

Abbiamo detto fin dall'inizio di questo capitolo che uno degli scopi della nozione di limite, oltre a dirci cosa succede ai valori di una funzione man mano che ci avviciniamo sempre di più a un dato punto, è dirci cosa succede alla funzione al crescere di x , ovvero per x che tende a infinito. Vediamo ora alcuni risultati che ci permetteranno di rispondere a questa domanda praticamente per tutte le funzioni elementari.

Partiamo dai due seguenti semplici fatti:

Per ogni potenza positiva di x (cioè x^α , con $\alpha > 0$) si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty \quad (1)$$

Ogni esponenziale con base maggiore di uno (cioè a^x , con $a > 1$) si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \quad (2)$$

Daremo per buone queste due affermazioni senza dimostrarle (per una loro illustrazione grafica, si vedano i grafici delle corrispondenti funzioni nel capitolo sulle funzioni elementari).

Le limitazioni fatte in queste due affermazioni (ovvero che $\alpha > 0$ e $a > 1$) sono essenziali per la loro validità.

Infatti, supponiamo di prendere una potenza negativa di x , che possiamo rappresentare come $x^{-\alpha}$ (con $\alpha > 0$). Come sappiamo dalle proprietà delle potenze, vale $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$, con il denominatore di questa espressione che, come sappiamo dalla (1), tende a $+\infty$: è naturale aspettarsi allora che $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ sia zero, perché abbiamo a denominatore una quantità che diventa sempre più grande, e quindi il risultato della frazione deve diventare sempre più piccolo. La conferma rigorosa di questo ragionamento ci viene dal seguente risultato generale

$$\text{Se } f(x) \rightarrow \pm\infty \text{ allora } \frac{1}{f(x)} \rightarrow 0 \quad (3)$$

(lo si confronti con il principio visto nelle parti precedenti, per cui se e $f(x) \rightarrow 0$ allora $\frac{1}{f(x)} \rightarrow \pm\infty$).

Un ragionamento analogo ci porta a concludere che se la base b di un esponenziale è minore di 1, allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = 0$.

Infatti, se, senza voler fare una dimostrazione generale, come esempio illustrativo prendiamo $b = \frac{1}{2}$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^x} = 0$$

dove abbiamo combinato il fatto che 2^x tende a infinito con la (3).

Per quello che riguarda i limiti per x che tende a meno infinito, nel caso delle funzioni esponenziali abbiamo che la situazione è invertita rispetto a quello che succede per il limite per x che tende a più infinito, e più precisamente

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x &= 0 \quad \text{se la base } a > 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x &= +\infty \quad \text{se la base } a < 1 \end{aligned}$$

Per convincerci della prima affermazione senza fare una dimostrazione formale generale, notiamo che ad esempio prendendo $a = 2$ e $x = -1, -2, -3$ etc. abbiamo che i valori assunti da a^x sono

$$2^{-1} = \frac{1}{2}, \quad 2^{-2} = \frac{1}{4}, \quad 2^{-3} = \frac{1}{8}, \dots$$

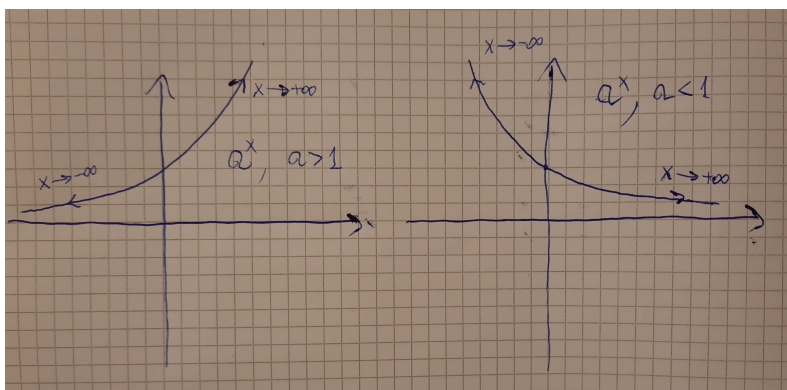
concordemente con l'affermazione che $a^x \rightarrow 0$.

