Esame scritto di Matematica 2 per Chimica - 13/07/21 - CORREZIONE

(1) [**8 punti**] Dopo aver mostrato che le seguenti funzioni sono infinitesimi per $x \to +\infty$, si determini quello di ordine superiore

$$\mathrm{tg}\left(\frac{1}{x}\right), \quad \frac{1}{\ln x}$$

La prima funzione è un infinitesimo (ovvero tende a zero) in quanto per $x \to +\infty$ si ha $\frac{1}{x} \to 0$ e la tangente tende a zero se il suo argomento tende a zero; la seconda in quanto $\ln x \to +\infty$ per $x \to +\infty$ e quindi l'inverso $\frac{1}{\ln x}$ tende a zero.

Ora, per determinare quale dei due sia l'infinitesimo di ordine superiore, basta calcolare il limite per $x \to +\infty$ del rapporto

$$\frac{\mathrm{tg}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{\ln x}} \tag{1}$$

che è chiaramente una forma indeterminata "zero su zero".

Allo scopo di risolvere tale forma indeterminata, applichiamo il metodo di de l'Hopital derivando numeratore e denominatore: per quello che riguarda il numeratore abbiamo, usando la formula di derivazione delle funzioni composte $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ (con $g(x) = \frac{1}{x}$ e $f(x) = \mathrm{tg}x$)

$$\left[\mathrm{tg}\left(\frac{1}{x}\right)\right]' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \tag{2}$$

dove abbiamo usato il fatto che $(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Per quello che riguarda il denominatore $\frac{1}{\ln x}$, possiamo usare la formula di derivazione del rapporto $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ (con $f(x) = 1$ e $g(x) = \ln x$):

$$\left[\frac{1}{\ln x}\right]' = \frac{0 \cdot \ln x - 1 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = -\frac{1}{x(\ln x)^2} \tag{3}$$

Il rapporto tra la (2) e la (3) è allora

$$\frac{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x(\ln x)^2}} = \frac{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{(\ln x)^2}}$$

(abbiamo semplificato i segni meno e un fattore $\frac{1}{x}$ a numeratore e denominatore) ovvero

$$\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{(\ln x)^2}} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot \frac{(\ln x)^2}{x}$$

Ora, poiché $\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)} \to 1$ per $x \to +\infty$, basta determinare il limite per $x \to +\infty$ di $\frac{(\ln x)^2}{x}$, che è zero in quanto il logaritmo (e anzi ogni sua potenza) va a infinito più lentamente di qualunque potenza di x.

Concludiamo quindi che il limite del rapporto (1) è zero, che ci dice che il numeratore va a zero più velocemente del denominatore, ovvero la funzione $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\frac{1}{\ln x}$.

Un modo alternativo di svolgere il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{\ln x}} \tag{4}$$

è il seguente: riscriviamolo come

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{tg}(x^{-1}) \cdot \ln x \tag{5}$$

e aggiungiamo un $x^{-1} \cdot x$ a denominatore, così da poterlo scrivere come

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{tg}(x^{-1})}{x^{-1}} \cdot \frac{\ln x}{x} \tag{6}$$

Ora, il primo fattore $\frac{\operatorname{tg}(x^{-1})}{x^{-1}}$ tende a 1, come si vede con la sostituzione $x^{-1} = y$ (che tende a zero per $x \to +\infty$) e notando che $\frac{\operatorname{tg}(y)}{y} = \frac{\sin(y)}{y}\frac{1}{\cos(y)}$ (si sfrutti il limite notevole $\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$).

Il secondo fattore $\frac{\ln x}{x}$ tende a zero per $x \to +\infty$ in quanto il logaritmo va a infinito più lentamente di qualsiasi potenza di x.

Concludiamo quindi che il limite (6) è $1 \cdot 0 = 0$, come già visto sopra con de l'Hopital.

(2) [**9 punti**] Data la seguente funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

si dica dove essa è crescente, decrescente, concava o convessa, e se essa è limitata superiormente o inferiormente.

Si scriva quindi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 2$.

Esistono punti a tangente verticale?

