Entrambi i criteri che abbiamo dato (sia quello per la natura dei punti stazionari che quello per la determinazione di convessità o concavità) funzionano se abbiamo una funzione derivabile più volte, per la quale andiamo a vedere la prima derivata diversa da zero nel punto in questione. Tuttavia, una funzione può presentare comportamenti tali per cui questi criteri non sono più applicabili. Vediamone due significativi:

(1) Consideriamo la funzione così definita

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 \quad \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Per $x \neq 0$, si tratta di una funzione derivabile con derivata data da

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Riguardo alla derivabilità di f in zero, dobbiamo ricorrere al rapporto incrementale:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

(abbiamo $\sin\left(\frac{1}{h}\right)$ che rimane limitato tra -1 e $+1$ moltiplicato per h che tende a zero).

Quindi la funzione è derivabile anche nell'origine, che risulta essere un punto stazionario. Ora, se volessimo determinare la natura di questo punto stazionario mediante i criteri visti sopra dovremmo iniziare a calcolare la derivata seconda in zero. Essendo, come abbiamo appena visto,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 \quad \text{se} \quad x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

calcoliamo la derivata seconda in zero con il rapporto incrementale della derivata prima:

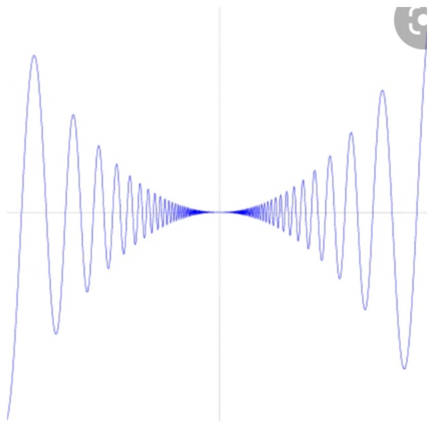
$$f''(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h \sin\left(\frac{1}{h}\right) - \cos\left(\frac{1}{h}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} 2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) - \frac{1}{h} \cos\left(\frac{1}{h}\right)$$

e questo limite non esiste (l'addendo $2\sin\left(\frac{1}{h}\right)$ rimane limitato mentre l'addendo $\frac{1}{h}\cos\left(\frac{1}{h}\right)$, essendo prodotto del coseno che oscilla tra -1 e $+1$ per $\frac{1}{h}$ che tende a infinito, presenta oscillazioni di ampiezza crescente man mano che ci avviciniamo a zero).

Quindi la derivata seconda non esiste e il criterio che abbiamo visto per la natura dei punti stazionari non si può applicare. In tal caso, la determinazione dell'andamento della funzione richiede un'analisi a parte che mostra che *il punto stazionario* $x_0 = 0$ *in questo caso non è né un massimo, né un minimo, né un flesso.*

In effetti, dal grafico della funzione



si intuisce che quello che sta succedendo è che la funzione man mano che ci avviciniamo all'origine oscilla con oscillazioni sempre più rapide ma di ampiezza sempre minore. La retta tangente nell'origine esiste (e quindi la funzione è derivabile) perché la funzione risulta "schiacciata" tra le due parabole x^2 e $-x^2$ (come si intuisce dal profilo del grafico[1]) e la pendenza della tangente tende a diventare orizzontale nell'origine dove queste due parabole s'incontrano e sono tangenti tra loro; ma il fatto che ci siano infinite oscillazioni tra valori positivi e negativi in qualunque intorno dell'origine, per quanto piccolo, fa sì che l'origine, dove la funzione si annulla, non sia né massimo né minimo; inoltre, per lo stesso motivo non esiste nessun intorno, né destro né sinistro, in cui la funzione stia sempre o sopra o sotto la retta tangente nell'origine

[1]La cosa è evidente anche dall'espressione della funzione: se $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ oscilla tra -1 e $+1$, allora $x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ oscilla tra $-x^2$ e $+x^2$.

(che è orizzontale), e quindi non possiamo trovare nessun intorno in cui la funzione sia convessa a destra e concava a sinistra o viceversa, ovvero l'origine non è neanche un punto di flesso.

