0.1 La formula di Taylor

La formula di Taylor è una formula che ci fornisce approssimazioni sempre migliori di una funzione data $f(x)$ in un intorno di un suo punto x_0 e grazie alla quale, come vedremo, si possono ricavare importanti informazioni sul comportamento della funzione vicino a x_0 e in particolare se i suoi punti stazionari sono massimi o minimi.

Intuitivamente, quello che la formula fa è approssimare la $f(x)$ data mediante un polinomio $P_n(x)$ di cui possiamo scegliere il grado, e all'aumentare di questo grado otteniamo un'approssimazione sempre migliore (vicino al punto x_0 dato). La formula, come stiamo per vedere, è del tipo

$$f(x) = P_n(x) + o_n(x)$$

dove $P_n(x)$ è il polinomio di grado n e $o_n(x)$ è l'errore che commettiamo nell'approssimazione. Tale errore, come vedremo, è appunto sempre più piccolo al crescere di n, man mano che ci avviciniamo a x_0.

Prima di dare la formula precisa, ecco come si presenta ad esempio la formula di Taylor per la funzione $f(x) = e^x$, con i suoi polinomi approssimanti di grado 1, 2 e 3, in un intorno di $x_0 = 0$:

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

Il significato della prima espressione è la seguente: in un intorno di $x_0 = 0$, la funzione e^x si può approssimare mediante il polinomio di primo grado $1+x$, con un errore $o(x)$ che ha la proprietà che per $x \to 0$ non solo $o(x)$ tende a zero (e quindi più ci avviciniamo al punto più diventa piccolo come errore) ma ci va più velocemente di x, ovvero $\frac{o(x)}{x} \to 0$.

La seconda espressione significa invece che la fuzione e^x si può approssimare ancora meglio mediante il polinomio di secondo grado $1 + x + \frac{1}{2}x^2$ (ottenuto aggiungendo all'approssimazione precedente il termine $\frac{1}{2}x^2$), con un errore $o(x^2)$ che stavolta ha la proprietà che per $x \to 0$ tende a zero più velocemente di x^2 (ovvero $\frac{o(x^2)}{x^2} \to 0$), quindi anche più velocemente dell'$o(x)$ dell'approssimazione precedente, e in questo senso rappresenta un'approssimazione migliore.

Analogamente la terza espressione significa che la funzione e^x si può approssimare ancora meglio mediante il polinomio di terzo grado $1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$

(ottenuto aggiungendo all'approssimazione precedente il termine $\frac{1}{6}x^3$), con un errore $o(x^3)$ che stavolta ha la proprietà che per $x \to 0$ tende a zero più velocemente di x^3 (ovvero $\frac{o(x^3)}{x^3} \to 0$), quindi più velocemente dell'errore di entrambe le approssimazioni precedenti, e quindi è un'approssimazione ancora migliore.

Le tre espressioni scritte sopra si dicono sviluppo di Taylor centrato in $x_0 = 0$ e arrestato rispettivamente al primo, al secondo e al terzo ordine. In generale, potremmo andare avanti e considerare lo sviluppo arrestato all'n-esimo ordine, con n qualunque, dove a patto di usare un polinomio di grado n sempre più alto, avremmo un'approssimazione sempre migliore commettendo un errore di approssimazione sempre più piccolo, o per meglio dire un errore che va a zero sempre più velocemente per x che tende al punto x_0 in cui stiamo approssimando la funzione.

A consentire quest'approssimazione sempre migliore è, come vedremo ora dando la formula generale, il fatto che la funzione e^x è derivabile quante volte vogliamo.

In generale, data una funzione $f(x)$ e un punto x_0, si può costruire il suo sviluppo di Taylor centrato in x_0 e arrestato all'n-esimo ordine, con n uguale a un certo numero naturale $1, 2, 3, 4$ etc. sotto l'ipotesi che f sia derivabile n volte in x_0, cioè che esistano e siano finite le derivate $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ etc. fino alla derivata n-esima $f^{(n)}(x_0)$. In tal caso, la formula è la seguente:

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n) \tag{1}$$

dove si ricordi che il fattoriale $n!$ di un numero naturale n è uguale al prodotto di n per tutti i naturali precedenti (0 escluso) e dove $o((x-x_0)^n)$ rappresenta l'errore di approssimazione, che ha la proprietà di andare a zero per $x \to x_0$ più velocemente di $(x - x_0)^n$. Si dice anche che $o((x - x_0)^n)$ è un "*o piccolo di* $(x - x_0)^n$.

Nell'esempio che abbiamo visto sopra della funzione $f(x) = e^x$, abbiamo scelto come punto $x_0 = 0$, nel qual caso lo sviluppo diventa $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$; inoltre, le derivate di e^x sono tutte uguali a e^x, quindi in $x_0 = 0$ valgono tutte $e^0 = 1$: si ottiene quindi $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$, concordemente con i tre sviluppi scritti sopra.

Per un ulteriore esempio con punto $x_0 \neq 0$, calcoliamo lo sviluppo di Taylor della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ in un intorno del punto $x_0 = 1$ arrestato al terzo ordine: la derivata di $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ è, in base alla formula generale per la derivata di una potenza $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$,

$$(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

e quindi per $x = x_0 = 1$ si ottiene $f'(x_0) = \frac{1}{2}$.

Per la derivata seconda, riapplicando la stessa formula alla derivata prima, abbiamo

$$(x^{\frac{1}{2}})'' = (\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}(x^{-\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$

e quindi per $x = x_0 = 1$ si ottiene $f''(x_0) = -\frac{1}{4}$.