Analogamente, per la seconda affermazione vediamo, ad esempio prendendo $a = \frac{1}{2}$ e $x = -1, -2, -3$ etc. che i valori assunti da a^x sono

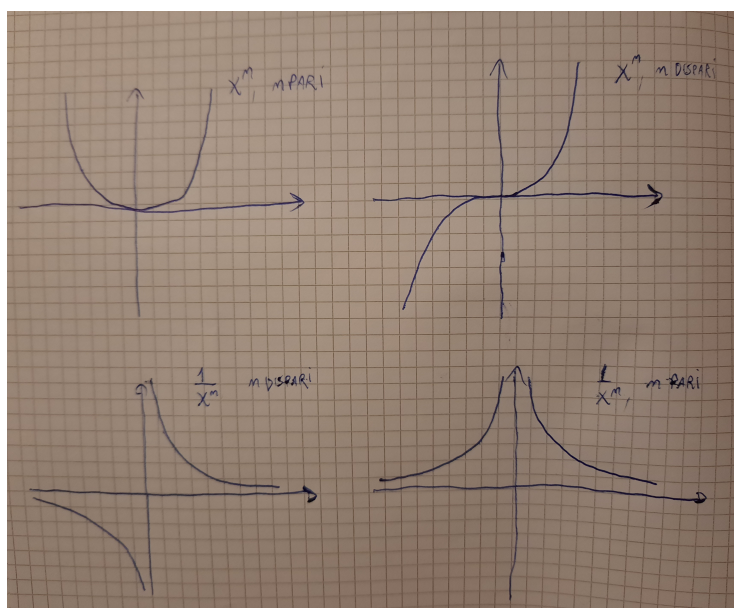
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8, \dots$$

concordemente con l'affermazione che $a^x \rightarrow +\infty$.

Possiamo riassumere il comportamento di a^x per $x \rightarrow \pm\infty$ nel seguente disegno (che conferma l'andamento già anticipato nei grafici del capitolo sulle funzioni elementari):



Per quello che riguarda il limite per $x \rightarrow -\infty$ delle potenze x^α , ricordiamo che già per valori di α razionali tale funzione può non essere definita per x negativo e quindi non avrebbe senso calcolare il limite per x che tende a meno infinito (ad esempio, $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ non è definita per $x < 0$); tuttavia, le potenze x^α con esponente α intero (cioè naturale positivo $1, 2, 3, \dots$ o intero negativo $-1, -2, -3, \dots$) sono definite su tutto \mathbb{R} , quindi ha senso calcolarne il limite per x che tende a meno infinito. Il risultato di tale limite è rappresentato nel seguente disegno



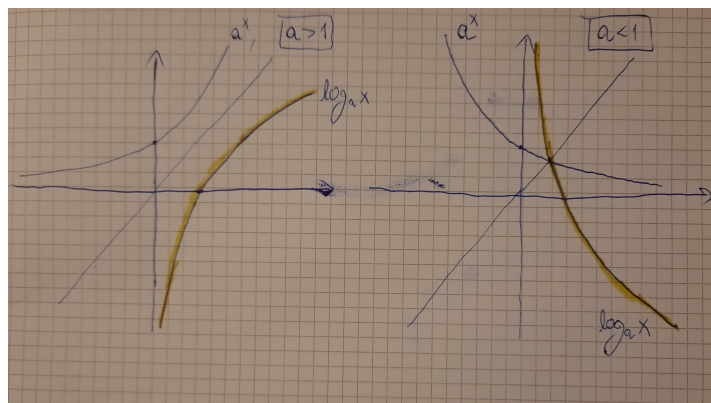
Come suggerito dal disegno, le potenze con esponente n positivo pari sono funzioni pari, ovvero hanno lo stesso valore su un numero reale x e sul suo opposto $-x$, quindi si ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$; mentre le potenze con esponente n positivo dispari sono funzioni dispari, ovvero sugli x negativi hanno valore negativo, quindi si ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$.