Allo scopo di determinare crescenza, decrescenza, convessità e concavità della funzione ne calcoliamo le derivate prima e seconda.

Usando la formula di derivazione del rapporto $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ (con $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x+1$), abbiamo

$$\left[\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right]' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(x+1) - \sqrt{x}\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{\frac{x+1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{\frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}}}{(x+1)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} \tag{7}$$

Ora, il denominatore della (7) è sempre positivo, quindi il segno della derivata è determinato dal numeratore $1-x$, che è positivo per $x < 1$ e negativo per $x > 1$: la funzione è quindi crescente per $x < 1$ e decrescente per $x > 1$ (in particolare, si deduce che nel punto stazionario $x = 1$, in cui la derivata si annulla, deve avere un punto di massimo locale).

Allo scopo di determinare concavità e convessità della funzione, calcoliamo la derivata seconda, ovvero deriviamo la derivata prima $\frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$.

Usiamo sempre la formula di derivazione del rapporto $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$, stavolta con $f(x) = 1-x$ e $g(x) = 2\sqrt{x}(x+1)^2$. Per comodità calcoliamoci separatamente la derivata di $\sqrt{x}(x+1)^2$ usando la formula di derivazione del prodotto $[F(x)G(x)]' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x)$, con $F(x) = \sqrt{x}$ e $G(x) = (x+1)^2$:

$$[\sqrt{x}(x+1)^2]' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)^2 + \sqrt{x}\cdot[2(x+1)]$$

Si ha allora (portiamo fuori il termine costante 2 a denominatore per comodità)

$$\left[\frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}\right]' = \frac{1}{2}\left[\frac{1-x}{\sqrt{x}(x+1)^2}\right]' =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)\cdot\sqrt{x}(x+1)^2-(1-x)\cdot\left\{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)^2+\sqrt{x}\cdot[2(x+1)]\right\}}{x(x+1)^4} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{-\sqrt{x}(x+1)^2-\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)^2(1-x)-\sqrt{x}\cdot[2(x+1)](1-x)}{x(x+1)^4}$$

Allo scopo di semplificare l'espressione, mettiamo in evidenza un fattore $(x+1)$ a numeratore

$$\frac{1}{2}\frac{(x+1)\left[-\sqrt{x}(x+1)-\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)(1-x)-\sqrt{x}\cdot[2(1-x)]\right]}{x(x+1)^4}$$

e semplifichiamo con un fattore $(x+1)$ a denominatore:

$$\frac{1}{2}\frac{-\sqrt{x}(x+1)-\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)(1-x)-\sqrt{x}\cdot[2(1-x)]}{x(x+1)^3} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\frac{-2x(x+1)-(x+1)(1-x)-2x\cdot[2(1-x)]}{2\sqrt{x}}}{x(x+1)^3} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{-2x(x+1)-(x+1)(1-x)-2x\cdot[2(1-x)]}{2x\sqrt{x}(x+1)^3}$$

Svolgendo i calcoli a numeratore si trova

$$\frac{1}{2}\frac{-2x^2-2x-1+x^2-4x+4x^2}{2x\sqrt{x}(x+1)^3} =$$

$$= \frac{3x^2-6x-1}{4x\sqrt{x}(x+1)^3} \tag{8}$$

che è finalmente l'espressione della derivata seconda cercata. Ora, il denominatore della (8) è sempre positivo (si ricordi che la funzione è definita solo per $x > 0$), quindi il suo segno è determinato dal numeratore $3x^2 - 6x - 1$.

Ora, le soluzioni dell'equazione di secondo grado $3x^2 - 6x - 1 = 0$ sono, come è facile determinare usando la nota formula risolutiva,

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36+12}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{6} = \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$$

e quindi $3x^2 - 6x - 1$ è positivo nei valori "esterni"

$$x > \frac{3+2\sqrt{3}}{3}, \quad x < \frac{3-2\sqrt{3}}{3}$$

e negativo nei valori "interni"

$$\frac{3-2\sqrt{3}}{3} < x < \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$$

Osservando tuttavia che $\frac{3-2\sqrt{3}}{3} < 0$ e ricordando comunque che la funzione è definita solo per $x > 0$ possiamo concludere che la derivata seconda è positiva (e quindi la funzione è convessa) per $x > \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ e negativa (e quindi la funzione è concava) per $0 < x < \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$.

