Il fatto che se f e g sono continue allora $f+g$ è continua significa, per definizione di continuità, che se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x)+g(x) = f(x_0)+g(x_0)$. In altre parole, se ho due funzioni continue f e g, il limite per x che tende a x_0 della loro somma $f+g$ è uguale alla somma dei due limiti.

Ora, questa è in realtà una proprietà dei limiti che vale in generale, anche se le funzioni non sono continue in x_0 o non sono definite in x_0, e addirittura anche se il limite è per $x \to \pm\infty$, purché i risultati dei due limiti siano finiti (ovvero dei numeri reali). Più precisamente, vale il seguente fatto generale:

sia $\lim_{x\to\dots} f(x) = l_1$ *e* $\lim_{x\to\dots} g(x) = l_2$ *(con* l_1, l_2 *finiti): allora*

$$\lim_{x\to\cdots} f(x) + g(x) = l_1 + l_2 \tag{1}$$

(dove stiamo scrivendo $x \to \cdots$ per indicare il fatto che il limite potrebbe essere per $x \to x_0$ o per $x \to \pm\infty$).

Per fare un esempio che metta in evidenza che si tratta di una proprietà generale che vale anche quando le funzioni non sono continue, supponiamo di voler calcolare $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} + e^x\right)$: nel prossimo paragrafo vedremo che $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (si noti che la funzione non è definita in $x_0 = 0$); usando poi il fatto che $\lim_{x\to 0} e^x = 1$ (grazie alla continuità dell'esponenziale), dalla (1) ricaviamo subito

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} + e^x\right) = 1 + 1 = 2$$

Analogamente, sempre sotto l'ipotesi $\lim_{x\to\dots} f(x) = l_1$ e $\lim_{x\to\dots} g(x) = l_2$ (con l_1, l_2 finiti), si ha

$$\lim_{x\to\cdots} f(x) \cdot g(x) = l_1 \cdot l_2 \tag{2}$$

e se inoltre $l_2 \neq 0$, si ha anche

$$\lim_{x\to\cdots} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2} \tag{3}$$

(chiaramente la limitazione è dovuta al fatto che se $l_2 = 0$ allora $\frac{l_1}{l_2}$ non ha senso[1]).

[1] Vedremo nel prossimo paragrafo cosa succede in un quoziente se il limite della funzione a denominatore è zero.

Come abbiamo detto è da queste proprietà generali dei limiti che discende come caso particolare che la somma, il prodotto e il quoziente di funzioni continue sono ancora funzioni continue. Per quello che riguarda l'operazione di composizione, la proprietà generale dei limiti corrispondente è la seguente:

se $\lim_{x\to\tilde{x}_0} f(x) = l$ *e* $\lim_{x\to x_0} g(x) = \tilde{x}_0$*, allora*

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = l \tag{4}$$

(con $x_0, \tilde{x}_0$ *e* l *che possono essere anche* $\pm\infty$*)*

A parole, stiamo affermando che se sappiamo che vale un certo limite $\lim_{x\to\tilde{x}_0} f(x) = l$, allora possiamo sostituire alla x una funzione $g(x)$ (ottenendo in questo modo la composizione $f(g(x))$) e il risultato del limite rimarrà invariato purché $g(x)$ tenda a $\tilde{x}_0$ (per x che tende a un certo x_0).

Ad esempio, sempre facendo riferimento al limite $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ che vedremo nel paragrafo successivo, posso sostituire alla x la funzione e^x ottenendo la composizione $\frac{\sin(e^x)}{e^x}$ e il limite rimarrà invariato purché facciamo tendere la x a un limite in modo che $e^x \to 0$: dal momento che si ha in effetti $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ (fatto evidente dal grafico di e^x, ma su cui torneremo più rigorosamente più avanti) possiamo allora scrivere

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin(e^x)}{e^x} = 1$$

Su questo risultato si basa il metodo per la risoluzione di limiti del tipo $\lim_{x\to x_0} f(g(x))$ detto *metodo di sostituzione*. Per spiegarlo direttamente con un esempio, supponiamo di voler risolvere il limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1}$$

Applicando la sostituzione $x-1 = y$ la funzione diventa chiaramente $\frac{\sin y}{y}$, e inoltre per $x \to 1$ si ha $y = x-1 \to 0$. Quindi possiamo scrivere

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}$$

che (a parte il diverso modo di denotare la variabile) è esattamente il limite $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ che abbiamo detto essere uguale a 1. Quindi concludiamo $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = 1$.