La funzione appena vista è un esempio significativo anche per il fatto che costituisce un esempio di funzione derivabile una volta ma non due: anche se la maggior parte delle funzioni che vediamo in questo corso quando sono derivabili lo sono tutte le volte che vogliamo, l'esistenza di una derivata per una funzione non implica l'esistenza delle derivate successive. In effetti, senza fare ulteriori conti la non esistenza della derivata seconda per f poteva essere dedotta già dall'espressione (1) della sua derivata prima: infatti, da tale espressione si vede che $f'(x)$ non è continua in $x_0 = 0$ (il limite di $2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ per x che tende a zero non esiste), e quindi avremmo potuto applicare il seguente importante fatto, che non dimostriamo

Se una funzione è derivabile in un punto x_0 di un intervallo (a,b), essa è anche continua in x_0.

Quindi, dal momento che f' nell'esempio dato non è continua in 0, sicuramente essa non è derivabile in 0 senza fare ulteriori conti.

(2) Consideriamo la funzione così definita

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Per $x \neq 0$, si tratta di una funzione derivabile con derivata data dalla regola di derivazione delle funzioni composte

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

mentre per quello che riguarda la derivabilità di f in zero, dobbiamo ricorrere al rapporto incrementale:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = 0$$

Il fatto che il limite è zero può essere mostrato ad esempio con il metodo di sostituzione ponendo $\frac{1}{h^2} = t$, di modo che il limite diventa

$\lim_{h\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-t}}{\frac{1}{\sqrt{t}}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t} = 0$ perché l'esponenziale e^t va a infinito più rapidamente di qualsiasi potenza di t.

Quindi la derivata in 0 esiste e anzi l'origine è un punto stazionario.

Come prima, se volessimo determinare la natura di questo punto stazionario con il criterio visto nel precedente paragrafo dovremmo calcolare le derivate successive. Essendo, come abbiamo appena visto,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } \; x \neq 0 \\ 0 \; \text{se } \; x = 0 \end{cases} \tag{2}$$

possiamo calcolare la derivata seconda in zero con il limite del rapporto incrementale di $f'(x)$ ottenendo

$$f''(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2}{h^3} e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{h\to 0} 2 \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^4}$$

Sempre con il metodo di sostituzione ponendo $\frac{1}{h^2} = t$ non è difficile convincersi che anche questo limite è zero, e quindi $f''(0) = 0$. Quindi dovremmo andare a calcolare la derivata terza $f'''(0)$. Se si calcola $f''(x)$ anche nei punti $x \neq 0$ usando la (2) si ottiene, dopo un calcolo diretto,

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{8-6x^2}{x^6} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } \; x \neq 0 \\ 0 \; \text{se } \; x = 0 \end{cases} \tag{3}$$

e quindi

$$f'''(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f''(0+h) - f''(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f''(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{8-6h^2}{h^6} e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{h\to 0} (8-6h^2) \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^7}$$

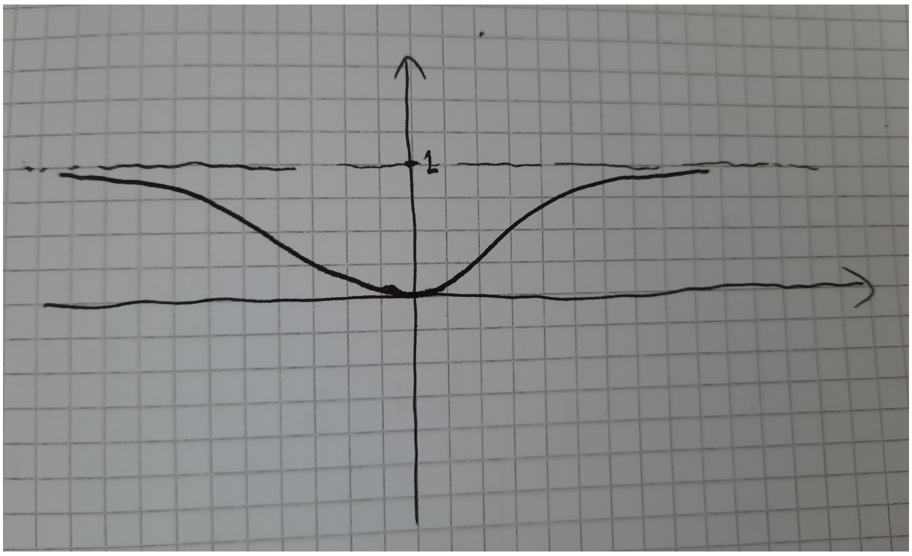
Di nuovo, non è difficile mostrare che questo limite è zero applicando il metodo di sostituzione al rapporto $\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^7}$, quindi $f'''(0) = 0$ e dovremmo passare alla derivata quarta.

