione, consideriamo le stesse funzioni ma composte nell'ordine inverso, ovvero $f(x) = x^3$ e $g(x) = \sin x$, di modo che $f(g(x)) = (\sin x)^3$. Allora si ha, sempre dalla (1)

$$[(\sin x)^3]' = 3(\sin x)^2 \cdot \cos x$$

Infine, affrontiamo ora la questione della derivata dell'inversa di una funzione data.

Daremo la formula generale per completezza, ma segnaliamo che ci serviranno quasi esclusivamente le derivate del logaritmo (inversa dell'esponenziale) e delle funzioni trigonometriche inverse arcoseno, arcocoseno, arcotangente, arcocotangente. Le derivate di tali funzioni, come si può dimostrare dalla formula generale che stiamo per vedere, sono le seguenti

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad \text{(e in particolare } (\ln x)' = \frac{1}{x}\text{)} \tag{2}$$

(la seconda affermazione viene dal fatto che $\ln x$ è il logaritmo in base e e $\ln e = 1$).

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{3}$$

$$(\mathrm{artg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \quad (\mathrm{artg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2} \tag{4}$$

Ora, per una generica funzione f invertibile e derivabile, data la sua inversa f^{-1}, vale in effetti la seguente regola generale:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \tag{5}$$

Questa formula si ricava facilmente dalla regola di derivazione delle funzioni composte se ricordiamo che, dalla definizione di funzione inversa, si ha $f(f^{-1}(x)) = x$: derivando allora entrambi i membri di quest'uguaglianza e applicando la (1) con ($f^{-1}(x)$ al posto di $g(x)$) si ottiene

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$$

da cui dividendo per $f'(f^{-1}(x))$ si ottiene subito la (5).

Per ricavare le derivate delle funzioni viste sopra da questa formula generale (5) è richiesta una semplice ma non immediata manipolazione algebrica (soprattutto per le funzioni trigonometriche inverse). Per questo motivo, alcuni preferiscono ricordare direttamente le derivate (2)-(4) piuttosto che ricavarle dalla regola generale. Lasciamo tale scelta al lettore, ritenendo tuttavia utile spiegare come tali derivate vengano ottenute, così da avere la possibilità di ricavarle nuovamente al momento in caso non le si ricordi.

Iniziamo dalla derivata del logaritmo $\log_a x$ in base a, che è per definizione la funzione inversa dell'esponenziale a^x: posto quindi $f(x) = a^x$ e $f^{-1}(x) = \log_a x$, ricordando che $f'(x) = a^x(\ln a)$ la regola (5) ci dà

$$(\log_a x)' = \frac{1}{a^{\log_a x}(\ln a)} = \frac{1}{x \ln a}$$

cioè esattamente la (2).

Passiamo ora alle derivate delle funzioni arcsin, arccos, artg, arcotg, che sono rispettivamente le funzioni inverse di seno, coseno, tangente e cotangente.

Iniziamo da $f^{-1}(x) = \arcsin x$, che come sappiamo va dall'intervallo $[-1, 1]$ all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Essendo $f(x) = \sin x$ e $f'(x) = \cos x$, per la (5) abbiamo

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \tag{6}$$

Ora, per ritrovare la prima delle (3), basta mostrare che $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$. A tale scopo, si può fare la seguente osservazione: da $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ ricaviamo $\cos \alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$, dalla quale, sostituendo $\alpha = \arcsin x$ otteniamo

$$\cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

(abbiamo usato il fatto che ovviamente $\sin(\arcsin x) = x$, essendo seno e arcoseno funzioni una inversa dell'altra). L'ambiguità sul segno può essere sciolta considerando che, come abbiamo ricordato sopra, $\arcsin x$ è una funzione $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, quindi assume valori compresi tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, tra i quali il coseno è positivo, quindi possiamo scrivere tranquillamente $\cos(\arcsin x) = +\sqrt{1 - x^2}$ e, sostituendo nella (6), si ottiene finalmente

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

cioè la prima delle (3).