Torneremo in più esempi sull'applicazione di questo metodo, che si rivela molto utile per risolvere molti limiti ed esercizi.

Osservazione 0.1. A rigore, per la validità della (4) bisogna aggiungere tra le ipotesi che $g(x)$ non sia la funzione costante uguale a $\tilde{x}_0$: infatti, non è difficile vedere che in tal caso si potrebbe ottenere una conclusione errata, ma non approfondiamo qui i dettagli in quanto non capiterà mai nell'applicazione pratica del metodo di sostituzione che la funzione $g(x)$ che poniamo uguale a y nell'applicare il metodo sia costante.

0.0.1 Quozienti

Analizzeremo ora il caso di funzioni espresse come quoziente e tali che il punto x_0 a cui facciamo tendere la x annulli il denominatore: in tale caso il punto x_0 non appartiene al dominio e quindi non possiamo applicare i risultati visti sopra sulla continuità, ma neanche i risultati generali sui limiti e in particolare la (3), che richiede $l_2 \neq 0$).

Per iniziare con un caso illustrativo il più semplice possibile ma che servirà da punto di partenza per altri esempi più elaborati, supponiamo di voler calcolare il limite per x che tende a 0 di

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Stiamo per mostrare che in realtà bisogna distinguere limite destro e sinistro e più precisamente che si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Senza voler fare una dimostrazione rigorosa basata sulla definizione di limite, osserviamo solamente che se ci avviciniamo a 0 da destra scegliendo ad esempio come "valori test" $x = 0,1$, $x = 0,01$, $x = 0,001$ etc. si ha

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{0,1} = 10, \ \frac{1}{x} = \frac{1}{0,01} = 100, \ \frac{1}{x} = \frac{1}{0,001} = 1000, \dots$$

il che suggerisce che i valori della funzione diventano sempre più grandi man mano che x si avvicina a zero, come previsto dalla definizione di limite uguale a $+\infty$.

Se invece ci avviciniamo a 0 da sinistra, scegliendo ad esempio come "valori test" $x = -0,1$, $x = -0,01$, $x = -0,001$ etc. si ha

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{-0,1} = -10, \ \frac{1}{x} = \frac{1}{-0,01} = -100, \ \frac{1}{x} = \frac{1}{-0,001} = -1000, \dots$$

e quindi man mano che x si avvicina a zero i valori della funzione diventano sempre più grandi in valore assoluto ma con segno meno davanti, come previsto dalla definizione di limite uguale a $-\infty$.

Questo semplice esempio appena analizzato funge da modello per tutti i limiti di funzioni del tipo $\frac{1}{f(x)}$ in cui facciamo tendere x a un punto x_0 per cui $f(x_0) = 0$. Più precisamente, si ha

i limiti destro $\lim_{x \to x_0^+} \frac{1}{f(x)}$ *e sinistro* $\lim_{x \to x_0^-} \frac{1}{f(x)}$ *saranno sicuramente infiniti, e sarà* $+\infty$ *nell'intorno (destro o sinistro che sia) in cui la funzione si mantiene positiva e* $-\infty$ *nell'intorno (destro o sinistro che sia) in cui la funzione si mantiene negativa; se i limiti sono uguali allora possiamo scrivere direttamente* $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)}$

L'ultimo caso si verifica se la funzione è positiva o negativa in tutto un intorno completo di x_0: ad esempio, la funzione $\frac{1}{x^2}$ è, per via del quadrato a denominatore, positiva sia a destra che a sinistra di zero, e visto che si annulla a denominatore per $x = 0$, sarà $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ (senza distinguere i limiti destro e sinistro, che sono uguali).

Con lo stesso criterio, si deduce ad esempio subito che

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x} = -\infty, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos x} = +\infty$$

Infatti, come è facile verificare dalla definizione di coseno e con l'ausilio della circonferenza goniometrica, la funzione $\cos x$ è negativa per valori di x vicini a $\frac{\pi}{2}$ ma maggiori (quindi a destra di $\frac{\pi}{2}$ sulla retta reale), mentre è positiva per valori di x vicini a $\frac{\pi}{2}$ ma minori (quindi a sinistra di $\frac{\pi}{2}$ sulla retta reale).

