

Esame scritto di Matematica 2 per Chimica - 28/07/21 - CORREZIONE

- (1) [8 punti] Dopo aver detto di quale tipo di forma indeterminata si tratta, si calcoli il limite seguente

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(e^x)}{2^x}$$

Per $x \rightarrow -\infty$, sia e^x che 2^x tendono a 0 (essendo esponenziali con base maggiore di 1), quindi il numeratore $\sin(e^x)$ tende a $\sin(0) = 0$ e il denominatore tende a 0, e si tratta di una forma indeterminata "zero su zero".

Allo scopo di risolvere il limite, proviamo usare il metodo di de L'Hopital: poiché $[\sin(e^x)]' = \cos(e^x)e^x$ e $[2^x]' = \ln 2 \cdot 2^x$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(e^x)}{2^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos(e^x)e^x}{\ln 2 \cdot 2^x} \quad (1)$$

Ricordando le proprietà degli esponenziali per cui $\frac{e^x}{2^x} = \left(\frac{e}{2}\right)^x$, riscriviamo il limite (1) come

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos(e^x)}{\ln 2} \left(\frac{e}{2}\right)^x \quad (2)$$

Ora, per $x \rightarrow -\infty$ si ha che $\cos(e^x) \rightarrow \cos(0) = 1$, mentre $\left(\frac{e}{2}\right)^x \rightarrow 0$ in quanto si tratta di una funzione esponenziale con base $\frac{e}{2} > 1$ (essendo $e = 2,71\dots$ maggiore di 2): concludiamo allora che il limite (2) vale $\frac{0}{\ln 2} \cdot 0 = 0$.

Alternativamente, ispirati dal limite notevole $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$, riscriviamo il limite moltiplicando e dividendo per e^x :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(e^x)}{e^x} \cdot \frac{e^x}{2^x} \quad (3)$$

Il fattore $\frac{\sin(e^x)}{e^x}$ tende a 1, come è facile verificare con la sostituzione $e^x = y$, che lo trasforma immediatamente proprio nel limite notevole $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ (infatti, $y = e^x \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow -\infty$); il fattore $\frac{e^x}{2^x}$ può essere trattato come sopra riscrivendolo come $\left(\frac{e}{2}\right)^x$, che come

abbiamo già osservato tende a zero in quanto si tratta di una funzione esponenziale con base $\frac{e}{2} > 1$.

Quindi il limite (3) ha come risultato $1 \cdot 0 = 0$, confermando quanto già visto sopra.

N.B: se avessimo effettuato la sostituzione $e^x = y$ (ovvero $x = \ln y$) prima di moltiplicare e dividere per e^x , avremmo ottenuto

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{2^{\ln y}}$$

A questo punto, moltiplicando e dividendo per y ,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{y}{2^{\ln y}}$$

Poiché il fattore $\frac{\sin y}{y}$ come abbiamo appena ricordato tende a 1, per risolvere il limite basta calcolare $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{2^{\ln y}}$ (si tratta ancora di una forma indeterminata "zero su zero", in quanto per $y \rightarrow 0$ si ha $\ln y \rightarrow -\infty$ e $2^{\ln y} \rightarrow 0$). Allo scopo di risolvere questo limite¹, si può rievolvere la sostituzione $\ln y = x$ (ovvero $y = e^x$), da cui si ottiene

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{2^{\ln y}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{2^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e}{2}\right)^x = 0$$

dove la conclusione si ottiene notando ancora una volta che $\left(\frac{e}{2}\right)^x$ è una funzione esponenziale con base $\frac{e}{2}$ maggiore di 1.