Analogamente, infine, per la derivata terza si ha

$$(x^{\frac{1}{2}})''' = (-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}})' = -\frac{1}{4}(x^{-\frac{3}{2}})' = -\frac{1}{4}\cdot(-\frac{3}{2})x^{-\frac{3}{2}-1} = +\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$

e quindi per $x = x_0 = 1$ si ottiene $f'''(x_0) = \frac{3}{8}$.

Sostituendo allora nella (1), con $n = 3$ si ha

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3!}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

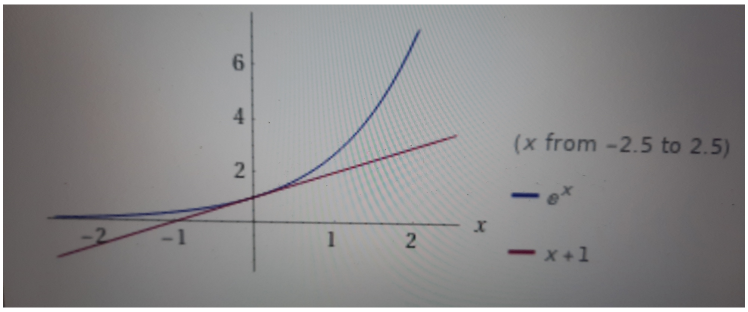
ovvero

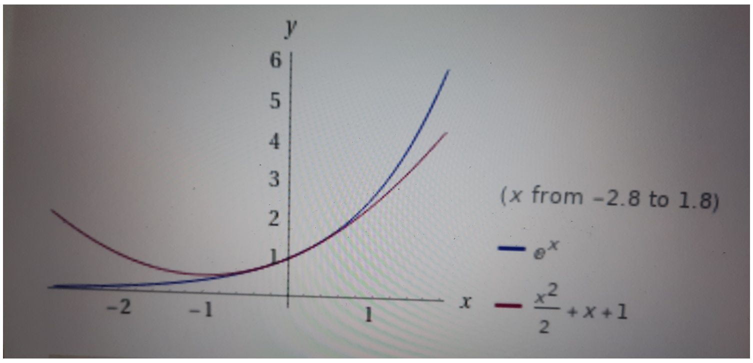
$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

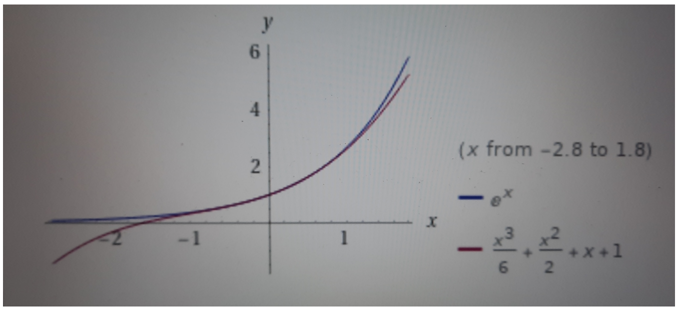
che rappresenta quindi un'approssimazione di $\sqrt{x}$ vicino a $x_0 = 1$ mediante un polinomio di terzo grado, con un errore di approssimazione che per $x \to 1$ va a zero più velocemente di $(x-1)^3$

Osservazione 0.1. Si noti che lo sviluppo di Taylor del prim'ordine di una funzione f in x_0 sta approssimando f con la funzione polinomiale di primo grado $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, il cui grafico rappresenta esattamente la retta tangente al grafico di f in x_0. Da un punto di vista geometrico, possiamo quindi affermare che l'approssimazione al prim'ordine non fa altro che approssimare il grafico di f con il grafico della sua retta tangente nel punto considerato (mentre con lo sviluppo arrestato al second'ordine avremmo che stiamo approssimando f con un polinomio di secondo grado in x e quindi il grafico di f con quello di una parabola).

Nei tre disegni seguenti si può vedere ad esempio il grafico di e^x (in blu) assieme ai grafici delle sue approssimazioni centrate in $x_0 = 0$ (in rosso) rispettivamente di primo grado (quindi la retta tangente) di secondo grado e di terzo grado. Si noti che l'approssimazione è sempre migliore nelle vicinanze di $x_0 = 0$.







Nei prossimi due paragrafi vedremo le importantissime applicazioni della formula di Taylor cui accennavamo all'inizio, ovvero la determinazione di informazioni sul comportamento della funzione vicino al punto x_0 di approssimazione e in particolare informazioni sui suoi punti stazionari.

0.2 Determinazione della natura dei punti stazionari

Il fatto che la formula di Taylor ci dia un'approssimazione di $f(x)$ nelle vicinanze di x_0 è, come stiamo per vedere, sufficiente a dirci se in un intorno di un punto stazionario x_0 si ha $f(x) \geq f(x_0)$ (e x_0 sarebbe un minimo locale), $f(x) \leq f(x_0)$ (e x_0 sarebbe un massimo locale) o nessuna delle due.

Vediamo come: visto che x_0 è per ipotesi un punto stazionario, ovvero $f'(x_0) = 0$, nella formula di Taylor arrestata al secondo ordine mancherà chiaramente l'addendo $f'(x_0)(x - x_0)$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

Portando a primo membro il primo addendo $f(x_0)$ abbiamo

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) \tag{2}$$

Come abbiamo detto, x_0 sarà un punto di massimo locale se per x abbastanza vicino a x_0 si ha $f(x) \leq f(x_0)$ e quindi se la differenza $f(x) - f(x_0)$ che compare a primo membro della (2) è negativa o nulla; analogamente, x_0 sarà un punto di minimo locale se per x abbastanza vicino a x_0 si ha $f(x) \geq f(x_0)$ e quindi se la differenza $f(x) - f(x_0)$ che compare a primo membro della (2) è positiva o nulla.