Ora, se si continua così si può vedere che tutte le derivate in zero esistono e sono nulle[2] : quindi, pur essendo la funzione derivabile quanto

[2] Esiste un metodo che si chiama "dimostrazione per induzione" per mostrare che una proprietà è vera per tutti i numeri naturali n, in questo caso per tutte le derivate $f^{(n)}(0)$.

vogliamo, *non esiste la "prima derivata non nulla" che ci consente di applicare il criterio visto nel paragrafo precedente.*

In realtà, in questo caso essendo la funzione sempre positiva e nulla solo in 0 è immediato capire che l'origine è un punto di minimo. Un'analisi completa dell'andamento della funzione, usando i calcoli che abbiamo appena visto, ci dice che il grafico della funzione è il seguente



La funzione appena vista è un esempio particolarmente importante nella teoria delle funzioni derivabili in quanto esempio classico di *funzione non analitica.*

Ricordiamo che la formula di Taylor di una funzione $f(x)$ arrestata all'n-esimo ordine presenta un errore che, al tendere di x al punto di approssimazione x_0, va a zero più rapidamente di una potenza n-esima. Si potrebbe quindi pensare che se facciamo tendere il grado di approssimazione n all'infinito allora questo errore scompare: questo però è vero solo per le cosiddette funzioni analitiche. Ad esempio, se nella formula di Taylor di e^x centrata in $x_0 = 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

che può essere scritta, con la notazione di sommatoria Σ come

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k + o(x^n)$$

(ovvero una sommatoria di termini del tipo $\frac{1}{k!}x^k$ con k che va da zero a n) facciamo tendere n all'infinito l'errore scompare e possiamo scrivere

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \tag{4}$$

che ci dà un'uguaglianza esatta tra e^x e una somma di infiniti monomi[3]: si dice allora che la funzione è analitica e la (4) si dice *serie di Taylor di* e^x *in un intorno di zero.* In generale, la serie di Taylor per una funzione $f(x)$ analitica in un intorno di un punto x_0 dove essa è derivabile tutte le volte che vogliamo è data da

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{5}$$

In questo corso non vedremo la teoria delle serie di Taylor e neanche le serie infinite in generale, ma segnaliamo solamente che un'uguaglianza come la (5) non può essere vera per la funzione $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ in un intorno di $x_0 = 0$ in quanto come abbiamo visto sopra le sue derivate nell'origine si annullano tutte e quindi il secondo membro della (5) è nullo, mentre la funzione non lo è: la funzione $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, quindi, pur essendo derivabile tutte le volte che vogliamo, non è analitica in un intorno di $x_0 = 0$.

0.1 Il teorema di de L'Hopital

Il teorema di de L'Hopital è un teorema che fornisce un metodo, basato sul calcolo delle derivate, per la risoluzione di forme indeterminate "infinito su infinito" e "zero su zero" .

Supponiamo di avere due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ che tendano o entrambe a zero (e quindi il rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ è una forma indeterminata "zero su zero") o entrambe a $\pm\infty$ (e quindi il rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ è una forma indeterminata "infinito su infinito"), per x che tende a un punto x_0 o a (più o meno) infinito.

Il metodo di de L'Hopital afferma che, sotto alcune ipotesi che ora preciseremo, il limite del rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ tra le funzioni è uguale al limite del rapporto $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ tra le loro derivate, e quindi si può provare a calcolare quest'ultimo che, come vedremo negli esempi, risulta spesso più semplice.

[3]Si può dimostrare che tale uguaglianza vale in effetti per ogni x e quindi ad esempio ponendo $x = 1$ ci dà l'interessante uguaglianza $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$

Le ipotesi che devono essere soddisfatte per applicare il metodo sono abbastanza semplici e naturali: in primo luogo, chiaramente le funzioni devono essere derivabili, e più precisamente, se il limite è per x che tende a un punto x_0, allora basta che siano derivabili in un intervallo che contiene x_0; se il limite è per x che tende a più o meno infinito, basta che siano derivabili per ogni x rispettivamente positivo o negativo sufficientemente grande (in valore assoluto). La seconda ipotesi, meno scontata, è che il limite del rapporto $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ tre le derivate deve esistere, finito o infinito (come sappiamo, un limite può anche non esistere, e in quel caso come vedremo in un esempio non si può concludere nulla).

