Esercizi Matematica 2 per Chimica (Esercitazione 15/04/21)

(1) Si calcolino i seguenti limiti di funzioni del tipo $f(x)^{g(x)}$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{[(0,1)^x]},\quad \lim_{x\to 0^+}(\sin x)^x,\quad \lim_{x\to 0}(1+3x^2+4x)^{\frac{1}{x}},\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{\mathrm{tg}x},\quad \lim_{x\to+\infty}\left(e^{2x^3+1}\right)^{\frac{1}{5x^3-x}},\quad \lim_{x\to+\infty} x^{\sin x},\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+2^x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

(2) Si dimostri che per ogni numero reale α positivo, si ha

$$\lim_{x\to 0^+}(\sqrt[x]{\alpha})^{\sin x}=\alpha$$

(si deduca che una forma indeterminata "infinito elevato zero" può quindi dare qualunque valore maggiore o uguale a 1, e "zero elevato zero" qualunque valore compreso tra 0 e 1)

(3) Si mostri che $e^{(e^x)}$ è un infinito di ordine superiore rispetto a e^x.

(4) A partire dall'approssimazione di Stirling $n!\sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$, si dimostri che $\ln(n!)\sim n(\ln n-1)$ (detta spesso anch'essa approssimazione di Stirling)

(5) Si calcoli il limite per $n\to+\infty$ delle seguenti successioni

$$\frac{n!+n^3}{\log_{10}n+n^n},\quad \frac{(n+3)!}{n^3 2^n},\quad (-1)^n,\quad \frac{(-1)^n}{n},\quad \frac{(n!)^3}{n^n}$$

(NB per l'ultimo, può essere utile l'approssimazione di Stirling...)

(6) La *successione di Fibonacci* è la successione a_n che ha come primi due valori 1, e poi procede a ogni passo sommando i due valori precedenti: più esplicitamente,

$$a_0=1$$
$$a_1=1$$
$$a_2=a_1+a_0=1+1=2$$
$$a_3=a_2+a_1=2+1=3$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5$$
$$a_5 = a_4 + a_3 = 5 + 3 = 8 \ldots$$

Si può dimostrare che l'espressione esplicita generale di a_n è la seguente

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$$

Dopo aver verificato questo fatto per $n = 0, 1, 2$, si usi l'espressione esplicita per mostrare che la successione di Fibonacci tende a più infinito per $n \to +\infty$ e dire se essa va a infinito più velocemente di $n!$ o di e^n.

(7) Si dice che una funzione $f(x)$ ha un *asintoto obliquo* per $x \to \pm\infty$ se si ha che

$$|f(x) - (ax + b)| \to 0 \tag{1}$$

per due numeri reali $a \neq 0$ e b.

Dopo aver dato un'interpretazione geometrica di tale definizione, si mostri che essa implica che valgono entrambe le condizioni seguenti

$$\frac{f(x)}{x} \to a, \quad f(x) - ax \to b \tag{2}$$

Si potrebbe dimostrare che queste due condizioni sono in realtà equivalenti alla (1) e possono essere utilizzate quindi per verificare se una funzione ha un asintoto obliquo. Dando questo per buono, si dica se le seguenti funzioni hanno un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$:

$$e^x, \quad \sqrt{5x^2+1} - 2, \quad 3x + \sin x, \quad \ln(e^x + 1), \quad x + \sqrt[3]{x}$$

(NB per l'ultima funzione, si osservi anche che dà un esempio di funzioni $f(x), g(x)$ tali che $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ ma $f(x) - g(x) \to +\infty$)

(8) Si calcolino i due limiti seguenti

$$\lim_{x \to 0} \frac{5^x - 1}{x}, \quad \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3 + \cos x} - x$$