Allo scopo di stimare il segno di questa differenza, dividiamo entrambi i membri della (2) per $(x - x_0)^2$, ottenendo così

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} = \frac{f''(x_0)}{2} + \frac{o((x - x_0)^2)}{(x - x_0)^2}$$

Ora, se facciamo tendere x a x_0, l'ultimo addendo $\frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2}$ tende a zero in quanto come sappiamo l'errore $o((x - x_0)^2)$ va a zero più velocemente di $(x - x_0)^2$, e quindi il secondo membro dell'uguaglianza tende a $\frac{f''(x_0)}{2}$; cioè, riassumendo, posso concludere che per x che tende a x_0 ho

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} \to \frac{f''(x_0)}{2} \tag{3}$$

Ora, se $f''(x_0) > 0$ allora la (3) ci sta dicendo che $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}$ sta tendendo a una quantità positiva. Questo vuol dire che se mi metto abbastanza vicino a x_0 devo avere per forza $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2} > 0$ e quindi (essendo il denominatore sempre positivo perché è un quadrato) ho il numeratore $f(x) - f(x_0) > 0$, cioè $f(x) > f(x_0)$: questo significa che x_0 è un minimo locale.

Analogamente, se $f''(x_0) < 0$ allora la (3) ci dice che $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}$ sta tendendo a una quantità negativa. Questo vuol dire che se mi metto abbastanza vicino a x_0 devo avere per forza $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2} < 0$ e quindi (essendo il denominatore sempre positivo perché è un quadrato) ho il numeratore $f(x) - f(x_0) < 0$, cioè $f(x) < f(x_0)$, e quindi x_0 è un massimo locale.

Abbiamo quindi dimostrato il seguente importantissimo criterio:

Un punto stazionario x_0 è un punto di minimo locale se $f''(x_0) > 0$ e un punto di massimo locale se $f''(x_0) < 0$.

Prima di fare degli esempi di applicazione di questo criterio, cerchiamo di rispondere subito alla seguente domanda naturale: e cosa succede se invece fosse anche $f''(x_0) = 0$?

In tal caso, miglioriamo la nostra approssimazione considerando allora lo sviluppo arrestato al terz'ordine

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + o((x - x_0)^3)$$

dove non abbiamo scritto né l'addendo $f'(x_0)(x - x_0)$ né $\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$ perché oltre a essere $f'(x_0) = 0$ (il punto x_0 è stazionario) ci stiamo mettendo nel caso $f''(x_0) = 0$.

Proviamo a replicare lo stesso ragionamento fatto nel caso precedente: portiamo a primo membro $f(x_0)$ si ha

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + o((x - x_0)^3)$$

Dividiamo ora entrambi i membri per $(x - x_0)^3$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^3} = \frac{f'''(x_0)}{3!} + \frac{o((x - x_0)^3)}{(x - x_0)^3}$$

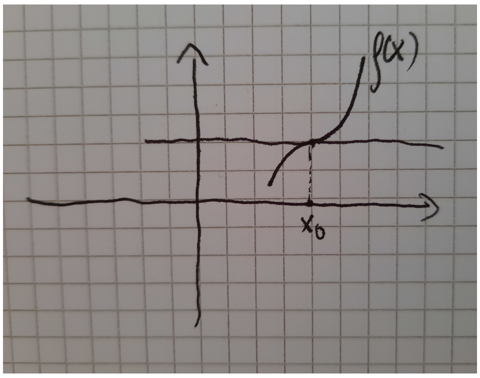
Come sappiamo, $\frac{o((x-x_0)^3)}{(x-x_0)^3}$ tende a 0 per $x \to x_0$, quindi possiamo scrivere

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^3} \to \frac{f'''(x_0)}{3!} \tag{4}$$

che è l'analoga della (3) ottenuta nel caso precedente.

Arrivati a questo punto, ripensando a quanto fatto nel caso della (3), potremmo essere tentati di concludere dalla (5) che quando $f'''(x_0)$ è positiva allora $f(x) - f(x_0)$ è positivo, e quando $f'''(x_0)$ è negativo allora $f(x) - f(x_0)$ è negativo: tuttavia, questo non è corretto! Mentre nel caso della (3) il denominatore del rapporto era $(x - x_0)^2$ e non aveva nessun ruolo nel determinare il segno, in quanto sempre positivo essendo un quadrato, stavolta nella (5) il denominatore è il cubo $(x-x_0)^3$, che invece non è sempre positivo, ma è positivo per $x - x_0 > 0$, cioè quando $x > x_0$ (diremo "a destra di x_0") e negativo per $x - x_0 < 0$, cioè quando $x < x_0$ (diremo "a sinistra di x_0"). Questo complica leggermente la discussione rispetto a quanto fatto con la (3): vediamo i dettagli.