(2) [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = x \ln(1 - x^2)$$

- Si verifichi che $x_0 = 0$ è un punto stazionario di f e se ne determini la natura
- si dica dove f è concava o convessa
- si scriva lo sviluppo di Taylor di f arrestato al terzo ordine e centrato in $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

¹Si noti che il metodo di de l'Hopital in questo caso non funziona, in quanto $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{[y]'}{[2^{\ln y}]'} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\ln 2 \cdot 2^{\ln y} \cdot \frac{1}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln 2 \cdot 2^{\ln y}}$

Per definizione x_0 è stazionario per f se $f'(x_0) = 0$. Allo scopo di verificare tale uguaglianza, calcoliamo la derivata di $f(x) = x \ln(1 - x^2)$ usando la formula di derivazione dei prodotti $[F(x)G(x)]' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x)$, con $F(x) = x$ e $G(x) = \ln(1 - x^2)$. Si ha quindi

$$[x \ln(1 - x^2)]' = 1 \cdot \ln(1 - x^2) + x \cdot [\ln(1 - x^2)]' \quad (4)$$

Ci serve la derivata $[\ln(1 - x^2)]'$ che può essere calcolata mediante la regola di derivazione delle funzioni composte $[F(G(x))]' = F'(G(x)) \cdot G'(x)$, con $F(x) = \ln x$ e $G(x) = 1 - x^2$. Poiché $[\ln x]' = \frac{1}{x}$ e $[1 - x^2]' = -2x$, si ha

$$[\ln(1 - x^2)]' = \frac{1}{1 - x^2} \cdot (-2x) \quad (5)$$

Sostituendo in (4), si ha

$$[x \ln(1 - x^2)]' = \ln(1 - x^2) + x \cdot \frac{-2x}{1 - x^2} = \ln(1 - x^2) - \frac{2x^2}{1 - x^2} \quad (6)$$

che ci dà finalmente l'espressione della derivata prima di $f(x) = x \ln(1 - x^2)$.

Sostituendo $x = 0$ in tale espressione, si ottiene subito $f'(0) = 0$ che conferma quindi che $x_0 = 0$ è un punto stazionario per la f .

Allo scopo di determinarne la natura, calcoliamo le derivate successive di f : la derivata seconda $f''(x)$ si ottiene derivando la (6), ovvero

$$[x \ln(1 - x^2)]'' = \left[\ln(1 - x^2) - \frac{2x^2}{1 - x^2} \right]' = [\ln(1 - x^2)]' - 2 \left[\frac{x^2}{1 - x^2} \right]' \quad (7)$$

La derivata $[\ln(1 - x^2)]'$ del primo addendo è già stata calcolata in (5) e come abbiamo visto è uguale a $\frac{-2x}{1 - x^2}$; per calcolare invece la derivata $\left[\frac{x^2}{1 - x^2} \right]'$, usiamo la regola di derivazione dei rapporti $\left[\frac{F(x)}{G(x)} \right]' = \frac{F'(x)G(x) - F(x)G'(x)}{G(x)^2}$, con $F(x) = x^2$ e $G(x) = 1 - x^2$. Si ha allora

$$\left[\frac{x^2}{1 - x^2} \right]' = \frac{2x \cdot (1 - x^2) - x^2 \cdot (-2x)}{(1 - x^2)^2} = \frac{2x - 2x^3 + 2x^3}{(1 - x^2)^2} = \frac{2x}{(1 - x^2)^2}$$

Sostituendo nella (7) si ottiene

$$[x \ln(1-x^2)]'' = \frac{-2x}{1-x^2} - 2 \cdot \frac{2x}{(1-x^2)^2} = \frac{-2x(1-x^2) - 4x}{(1-x^2)^2} = \frac{2x^3 - 6x}{(1-x^2)^2} \quad (8)$$

Si verifica subito che il punto stazionario $x_0 = 0$ annulla anche la derivata seconda, il che non ci consente ancora di concludere: calcoliamo allora la derivata terza, usando sempre la regola di derivazione dei rapporti $[\frac{F(x)}{G(x)}]' = \frac{F'(x)G(x) - F(x)G'(x)}{G(x)^2}$, stavolta con $F(x) = 2x^3 - 6x$ e $G(x) = (1-x^2)^2 = 1 + x^4 - 2x^2$. Si ha