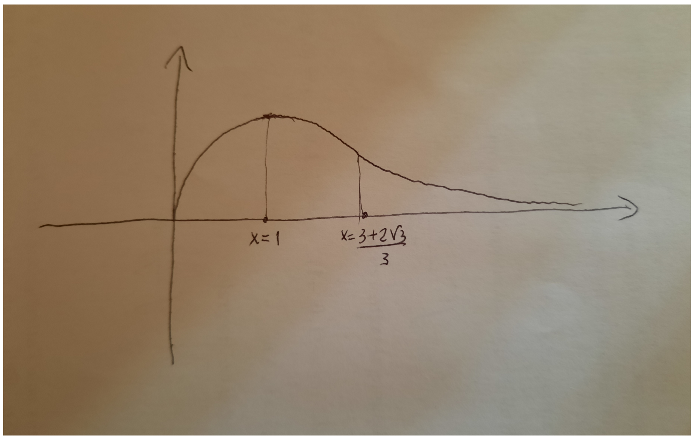
A questo punto, mettendo insieme le informazioni ottenute, possiamo abbozzare un grafico della funzione per capire se essa è limitata superiormente o inferiormente.

Osserviamo prima che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1} = 0$$

come si deduce immediatamente applicando de l'Hopital (si ottiene $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}$) o dividendo numeratore e denominatore per $\sqrt{x}$ (si ottiene $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}$).

Possiamo quindi abbozzare il seguente grafico:



dal quale di vede subito che la funzione è limitata sia superiormente che inferiormente.

Per quello che riguarda l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 2$, ricordiamo che in generale l'equazione della retta tangente al grafico di una funzione $f(x)$ in un punto di ascissa x_0 è data da $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
Essendo nel nostro caso specifico

$$f(2) = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

e (dalla (7))

$$f'(2) = \frac{-1}{2\sqrt{2} \cdot 9}$$

si ottiene quindi

$$y = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{18\sqrt{2}}(x - 2)$$

Infine, la tangente al grafico in un dato punto è verticale se la derivata prima in corrispondenza di tale punto è infinita: come si vede dall'espressione della (7), questo accade per $x \to 0^+$, e quindi possiamo dire che in tale punto (e solo in tale punto) la tangente è verticale (come illustrato anche nel grafico).

(3) [**9 punti**] Si calcoli il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+2}\,dx$$

Proviamo a determinare una primitiva della funzione integranda con la sostituzione $e^x = t$ (ovvero $x = \ln t$, da cui $dx = \frac{1}{t}dt$): si ha

$$\int \frac{1}{e^x+2}\,dx = \int \frac{1}{(t+2)t}\,dt$$

L'integrale si trasforma quindi nell'integrale in t di una funzione razionale del tipo $\int \frac{1}{at^2+bt+c}\,dt$, con il polinomio di secondo grado a denominatore (già scomposto) che ha le due radici reali $t = 0$ e $t = -2$. Come sappiamo, in tal caso bisogna riuscire a decomporre la funzione integranda come somma

$$\frac{1}{(t+2)t} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t}$$

per opportuni coefficienti reali A e B. Allo scopo di determinare tali coefficienti, sommiamo le due frazioni:

$$\frac{A}{t+2} + \frac{B}{t} = \frac{At + B(t+2)}{(t+2)t} = \frac{(A+B)t + 2B}{(t+2)t}$$

Dovendo tale espressione coincidere con $\frac{1}{(t+2)t}$, deve essere $A + B = 0$ (cioè $A = -B$) e $2B = 1$, da cui deduciamo subito $B = \frac{1}{2}$ e $A = -\frac{1}{2}$, e quindi concludiamo

$$\frac{1}{(t+2)t} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t+2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}$$

L'integrale si può quindi decomporre come

$$\int \frac{1}{(t+2)t}\,dt = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t+2}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt$$

e quindi otteniamo[1]