Il caso dell'arcocoseno è del tutto analogo: abbiamo $f^{-1}(x) = \arccos x$, che è una funzione che va dall'intervallo $[-1, 1]$ all'intervallo $[0, \pi]$. Essendo $f(x) = \cos x$ e $f'(x) = -\sin x$, per la (5) abbiamo

$$(\arccos x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} \tag{7}$$

Analogamente a sopra, per ritrovare la seconda delle (3) basta mostrare che si ha anche $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$. Ma infatti, notiamo come sopra che da $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ ricaviamo $\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$, da cui, sostituendo $\alpha = \arccos x$ si ha

$$\sin(\arccos x) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

(abbiamo usato il fatto che ovviamente $\cos(\arccos x) = x$, essendo coseno e arcocoseno funzioni una inversa dell'altra). L'ambiguità sul segno può essere sciolta anche stavolta considerando che, come abbiamo ricordato sopra, $\arccos x$ è una funzione $[-1, 1] \to [0, \pi]$, quindi assume valori compresi tra 0 e π, tra i quali il seno è positivo, quindi possiamo scrivere $\sin(\arccos x) = +\sqrt{1 - x^2}$ e, sostituendo nella (7), si ottiene finalmente

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

ovvero la seconda delle (3).

Passiamo ora all'arcotangente $\text{artg}x$, definita da tutto $\mathbb{R}$ all'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. In tal caso abbiamo$f^{-1}(x) = \text{artg}x$, $f(x) = \text{tg}x$ e, come abbiamo visto nella prima parte sulle derivate, $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, da cui per la (5) abbiamo

$$(\mathrm{artg}x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \cos^2(\mathrm{artg}x) \tag{8}$$

Stavolta, per capire a cosa è uguale $\cos^2(\mathrm{artg}x)$, osserviamo che da $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ e da $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ discende

$$\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1$$

ovvero

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \mathrm{tg}^2\alpha + 1$$

e quindi

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha + 1}$$

Sostituendo allora $\alpha = \mathrm{artg}x$, si ottiene

$$\cos^2(\mathrm{artg}x) = \frac{1}{\mathrm{tg}^2(\mathrm{artg}x) + 1} = \frac{1}{x^2+1}$$

(abbiamo usato il fatto che ovviamente $\mathrm{tg}(\mathrm{artg}x) = x$, essendo tangente e arcotangente funzioni una inversa dell'altra). Sostituendo allora in (8) otteniamo infine

$$(\mathrm{artg}x)' = \frac{1}{x^2+1}$$

ovvero la prima delle (4).

Per l'arcocotangente $\mathrm{arcotg}x$, definita da tutto $\mathbb{R}$ all'intervallo $(0,\pi)$ si procede in maniera del tutto analoga. Stavolta abbiamo $f^{-1}(x) = \mathrm{arcotg}x$, $f(x) = \mathrm{cotg}x$ e, come abbiamo visto nella prima parte sulle derivate, $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$, da cui per la (5) abbiamo

$$(\mathrm{arcotg}x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = -\sin^2(\mathrm{arcotg}x) \tag{9}$$

Analogamente a quanto fatto per l'arcotangente, per capire a cosa è uguale $\sin^2(\mathrm{arcotg}x)$, osserviamo che da $\mathrm{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ e da $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1$ discende

$$\mathrm{cotg}^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1$$

ovvero

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = \text{cotg}^2\alpha + 1$$

e quindi

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{\text{cotg}^2\alpha + 1}$$

Sostituendo allora $\alpha = \text{arcotg}x$, si ottiene

$$\sin^2(\text{arcotg}x) = \frac{1}{\text{cotg}^2(\text{arcotg}x) + 1} = \frac{1}{x^2+1}$$

(abbiamo usato il fatto che ovviamente $\text{cotg}(\text{arcotg}x) = x$, essendo tangente e arcotangente funzioni una inversa dell'altra). Sostituendo allora in (8) otteniamo infine

$$(\text{arcotg}x)' = -\frac{1}{x^2+1}$$

ovvero la seconda delle (4).

Esempio 0.1. Concludiamo questa parte sul calcolo delle derivate con il seguente esercizio riassuntivo. Vogliamo calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = x^x$$

(definita per $x > 0$).

Apparentemente, nessuna delle regole precedenti ci dà una risposta immediata. Tuttavia, possiamo ricondurci ancora una volta alla derivata di una funzione composta con il trucco seguente (già utilizzato per calcolare i limiti delle forme indeterminate 0^0, ∞^0, 1^∞): data una qualunque funzione positiva[1] $F(x)$ vale l'uguaglianza

$$F(x) = e^{\ln F(x)} \tag{10}$$

dovuta semplicemente al fatto che il logaritmo naturale $\ln F$ di una quantità F è per definizione stessa di logaritmo l'esponente che devo dare a e per ottenere F.