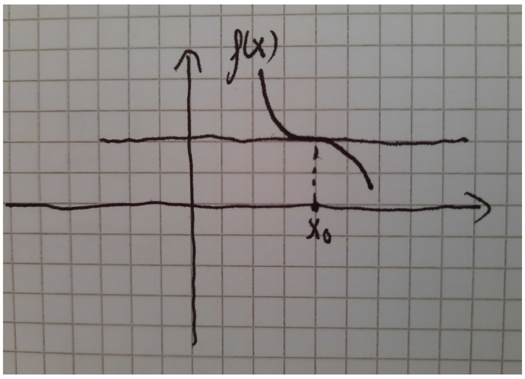
(i) Sia $f'''(x_0) > 0$. Allora la (4) ci sta dicendo che $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^3}$ tende a una quantità positiva, e quindi a partire da un certo x abbastanza vicino a x_0 deve essere $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^3} > 0$. Allora, a destra di x_0 (dove il cubo a denominatore è positivo) il numeratore deve essere $f(x) - f(x_0) > 0$, mentre a sinistra di x_0 (dove il cubo a denominatore è negativo) il numeratore deve essere $f(x) - f(x_0) < 0$ (affinché il rapporto rimanga positivo). Quindi, riassumendo, per $x > x_0$ devo avere $f(x) > f(x_0)$ mentre per $x < x_0$ devo avere $f(x) < f(x_0)$. Quindi $f(x)$ è maggiore di $f(x_0)$ a destra di x_0 e minore di $f(x_0)$ a sinistra di x_0:



Come mostra il disegno, x_0 non è quindi né un massimo né un minimo.

(ii) caso $f'''(x_0) < 0$: abbiamo un ragionamento e un risultato analoghi. La (4) ci sta ora dicendo che $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^3}$ tende a una quantità negativa, e quindi a partire da un certo x abbastanza vicino a x_0 deve essere $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^3} < 0$. Ma allora, a destra di x_0 (dove il cubo a denominatore è positivo) il numeratore deve essere $f(x)-f(x_0) < 0$, mentre a sinistra di x_0 (dove il cubo a denominatore è negativo) il numeratore deve essere $f(x) - f(x_0) > 0$ (affinché il rapporto sia negativo). Riassumendo, per $x > x_0$ devo avere $f(x) < f(x_0)$ mentre per $x < x_0$ devo avere $f(x) > f(x_0)$.

Quindi la situazione rispetto al caso $f'''(x_0) > 0$ è invertita ma la conclusione è sempre che x_0 non è né un massimo né un minimo.



A questo punto sorge spontanea la domanda: e se fosse anche $f'''(x_0) = 0$? e se fossero nulle anche altre derivate superiori alla terza?

I due casi che abbiamo studiato in precedenza, quello in cui era $f''(x_0) \neq 0$ e quello in cui $f''(x_0) = 0$ ma $f'''(x_0) \neq 0$, ci suggeriscono che il comportamento della funzione dipende non solo da qual è il segno della prima derivata non nulla in x_0 ma anche che la conclusione cambia a seconda che questa derivata sia di ordine pari o dispari: più precisamente, è facile vedere che se la prima derivata non nulla è di ordine pari allora otteniamo le stesse conclusioni che abbiamo ottenuto quando abbiamo supposto che fosse la derivata seconda $f''(x_0)$ maggiore o minore di zero, mentre se la prima derivata non nulla è dispari si giunge alle stesse conclusioni che abbiamo ottenuto quando abbiamo supposto che fosse la derivata terza $f'''(x_0)$ maggiore o minore di zero.

Più precisamente, si ottiene facilmente il seguente criterio generale:

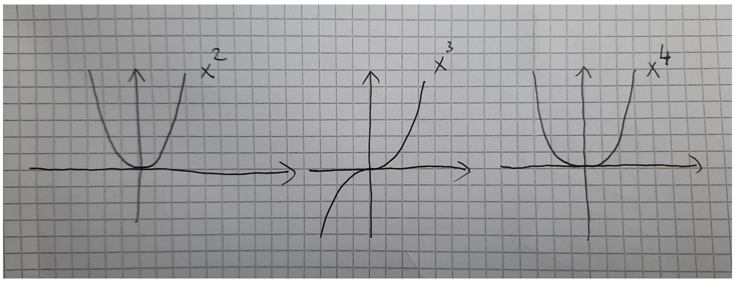
Sia data una funzione f che sia derivabile almeno n volte in un suo punto stazionario x_0 e tale che la sua prima derivata non nulla in x_0 è $f^{(n)}(x_0)$ (con $n \geq 2$). Allora

(i) Se n è pari, x_0 è un minimo se $f^{(n)}(x_0) > 0$ e un massimo se $f^{(n)}(x_0) < 0$

(ii) Se n è dispari, x_0 non è né un massimo né un minimo.

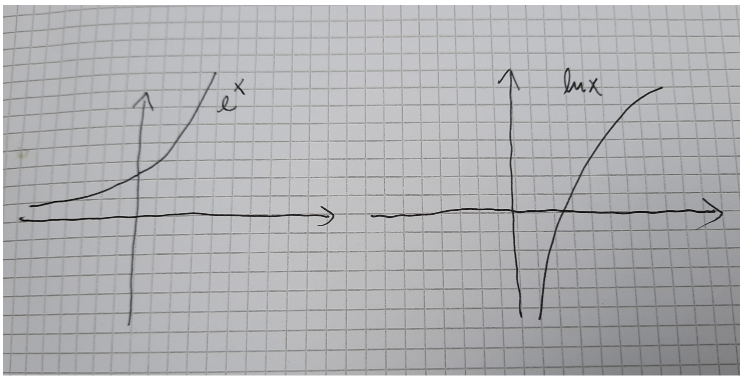
Esempio 0.1. Si considerino le potenze $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^4$: essendo $f'(x) = 2x$, $g'(x) = 3x^2$, $h'(x) = 4x^3$, le derivate prime si annullano tutte e tre nell'origine $x = 0$ che risulta quindi un punto stazionario per tutte e tre le funzioni. Calcolando le derivate seconde, si ha $f''(x) = 2$, $g''(x) = 6x$, $h''(x) = 12x^2$, si vede che $f''(0) > 0$ e quindi concludiamo subito che l'origine è un punto di minimo per f; mentre $g''(0)$ e $h''(0)$ sono ancora nulle quindi dobbiamo passare alle derivate successive. Si ha $g'''(x) = 6$ e $h'''(x) = 24x$, quindi si vede che $g'''(0) > 0$ e in tal caso l'origine non è né un massimo né un minimo (essendo la prima derivata non nulla una derivata di ordine dispari) mentre $h'''(0) = 0$ quindi non possiamo ancora dire nulla sulla funzione h. Calcolando la derivata quarta $h^{(4)}(x) = 24$ vediamo che $h^{(4)}(0) > 0$: essendo la prima derivata non nulla una derivata di ordine pari e in particolare essendo positiva, l'origine risulta un punto di minimo.

