

Esame scritto di Matematica 2 per Chimica - 23/09/21 - CORREZIONE

- (1) [8 punti] Dopo aver mostrato che le seguenti funzioni sono infiniti per $x \rightarrow 1$, si mostri che sono infiniti dello stesso ordine

$$\frac{1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}, \quad \frac{x - 1}{1 + \cos(\pi x)}$$

La funzione $\frac{1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$ è un infinito per $x \rightarrow 1$ (ovvero tende a infinito per $x \rightarrow 1$) in quanto della forma $\frac{1}{f(x)}$, con denominatore $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ che tende a zero per $x \rightarrow 1$, com'è immediato verificare.

Per quello che riguarda invece la funzione $\frac{x-1}{1+\cos(\pi x)}$, non possiamo dare una risposta immediata in quanto per x che tende a 1 si tratta di una forma indeterminata "zero su zero" (il numeratore $x - 1$ tende evidentemente a zero, e per il denominatore vediamo subito lo stesso una volta che ci ricordiamo che $\cos(\pi) = -1$).

Allo scopo di sciogliere questa forma indeterminata, possiamo ad esempio procedere con il metodo di de L'Hopital. Derivando numeratore e denominatore otteniamo che

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{1 + \cos(\pi x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{-\pi \sin(\pi x)}$$

e vediamo che il limite è infinito¹ in quanto il denominatore $-\pi \sin(\pi x)$ di $\frac{1}{-\pi \sin(\pi x)}$ tende a zero per $x \rightarrow 1$ (essendo $\sin(\pi) = 0$).

Concludiamo quindi che anche la funzione $\frac{x-1}{1+\cos(\pi x)}$ è un infinito per $x \rightarrow 1$.

Ora, per confrontare due infiniti $f(x)$ e $g(x)$, basta calcolare il limite del loro rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$. In questo caso si ha

$$\frac{\frac{1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}}{\frac{x-1}{1+\cos(\pi x)}} = \frac{1 + \cos(\pi x)}{(x - 1)(x^3 + 2x^2 - x - 2)} = \frac{1 + \cos(\pi x)}{x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2}$$

Allo scopo di calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+\cos(\pi x)}{x^4+x^3-3x^2-x+2}$ e confrontare così i due infiniti, usiamo nuovamente il metodo di de L'Hopital (si tratta

¹Più precisamente, sarebbe $+\infty$ per $x \rightarrow 1^+$ e $-\infty$ per $x \rightarrow 1^-$.

di una forma indeterminata zero su zero). Derivando numeratore e denominatore si ha

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos(\pi x)}{x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi \sin(\pi x)}{4x^3 + 3x^2 - 6x - 1}$$

Si verifica subito che il limite ottenuto è ancora una forma indeterminata zero su zero: possiamo quindi riapplicare de L'Hopital derivando numeratore e denominatore e ottenendo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi \sin(\pi x)}{4x^3 + 3x^2 - 6x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi^2 \cos(\pi x)}{12x^2 + 6x - 6} = \frac{\pi^2}{12}$$

Avendo ottenuto un numero reale diverso da zero, le due funzioni sono infiniti dello stesso ordine.

(2) [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = e^{\cos x}$$

- Si determini dove essa è crescente o decrescente e si dica quali dei suoi punti stazionari sono massimi, minimi o flessi
- Si scriva il suo sviluppo di Taylor centrato in $x = 0$ e arrestato al second'ordine
- Si scriva l'equazione della sua retta tangente in $x = \frac{\pi}{2}$

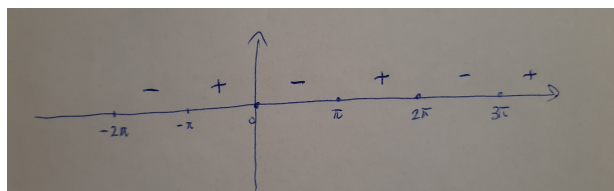
Allo scopo di determinare crescita e decrescenza della funzione e studiarne i punti stazionari, calcoliamone la derivata prima: si tratta di una funzione composta $f(g(x))$, con $f(x) = e^x$ e $g(x) = \cos x$. Usando la formula di derivazione delle funzioni composte $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ si ottiene subito (ricordando che $f'(x) = e^x$ e $g'(x) = -\sin x$)

$$[e^{\cos x}]' = -\sin x \cdot e^{\cos x}$$

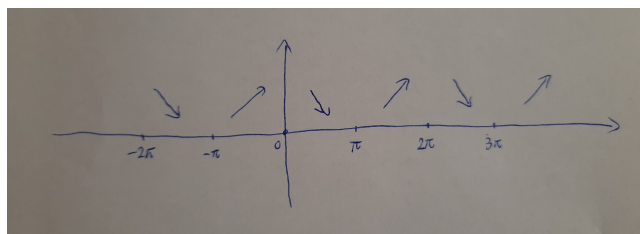
Come sappiamo, una funzione derivabile $F(x)$ è crescente dove $F'(x) \geq 0$. Nel nostro caso dobbiamo quindi studiare il segno di $F'(x) = -\sin x \cdot e^{\cos x}$.