Ora, in base alla (10) possiamo allora scrivere, nel caso $F(x) = x^x$,

$$x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x\ln x} \tag{11}$$

[1]Tale ipotesi è necessaria in quanto il logaritmo può avere come argomento solo una quantità positiva.

dove nella seconda uguaglianza abbiamo usato la proprietà fondamentale del logaritmo per cui l'esponente dell'argomento del logaritmo può essere "portato fuori" e messo davanti al logaritmo.

L'utilità della (11) consiste nell'aver scritto x^x come funzione composta $f(g(x))$, con $f(x) = e^x$ e $g(x) = x \ln x$. Possiamo allora applicare la regola (1) di derivazione della funzione composta e calcolare $f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Essendo $f'(x) = e^x$, abbiamo

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{x \ln x}(x \ln x)' = x^x(x \ln x)' \tag{12}$$

Ora applichiamo la regola della derivata del prodotto per calcolare la derivata $(x \ln x)'$:

$$(x \ln x)' = (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

Sostituendo nella (12) si ottiene allora finalmente

$$(x^x)' = x^x(\ln x + 1)$$

Il procedimento appena visto può essere usato per calcolare[2] la derivata di qualunque funzione del tipo $f(x)^{g(x)}$

Osservazione 0.1. Alcune funzioni sono definite "incollando" due funzioni elementari diverse, una su una parte del dominio e una su un'altra. Esempio tipico di questa costruzione è la funzione *valore assoluto di* x, che si denota $|x|$ ed è definita nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

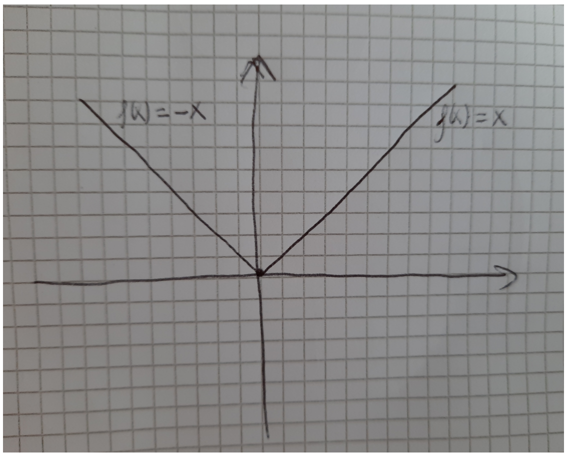
(infatti, il valore assoluto di un numero reale è il numero stesso se il numero non è negativo, ed il numero cambiato di segno[3] se il numero è negativo).

Funzioni costruite in questo modo possono tipicamente presentare problemi di derivabilità nel punto in cui "incolliamo" le due funzioni. Ad esempio, il valore assoluto non è derivabile nell'origine perché il ramo di destra $f(x) = x$ ha derivata uguale a 1 e il ramo di sinistra $f(x) = -x$ ha derivata uguale a -1, quindi nell'origine dove questi due rami s'incontrano abbiamo

[2] Alcuni testi riportano una formula pronta per tale derivata, ma crediamo che non valga la pena memorizzarla a parte dato che basta ricordare il trucco di cui sopra e poi applicare la regola di derivazione delle funzioni composte.

[3] in modo da renderlo positivo

un punto angoloso (detto in modo più rigoroso, il limite del rapporto incrementale in $x_0 = 0$ non esiste perché il limite destro è uguale a 1 e il limite sinistro è uguale a -1).



La funzione valore assoluto è in effetti spesso usata nei testi come primo semplice esempio di funzione non derivabile.

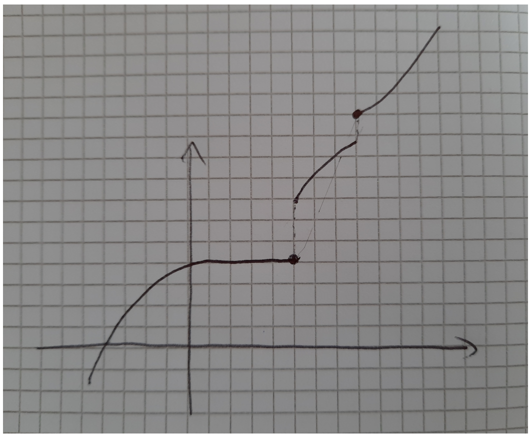
0.1 Crescenza, decrescenza, massimi e minimi

Come abbiamo detto, la derivata $f'(x)$ di una funzione $f(x)$ può essere interpretata come velocità con cui la quantità rappresentata dalla funzione sta variando: è allora comprensibile come la derivata possa dare informazioni sul fatto che la funzione stia crescendo o decrescendo, che è quello che vedremo in questo paragrafo.