Il limite è in ogni caso infinito: quindi, le potenze $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ con esponente negativo, pari o dispari che sia, vanno sempre a zero in base alla (3).

Vediamo ora altri importanti limiti per $x \rightarrow \pm\infty$ riguardanti funzioni inverse, e in particolare¹ il logaritmo $\log_a x$, l'arcotangente $\text{artg}x$ e l'arcocotangente $\text{arcot}g x$.

¹Si noti che non ha senso parlare di limite per x che tende a più o meno infinito per le inverse $\arcsin x$ e $\arccos x$ perché esse come sappiamo sono definite sull'intervallo limitato $[-1, 1]$ e quindi non possiamo prendere x "sempre più grande" come richiesto dalla definizione di limite per x che tende a infinito.

Iniziamo dal logaritmo: come sappiamo, tale funzione è definita solo per $x > 0$, quindi possiamo calcolare solo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x$: tale limite può essere dedotto graficamente conoscendo il grafico dell'esponenziale a^x e ricordando che il grafico di una funzione inversa f^{-1} si ottiene ribaltando rispetto alla retta $y = x$ il grafico di f . Il seguente disegno, nel quale richiamiamo tali grafici per $a > 1$ e per $a < 1$



ci dice allora che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty \text{ se la base } a > 1$$

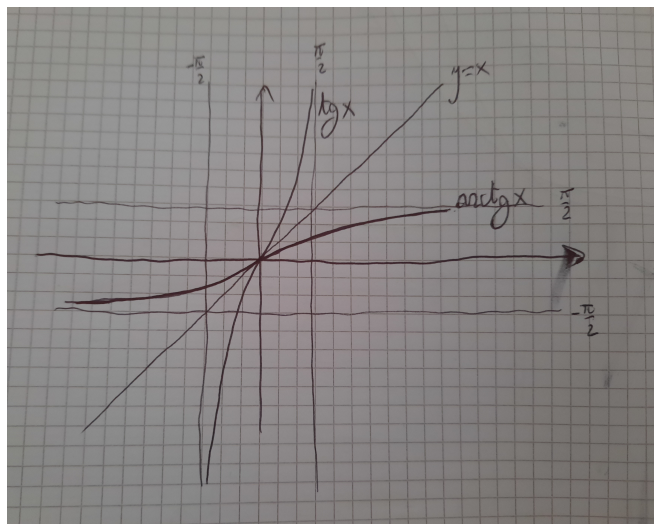
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty \text{ se la base } a < 1$$

Dallo stesso disegno deduciamo anche il limite del logaritmo per $x \rightarrow 0^+$, ovvero

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty \text{ se la base } a > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty \text{ se la base } a < 1$$

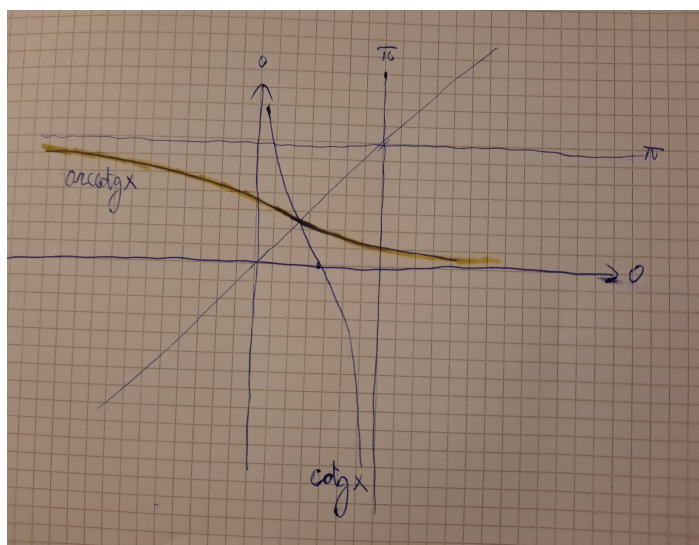
Applicando lo stesso metodo per quello che riguarda l'arcotangente, dal seguente disegno



vediamo subito che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{artg} x = +\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{artg} x = -\frac{\pi}{2} \quad (4)$$

e analogamente per l'arcocotangente, dal grafico



vediamo subito che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arcotg} x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arcotg} x = \pi \quad (5)$$

