Esercizi Matematica 2 per Chimica (Esercitazione 22/04/21)

(1) Si calcolino derivata prima e seconda delle seguenti funzioni

$$\cos(x^4), \quad \frac{1}{(x^2+1)^3}, \quad \frac{2x-3}{x+1}, \quad \sqrt{3x^4+x^2+1}$$
$$\ln(e^x+1), \quad \arcsin^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \quad 2^{\mathrm{artg} x}, \quad x^{\sin x}$$

(2) Si calcoli l'equazione della retta tangente al grafico di f per le funzioni dell'esercizio precedente rispettivamente nel punto x_0 dato:

$$x_0 = 0, \quad x_0 = 1, \quad x_0 = 1, \quad x_0 = -1$$
$$x_0 = \ln 2, \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$$

(3) Si dica se la seguente funzione è derivabile nell'origine, dando anche un'interpretazione grafica della risposta

$$\ln(\cos(\sqrt[3]{x}))$$

(4) Data la funzione $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, si dimostri che:

- ponendo $f(0) = 0$ la funzione risulta continua su tutto $\mathbb{R}$
- la funzione non è derivabile nell'origine

Le stesse affermazioni sono vere anche per la funzione $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$?

(5) Quanto vale la derivata $\frac{d^{10}f}{dx^{10}}$ della seguente funzione polinomiale?

$$f(x) = 2x^{10} - 13x^9 + 4x^8 - \sqrt{2}x^6 + x^5 - x^3 + x^2 - 7x + 11$$

(6) Si mostri che $(x^3)' = 3x^2$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ e $(a^x)' = (\ln a)a^x$ utilizzando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale

(7) Si consideri un corpo di massa m collegato a un punto fissato O da una molla con costante elastica k e una forza di attrito F_a proporzionale e opposta alla velocità, con coefficiente di proporzionalità α.

Identificando il punto O con l'origine e con $x(t)$ la funzione che indica la distanza del corpo da O al tempo t,

- si scriva l'equazione differenziale soddisfatta da $x(t)$
- si verifichi che le seguenti funzioni sono soluzioni per i valori di k e α indicati

$$x(t) = \sqrt{2}e^{-t} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right), \quad (k = 2m, \alpha = 2m)$$
$$x(t) = te^{-t}, \quad (k = m, \alpha = 2m)$$

- per ognuna delle soluzioni si determini l'andamento di $x(t)$ dandone anche un'intrepretazione fisica (attenzione: per spiegare fisicamente l'andamento di $x(t)$ può essere importante anche andare a calcolare $x(0)$ e $x'(0)$...)