Questi risultati sono confermati dai grafici delle funzioni



0.3 Convessità e concavità

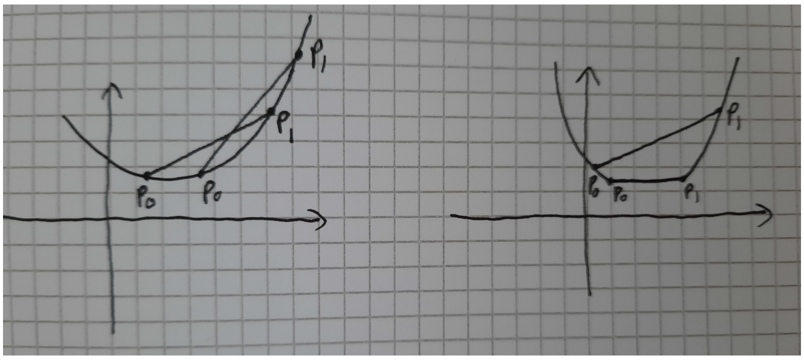
I criteri che abbiamo visto nel precedente paragrafo per determinare la crescenza e la decrescenza di funzioni derivabili sono di fondamentale importanza per comprendere l'andamento di una funzione data $f(x)$. Tuttavia, crescenza e decrescenza non bastano per determinare completamente tale andamento: ad esempio, le funzioni e^x e $\ln x$, pur essendo entrambe crescenti, hanno un'importante differenza nel loro andamento, come risulta dai loro grafici che risultano "curvati in modo opposto".



Le nozioni che esprimono rigorosamente questa differenza graficamente evidente, e che studieremo in questo paragrafo, sono quelle di convessità e concavità. Vediamo i dettagli.

Una funzione f si dice *convessa* in un certo intervallo di definizione se dati comunque due punti del suo grafico P_0 e P_1 allora il segmento che unisce P_0 e P_1 non ha punti al di sotto del grafico di f.

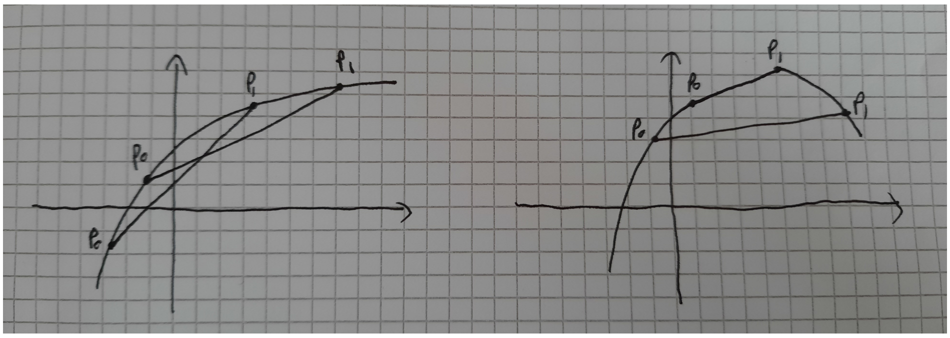
Nel seguente disegno sono rappresentate due funzioni convesse



Come si vede, la definizione è stata enunciata in modo da dire che il segmento non va mai sotto il grafico, ma gli è permesso avere tratti che coincidono col grafico, e questo chiaramente succede quando il grafico di f ha parti rettilinee, come nella seconda funzione rappresentata. Quindi anche in questo caso si parla di funzione convessa, ma si dice che la funzione non è strettamente convessa: più precisamente, una funzione si dice *strettamente convessa* se è convessa e il suo grafico non ha parti rettilinee (o in altre parole, il segmento che unisce due punti del suo grafico sta sempre sopra il grafico tranne per i due estremi del segmento). Quindi, nel disegno precedente, la prima funzione è strettamente convessa, la seconda non è strettamente convessa.

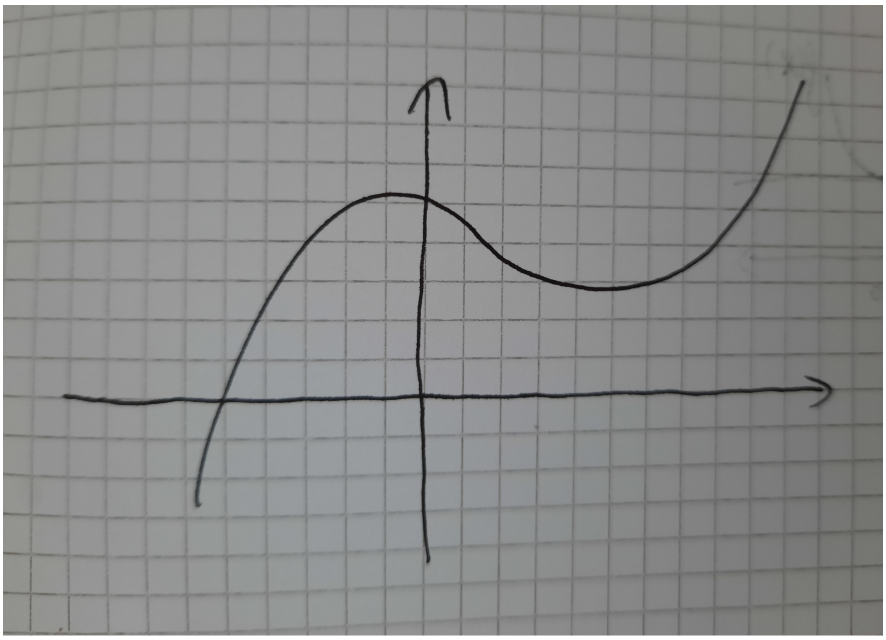
Analogamente, una funzione f si dice *concava* in un certo intervallo di definizione se dati comunque due punti del suo grafico P_0 e P_1 allora il segmento che unisce P_0 e P_1 non ha punti al di sopra del grafico di f.