[1] Per il primo integrale, fatta la sostituzione $t + 2 = y$, ovvero $t = y - 2$ e $dt = dy$, si vede subito che $\int \frac{1}{t+2}\,dt = \int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y| = \ln|t+2|$.

$$\int \frac{1}{(t+2)t}\,dt = -\frac{1}{2}\ln|t+2| + \frac{1}{2}\ln|t|$$

Ricordando quindi che $t = e^x$, si ottiene finalmente

$$\int \frac{1}{e^x+2}\,dx = -\frac{1}{2}\ln(e^x+2) + \frac{1}{2}\ln e^x = -\frac{1}{2}\ln(e^x+2) + \frac{1}{2}x + c$$

(abbiamo usato $\ln e^x = x$ e abbiamo eliminato i valori assoluti in quanto e^x e $e^x + 2$ sono chiaramente positivi).

A questo punto, l'integrale improprio richiesto è dato da

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+2}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{1}{e^x+2}\,dx =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}\ln(e^b+2) + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\ln(e^0+2) - \frac{1}{2}\cdot 0\right] =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}\ln(e^b+2) + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\ln(3)\right]. \tag{9}$$

Dobbiamo quindi calcolare il limite

$$\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}\ln(e^b+2) + \frac{1}{2}b\right] = \frac{1}{2}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left[b - \ln(e^b+2)\right]$$

Si tratta di una forma indeterminata del tipo "infinito meno infinito". Allo scopo di risolverla, riscriviamo b come $\ln(e^b)$, da cui, usando la proprietà del logaritmo $\ln A - \ln B = \ln\frac{A}{B}$,

$$\lim_{b\to+\infty}\left[\ln(e^b) - \ln(e^b+2)\right] = \lim_{b\to+\infty}\ln\frac{e^b}{e^b+2}$$

Il rapporto $\frac{e^b}{e^b+2}$, come è facile verificare con de L'Hopital, tende a 1, da cui concludiamo che $\lim_{b\to+\infty}\ln\frac{e^b}{e^b+2} = 0$.

Sostituendo allora nella (9) si ottiene finalmente

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^x+2}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}\ln(e^b+2) + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\ln(3)\right] = \frac{1}{2}\ln(3)$$

(4) [**4 punti**] Dati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1, 1, 2), \quad v_2 = (1, 0, -1), \quad v_3 = (1, 1, 0). \;\; v_4 = (0, 2, 3)$$

si calcoli $(v_1 \wedge v_2) \cdot (v_3 \wedge v_4)$

Ricordiamo che il prodotto vettoriale di due vettori $v = (a, b, c)$ e $w = (a', b', c')$ è dato dalla formula

$$v \wedge w = (bc' - b'c, \; ca' - c'a, \; ab' - a'b)$$

Si trova quindi

$$v_1 \wedge v_2 = (-1, 3, -1)$$

e

$$v_3 \wedge v_4 = (3, -3, 2)$$

e quindi, ricordando che il prodotto scalare di due vettori $v = (a, b, c)$ e $w = (a', b', c')$ è dato dalla formula $v \cdot w = aa' + bb' + cc'$, si ottiene finalmente

$$(v_1 \wedge v_2) \cdot (v_3 \wedge v_4) = (-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2 = -14$$

(Bonus) Si mostri che il seguente integrale

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \; dx$$

non è elementare.

Applichiamo la sostituzione $\sqrt{x} = y$, ovvero $x = y^2$, da cui $dx = 2y \; dy$: l'integrale si trasforma in

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \; dx = \int \frac{\sin(y^2)}{y} \cdot 2y \; dy = 2 \int \sin(y^2) \; dy$$

e concludiamo che l'integrale non è elementare in quanto si riduce all'integrale $\int \sin(y^2) \; dy$ che sappiamo già essere non elementare (è uno dei cosiddetti integrali di Fresnel).

NB l'esercizio Bonus vale l'attribuzione della Lode in caso tutti gli esercizi precedenti siano stati svolti (o in caso contrario 1-2 punti aggiuntivi a discrezione del docente).