Partiamo dalle definizioni: una funzione $f(x)$ si dice *crescente* se accade che dati due valori x_1 e x_2 del suo dominio di definizione con la proprietà che $x_1 > x_2$, allora $f(x_1) \geq f(x_2)$ o, in termini formali, vale la seguente implicazione

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \tag{13}$$

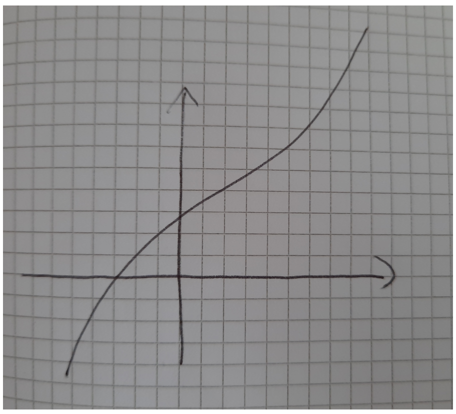
in altre parole, "all'aumentare di x aumentano anche i valori della funzione". Si noti che nella (13) il segno di maggiore o uguale nella disuguaglianza $f(x_1) \geq f(x_2)$ implica però che la funzione possa anche assumere lo stesso valore su x_1 e su x_2: l'importante è che non assuma valore minore al crescere di x. Ad esempio, nel disegno seguente vediamo una funzione crescente in base alla definizione data.



Come si vede, in certi intervalli la funzione è costante, che è permesso proprio grazie al segno di maggiore o uguale nella $f(x_1) \geq f(x_2)$ (si noti anche che una funzione crescente non deve essere necessariamente derivabile o continua). In caso invece vogliamo escludere il segno di uguale nella $f(x_1) \geq f(x_2)$ (cioè richiedere che la funzione assuma effettivamente valori sempre maggiori al crescere di x), si parla allora di funzioni *strettamente crescenti*, che verificano la definizione

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \tag{14}$$

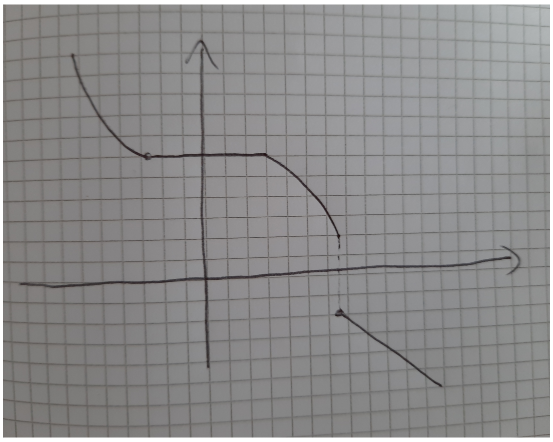
Quindi la funzione del disegno precedente è crescente ma non strettamente (per via dei tratti in cui è costante e in cui si ha quindi $f(x_1) = f(x_2)$ pur essendo $x_1 > x_2$. Ad esempio, una funzione strettamente crescente sarebbe quella del seguente disegno



In modo analogo si definisce il concetto di funzione decrescente: una funzione $f(x)$ si dice *decrescente* se accade che dati due valori x_1 e x_2 del suo dominio di definizione con la proprietà che $x_1 > x_2$, allora $f(x_1) \leq f(x_2)$ o, in termini formali, vale la seguente implicazione