Ora facciamo un ulteriore piccolo passo avanti, considerando più in generale quozienti del tipo $\frac{f(x)}{g(x)}$, con $g(x_0) = 0$, e supponiamo di voler calcolare $\lim_{x \to x_0^\pm} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Distinguiamo i seguenti casi:

(1) Il numeratore $f(x)$ tende a un limite finito diverso da zero, diciamo l (mentre il limite di $\frac{1}{g(x)}$, come abbiamo visto sopra, può essere $\pm\infty$). In tal caso, *il limite di* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *rimane lo stesso di* $\frac{1}{g(x)}$ *se* $l > 0$ *mentre se* $l < 0$ *cambia segno (cioè diventa* $-\infty$ *se era* $+\infty$ *e viceversa)* .

Intuitivamente, questo può essere spiegato come segue. Vediamo il quoziente $\frac{f(x)}{g(x)}$ come il prodotto $f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ e supponiamo per facilità che il limite di $\frac{1}{g(x)}$ sia ad esempio $+\infty$ e che sia il limite l di $f(x)$ sia positivo. Per definizione di limite, questo significa che $f(x)$ si avvicina sempre di più a l mentre $\frac{1}{g(x)}$ diventa sempre più grande, cioè raggiunge e supera qualunque numero positivo M scelto. Se per facilità vediamo $f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ come se fosse proprio il prodotto $l \cdot M$, con M che diventa sempre più grande, è chiaro che anche $l \cdot M$ diventa sempre più grande, e questo indipendentemente da quanto piccolo possa essere l: per capirci, se fosse $l = \frac{1}{10}$, da $M = 1, 10, 100, 1000$ etc., vedo che $l \cdot M = \frac{1}{10}M = \frac{1}{10}, 1, 10, 100$ etc.

In caso l sia negativo vale lo stesso discorso ma $l \cdot M$ da positivo che era diventa negativo, quindi al crescere di M crescerà in valore assoluto ma con segno meno davanti.

Come semplice esempio di questo caso, consideriamo $\lim_{x \to 0^+} \frac{x-1}{x}$: abbiamo che il denominatore tende a zero assumendo valori positivi, quindi senza il numeratore il limite sarebbe $+\infty$; dal momento che il numeratore $x - 1$ tende a -1 per x che tende a zero, il limite diventa $-\infty$.

Per un ulteriore esempio mostriamo che[2] $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$: infatti, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$: come abbiamo visto sopra $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x} = -\infty$, e poiché il numeratore $\sin x$ tende a 1 che è positivo, il limite rimane invariato $-\infty$.

(2) Supponiamo che il numeratore $f(x)$ tenda a $\pm\infty$. Allora *il limite di $\frac{f(x)}{g(x)}$ rimane lo stesso di $\frac{1}{g(x)}$ se il numeratore tende a $+\infty$ mentre se il numeratore tende a $-\infty$ cambia segno (cioè diventa $-\infty$ se era $+\infty$ e viceversa).*

La spiegazione intuitiva di questo fatto è analoga alla precedente: vedendo il quoziente $\frac{f(x)}{g(x)}$ come un prodotto $f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ e supponendo per facilità che i limiti di $\frac{1}{g(x)}$ e di $f(x)$ siano entrambi $+\infty$, quello che sta succedendo è che $\frac{1}{g(x)}$ supera qualunque costante positiva M_1 e $g(x)$ supera qualunque costante positiva M_2: ma allora il prodotto $f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ supera il prodotto $M_1 \cdot M_2$, che al crescere di M_1 e M_2 diventa anch'esso a maggior ragione sempre più grande: il limite quindi è di nuovo $+\infty$.

Gli altri casi sono analoghi, tenendo conto che se se $f(x)$ tende a $-\infty$ allora essendo negativo cambia il segno del limite di $\frac{1}{g(x)}$ quando consideriamo il prodotto $f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$.

[2] Il risultato può essere verificato anche geometricamente usando la definizione geometria di tangente di un angolo vista nel primo capitolo.

