Esercizi Matematica 2 per Chimica (Esercitazione 13/05/21)

(1) Si dica dove le seguenti funzioni sono crescenti, decrescenti, convesse o concave, determinandone anche massimi e minimi locali (e precisando se sono anche globali) e punti di flesso.

$$f(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$$
$$f(x) = x(\ln x)^2 - 2x(\ln x) - 2x$$

(2) Dopo aver verificato che per ognuna delle funzioni f seguenti il punto x_0 indicato è un punto stazionario, se ne determini la natura.

$$f(x) = \sin(x^2) - \cos x, \quad x_0 = 0$$

$$f(x) = e^x - 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x - 5, \quad x_0 = 0$$

(3) Si scriva la serie di Taylor delle funzioni seguenti centrata nel punto x_0 specificato e arrestata all'ordine n dato

$$f(x) = \text{arccotg}x, \quad n = 3, \ x_0 = 1$$

$$f(x) = \ln x, \quad n = 5, \ x_0 = e^{-1}$$

(4) Si calcolino i seguenti limiti tramite il metodo di De L'Hopital, dove possibile (o dove conveniente)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \text{artg}x}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x^2+1}}}{e^x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1 + \text{arccotg}x)}{e^{-x}}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 2\cos x - 2}{x^4}$$

(N.B. l'ultimo limite potrebbe essere risolto anche sfruttando la formula di Taylor...)

(5) Date le seguenti funzioni, definite nei domini D indicati

$$f(x) = x^x, \quad D = \{x > 0\}$$
$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad D = \{x \neq 0\}$$

si dica se ammettono massimi o minimi globali e se sono limitate superiormente e inferiormente.

(6) Le seguenti funzioni

$$Ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad Sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

si chiamano rispettivamente *coseno iperbolico* e *seno iperbolico*, e sono spesso utilizzate nelle scienze applicate (ad esempio, si può dimostrare che il coseno iperbolico ci dà la forma assunta da una catena appesa per due punti e soggetta alla forza di gravità).

Si studi il loro andamento e se ne disegnino i grafici.

(7) Si dica se le seguenti funzioni, ottenute incollando più funzioni elementari diverse tra loro, sono continue o derivabili nei punti di incollamento

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{se } \ x < 0 \\ e^{-2x} & \text{se } \ x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}x) & \text{se } \ 0 < x < 1 \\ e^{\frac{\pi}{4}(1-x)} & \text{se } \ x \geq 1 \end{cases}$$

(N.B. funzioni di questo tipo compaiono in meccanica quantistica quando si deve descrivere lo stato di particelle libere di muoversi ovunque in una dimensione tranne che per punti dove c'è una "barriera" che tende a ostacolarne il passaggio o per zone nelle quali tendono a essere confinate: i punti di incollamento rappresentano proprio i confini di tali zone)

(8) In fisica sono spesso utilizzati i seguenti cosiddetti "polinomi speciali"

Polinomi di Hermite (compaiono nella risoluzione dell'equazione dell'oscillatore armonico quantistico):

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \cdot \frac{d^n(e^{-x^2})}{dx^n}$$

Polinomi di Laguerre (compaiono nella funzione in più variabili che esprime lo stato dell'elettrone nell'atomo di idrogeno):

$$L_n(x) = e^x \cdot \frac{d^n(e^{-x}x^n)}{dx^n}$$

Polinomi di Legendre (compaiono anch'essi nella funzione in più variabili che esprime lo stato dell'elettrone nell'atomo di idrogeno):

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n}$$

Si scrivano esplicitamente $H_3(x), L_2(x), P_2(x)$ e si disegnino i loro grafici.

(9) Dopo aver dimostrato che la seguente funzione $f : (0, +\infty) \to (1, +\infty)$ è invertibile

$$f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}+x}}$$

si scriva l'equazione della retta tangente al grafico dell'inversa f^{-1} nel punto di coordinate $(\sqrt{e}, 1)$.