Notiamo che il fattore $e^{\cos x}$ è sempre positivo (l'esponenziale lo è sempre), quindi la derivata è positiva dove $-\sin x \geq 0$, ovvero dove $\sin x \leq 0$, e negativa dove $\sin x \geq 0$

Come è facile verificare aiutandosi con la circonferenza goniometrica (e ricordando la periodicità della funzione seno), il segno della derivata è quindi quello rappresentato negli intervalli seguenti



e quindi possiamo rappresentare crescita e decrescenza della funzione come segue



Volendo descrivere crescita e decrescenza senza l'aiuto nel disegno ma specificando gli intervalli in cui la funzione è crescente o meno, possiamo dire che la funzione è decrescente su tutti gli intervalli del tipo $[k\pi, (k + 1)\pi]$ in cui il primo estremo $k\pi$ ha k pari (es. $[0, \pi]$, $[2\pi, 3\pi]$ etc., come si vede dal disegno); ed è invece crescente su tutti gli intervalli del tipo $[k\pi, (k + 1)\pi]$ in cui il primo estremo $k\pi$ ha k dispari (es. $[\pi, 2\pi]$, $[3\pi, 4\pi]$ etc., come si vede dal disegno).

Poiché ogni numero pari può essere rappresentato come $2k$ e ogni numero dispari come $2k + 1$ (o $2k - 1$), più elegantemente, possiamo scrivere che la funzione è decrescente su ogni intervallo del tipo $[2k\pi, (2k + 1)\pi]$ e crescente su ogni intervallo del tipo $[(2k - 1)\pi, 2k\pi]$.

Per quello che riguarda i punti stazionari, come sappiamo essi sono per definizione i punti che annullano la derivata prima, ovvero per cui $-\sin x \cdot e^{\cos x} = 0$. Poiché l'esponenziale non si annulla mai, tali punti sono quindi dati dai valori di x per cui si annulla il fattore $-\sin x$, ovvero tutti i punti del tipo $k\pi$, con k intero (quindi $0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi$ etc.).

Dal disegno in cui abbiamo rappresentato crescita e decrescenza della funzione è allora immediato vedere che tali punti sono tutti massimi o

minimi locali, e più precisamente sono massimi locali (cioè punti in cui la funzione prima cresce e poi decresce) tutti i punti del tipo $k\pi$ con k pari, e minimi locali (cioè punti in cui la funzione prima decresce e poi cresce) tutti i punti del tipo $k\pi$ con k dispari. Nessuno dei punti stazionari è un flesso.

Veniamo ora allo sviluppo di Taylor: in generale, lo sviluppo di Taylor di una funzione $f(x)$, centrato in un punto x_0 e arrestato al second'ordine è dato da

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) \quad (1)$$

Per $x_0 = 0$, essendo $f'(x) = -\sin x \cdot e^{\cos x}$, abbiamo $f'(0) = -\sin(0) \cdot e^{\cos(0)} = 0$; per calcolare $f''(x_0)$ dobbiamo calcolare la derivata seconda della funzione, ovvero riderivare la derivata prima $-\sin x \cdot e^{\cos x}$. Usando la regola di derivazione del prodotto $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (con $f(x) = -\sin x$ e $g(x) = e^{\cos x}$) si ha

$$\begin{aligned} [e^{\cos x}]'' &= [-\sin x \cdot e^{\cos x}]' = \\ &= -\cos x \cdot e^{\cos x} - \sin x [-\sin x \cdot e^{\cos x}] = -\cos x \cdot e^{\cos x} + \sin^2 x \cdot e^{\cos x} \end{aligned}$$

Valutando in $x = 0$ si trova

$$f''(0) = -\cos(0) \cdot e^{\cos(0)} + \sin^2(0) \cdot e^{\cos(0)} = -e$$

Quindi, in base alla (1) possiamo scrivere che lo sviluppo richiesto è

$$e^{\cos x} = e - \frac{e}{2}x^2 + o(x^2)$$

La retta tangente al grafico di una funzione $f(x)$ in un suo punto x_0 è data dall'equazione $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$: nel nostro caso, essendo $x_0 = \frac{\pi}{2}$, abbiamo $f'(x_0) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -1$ e la retta ha equazione

$$y = 1 + (-1)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -x + 1 + \frac{\pi}{2}$$

(3) [8 punti] Si calcoli il seguente integrale indefinito

$$\int (x+1)^2 \ln x \, dx$$

L'integrale può essere risolto mediante la formula di integrazione per parti

$$\int f'(x)g(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) \, dx$$

scegliendo $f'(x) = (x+1)^2$ e $g(x) = \ln x$.