Come esempio, mostriamo che

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\tan x}{\frac{\pi}{2} - x} = +\infty$$

Infatti, il denominatore $\frac{\pi}{2} - x$ tende a zero quando $x \to \frac{\pi}{2}^+$ assumendo valori negativi man mano che si avvicina a zero (infatti, $x \to \frac{\pi}{2}^+$ significa che siamo in un intorno destro di $\frac{\pi}{2}$, cioè x è maggiore di $\frac{\pi}{2}$: quindi la differenza $\frac{\pi}{2} - x$ è negativa), quindi senza il numeratore avremmo $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} = -\infty$. Tuttavia, come abbiamo visto sopra tra gli esempi del caso (1), il numeratore $\tan x$ tende a $-\infty$ per $x \to \frac{\pi}{2}^+$: quindi in base alla regola di sopra nel quoziente $\frac{\tan x}{\frac{\pi}{2} - x}$ il limite $-\infty$ che avremmo avuto se ci fosse stato solo il denominatore rimane infinito ma cambia di segno e diventa $+\infty$.

(3) Veniamo ora al caso più complesso e interessante, ovvero quello in cui anche il numeratore $f(x)$ del quoziente $\frac{f(x)}{g(x)}$ tende a zero per x che tende a x_0.

La complessità e l'interesse di questo caso consistono nel fatto che non esiste una regola generale: il risultato del limite cambia a seconda delle specifiche funzioni in gioco e potrebbe essere più o meno infinito, potrebbe essere zero, o potrebbe essere un numero diverso da zero. Per questo motivo, si parla in questo caso anche di *"forma indeterminata zero su zero"*.

Il motivo di questa indeterminatezza può essere compreso intuitivamente ancora una volta scrivendo $\frac{f(x)}{g(x)}$ come prodotto $f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$: infatti, come sappiamo $\frac{1}{g(x)}$ va a (più o meno) infinito, ovvero diventa più grande di qualunque costante $M > 0$ man mano che ci avviciniamo a x_0, mentre $f(x)$ diventa sempre più piccolo. Questo rende impossibile applicare il ragionamento del caso (1) in cui $f(x)$ tendeva a un l diverso da zero e il prodotto $f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ andava come $l \cdot M$: stavolta in tale prodotto il numero che possiamo prendere sempre più grande M si va a moltiplicare per un numero l che, tendendo la $f(x)$ a zero, diventa sempre più piccolo, e quindi potrebbe riuscire a compensare la crescita di M: ad esempio se, usando delle sequenze per capire simbolicamente quello che sta accadendo, si avesse $M = 1, 2, 3, 4...$ ma $l = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ il prodotto $l \cdot M$ sarebbe costante uguale a 1: la decrescita di l a zero riesce a compensare la crescita di M all'infinito; ma se fosse ad esempio sempre $l = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ ma $M = 1, 20, 300, 4000, \ldots$ (cioè la M sta crescendo molto più rapidamente di quanto la l stia andando a zero) si avrebbe $l \cdot M = 1, 10, 100, 1000$ e quindi il prodotto continuerebbe a crescere sempre di più, in quanto in questo caso la "velocità" con cui l va a zero non sarebbe sufficiente a compensare la velocità con cui M va a infinito; viceversa, se fosse $l = 1, \frac{1}{20}, \frac{1}{300}, \frac{1}{4000}, \dots$ e $M = 1, 2, 3, 4, \dots$ (cioè la M sta crescendo molto più lentamente di quanto la l stia andando a zero) si avrebbe $l \cdot M = 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$ e quindi il prodotto andrebbe a zero, in quanto in questo caso la "velocità" con cui l va a zero non solo compensa ma supera la velocità con cui M va a infinito

Osservazione 0.2. Quanto appena detto mostra che una forma indeterminata $\frac{f}{g}$ "zero su zero" si può sempre riscrivere come prodotto $f \cdot \frac{1}{g}$ di una funzione che tende a zero per una funzione che tende a infinito, e quindi che anche quest'ultima è una forma indeterminata, che chiameremo "zero per infinito".