Esempio 0.1. Non dimostreremo il teorema di de L'Hopital, ma vediamo subito alcuni esempi significativi.

(1) Iniziamo a testare il metodo su alcuni limiti notevoli che abbiamo dato per buoni senza dimostrazione.

Ad esempio, supponiamo di voler calcolare il limite $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ mediante il metodo di de L'Hopital. Intanto, il metodo si può applicare in quanto è il rapporto tra due funzioni $f(x) = \sin x$ e $g(x) = x$ ovunque derivabili ed è una forma indeterminata "zero su zero". Si ha $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x\to 0} \cos x = 1$, ovvero il limite esiste ed è uguale a 1, e quindi concludiamo in base al teorema di de L'Hopital che $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, come già sapevamo.

A volte il metodo richiede un'applicazione iterata: ad esempio, consideriamo il limite notevole $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$ (che come già sappiamo è $+\infty$ in quanto l'esponenziale è un infinito di ordine superiore rispetto a qualunque potenza di x).

Essendo numeratore e denominatore funzioni derivabili dappertutto possiamo calcolare le derivate e il limite del loro rapporto che è $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2x}$: si tratta ancora di una forma "infinito su infinito" con numeratore e denominatore derivabili, alla quale possiamo ancora applicare de L'Hopital derivando ulteriormente e ottenendo $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2}$. Questo limite è stavolta chiaramente $+\infty$ e quindi possiamo concludere che questo era anche il risultato del limite iniziale.

(2) Nel caso in cui il limite delle derivate non esista, non si può concludere nulla: ad esempio, supponiamo di voler calcolare mediante de L'Hopital $\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\sin x}{x}$: il limite del rapporto tra le derivate è $\lim_{x\to +\infty} \frac{1+\cos x}{1} = \lim_{x\to +\infty} 1 + \cos x$, che non esiste in quanto si tratta di una funzione oscillante indefinitamente tra 0 e 2 (il suo grafico è semplicemente il grafico del coseno "sollevato di una quota 1"). Tuttavia,

concludere che il limite originale non esiste sarebbe sbagliato: infatti, questo può essere calcolato semplicemente osservando che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{\sin x}{x}$$

e dal momento che $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ (è il prodotto tra $\frac{1}{x}$ che tende a zero e la funzione oscillante ma limitata $\sin x$) il risultato del limite è 1.

(3) In alcuni casi, le ipotesi del metodo di de L'Hopital sono soddisfatte ma la sua applicazione complica il limite anziché semplificarlo: un classico esempio è quello della forma indeterminata "zero su zero" seguente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} \tag{6}$$

Come abbiamo già visto nel paragrafo precedente si ha

$$\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3}$$

Quindi, tenuto conto che la derivata del denominatore nel limite (6) è semplicemente 1, de L'Hopital trasforma questo limite nel limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$$

che ha lo stesso grado di difficoltà di quello originale, se non maggiore visto che presenta x^3 a denominatore anziché x. Non è difficile mostrare che ulteriori applicazioni del limite, continuando a derivare, peggiorano la situazione aumentando sempre di più il grado della potenza a denominatore.

In questo caso, in effetti, il limite si può risolvere semplicemente con il metodo di sostituzione, come abbiamo visto alla fine di pagina 3.

Osservazione 0.1. Si noti che anche l'ipotesi che si abbia a che fare con una forma indeterminata è essenziale: ad esempio, il limite $\lim_{x\to 0} \frac{3x+2}{x}$ è chiaramente infinito (per la precisione $+\infty$ per $x \to 0^+$ e $-\infty$ per $x \to 0^-$) ma se applicassimo il metodo di de L'Hopital derivando numeratore e denominatore otterremmo il risultato sbagliato $\lim_{x\to 0} \frac{3}{1} = 3$.

Osservazione 0.2. Segnaliamo che il teorema di de L'Hopital vale anche per limiti destri $x \to x_0^+$ e sinistri $x \to x_0^-$: in tal caso, per la sua validità, oltre alle altre ipotesi, basta che la funzione sia derivabile rispettivamente in un intorno destro o sinistro di x_0.

Concludiamo questo paragrafo con un cenno a un ulteriore metodo per la risoluzione delle forme indeterminate "zero su zero" basato sulla formula di Taylor e che in un certo senso risulta essere una riformulazione del metodo di de L'Hopital.