Ora, vogliamo confrontare tra di loro le velocità con cui le funzioni x^α , a^x e $\log_a x$ vanno a infinito, in modo del tutto analogo a quanto fatto quando

abbiamo discusso la forma indeterminata "zero su zero": in quella occasione, avevamo visto che il rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ tra due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ che tendono a zero può anch'esso tendere a zero se il numeratore f tende a zero più velocemente del denominatore g , a infinito se viceversa il denominatore tende a zero più velocemente del numeratore o infine a un numero finito se le due funzioni "tendono a zero con la stessa velocità". Nel primo caso, si usa anche dire che il numeratore è un *infinitesimo di ordine superiore* rispetto al denominatore (si chiama in generale "infinitesimo" una qualunque funzione che tende a zero); nel secondo caso invece è il denominatore a essere un infinitesimo di ordine superiore rispetto al numeratore; nel terzo caso diciamo che numeratore e denominatore sono *infinitesimi dello stesso ordine*.

Nel caso di due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ che tendono a infinito (che sono anche dette più brevemente "infiniti"), abbiamo in modo del tutto analogo che il limite del rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ ci dice quale delle due funzioni sia un *infinito di ordine superiore* rispetto all'altra, o se siano *infiniti dello stesso ordine*.

Si hanno i fatti seguenti (che non dimostriamo):

Data una funzione esponenziale a^x con base $a > 1$ e una potenza positiva x^α , vale

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0 \quad (6)$$

(equivalentemente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty) \quad (7)$$

ovvero una funzione esponenziale (con base maggiore di 1) è per $x \rightarrow +\infty$ un infinito di ordine superiore a qualunque potenza di x .

Per quello che riguarda il logaritmo $\log_a x$, che tende a infinito (più o meno) sia per $a > 1$ che per $a < 1$ abbiamo invece il fatto seguente:

Per ogni potenza x^α con $\alpha > 0$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0 \quad (8)$$

(equivalentemente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{\log_a x} = +\infty) \quad (9)$$

ovvero il logaritmo è per $x \rightarrow +\infty$ un infinito di ordine inferiore a qualunque potenza di x (e quindi a maggior ragione va a infinito più lentamente di qualunque esponenziale con base positiva). Tale fatto può essere facilmente spiegato a partire dal limite (6) mediante il principio di sostituzione, ma omettiamo i dettagli.

Osservazione 0.1. Dal momento che, come abbiamo visto sopra, anche il $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x$ è infinito (e più precisamente $-\infty$ per $a < 1$ e $+\infty$ per $a > 1$), ricordando che anche per ogni potenza negativa $x^{-\alpha}$ si ha $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-\alpha} = +\infty$, possiamo anche qui chiederci quale delle due funzioni vada a infinito più velocemente per $x \rightarrow 0^+$. Vale il seguente

Per ogni potenza negativa $x^{-\alpha}$ (con $\alpha > 0$), si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log_a x}{x^{-\alpha}} = 0 \quad (10)$$

(equivalentemente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-\alpha}}{\log_a x} = +\infty \quad (11)$$

ovvero anche per $x \rightarrow 0$ il logaritmo va a infinito più lentamente di qualunque potenza (negativa) di x .

Una giustificazione di tali limiti si ha di nuovo applicando il principio di sostituzione, ma omettiamo anche qui i dettagli.

Si noti che il limite (10) può essere riscritto anche

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log_a x = 0 \quad (12)$$

cioè come forma indeterminata "zero per infinito".

In questa forma, possiamo commentarlo come segue: la funzione $\log_a x$ va "così lentamente" a infinito anche per $x \rightarrow 0$ che basta una qualunque potenza positiva di x ad andare più velocemente a zero e compensarlo (si ricordi che le potenze positive, se α è sempre più piccolo, vanno sempre più lentamente a zero).