Nel seguente disegno sono rappresentate due funzioni concave



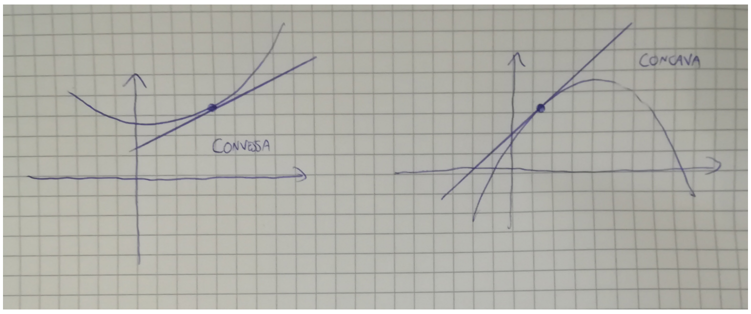
Come già nella definizione di funzione convessa, al segmento è permesso avere tratti che coincidono col grafico, che come abbiamo già detto succede quando il grafico di f ha parti rettilinee. Quindi anche in questo caso si parla di funzione concava, ma si dice che la funzione non è strettamente concava: più precisamente, una funzione si dice *strettamente concava* se è concava e il suo grafico non ha parti rettilinee. Quindi, nel disegno precedente, la prima funzione è strettamente concava, la seconda non è strettamente concava.

Naturalmente, una funzione può non essere né convessa né concava su tutto il suo dominio di definizione, ma può avere degli intervalli su cui è convessa e altri su cui è concava, come nel seguente disegno



La determinazione della convessità o concavità di una funzione è l'ultimo tassello che ci manca per arrivare a un'informazione completa sull'andamento di una funzione e poterne disegnare il grafico. Ci servono quindi dei criteri efficaci per determinare se una funzione è convessa o meno (senza ovviamente andare a guardare il segmento per ogni coppia di punti del suo grafico). Come stiamo per vedere, criteri di questo tipo esistono supponendo che la funzione sia derivabile. Prima di vedere i dettagli, diamo ora una definizione alternativa di funzione concava o convessa per funzioni derivabili.

Come sappiamo, se una funzione è derivabile in un intervallo I allora per ogni punto del suo grafico in quell'intervallo esiste la retta tangente. In tal caso, abbiamo la seguente definizione che si può dimostrare essere equivalente a quella data sopra: una funzione derivabile in I è convessa se per ogni punto di I il grafico di f sta sopra la retta tangente; è invece concava se per ogni punto di I il grafico di f sta sotto la retta tangente.



Non dimostriamo l'equivalenza di queste definizioni con quelle date sopra, ma come stiamo per vedere, esse ci consentono di usare le derivate per valutare la convessità o la concavità della funzione.

Come prima cosa, enunciamo senza dimostrarlo il seguente importantissimo criterio necessario e sufficiente per la convessità/concavità di una funzione derivabile:

Una funzione $f(x)$ derivabile è convessa in un intervallo (a, b) se e solamente se $f''(x) \geq 0$ su (a, b).

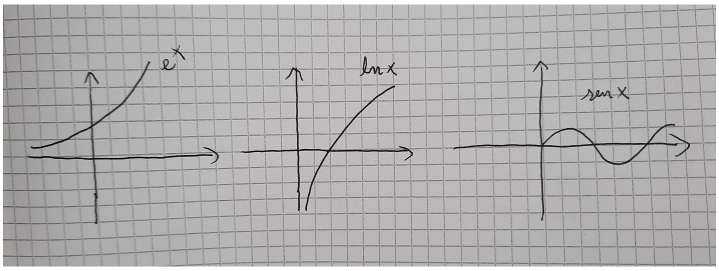
Una funzione $f(x)$ derivabile è concava in un intervallo (a, b) se e solamente se $f''(x) \leq 0$ su (a, b).

Facciamo subito alcuni esempi.

Esempio 0.2. Consideriamo la funzione $f(x) = e^x$: guardando il suo grafico, che abbiamo visto più volte, sappiamo che la funzione dovrebbe essere convessa. In effetti, si ha $f'(x) = e^x$ e $f''(x) = e^x > 0$ su tutto il dominio $\mathbb{R}$ di definizione della funzione. Quindi abbiamo la conferma che la funzione è convessa dappertutto.

Consideriamo invece $f(x) = \ln x$: guardando il suo grafico, che abbiamo visto più volte, sappiamo che la funzione dovrebbe essere concava. In effetti, si ha $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ e $f''(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} < 0$ su tutto il dominio di definizione della funzione (i numeri reali positivi). Quindi abbiamo la conferma che la funzione è concava dappertutto.