Il ragionamento appena visto mostra che quello che rende la forma "zero su zero" indeterminata è che il suo risultato dipende dal confronto tra le "velocità" con cui le due funzioni a numeratore e denominatore tendono a zero. I casi che possono verificarsi sono i tre seguenti:

(1) Il numeratore va a zero più velocemente del denominatore: in tal caso il rapporto tende a zero

(2) Il denominatore va a zero più velocemente del numeratore: in tal caso il rapporto tende a infinito

(3) Numeratore e denominatore vanno a zero alla stessa velocità: in tal caso il rapporto tende a un numero finito

Allo scopo di vedere tramite degli esempi concreti il verificarsi di queste tre possibilità, impariamo a risolvere una prima tipologia di forma indeterminata zero su zero: quella in cui il prodotto $\frac{f(x)}{g(x)}$ è una funzione razionale, ovvero le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambe dei polinomi, ad esempio $\lim_{x \to -1} \frac{x^2+2x+1}{x^2+3x+2}$.

In tal caso il problema ammette una soluzione completa per il seguente motivo: noi stiamo supponendo che $f(x)$ e $g(x)$ tendano entrambe a zero per $x \to x_0$, ma dal momento che i polinomi sono funzioni continue definite in tutto $\mathbb{R}$, quello che succede effettivamente è che $f(x_0) = 0$ e $g(x_0) = 0$. Ora, l'algebra ci insegna che un polinomio $P(x)$ si annulla in un certo valore x_0 solo se P si scompone come prodotto $P(x) = (x - x_0) \cdot \tilde{P}(x)$, dove $\tilde{P}(x)$ è un polinomio di grado più basso. Dal momento che questo accade sicuramente per entrambi i polinomi $f(x)$ e

$g(x)$, si ha allora che nel prodotto $\frac{f(x)}{g(x)}$ il fattore comune $x - x_0$ è presente sia a numeratore che a denominatore, e quindi si può semplificare:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x - x_0) \cdot \tilde{f}(x)}{(x - x_0) \cdot \tilde{g}(x)} = \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$$

A questo punto si può quindi equivalentemente calcolare il limite del rapporto $\frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$ (applicando eventualmente di nuovo lo stesso procedimento se questa dovesse ancora risultare una forma "zero su zero").

Ad esempio, per il limite $\lim_{x \to -1} \frac{x^2+2x+1}{x^2+3x+2}$, si ha

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{(x + 1)^2}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{x + 1}{x + 2}$$

e quindi a questo punto dopo la semplificazione è evidente che il limite per x che tende a -1 è zero, in quanto la funzione semplificata $\frac{x+1}{x+2}$ è continua e ben definita in -1 dove ha come valore esattamente zero.

Come ulteriori esempi, consideriamo i due limiti di funzioni razionali seguenti:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 4x^2 + 4x}, \quad \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$$

Per il primo si può semplificare un fattore $x - 2$ sia a numeratore che a denominatore nel modo seguente:

$$\frac{x^2 - 4}{x^3 - 4x^2 + 4x} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{x(x - 2)^2} = \frac{x + 2}{x(x - 2)}$$

e nella frazione semplificata si vede che il numeratore tende a 4 (cioè un valore diverso da zero) per $x \to 2$, mentre il denominatore continua a tendere a zero: per quanto visto più sopra, quindi, il limite sarà infinito e più precisamente sarà $+\infty$ se $x \to 2^+$ e $-\infty$ se $x \to 2^-$, in quanto il denominatore, come è facile verificare se lo riscriviamo come $x(x - 2)$, assume valori positivi per $x > 2$ (quindi in un intorno destro di 2) e valori negativi per $x < 2$ (ovvero in un intorno sinistro di 2).

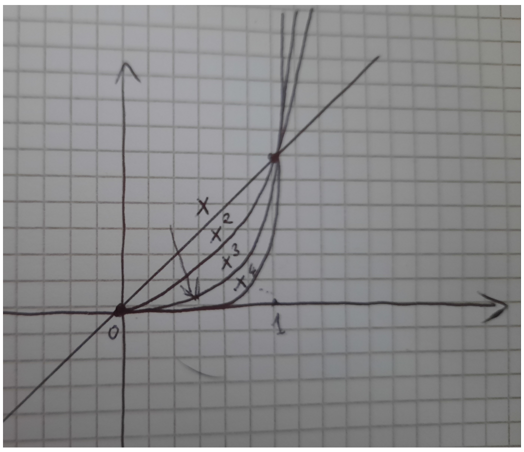
Per quello che riguarda invece il secondo limite, si ha

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x(x - 2)} = \frac{x + 2}{x}$$

Facendo tendere x a 2 nella frazione semplificata, che è continua e ben definita in 2, il risultato è $\frac{4}{2} = 2$: si tratta quindi di un caso in cui il denominatore e il numeratore tendono a zero "con la stessa velocità" e si compensano.