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \tag{15}$$

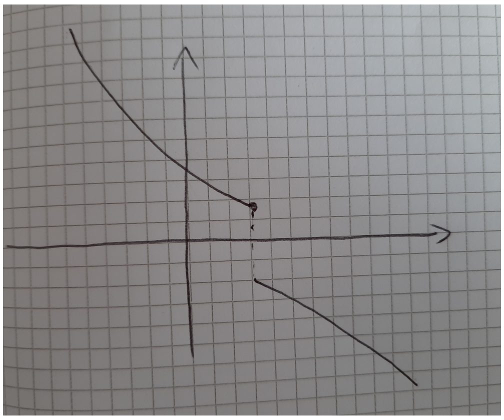
in altre parole, "all'aumentare di x i valori della funzione diminuiscono". Di nuovo, anche nella (15) il segno di minore o uguale nella disuguaglianza $f(x_1) \leq f(x_2)$ implica che la funzione possa anche assumere lo stesso valore su x_1 e x_2 diversi: l'importante è che non assuma valore maggiore al crescere di x. Ad esempio, la seguente funzione risulta decrescente



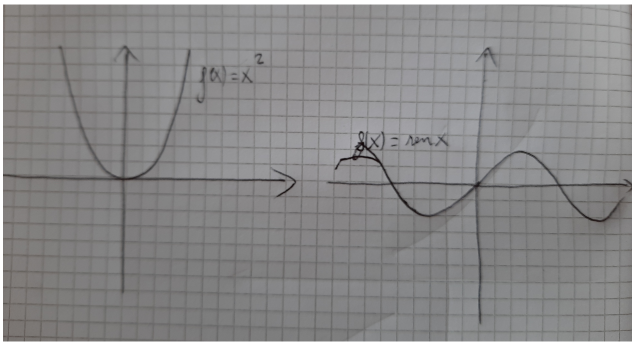
Come nel caso già visto sopra di funzioni crescenti ma non strettamente, in certi intervalli la funzione è costante, che è permesso proprio grazie al segno di minore o uguale nella $f(x_1) \leq f(x_2)$. Come sopra, in caso vogliamo escludere questa possibilità (cioè richiedere che la funzione assuma effettivamente valori sempre minori al crescere di x), si parla allora di funzioni *strettamente decrescenti*, che verificano la definizione

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \tag{16}$$

Quindi la funzione del disegno precedente è decrescente ma non strettamente decrescente (di nuovo, per via dei tratti in cui è costante e in cui si ha quindi $f(x_1) = f(x_2)$ pur essendo $x_1 > x_2$). Una funzione strettamente decrescente è rappresentata nel seguente disegno:



Una funzione che sia crescente (strettamente o meno) o decrescente (strettamente o meno) si dice anche *monotòna*. Una funzione non monotòna è quindi una funzione che non è né crescente né decrescente, semplicemente per il fatto che in certi tratti cresce e in altri decresce: ad esempio, la funzione $f(x) = x^2$ o la funzione $f(x) = \sin x$ sono chiaramente non monotòne

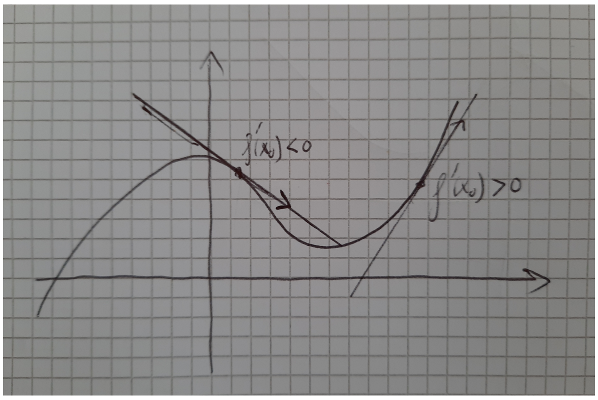


In base alle definizioni date, la verifica che una funzione è crescente o decrescente richiederebbe il confronto dei valori di $f(x)$ per ogni coppia di punti x_1 e x_2 appartenenti al dominio: tuttavia, se la funzione è anche derivabile abbiamo il seguente, importantissimo criterio:

Una funzione $f(x)$ derivabile è crescente in un intervallo (a, b) se e solamente se $f'(x) \geq 0$ su (a, b).

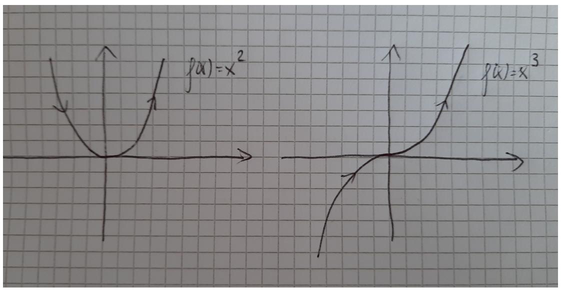
Una funzione $f(x)$ derivabile è decrescente in un intervallo (a, b) se e solamente se $f'(x) \leq 0$ su (a, b).