Osservazione 0.2. La "lentezza" del logaritmo nell'andare all'infinito (sia per $x \rightarrow 0^+$ che per $x \rightarrow +\infty$) rispetto alle potenze di x permane anche se si considerano potenze $(\log_a x)^m$, con $m > 1$ che sicuramente vanno a infinito più velocemente² di $\log_a x$. Più precisamente, valgono gli analoghi seguenti dei limiti (8) e (10)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log_a x)^m}{x^\alpha} = 0 \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\log_a x)^m}{x^{-\alpha}} = 0 \quad (14)$$

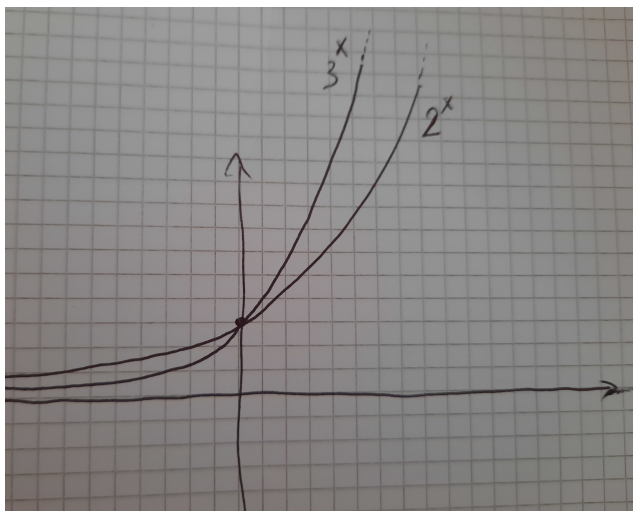
²In generale, se una funzione $f(x)$ va a infinito, la potenza $f(x)^m$ andrà ancora a infinito e più velocemente di $f(x)$, in quanto chiaramente $\frac{f(x)^m}{f(x)} = f(x)^{m-1}$ e con $m > 1$ si ha chiaramente $f(x)^{m-1} \rightarrow +\infty$.

Osservazione 0.3. Per quello che riguarda il confronto fra esponenziali diversi, è immediato vedere che tra due funzioni esponenziali a^x e b^x con $a, b > 1$ va all'infinito più velocemente l'esponenziale con la base maggiore.

Ad esempio, se ho $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 3^x$, ho

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0 \quad (15)$$

(nella prima uguaglianza abbiamo usato una proprietà delle potenze e nella seconda il fatto che un esponenziale con base minore di 1, come è $\frac{2}{3}$, tende a zero per $x \rightarrow +\infty$) che ci dice che il denominatore 3^x va a infinito più velocemente del denominatore 2^x .



Analogamente, per quello che riguarda il confronto tra potenze diverse, abbiamo che va a infinito più velocemente quella con l'esponente maggiore. Infatti, se ho x^α e x^β con $\alpha > \beta$, per le proprietà delle potenze ho che $\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta} \rightarrow +\infty$ in quanto $\alpha - \beta > 0$.

I confronti tra infiniti appena visti consentono di risolvere nella maggior parte dei casi un'altra forma indeterminata, la cosiddetta *forma indeterminata infinito meno infinito*.

Tale forma si presenta quando abbiamo una differenza $f(x) - g(x)$ tra due funzioni che tendono entrambe a più infinito (o entrambe a meno infinito). In tal caso, infatti, a seconda della velocità con cui le funzioni stanno tendendo a infinito potrebbe prevalere una delle due (e in tal caso il limite potrebbe essere $+\infty$ o $-\infty$) o potrebbe anche accadere che la loro differenza si stabilizzi su un valore finito. Vediamo subito alcuni esempi, nei quali mostriamo anche come trattare e risolvere questo tipo di forma indeterminata.