Osservazione 0.3. Quello che sta succedendo nel secondo limite calcolato della funzione razionale $\frac{x^2+4}{x^3-2x^2+4x} = \frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)^2}$ è che nel denominatore il fattore $x-2$ che annulla il polinomio compare al quadrato come $(x-2)^2$: la presenza del quadrato fa quindi andare tale fattore a zero "più velocemente" del numeratore nel quale il fattore $x-2$ compare invece con potenza uno.

Il fatto che potenze di una quantità che va a zero vadano più velocemente a zero quanto più alta è la potenza può essere visualizzato graficamente nel seguente disegno dei grafici delle potenze x^n



nel quale si vede appunto che, per $x \to 0$, la funzione x^2 va a zero più velocemente di x, la funzione x^3 va a zero più velocemente di x^2 e così via.

Torneremo più avanti su questo punto del confronto della velocità con cui due quantità vanno a zero o infinito e se siano capaci di compensarsi o una delle due prevalga sull'altra, quando parleremo del cosiddetto *confronto tra infinitesimi e infiniti.*

0.1 Limiti notevoli

Il metodo di risoluzione di forme indeterminate "zero su zero" mediante semplificazione appena visto nel precedente paragrafo funziona solo nel caso in cui entrambe le funzioni a numeratore e denominatore siano polinomi: in tutti gli altri casi, come vedremo, sarà necessario applicare altre tecniche che vanno dal principio di sostituzione al riscrivere diversamente la funzione, ad esempio moltiplicando e dividendo per una quantità opportuna e artifici analoghi, nella maggior parte dei casi mirati a ricondurre il limite da calcolare a limiti noti.

In particolare, si cerca spesso di ricondurre il limite da calcolare ad alcuni limiti famosi, chiamati solitamente nei testi di calcolo infinitesimale *limiti notevoli*: in questa sezione, vedremo e discuteremo in particolare i cinque seguenti

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{5}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \tag{6}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \tag{7}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \tag{8}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \tag{9}$$

(nell'ultimo limite, α può essere un qualunque numero reale, ad esempio se $\alpha = \frac{1}{2}$ allora il limite, ricordando che $(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x}$, si legge $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$)

Come abbiamo detto, questi limiti tradizionalmente si memorizzano così da poterli utilizzare negli esercizi quando serve; tuttavia, diremo qualche parola sul modo in cui si dimostrano, perché questo ci darà l'occasione di segnalare altri importanti fatti e proprietà riguardanti i limiti in generale.

Per quello che riguarda il limite notevole (5), la sua dimostrazione si basa sul fatto che, usando la trigonometria, si riesce a mostrare la doppia disuguaglianza

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

A questo punto, l'idea è che i i due "estremi" sinistro e destro tra cui è compreso $\frac{\sin x}{x}$ tendono entrambi a 1 per x che tende a zero, quindi la funzione centrale essendo tra loro compresa deve tendere anch'essa a zero.

Più rigorosamente, si tratta di un'applicazione del teorema (detto anche "del confronto" o "dei carabinieri") per cui

Siano $f(x)$*,* $g(x)$ *e* $h(x)$ *tre funzioni tali che* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *in un intorno di* x_0*, e sia* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l$*. Allora anche* $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$*.*

Per quello che riguarda il secondo limite notevole (6), esso può essere giustificato a partire dalla definizione della costante di Nepero e, che cogliamo qui l'occasione per ricordare.

Il numero e è definito come i limite della successione

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{10}$$

al tendere del numero naturale n all'infinito[3]

L'interesse per tale successione nasce da un problema di economia e finanza affrontato nel diciassettesimo secolo dal matematico Jacques Bernoulli: supponiamo di avere un conto in banca di valore uguale a 1 e un interesse annuale del cento per cento, il che significa che dopo un anno al mio capitale si aggiunge un interesse di 1 (pari al capitale stesso, quindi al cento per cento di esso), di modo che a fine anno mi ritroverò un capitale di 1+1=2 sul conto.