Non dimostreremo tale criterio (anche se più avanti lo vedremo confermato come conseguenza di altre formule e altri teoremi), ma esso risulta di facile comprensione se pensiamo sia all'interpretazione fisica che a quella geometrica della derivata. Nell'interpretazione fisica, la derivata rappresenta la velocità con cui la funzione sta variando: a velocità positiva allora corrisponde una crescita, a velocità negativa[4] corrisponde una decrescita. Nell'interpretazione geometrica, derivata positiva significa che il coefficiente angolare della retta tangente è positivo, ovvero che l'angolo formato da tale retta con l'asse orizzontale è positivo e la pendenza è "verso l'alto", quindi la funzione cresce; mentre derivata negativa significa che il coefficiente angolare della retta tangente è negativo, ovvero che l'angolo formato da tale retta con l'asse orizzontale è negativo e la pendenza è "verso il basso", quindi la funzione decresce.



Vediamo alcuni semplici esempi di applicazione del criterio visto

Esempio 0.2. Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$. Come sappiamo, è derivabile e la sua derivata è $f'(x) = 2x$, per cui si ha chiaramente $f'(x) \geq 0$ per $x \geq 0$ (e quindi la funzione è crescente sul semiasse positivo delle x) e $f'(x) \leq 0$ per $x \leq 0$ (e quindi la funzione è decrescente sul semiasse negativo delle x), come sappiamo già dal suo grafico che abbiamo anticipato più volte; se prendiamo invece la potenza $f(x) = x^3$, abbiamo derivata $f'(x) = 3x^2$, che è chiaramente sempre maggiore o uguale a zero: la funzione è quindi crescente dappertutto:

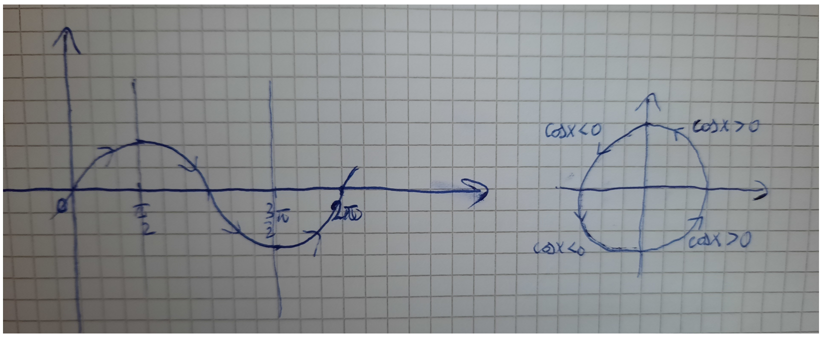


[4] Come sarebbe per un'automobile che va in retromarcia, ad esempio.

Si noti dall'esempio di x^3 che una funzione crescente può anche avere punti in cui $f'(x) = 0$ (come in effetti previsto dal criterio)[5].

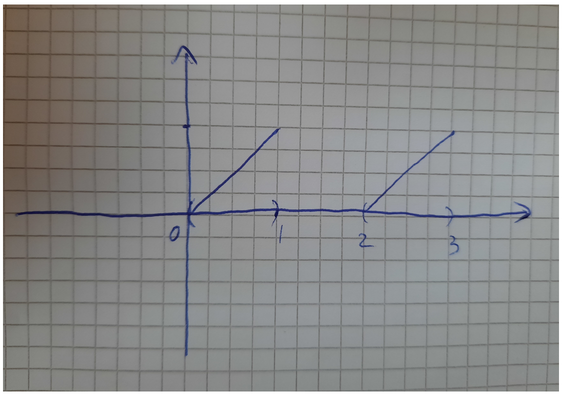
Per un altro esempi di funzione sempre crescente, si consideri la funzione logaritmo naturale $f(x) = \ln x$: infatti, la sua derivata è infatti data da $f'(x) = \frac{1}{x}$ che è positiva per $x > 0$, ovvero su tutto il dominio di definizione del logaritmo. Quindi il logaritmo è una funzione sempre crescente (si noti che la derivata $f'(x) = \frac{1}{x}$ è negativa per $x < 0$, ma in tali punti il logaritmo non è definito).