Ora, se $f'(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ si trova facilmente $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x$, e quindi la formula di integrazione per parti dà

$$\int (x+1)^2 \ln x \, dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x \right) \ln x - \int \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x \right) \frac{1}{x} \, dx \quad (2)$$

Allo scopo di risolvere l'integrale $\int \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x \right) \frac{1}{x} \, dx$, riscriviamolo svolgendo i calcoli come

$$\int \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x \right) \frac{1}{x} \, dx = \int \left(\frac{1}{3}x^2 + x + 1 \right) \, dx$$

da cui otteniamo subito

$$\int \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x \right) \frac{1}{x} \, dx = \int \left(\frac{1}{3}x^2 + x + 1 \right) \, dx = \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + c$$

Sostituendo allora nella (2) otteniamo finalmente

$$\int (x+1)^2 \ln x \, dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x \right) \ln x - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + c$$

(4) [4 punti] Si calcoli mediante sviluppo di Laplace rispetto a due righe diverse il determinante della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Scegliamo ad esempio la prima riga e la seconda riga: rispetto alla prima si ha

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot \left[+ \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right] + 1 \cdot \left[- \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right] + 2 \cdot \left[+ \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right] = \\ &= 1 \cdot [-4] + 1 \cdot [+5] + 2 \cdot [-2] = -3 \end{aligned}$$

Rispetto alla seconda riga si ha

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1) \cdot \left[- \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right] + 0 \cdot \left[+ \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right] + 2 \cdot \left[- \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right] = \\ &= (-1) \cdot [+1] + 2 \cdot [-1] = -3 \end{aligned}$$

(Osserviamo che giustamente il determinante non dipende dalla riga utilizzata per calcolarlo).

(Bonus) Si dica se la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{per } x < 0 \\ \sin x & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

è continua o derivabile nell'origine.

Per la continuità di una funzione $f(x)$ in un punto x_0 si deve avere che i limiti destro e sinistro $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ devono esistere finiti e coincidere con il valore $f(x_0)$ della funzione nel punto x_0 .

Nel nostro caso, il limite destro va calcolato prendendo valori di x maggiori di 0, sui quali la funzione è definita come $\sin x$, quindi il limite destro è $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 0$; per il limite sinistro dobbiamo invece tendere a zero da valori di x negativi, sui quali la funzione è definita come $e^{\frac{1}{x}}$.

In tal caso, si ha $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}}$: posto $y = \frac{1}{x}$ e usando $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, si trova $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$.

Entrambi i limiti destro e sinistro sono quindi uguali a zero, che è anche il valore che assume la funzione nell'origine (nella sua definizione, abbiamo posto $f(x) = \sin x$ per $x \geq 0$, quindi per $x = 0$ si ha $f(0) = \sin(0) = 0$).

Concludiamo quindi che la funzione è continua nell'origine.

Per quello che riguarda la sua derivabilità, la derivata a destra di zero è data dalla derivata di $\sin x$, ovvero $\cos x$. Il limite per $x \rightarrow 0^+$ di tale derivata è quindi $\cos(0) = 1$.

La derivata a sinistra di zero è data dalla derivata di $e^{\frac{1}{x}}$, cioè, usando la formula di derivazione delle funzioni composte $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ con $f(x) = e^x$ e $g(x) = \frac{1}{x}$ si ottiene subito (ricordando che $f'(x) = e^x$ e $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$)

$$\left[e^{\frac{1}{x}} \right]' = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

Il limite per $x \rightarrow 0^-$ di tale derivata è quindi dato da

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

Allo scopo di calcolare tale limite, effettuiamo la sostituzione $\frac{1}{x} = t$: dal momento che per $x \rightarrow 0^-$ si ha $t \rightarrow -\infty$, il limite diventa

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} -t^2 e^t$$

Si tratta di una forma indeterminata "infinito per zero". Allo scopo di riscrivere il limite come una frazione, effettuiamo la nuova sostituzione $t = -y$ che trasforma e^t in $e^{-y} = \frac{1}{e^y}$, per cui otteniamo

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} -y^2 e^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} -\frac{y^2}{e^y}$$

Vediamo allora che il limite è zero in quanto il denominatore e^y (un esponenziale) va a più infinito più velocemente del numeratore y^2 (una potenza).

Riassumendo, la derivata della funzione tende a 1 da destra e a 0 da sinistra, quindi nell'origine vi è un punto angoloso e la funzione $f(x)$ data non è derivabile nell'origine.

NB l'esercizio Bonus vale l'attribuzione della Lode in caso tutti gli esercizi precedenti siano stati svolti (o in caso contrario 1-2 punti aggiuntivi a discrezione del docente).