Illustriamolo direttamente con un esempio. Supponiamo di voler calcolare il limite seguente

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x + e^x - x - 2}{x^3}$$

Si tratta di una forma indeterminata "zero su zero" che, come è facile vedere, può essere risolta mediante un'applicazione ripetuta del metodo di de L'Hopital, e per la precisione derivando tre volte numeratore e denominatore. In alternativa, si può procedere come segue: sostituiamo alle funzione $\cos x$ e e^x le loro approssimazioni di Taylor arrestate al terz'ordine

$$\frac{\cos x + e^x - x - 2}{x^3} = \frac{\Big(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\Big) + \Big(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\Big) - x - 2}{x^3}$$

Come si vede subito, si semplificano i termini costanti e i termini x e $\frac{x^2}{2}$, e si ha quindi[4]

$$\frac{\cos x + e^x - x - 2}{x^3} = \frac{\frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3!} + \frac{o(x^3)}{x^3}$$

da cui, essendo l'errore $o(x^3)$ un termine che va a zero più velocemente di x^3 e quindi $\frac{o(x^3)}{x^3} \to 0$, si vede che il limite è $\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.

In altre parole, questo metodo sostituisce alle funzioni coinvolte nel limite le loro approssimazioni di Taylor e quindi, a parte gli errori di approssimazione che poi tenderanno a zero, sostituisce le funzioni con dei polinomi, per i quali le forme indeterminate "zero su zero" sono più facili da trattare tramite semplificazioni.

[4] Accorpiamo anche i due errori $o(x^3)$ in un unico termine, in quanto la somma di due quantità che vanno a zero più velocemente di x^3 è ancora una quantità che va a zero più velocemente di x^3, quindi possiamo scrivere una sola volta $o(x^3)$.

L'apparente svantaggio di questo metodo sembra essere che per la sua applicazione esso richiede il calcolo delle formule di Taylor delle funzioni coinvolte, che richiede a sua volta il calcolo delle derivate successive nel punto di approssimazione (in questo senso il metodo è equivalente a quello di de L'Hopital). Tuttavia, questo svantaggio non c'è se le formule di Taylor delle funzioni che compaiono sono già note per qualche motivo: ad esempio, si può notare che le formule di Taylor delle funzioni e^x, $\cos x$ e $\sin x$ centrate in $x_0 = 0$ sono facili da memorizzare senza doverle calcolare ogni volta.

Infatti, la formula di Taylor dell'esponenziale e^x (centrata in $x_0 = 0$) si presenta come segue:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

ovvero è somma di monomi di potenza crescente divisi per la potenza stessa al fattoriale.

La formula di Taylor del seno $\sin x$ (sempre centrata in $x_0 = 0$) presenta anch'essa termini dello stesso tipo, ma solo quelli di ordine dispari e con segni alternati:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Analogamente, la formula di Taylor del coseno $\cos x$ (sempre centrata in $x_0 = 0$) presenta anch'essa termini dello stesso tipo, ma stavolta solo quelli di ordine pari, sempre con segni alternati:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Una volta memorizzate queste formule, l'applicazione del metodo appena illustrato a limiti in cui compaiano queste tre funzioni risulta notevolmente semplice.

0.2 Teoremi di esistenza

Nei paragrafi precedenti abbiamo visto dei metodi per la determinazione di massimi e minimi locali di una funzione che consistono nello studio della crescenza o decrescenza della funzione o nella determinazione dei punti stazionari e della loro natura mediante derivate successive. Spesso, tuttavia, o perché la complessità della funzione in gioco non lo permette o perché per la natura del problema stesso ci è sufficiente, abbiamo semplicemente bisogno di avere garantita l'esistenza di uno di questi punti all'interno di un dato intervallo, anche senza conoscerlo esplicitamente[5].