Infine, consideriamo la funzione $f(x) = \sin x$: essendo la derivata $f'(x) = \cos x$, la funzione f è crescente negli intervalli in cui il coseno è positivo (o nullo) e decrescente negli intervalli in cui il coseno è negativo o nullo: per esempio, è crescente da 0 a $\frac{\pi}{2}$, decrescente da $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3}{2}\pi$ e di nuovo crescente da $\frac{3}{2}\pi$ a 2π, e così via periodicamente.



Osservazione 0.2. Il motivo per cui i criteri di crescenza e decrescenza sono enunciati per un intervallo (a, b) e non per un dominio generico è che il criterio cessa di essere valido se consideriamo ad esempi domini di definizione "sconnessi". Più precisamente, supponiamo di avere la funzione rappresentata nel seguente disegno, definita sul dominio sconnesso dato dall'unione degli intervalli $[0, 1]$ e $[2, 3]$

[5]Si noti anche che la funzione è strettamente crescente.



Si tratta di una funzione come quelle di cui abbiamo parlato nell'Osservazione 0.1 ottenuta "incollando" due funzioni elementari diverse, una su una parte del dominio e una su un'altra. In questo caso abbiamo

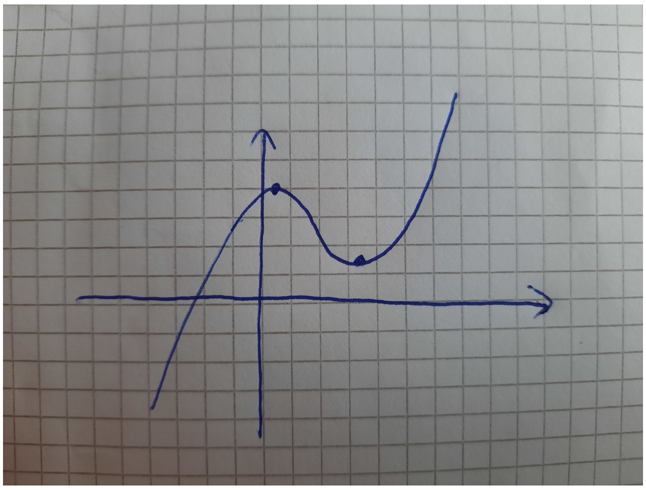
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1] \\ x-2 & \text{se } x \in [2,3] \end{cases}$$

Si tratta di una funzione chiaramente derivabile con derivata positiva e uguale alla costante 1 su entrambi gli intervalli che compongono il suo dominio di definizione, ma non è crescente in base alla definizione data sopra: presi $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$, si ha $x_1 > x_2$ ma $f(x_1) < f(x_2)$ (infatti, $f(1) = 1$ e $f(2) = 0$). A parole, sta succedendo che la funzione cresce sia sul primo intervallo che nel secondo (e all'interno di quelli noi calcoliamo a derivata), ma nel passare dal primo al secondo intervallo "riparte da un valore più basso".

Le considerazioni e gli esempi precedenti (in particolare quelli di x^2 e $\sin x$) dovrebbero aver suggerito che determinare la crescenza e la decrescenza di una funzione dovrebbe permettere anche di individuare i punti in cui si ha un picco (positivo o negativo), ovvero i cosiddetti punti di *massimo e minimo locale.* Vediamo prima le definizione rigorosa.

Un punto x_0 è detto di massimo locale per la funzione f se esiste un intorno di x_0 in tale che si ha $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni punto x di questo intorno; il punto è invece detto di minimo locale se esiste un intorno di x_0 in tale che si ha $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni punto x di questo intorno.

Se un punto x_0 è un massimo o un minimo locale si dice anche che x_0 è un *estremo locale.* Si noti l'aggettivo "locale", dovuto al fatto che la funzione su quel punto assume il massimo o il minimo valore se ci manteniamo "nelle vicinanze di x_0; ma "lontano da x_0" potrebbero esserci punti in cui la funzione assume valori più grandi del massimo locale (o più piccoli del minimo locale), come rappresentato nel seguente disegno



Un punto x_0 si dice invece *di massimo globale* per una funzione f se la disuguaglianza $f(x) \leq f(x_0)$ vale per ogni x nel dominio della funzione (cioè in x_0 la funzione assume effettivamente il valore più alto tra tutti i valori che assume); analogamente, x_0 si dice invece *di minimo globale* per f se la disuguaglianza $f(x) \geq f(x_0)$ vale per ogni x nel dominio della funzione (cioè in x_0 la funzione assume effettivamente il valore più basso tra tutti i valori che assume). Naturalmente può accadere che un punto di massimo (o minimo) locale sia anche globale (come per esempio nel caso della funzione $f(x) = x^2$, per cui l'origine è un punto di minimo locale che è anche globale).