Ad esempio, supponiamo di voler calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x - x^6$$

che si presenta appunto come differenza $f(x) - g(x)$ tra due funzioni $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^6$ che tendono entrambe a $+\infty$. Allo scopo di risolvere il limite sfruttando i confronti visti sopra, lo riscriviamo "mettendo in evidenza" la funzione 2^x nel modo seguente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x \left(1 - \frac{x^6}{2^x} \right)$$

da cui vediamo che la funzione di cui dobbiamo calcolare il limite è prodotto di 2^x (che tende a $+\infty$) per $1 - \frac{x^6}{2^x}$, che tende a 1, visto che la (6) ci dice che $\frac{x^6}{2^x} \rightarrow 0$. Quindi concludiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x - x^6 = +\infty$$

che conferma rigorosamente il fatto, intuibile, che nella differenza prevale la funzione 2^x , che come sappiamo va a infinito più velocemente della potenza x^6 .

Si noti che nella conclusione abbiamo usato il fatto che *se una funzione $f(x)$ tende a (più o meno) infinito e una funzione $g(x)$ tende a un valore finito l diverso da zero³, allora il prodotto $f(x) \cdot g(x)$ tende ancora a infinito, con lo stesso segno di f se $l > 0$ e segno opposto se $l < 0$ (ad esempio, se $f(x) \rightarrow +\infty$ e $g(x) \rightarrow l < 0$, allora $f(x) \cdot g(x) \rightarrow -\infty$).*

Per un altro esempio simile, si consideri il limite della funzione polinomiale seguente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 5$$

Si tratta di una forma indeterminata "infinito meno infinito" in quanto i singoli monomi, essendo delle potenze con esponente positivo, tendono a $+\infty$, ma alcuni hanno davanti il segno meno che li porta a tendere a $-\infty$.

Analogamente a quando fatto sopra, riscriviamo la funzione "mettendo in evidenza" il monomio di grado più alto x^4 nel modo seguente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(3 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{5}{x^4} \right)$$

³Se $f(x)$ tende a infinito e $g(x)$ tende a zero, allora si ha una forma indeterminata "infinito per zero" e nulla può essere detto in generale sul limite del prodotto $f(x) \cdot g(x)$.

Dal momento che $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ e $\frac{1}{x^4}$ tendono a zero, l'espressione tra parentesi tonde tende a $+3 > 0$: dal momento che tale espressione è moltiplicata per la funzione x^4 che tende a più infinito, concludiamo come sopra che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 5 = +\infty$$

che conferma il fatto, anche qui intuibile, che in questa somma algebrica tra infiniti prevale la potenza più alta, che va a infinito più velocemente delle altre.

In generale, è possibile usare il confronto tra infiniti per risolvere velocemente forme indeterminate apparentemente più complicate. Ad esempio, supponiamo di voler calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2^x - x^4 - 3}{-x^{10} + \left(\frac{1}{2}\right)^x - x + 5} \quad (16)$$

Si può ragionare così: a numeratore abbiamo una forma indeterminata "infinito meno infinito" in cui il termine che va all'infinito più velocemente è 2^x , quindi gli altri termini per x molto grande possono essere trascurati; a denominatore ugualmente abbiamo una forma indeterminata dello stesso tipo in cui è $-x^{10}$ il termine che va a infinito (più precisamente meno infinito) più velocemente, quindi di nuovo possiamo trascurare gli altri termini. In questo modo, il nostro limite risulta equivalente alla forma indeterminata "infinito su infinito" $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{-x^{10}}$ del tipo (7) ma con in più il segno meno, da cui concludiamo finalmente che il limite è $-\infty$.

Come ulteriore esempio significativo di questo tipo di ragionamento, consideriamo il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x^2 - x + 5}{5x^3 + 4x - 1} \quad (17)$$

A numeratore abbiamo una forma indeterminata "infinito meno infinito" in cui il termine che va all'infinito più velocemente è $2x^3$, mentre a denominatore abbiamo una forma indeterminata dello stesso tipo in cui è $5x^3$ il termine che va a infinito più velocemente: trascurando tutti gli altri termini sia a numeratore che a denominatore abbiamo che il nostro limite risulta equivalente a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{5x^3}$ che si semplifica e rimane $\frac{2}{5}$, che è il risultato del limite cercato.