A questo scopo, esistono dei teoremi classici del calcolo infinitesimale che ci danno esattamente questo tipo di informazione. Iniziamo con i punti stazionari, la cui esistenza è garantita dal seguente, importante

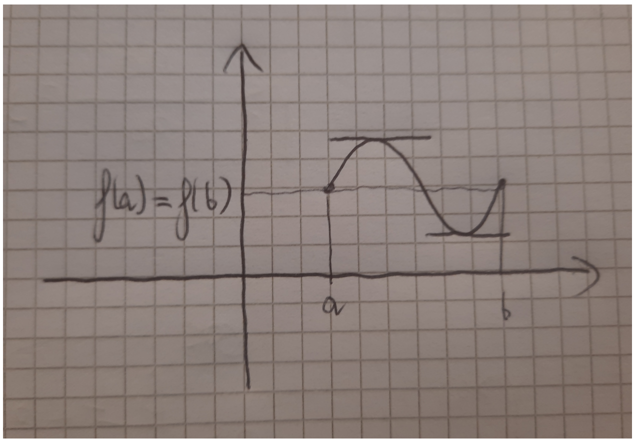
Teorema 0.2.1. (di Rolle) Sia f una funzione che soddisfa le due seguenti ipotesi:

(i) f è continua in un intervallo chiuso $[a, b]$

(ii) f è derivabile nell'intervallo aperto (a, b)

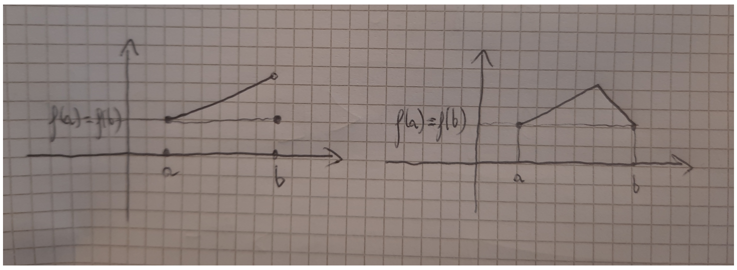
Se $f(a) = f(b)$ allora esiste all'interno di (a, b) almeno un punto stazionario.

Il significato dell'ipotesi $f(a) = f(b)$ e della conclusione è che una funzione che soddisfi (i) e (ii), per partire da un certo valore e tornare allo stesso valore deve necessariamente passare per almeno un punto a tangente orizzontale.

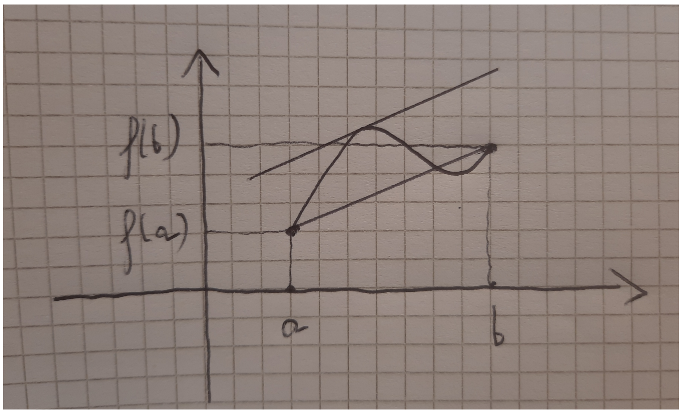


Questo risulta abbastanza plausibile a patto che siano appunto soddisfatte le ipotesi (i) e (ii), che sono essenziali: nel seguente disegno sono rappresentate due funzioni che verificano entrambe $f(a) = f(b)$ ma che non hanno punti stazionari perché la prima è derivabile in (a, b) ma non è continua in $[a, b]$ (in b ha un "salto" che la riporta al valore di partenza) e la seconda è viceversa continua in $[a, b]$ ma non è derivabile in (a, b) (presenta un punto angoloso):

[5] I punti stazionari rappresentano in molte situazioni pratiche "punti di equilibrio" del sistema descritto dalla funzione, da cui l'importanza di sapere anche solo se esiste uno di questi punti.



Il teorema di Rolle sta affermando che, sotto le ipotesi (i) e (ii), esiste un punto all'interno dell'intervallo in cui la direzione della retta tangente è la stessa della retta che unisce i due punti estremi del grafico $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ (che essendo $f(a) = f(b)$ è appunto orizzontale): in questa riformulazione, il teorema vale in effetti più in generale anche se $f(a) \neq f(b)$: in tal caso la retta che unisce i due punti estremi del grafico $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ non sarà più orizzontale, ma si può dimostrare che esiste un punto interno all'intervallo (a, b) la cui tangente ha la stessa direzione di questa retta:



Tali punti si chiamano *punti di Lagrange* e il teorema che ne garantisce l'esistenza è il teorema di Lagrange, che ha le stesse ipotesi del teorema di Rolle e che enunciamo per completezza e chiarezza:

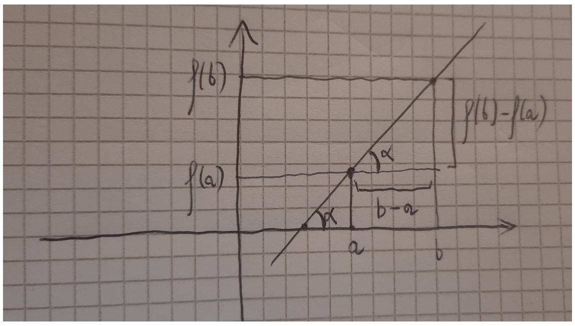
Teorema 0.2.2. (di Lagrange) Sia f una funzione che soddisfa le due seguenti ipotesi:

(i) f è continua in un intervallo chiuso $[a, b]$

(ii) f è derivabile nell'intervallo aperto (a, b)

Allora esiste all'interno di (a, b) almeno un punto c per cui $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Si noti che il rapporto $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, essendo il rapporto tra cateto verticale e cateto orizzontale del triangolo rettangolo del disegno seguente, è in effetti la tangente dell'angolo α indicato e quindi è (come abbiamo visto a pagina 3 della prima parte sulle derivate) proprio il coefficiente angolare della retta che unisce $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$



Osservazione 0.3. A titolo di curiosità, il teorema di Lagrange è spesso citato a proposito del funzionamento dei cosiddetti tutor per la rilevazione delle violazioni del limite di velocità nelle autostrade. Il meccanismo è il seguente: in autostrada esistono dei tratti compresi tra un punto A e un punto B dotati di telecamere che fotografano il passaggio di un'automobile registrandone l'orario: in questo modo, nota la distanza tra A e B e gli orari di passaggio, è possibile calcolare la velocità media del veicolo su quel tratto. Allora, se la velocità media risulta superiore al limite di velocità autostradale (che è 130 Km/h) significa che nel tratto tra A e B sicuramente il veicolo ha almeno in un punto avuto una velocità istantanea superiore al limite.

In effetti, questo è esattamente quello che sta affermando il teorema di Lagrange, in quanto se $f(t)$ è lo spazio percorso dall'automobile al tempo t, a è l'istante di passaggio nel punto A e b è l'istante di ingresso nel punto B allora $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è esattamente la definizione di velocità media nel tratto AB, mentre $f'(c)$ è la velocità istantanea in un punto intermedio del percorso.

Si noti tuttavia che non è difficile trovare esempi che mostrano che è possibile avere una velocità istantanea superiore al limite in certi punti e tuttavia che la velocità media nell'intervallo risulti inferiore al limite (si supponga ad esempio che il moto del veicolo sia descritto dalla funzione $f(t) = 200t - 4t^2$ e si consideri l'intervallo $[10, 20]$...).

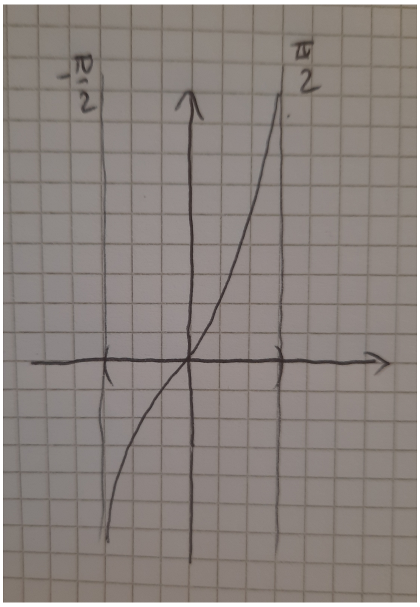
Il teorema di Rolle ci garantisce l'esistenza di almeno un punto stazionario in un dato intervallo: come sappiamo, questo punto può poi essere un massimo locale, un minimo locale o nessuno dei due. Esistono teoremi che garantiscono l'effettiva esistenza di massimi e minimi per una funzione?

In effetti, abbiamo il seguente, importantissimo

Teorema 0.2.3. (di Weierstrass) Una funzione continua in un intervallo chiuso $[a, b]$ ammette sicuramente un massimo e un minimo (globali).

Per capire il teorema, può essere utile vedere esempi di funzioni che non ammettono massimo e minimo perché non verificano le ipotesi.