Se la banca mi permette di maturare gli interessi anche dopo frazioni di anno, ad esempio dopo 6 mesi (ovvero mezzo anno), mi troverò invece che $1 + 1 = 2$ un capitale di $1 + \frac{1}{2}$ (avendo maturato solo metà dell'interesse annuale).

Supponiamo ora che, in tal caso, per gli ultimi successivi sei mesi dell'anno, per calcolare l'interesse si usi come nuovo punto di partenza questo nuovo capitale di $1 + \frac{1}{2}$ maturato nei primi 6 mesi dell'anno[4]: succederà che, a fine anno, passati quindi altri sei mesi, oltre al capitale "iniziale" di $1 + \frac{1}{2}$ mi troverò in più metà di esso, ovvero $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$. In totale avrò quindi

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \tag{11}$$

Tale quantità è uguale a $(1,5)^2 = 2,25$, quindi più che se avessi ritirato il mio capitale con l'interesse a fine anno.

[3]Noi non abbiamo dato la definizione di limite di una successione per $n \to +\infty$, ma in attesa di tornare sull'argomento in uno dei capitoli successivi, segnaliamo qui semplicemente che tale definizione è del tutto analoga a quella di limite per $x \to +\infty$: diremo che il limite di una successione per $n \to +\infty$ è l se i valori assunti dalla successione si avvicinano sempre di più a l man mano che n diventa sempre più grande.

[4]Si parla in tal caso di *interesse composto*.

La tentazione potrebbe essere allora quella di fare lo stesso gioco usando frazioni sempre più piccole dell'anno: se ad esempio ritiro il mio capitale dopo 4 mesi (cioè 1/3 di anno) avrò maturato un capitale di $\left(1+\frac{1}{3}\right)$; per i successivi 4 mesi questo "nuovo" capitale mi frutta ulteriori $\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)$, che assieme ai precedenti mi danno

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)=\left(1+\frac{1}{3}\right)^2$$

e per i successivi ultimi 4 mesi dell'anno questo "nuovo" capitale di partenza mi frutta un ulteriore terzo di esso, cioè ulteriori $\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)^2$, ovvero in totale

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)^2=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \tag{12}$$

(si noti che quest'ultima quantità è uguale a circa $(1,333...)^3 = 2,37$, quindi maggiore del 2,25 ottenuto per interesse maturato dopo 6 mesi).

Dalle formule (11) e (12) si intuisce allora che per frazioni di $\frac{1}{n}$-esimo di anno il capitale totale alla fine sarà dato esattamente dalla successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. La domanda posta da Bernoulli era allora: cosa succede al crescere di n (ovvero considerando frazioni di anno sempre più piccole)? il capitale diventerà sempre più grande?

La risposta è no: si può dimostrare che la successione (10), al crescere di n, continua a crescere ma rimane limitata, e più precisamente, essa si avvicina sempre di più proprio al numero e, circa[5] uguale a $2,7172$.

Ora, non è difficile dimostrare che lo stesso risultato vale se al posto della successione dei numeri naturali n consideriamo la variabile reale x, ovvero che per $x \to +\infty$ vale

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \to e \tag{13}$$

Siamo allora pronti, usando questo limite come punto di partenza, a mostrare come si ottiene il limite notevole (6).

Come prima cosa, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1 \tag{14}$$

[5]Si tratta in effetti di un numero irrazionale, quindi con un numero infinito di cifre dopo la virgola e non periodico.

Infatti, applicando il metodo di sostituzione visto nel precedente paragrafo, se effettuiamo la sostituzione $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = y$, visto che dal limite (13) si ha che $y \to e$, il limite (14) diventa $\lim_{y\to e} \ln y = \ln e = 1$ (abbiamo usato la continuità della funzione logaritmo).