Infine, consideriamo $f(x) = \sin x$: si ha $f'(x) = \cos x$ e $f''(x) = -\sin x$. Quindi si ha $f''(x) \leq 0$ (e la funzione è concava) dove il seno è positivo o nullo, e $f''(x) \geq 0$ (e la funzione è convessa) dove il seno è negativo o nullo, come si vede chiaramente dal suo grafico.



Il criterio appena visto è l'analogo di quello visto a pagina 10 della seconda parte sulle derivate per crescenza o decrescenza di una funzione. Esattamente come in quel caso, in cui abbiamo concentrato la nostra attenzione sui punti in cui c'è un passaggio da crescenza a decrescenza (massimo locale) o da decrescenza a crescenza (minimo locale), anche in questo caso siamo interessati ai punti in cui vi è un passaggio da convessità a concavità o viceversa: i punti in cui avviene questo passaggio si chiamano *punti di flesso*.

Ad esempio, nell'esempio di $f(x) = \sin x$ visto sopra, come si vede dal grafico, sono punti di flesso tutti quelli in cui il seno si annulla.

Ora, analogamente al criterio che ci dice che i punti di massimo o minimo locale vanno cercati tra quelli in cui la derivata prima si annulla (cioè i punti stazionari, come abbiamo visto a pagina 14 della seconda parte sulle derivate) abbiamo il seguente criterio necessario per avere un punto di flesso:

Se $f(x)$ è una funzione derivabile almeno due volte in x_0 e x_0 è un punto di flesso per la funzione f, allora $f''(x_0) = 0$.

Sottolineiamo che, così come avveniva anche per il criterio necessario per avere un punto estremale, non vale l'inverso di questo criterio, ovvero non è detto che se in un punto x_0 si ha $f''(x_0) = 0$ allora il punto è di flesso (in altre parole, la condizione $f''(x_0) = 0$ è necessaria ma non sufficiente).

Ricaveremo allora ora un criterio per il riconoscimento della natura di tali punti, esattamente come abbiamo fatto per i punti stazionari, e basato anch'esso sulla formula di Taylor.

A questo scopo, ricordiamo che l'equazione della retta tangente al grafico di una funzione f in un punto $(x_0, f(x_0))$ del suo grafico è $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$: come abbiamo già osservato, i due addendi che compaiono in questa espressione sono proprio i primi due addendi della formula di Taylor (che infatti, arrestata al prim'ordine, ci sta dicendo che la funzione può essere approssimata in un intorno di x_0 dalla sua retta tangente).

Quindi, per valutare se il grafico di $y = f(x)$ sta sopra o sotto il grafico della retta (e capire quindi se f è convessa o concava) dobbiamo semplicemente controllare se è $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ oppure $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, ovvero equivalentemente valutare il segno della differenza

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Supponiamo allora di avere un punto x_0 in cui vale la condizione $f''(x_0) = 0$ necessaria per un flesso e usiamo lo sviluppo di Taylor di f in x_0 arrestato al terz'ordine

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + o((x - x_0)^3)$$

dove non abbiamo scritto l'addendo $\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$ perché ci stiamo mettendo nel caso $f''(x_0) = 0$ in cui esso è nullo.

Usiamo allora un ragionamento del tutto analogo a quello visto per la determinazione della natura dei punti stazionari: portiamo a primo membro i primi due addendi

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + o((x - x_0)^3)$$

e dividiamo ora entrambi i membri per $(x - x_0)^3$:

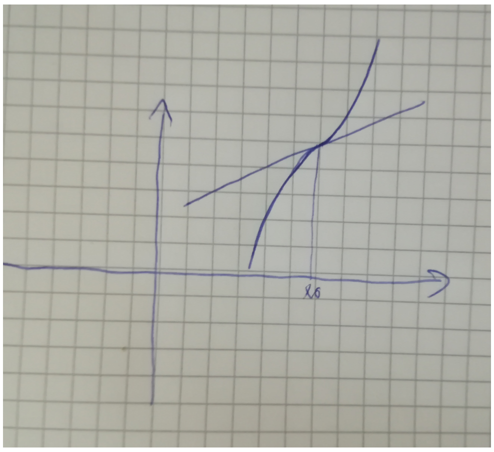
$$\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^3} = \frac{f'''(x_0)}{3!} + \frac{o((x - x_0)^3)}{(x - x_0)^3}$$

Come sappiamo, $\frac{o((x-x_0)^3)}{(x-x_0)^3}$ tende a 0 per $x \to x_0$, quindi possiamo scrivere

$$\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^3} \to \frac{f'''(x_0)}{3!} \tag{5}$$

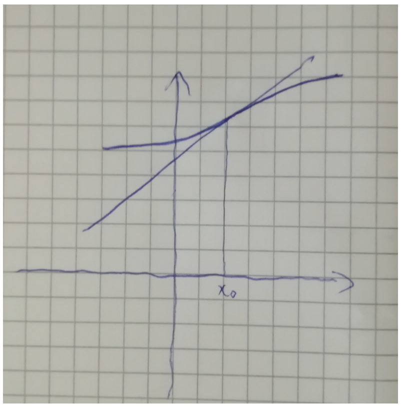
Distinguiamo allora i casi $f'''(x_0) > 0$ e $f'''(x_0) < 0$:

(i) Sia $f'''(x_0) > 0$. Allora la (5) ci sta dicendo che $\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^3}$ tende a una quantità positiva, e quindi a partire da un certo x abbastanza vicino a x_0 deve essere $\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^3} > 0$. Allora, a destra di x_0 (dove il cubo a denominatore è positivo) il numeratore deve essere $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) > 0$, mentre a sinistra di x_0 (dove il cubo a denominatore è negativo) il numeratore deve essere $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) < 0$ (affinché il rapporto rimanga positivo). Quindi, riassumendo, per $x > x_0$ devo avere $f(x) > f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ mentre per $x < x_0$ devo avere $f(x) < f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. Quindi il grafico della funzione sta sopra la retta tangente (è convessa) a destra di x_0 e sotto la retta tangente (è concava) a sinistra di x_0:



Come mostra il disegno, f passa quindi da concava a convessa e abbiamo per l'appunto un punto di flesso.