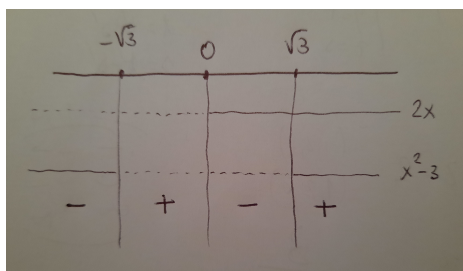
$$\begin{aligned} [x \ln(1-x^2)]''' &= \left[\frac{2x^3 - 6x}{(1-x^2)^2} \right]' = \frac{(6x^2 - 6) \cdot (1 + x^4 - 2x^2) - (2x^3 - 6x) \cdot (4x^3 - 4x)}{(1-x^2)^4} = \\ &= \frac{-2x^6 + 14x^4 - 6x^2 - 6}{(1-x^2)^4} \quad (9) \end{aligned}$$

Vediamo allora che nel punto stazionario $x_0 = 0$ si ha $f'''(0) = -6$: essendo la prima derivata non nulla una derivata di ordine dispari, deduciamo che il punto stazionario è un punto di flesso.

Allo scopo di determinare dove f è concava o convessa, determiniamo il segno della derivata seconda che abbiamo calcolato in (8), dove abbiamo visto che essa è uguale a $\frac{2x^3 - 6x}{(1-x^2)^2}$.

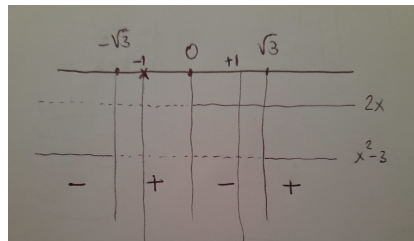
Dal momento che il denominatore è un quadrato e quindi sempre positivo, il segno della derivata è dato dal numeratore $2x^3 - 6x = 2x(x^2 - 3)$.

Il fattore $2x$ è positivo per $x > 0$ e negativo per $x < 0$; il fattore $x^2 - 3$ è positivo per $x > \sqrt{3}$ o $x < -\sqrt{3}$ e negativo per $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$: combinando queste due informazioni come nel seguente schema dei segni



si ottiene che la derivata seconda è negativa negli intervalli $(-\infty, -\sqrt{3})$ e $(0, \sqrt{3})$, ed è invece positiva negli intervalli $(-\sqrt{3}, 0)$ e $(\sqrt{3}, +\infty)$.

Tenendo tuttavia conto che la funzione $f(x) = x \ln(1 - x^2)$ è definita solo per $-1 < x < 1$ (si tratta dell'intervallo in cui l'argomento $1 - x^2$ del logaritmo è positivo), e essendo $1 < \sqrt{3}$, deduciamo che la funzione è concava per $x \in (0, 1)$ (dove la derivata seconda è negativa) e convessa per $x \in (-1, 0)$ (dove la derivata seconda è positiva).



Infine, per lo sviluppo di Taylor arrestato al terz'ordine in $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, basta ricordare che esso ha la forma

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + o((x - x_0)^3) \quad (10)$$

e sostituire $\frac{1}{\sqrt{2}}$ nelle espressioni (6), (8) e (9) delle derivate prima, seconda e terza. Si ottiene subito

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \\ f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= -\frac{20}{\sqrt{2}} \\ f'''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{-\frac{2}{8} + \frac{14}{4} - \frac{6}{2} - 6}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^4} = -92 \end{aligned}$$

Sostituendo in (10) otteniamo quindi

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \left[\ln\left(\frac{1}{2}\right) - 2\right] \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{10}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{92}{6} \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + o((x - x_0)^3)$$

(3) [8 punti] Si calcoli il seguente integrale

$$\int_{-1}^{\pi^3-1} \sin(\sqrt[3]{x+1}) dx$$

La forma della funzione integranda suggerisce di provare con la sostituzione $\sqrt[3]{x+1} = y$ (ovvero $x = y^3 - 1$, da cui $dx = 3y^2 dy$). Tenendo conto anche degli estremi (per $x = \pi^3 - 1$ si ha $y = \pi$ e per $x = -1$ si ha $y = 0$) l'integrale diventa allora

$$\int_{-1}^{\pi^3-1} \sin(\sqrt[3]{x+1}) dx = \int_0^\pi \sin(y) \cdot (3y^2) dy = 3 \int_0^\pi y^2 \sin y dy \quad (11)$$