Ricordando la proprietà dei logaritmi $\log(a^b) = b \log a$, il limite (14) può essere riscritto

$$\lim_{x\to+\infty} x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 \tag{15}$$

o alternativamente (moltiplicare per x equivale a dividere per $1/x$)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1 \tag{16}$$

Applichiamo allora di nuovo il procedimento di sostituzione: posto $\frac{1}{x} = y$ e tenuto conto che per $x \to +\infty$ allora[6] $y \to 0$, il limite (16) diventa

$$\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1 \tag{17}$$

ovvero il risultato desiderato (6) (a parte il diverso nome della variabile, che è ininfluente).

Il limite notevole (7) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ si può ottenere facilmente dal limite (6) applicando di nuovo il metodo di sostituzione: più precisamente, si ponga $e^x - 1 = y$ ovvero $e^x = y+1$ o equivalentemente (applicando il logaritmo a entrambi i membri) $x = \ln(y+1)$. Allora, tenendo conto che per $x \to 0$ si ha $y \to 0$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(y+1)} \tag{18}$$

ovvero

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\ln(y+1)}{y}} \tag{19}$$

Ma il limite a destra può essere visto come il limite del rapporto tra due funzioni in cui quella a numeratore è costante uguale a 1 (quindi il suo limite è banalmente 1) e quella a denominatore tende a 1 anch'essa come sappiamo

[6] Vedremo nel prossimo paragrafo i limiti per $x \to \infty$ e in particolare il fatto che $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Per ora, si noti giusto che al crescere di x, ad esempio $x = 10, 100, 1000$ etc., i valori $\frac{1}{x}$ sono $\frac{1}{10} = 0,1$, $\frac{1}{100} = 0,01$, $\frac{1}{1000} = 0,001$ ovvero si avvicinano sempre di più a zero.

dal limite notevole (6): quindi, in base alla proprietà generale (3), il limite è $1/1 = 1$, e abbiamo concluso.

Per quello che riguarda il limite notevole (8), esso può essere dedotto dal limite notevole (5) nel seguente modo. Effettuando la sostituzione $x = 2y$ abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos(2y)}{4y^2} \tag{20}$$

Ora, ricordando le note formule di trigonometria $1 = \cos^2 y + \sin^2 y$ e $cos(2y) = \cos^2 y - \sin^2 y$, si ha

$$\frac{1-\cos(2y)}{4y^2} = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y - (\cos^2 y - \sin^2 y)}{4y^2} = \frac{2\sin^2 y}{4y^2} = \frac{\sin^2 y}{2y^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 \tag{21}$$

e quindi la (20) si può riscrivere

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 \tag{22}$$

Ma dal limite precedente sappiamo che $\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$, quindi $\lim_{y\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 = \lim_{y\to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$ (abbiamo in quest'ultimo passaggio usato la proprietà dei limiti (2)), ovvero la conclusione desiderata.

Sull'ultimo limite notevole (9) omettiamo i dettagli della dimostrazione.

Esempio 0.1. Come esempio conclusivo e riassuntivo di questo paragrafo, supponiamo di voler calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x} \tag{23}$$

(si tratta evidentemente di una forma indeterminata "zero su zero" in quanto per $x \to 0$ si ha $\sin x \to 0$ e quindi $\ln(1+\sin x) \to \ln 1 = 0$).

Il limite può essere risolto in questo modo: prima lo riscriviamo (dividendo e moltiplicando per $\sin x$) come prodotto nel modo seguente

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \tag{24}$$

e consideriamo separatamente i limiti $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}$ e $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

Il secondo è il limite notevole che sappiamo essere uguale a 1; il primo può essere risolto subito mediante la sostituzione $\sin x = y$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y}$$

riducendolo quindi a un altro limite notevole che sappiamo essere anch'esso uguale a 1. Applicando quindi la proprietà generale dei limiti (2), concludiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

Anticipiamo che nel capitolo sulle derivate impareremo un metodo molto efficace (noto come metodo di de l'Hopital) per la risoluzione delle forme indeterminate "zero su zero", che consente in molti casi di evitare il ricorso al metodo di sostituzione o a altri artifici quali quelli appena visti. Tuttavia, sottolineiamo che molti limiti (anche relativamente semplici) non possono essere risolti mediante il metodo di de l'Hopital e necessitano dell'utilizzo delle tecniche e dei trucchi di questo capitolo, con i quali raccomandiamo quindi di esercitarsi il più possibile.