(ii) caso $f'''(x_0) < 0$: la (5) ci sta ora dicendo che $\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^3}$ tende a una quantità negativa, e quindi a partire da un certo x abbastanza vicino a x_0 deve essere $\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^3} < 0$. Ma allora, a destra di x_0 (dove il cubo a denominatore è positivo) il numeratore deve essere $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) < 0$, mentre a sinistra di x_0 (dove il cubo a denominatore è negativo) il numeratore deve essere $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) > 0$ (affinché il rapporto sia negativo). Riassumendo, per $x > x_0$ devo avere $f(x) < f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ mentre per $x < x_0$ devo avere $f(x) > f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. Quindi il grafico di f stavolta è sotto quello della retta tangente (f è concava) a destra di x_0 e sopra la retta tangente (f è convessa) a sinistra di x_0:



Si tratta quindi sempre di un punto di flesso, dove la funzione stavolta sta passando da convessa a concava nell'attraversare x_0.

In conclusione, siamo sicuri che un punto in cui vale la condizione $f''(x_0) = 0$ sia effettivamente un flesso se $f'''(x_0)$ è diversa da zero (positiva o negativa). Ma cosa accade se $f'''(x_0) = 0$?

Senza ripetere nuovamente tutti i dettagli, in tal caso per ottenere un'informazione useremmo lo sviluppo di Taylor arrestato al quart'ordine

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4 + o((x - x_0)^4)$$

(dove mancano i termini di secondo e terzo grado perché stiamo supponendo $f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$) e con lo stesso procedimento di sopra invece che alla (5) arriveremmo a

$$\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^4} \to \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}$$

Concluderemmo allora che se $f^{(4)}(x_0) > 0$ allora il rapporto $\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^4}$ deve essere positivo vicino a x_0 e quindi $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) > 0$ (ovvero la funzione è convessa) mentre se $f^{(4)}(x_0) < 0$ allora il rapporto $\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^4}$ deve essere negativo vicino a x_0 e quindi $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) < 0$ (ovvero la funzione è concava)[1]. In questo caso, quindi,

[1] Si noti che non abbiamo dovuto distinguere tra quello che succede a destra o a sinistra di x_0 (come nel caso dello sviluppo arrestato al terz'ordine) perché stavolta il denominatore $(x - x_0)^4$ è sempre positivo sia per $x > x_0$ che per $x < x_0$.

non c'è passaggio da concava a convessa o viceversa e non abbiamo un punto di flesso (nonostante sia $f''(x_0) = 0$).

Come forse ormai è chiaro, il ragionamento si estende facilmente al caso in cui tutte le derivate sono nulle fino all'n-esima, distinguendo i casi in cui la prima derivata non nulla è di ordine pari o dispari (in modo analogo a quanto fatto per la determinazione della natura dei punti stazionari nel precedente paragrafo) e si ottiene il seguente criterio generale.

Sia data una funzione f che sia derivabile almeno n volte in in un punto x_0 in cui $f''(x_0) = 0$ e tale che la sua prima derivata non nulla in x_0 è $f^{(n)}(x_0)$ (con $n \geq 3$). Allora

(i) Se n è pari, la funzione è convessa se $f^{(n)}(x_0) > 0$ e concava se $f^{(n)}(x_0) < 0$

(ii) Se n è dispari, la funzione ha un flesso in x_0 (e in particolare passa da concava a convessa se $f^{(n)}(x_0) > 0$ e da convessa a concava se $f^{(n)}(x_0) < 0$)

Osservazione 0.2. Il fatto che il criterio per la determinazione della convessità o concavità di una funzione derivabile in un intorno di un punto x_0 sia così simile a quello per la determinazione della natura di un punto stazionario non è ovviamente un caso: a parte il fatto che il ragionamento usato per entrambi i criteri è lo stesso ed è basato sulla formula di Taylor, da un punto di vista grafico quello che sta succedendo è che in corrispondenza di un punto x_0 di massimo locale i valori $f(x)$ della funzione in un intorno di x_0 devono essere minori di x_0, e quindi il grafico della funzione deve stare tutto sotto la quota $f(x_0)$. Ma essendo per un punto stazionario la retta tangente orizzontale e costante proprio a quota $f(x_0)$, stare sotto questa quota significa stare sotto la retta tangente, e quindi verificare la definizione di concavità per funzioni derivabili.

Analogamente, in corrispondenza di un punto x_0 di minimo locale i valori $f(x)$ della funzione in un intorno di x_0 devono essere maggiori di x_0, e quindi il grafico della funzione deve stare tutto sopra la quota $f(x_0)$. Ma essendo per un punto stazionario la retta tangente orizzontale e costante proprio a quota $f(x_0)$, stare sopra questa quota significa stare sopra la retta tangente, e quindi verificare la definizione di convessità per funzioni derivabili.

I casi invece in cui il punto stazionario x_0 non è di massimo né di minimo corrispondono invece alla situazione in cui i valori $f(x)$, rispetto a $f(x_0)$, sono maggiori a destra e minori a sinistra (o viceversa) e quindi il grafico, rispetto alla retta tangente che è orizzontale, sta sopra a destra e sotto a sinistra (o viceversa), ovvero c'è un cambio di concavità e quindi un flesso.