Ad esempio, se l'intervallo di definizione della funzione è (a, b) (aperto anziché chiuso) può benissimo succedere che la funzione non abbia massimo e minimo: si prenda la funzione $f(x) = \mathrm{tg}x$ sull'intervallo aperto $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$



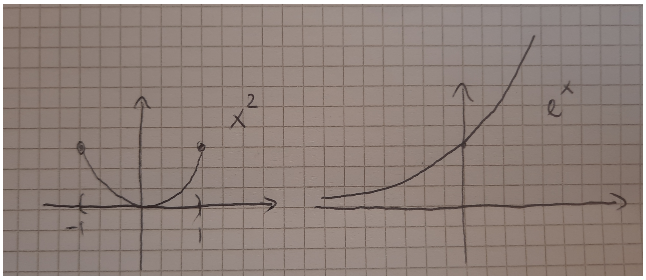
Tendendo a $+\infty$ all'estremo destro e a $-\infty$ all'estremo sinistro, la funzione non ha né un punto in cui raggiunge un massimo globale, né un punto in cui raggiunge un minimo globale.

Se ora decidiamo di assegnare alla funzione valore 0 negli estremi, dove non è definita, otterremmo una funzione definita sull'intervallo chiuso $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ ma che ancora non ha chiaramente né massimo né minimo: rispetto al teorema di Weierstrass, il problema è che la funzione così definita non è continua.

Osservazione 0.4. Si faccia attenzione che il fatto che una funzione non abbia massimi o minimi globali non significa che essa tenda necessariamente a più o meno infinito.

Ad esempio, può semplicemente capitare che la funzione sia definita su un intervallo aperto e che raggiunga il valore di estremo esattamente sui bordi dell'intervallo, dove però essa non è definita: si prenda ad esempio la parabola $f(x) = x^2$ definita sull'intervallo aperto $(-1, 1)$, che raggiunge il minimo 0 nell'origine ma non raggiunge il suo massimo valore 1 perché i punti

$x = -1$ e $x = +1$ su cui essa raggiungerebbe tale valore non sono compresi nell'intervallo di definizione; ancora, la funzione esponenziale $f(x) = e^x$ non ha un massimo globale perché per $x \to +\infty$ tende a più infinito, ma neanche un punto di minimo globale perché, pur essendo sempre maggiore di zero e pur tendendo a zero per $x \to -\infty$, non ammette nessun punto in cui essa assume effettivamente questo valore nullo.



Le funzioni per cui esiste un c tale che $f(x) \geq c$ (che questo valore sia effettivamente assunto o meno) si dicono *limitate inferiormente*; analogamente, le funzioni per cui esiste un c tale che $f(x) \leq c$ (che questo valore sia effettivamente assunto o meno) si dicono *limitate superiormente.*

Ad esempio, l'esponenziale è limitato inferiormente ma non superiormente.

Chiaramente, se una funzione ha un massimo globale essa è anche limitata superiormente, e se ha un minimo globale è limitata inferiormente, ma come mostra l'esempio dell'esponenziale (che è limitata inferiormente pur non avendo minimo globale) non è vero il viceversa.

Osservazione 0.5. In generale, se si devono determinare massimi e minimi globali di una funzione o capire se essa è limitata superiormente/inferiormente, bisogna determinare:

(1) Massimi e minimi locali (che sono possibili candidati a essere massimi o minimi globali)

(2) I limiti per x che tende a $\pm\infty$ (la funzione potrebbe tendere a infinito e quindi non avremmo massimo o minimo globale e anzi la funzione non sarebbe neanche limitata) e per x che tende a altri punti significativi (ad esempio, punti dove la funzione non è definita o non è continua)

(3) controllare i valori che la funzione assume sui bordi del dominio: ad esempio se la funzione è definita su un intervallo limitato essa potrebbe assumere il massimo e il minimo proprio sugli estremi dell'intervallo,

anche se questi punti non sono limiti significativi o non sono punti stazionari[6].

[6]Si presti attenzione al fatto che il teorema che afferma che se un punto x_0 è un massimo o un minimo locale allora x_0 è sicuramente un punto stazionario vale se x_0 è un punto interno al dominio di definizione della funzione (ovvero abbiamo punti del dominio sia a destra che a sinistra di x_0) e non sta "sul bordo del dominio".