Osservazione 0.4. Si noti che il risultato coincide con il rapporto tra i coefficienti dei termini di grado massimo: si tratta in effetti di un fatto generale, sempre vero nel caso di forma indeterminata "infinito meno infinito" data dal rapporto tra due polinomi dello stesso grado.

Quello che sta succedendo in questo caso è che numeratore e denominatore vanno a infinito con la stessa velocità (ovvero sono infiniti dello stesso ordine), e il risultato del limite è un numero reale finito diverso da zero.

Osservazione 0.5. Chi non si sente a suo agio con il ragionamento "rapido" del confronto tra infiniti e dell'eliminazione dei termini trascurabili, può procedere senza saltare passaggi nel modo seguente: una volta individuato a numeratore e a denominatore il termine che va a infinito più velocemente, si dividono sia numeratore che denominatore per quel termine: ad esempio, nell'ultimo esercizio visto dovremmo dividere per x^3 e trovare quindi

$$\frac{2x^3 + x^2 - x + 5}{5x^3 + 4x - 1} = \frac{2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{5 + \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x^3}}$$

e si vede che per $x \rightarrow +\infty$ il numeratore tende a 2 e il denominatore tende a 5, quindi la frazione tende a $\frac{2}{5}$ come già visto sopra.

Segnaliamo che esistono alcuni casi in cui il metodo proposto per la risoluzione delle forme indeterminate "infinito meno infinito" non funziona.

Ad esempio, consideriamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \tag{18}$$

Il secondo addendo \sqrt{x} va a $+\infty$ in quanto $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ è una potenza positiva, il primo $\sqrt{x+1}$ è una funzione composta $f(g(x))$ con $g(x) = x+1$ e $f(x) = \sqrt{x}$: dal momento che $x+1 \rightarrow +\infty$, possiamo applicare il principio di sostituzione e concludere che anche tale termine va a $+\infty$: si tratta quindi di una forma indeterminata "infinito meno infinito".

Proviamo a applicare il metodo visto sopra: riscriviamo ovvero

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \sqrt{x+1} \left(1 - \sqrt{\frac{x}{x+1}} \right) \tag{19}$$

Per calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \sqrt{\frac{x}{x+1}}$, iniziamo con l'osservare che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$: infatti, si tratta del rapporto tra due polinomi entrambi di grado uno e quindi, come abbiamo visto nell'Osservazione 0.4, il limite coincide con il rapporto tra i coefficienti dei termini di grado massimo, ovvero⁴ $1/1 = 1$.

A questo punto, essendo la radice una funzione continua si ha che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x+1}} = \sqrt{1} = 1$ e quindi concludiamo $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \sqrt{\frac{x}{x+1}} = 0$.

⁴In alternativa, si dividano numeratore e denominatore per x ottenendo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$, da cui si vede subito che il limite è 1 in quanto $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$.

Ma allora, vediamo che il secondo membro della (19) è il prodotto tra una funzione $\sqrt{x+1}$ che va a più infinito per una funzione che va a zero, quindi riscrivere diversamente il nostro limite ci ha solo trasformato la forma indeterminata "infinito meno infinito" in una forma indeterminata "infinito per zero", e non siamo ancora in grado di dire nulla.

Il limite può essere risolto in questo caso con un trucco che spesso funziona quando si ha a che fare con radici, su cui torneremo in seguito con altri esempi: riscriviamo la funzione assegnata moltiplicando e dividendo per $\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

Lo scopo è far scomparire le radici a numeratore usando l'identità $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ (in questo caso $A = \sqrt{x+1}$ e $B = \sqrt{x}$), grazie alla quale si ottiene quindi

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(x+1) - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

e da cui finalmente si vede che il limite è zero, in quanto della forma $\frac{1}{f(x)}$ con $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$ che va a più infinito (essendo somma di due funzioni che vanno entrambe a infinito⁵)

⁵Se due funzioni vanno entrambe a più infinito, diventano entrambe sempre più grandi e la loro somma sarà a maggior ragione sempre più grande.