L'importanza di determinare i punti di massimo e minimo locale di una funzione data è che essi possono rappresentare punti "di equilibrio" di un sistema (fisico, biologico, economico etc.) descritto dalla funzione f. Come abbiamo detto sopra, tali punti possono essere individuati una volta determinate crescenza e decrescenza della funzione: tuttavia, si ha l'esigenza di risolvere questo problema indipendentemente dalla determinazione della crescenza della funzione, magari perché appunto il problema che ci siamo posti richiede solo di trovare i punti di massimo o minimo e determinare il segno della derivata in tutto il dominio per determinare crescenza e decrescenza può essere un problema molto più complesso (a seconda della funzione data, potrebbe trattarsi di dover risolvere delle disequazioni piuttosto complesse).

Emerge quindi chiaramente la necessità di un metodo che ci consenta di determinare massimi e minimi locali di una funzione senza doverne determinare per forza crescenza e decrescenza. Questo metodo esistee si basa sul seguente criterio, che è un primo passo per la risoluzione del problema:

Se $f(x)$ è una funzione derivabile in x_0 e x_0 è un punto di estremo locale per la funzione f, allora $f'(x_0) = 0$.

Questo teorema sta affermando che un punto di estremo in cui la funzione è derivabile ha necessariamente derivata nulla, e quindi che i punti di estremo vanno cercati tra quelli in cui la derivata si annulla, mentre si faccia attenzione che non vale il viceversa (come stiamo per vedere negli esempi): un punto può avere derivata zero ma potrebbe non essere un punto di estremo.

I punti con derivata nulla di una funzione f si chiamano *punti stazionari di f* (Il teorema afferma quindi che un punto di estremo locale è sicuramente un punto stazionario, ma che potrebbero esistere altri punti stazionari che non sono di estremo).

Esempio 0.3. Consideriamo nuovamente la funzione $f(x) = x^2$. La sua derivata $f'(x) = 2x$ si annulla solo per $x = 0$, quindi $x = 0$ è l'unico punto stazionario della funzione. In effetti, come sappiamo dallo studio della crescenza e decrescenza della funzione e dal disegno visto nell'esempio precedente, si tratta di un punto di minimo locale (in questo caso in effetti anche globale). Non avendo altri punti stazionari, la funzione non ha sicuramente altri punti di estremo locale.

Anche la funzione $f(x) = x^3$, avendo derivata $f'(x) = 3x^2$, ha come unico punto stazionario l'origine $x = 0$. Tuttavia, come si vede dal grafico, non si tratta di un punto di estremo locale in quanto la funzione è maggiore di $f(0) = 0$ a destra ed è minore di 0 a sinistra (si tratta quindi di un esempio che mostra chiaramente come l'implicazione del criterio dato sopra non sia invertibile).

La funzione logaritmo naturale $f(x) = \ln x$, come abbiamo ricordato sopra, ha derivata prima $f'(x) = \frac{1}{x}$, che non si annulla mai: quindi la funzione non ha punti stazionari, e in effetti non ha massimi o minimi locali (e neanche globali).

Infine, la funzione $f(x) = \sin x$ ha come derivata $f'(x) = \cos x$ e quindi si annulla negli infiniti valori di x in cui si annulla il coseno, ad esempio $x = \frac{\pi}{2}$ o $x = \frac{3}{2}\pi$: come si vede dal grafico, il primo è un massimo locale, il secondo un minimo locale (in effetti, sono anche massimo e minimo globale in quanto $+1$ e -1 sono il massimo e il minimo valore che la funzione assume su tutto il dominio).

Ci poniamo ora il problema di riconoscere, dato un punto stazionario x_0, se esso è un massimo o un minimo locale senza dover ricorrere allo studio completo della crescenza o decrescenza della funzione: il metodo che vedremo nel prossimo paragrafo, basato su uno strumento fondamentale della teoria della derivazione detto formula di Taylor, consiste nel calcolare le derivate successive (seconda, terza etc.) della funzione in x_0 e valutarne il segno.