L'integrale $\int_0^\pi y^2 \sin y dy$ può essere facilmente risolto con la formula di integrazione per parti $\int f'g = fg - \int fg'$, con $f' = \sin y$ (da cui $f = -\cos y$) e $g = y^2$ (da cui $g' = 2y$): si ottiene quindi

$$\int y^2 \sin y dy = -y^2 \cos y + 2 \int y \cos y dy \quad (12)$$

A sua volta, l'integrale $\int y \cos y dy$ può essere risolto anch'esso tramite la $\int f'g = fg - \int fg'$, con $f' = \cos y$ (da cui $f = \sin y$) e $g = y$ (da cui $g' = 1$), ottenendo

$$\int y \cos y dy = y \sin y - \int \sin y dy = y \sin y + \cos y$$

Sostituendo nella (12) si ottiene quindi

$$\int y^2 \sin y dy = -y^2 \cos y + 2y \sin y + 2 \cos y$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} \int_0^\pi y^2 \sin y dy &= (-\pi^2 \cos \pi + 2\pi \sin \pi + 2 \cos \pi) - (-0^2 \cos 0 + 2 \cdot 0 \sin 0 + 2 \cos 0) = \\ &= \pi^2 - 2 - 2 = \pi^2 - 4 \end{aligned}$$

Quindi la (11) ci dà

$$\int_{-1}^{\pi^3-1} \sin(\sqrt[3]{x+1}) dx = 3 \int_0^{\pi} y^2 \sin y dy = 3\pi^2 - 12$$

- (4) [4 punti] Dopo aver calcolato mediante sviluppo di Laplace il determinante della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

si dica, giustificando la risposta, qual è il suo rango.

Allo scopo di rendere il calcolo mediante sviluppo di Laplace più semplice calcolando meno cofattori possibile, per lo sviluppo scegliamo la terza colonna: si ha

$$\det(A) = 2 \cdot \left[-\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right] + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Per entrambi i determinanti di ordine tre che appaiono in questa espressione, scegliamo lo sviluppo rispetto alla seconda riga:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \left[-\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right] + 1 \cdot \left[-\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = 1 \cdot [-(-2)] + 1 \cdot [-0] = +2$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \left[-\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right] + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot [-(-2)] + 1 \cdot [-2] = -4$$

Sostituendo nella (13) otteniamo subito

$$\det(A) = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-4) = -16$$

Essendo il determinante diverso da zero, possiamo dedurre che la matrice ha rango massimo, ovvero 4 (in altre parole, le sue righe sono tutte linearmente indipendenti).

(Bonus) Si determinino i punti di Lagrange della funzione $\arcsin x$ nell'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

Per definizione, i punti di Lagrange di una funzione $f(x)$ in un dato intervallo $[a, b]$ sono quei punti $c \in (a, b)$ tali che $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Per quello che riguarda la derivata di $f(x) = \arcsin x$, come sappiamo si ha $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Per quello che riguarda il rapporto $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, essendo $a = -\frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$, si ha

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{\pi}{3}$$

Dobbiamo quindi determinare i $c \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ tali che

$$\frac{1}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{\pi}{3}$$

Elevando al quadrato e invertendo si ha

$$1 - c^2 = \frac{9}{\pi^2}$$

ovvero

$$c^2 = 1 - \frac{9}{\pi^2} = \frac{\pi^2 - 9}{\pi^2}$$

Estraendo la radice quadrata si trovano quindi finalmente i due punti di Lagrange

$$c = \pm \frac{\sqrt{\pi^2 - 9}}{\pi}$$

NB l'esercizio Bonus vale l'attribuzione della Lode in caso tutti gli esercizi precedenti siano stati svolti (o in caso contrario 1-2 punti aggiuntivi a discrezione del docente).