G. Fubini
Sugli integrali multipli
Rend. Mat. Acc. Lincei, s. 5, v. 16(1) (1907), 608–614

Matematica. — *Sugli integrali multipli.* Nota di G. FUBINI, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

1. Mi occuperò qui degli integrali superficiali di una funzione di due variabili x . y. E, come è oramai necessario in questo ordine di studî, mi riferirò agli integrali del Lebesgue [1]. Il teorema, che dimostreremo, è il seguente:

Se $f(x, y)$ è una funzione di due variabili x, y, limitata o illimitata, integrabile in un'area Γ del piano (x, y), allora si ha sempre:

$$\int_\Gamma f(x, y)d\sigma = \int dy \int f(x, y)dx = \int dx \int f(x, y)dy,$$

quando con $d\sigma$ si intenda l'elemento d'area di Γ [2].

Sull'area Γ faremo dapprima l'ipotesi (del resto non essenziale) che la sua intersezione [3] con una qualsiasi retta $x =$ cost, oppure $y =$ cost sia (linearmente) misurabile. (Cfr. il n° 2).

[1] Lebesgue, *Intégrale. longuer, aire.* Annali di Matematica 1902.

[2] Quando la presente Nota era già in corso di stampa, mi fu fatto notare che in una osservazione a pie' della pag. 30 della Memoria: *Sul principio di Dirichlet* (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tomo 22), il prof. B. Levi accenna a questo teorema, partendo da alcuni lavori del sig. Pringsheim sugli integrali superficiali di Riemann.

[3] Intersezione di un campo Γ, o di un aggregato E con una retta $x =$ cost, op-

La Nota finisce con un breve cenno dell'estensione del precedente teorema a coordinati polari, o altre coordinate.

2. Introdurremo due definizioni: Diremo che un aggregato di punti nel piano (x, y) è linearmente misurabile, se ogni sua intersezione con una retta $x = \text{cost}$, oppure $y = \text{cost}$ è un aggregato linearmente misurabile. Diremo che una funzione $f(x, y)$ è linearmente misurabile, se le funzioni della sola x (o della sola y), che se ne deducono, ponendovi $y = \text{cost}$ oppure $x = \text{cost}$ sono (linearmente) misurabili. Per le funzioni limitate misurabili linearmente e superficialmente il teorema precedente è conseguenza immediata dei teoremi [1] del Lebesgue.

Notiamo che gli aggregati, che il Lebesgue chiama misurabili (B), sono linearmente misurabili, che l'aggregato somma di (comune a) un numero finito, oppure di (oppure a) un' infinità numerabile di aggregati linearmente misurabili è pure linearmente misurabile.

Per dimostrare il nostro teorema nel caso di funzioni non misurabili linearmente, premetteremo due osservazioni:

Osserv. 1ª. Quando si parli di integrali di una funzione, si può anche supporre che essa non sia definita in ogni punto, e che *esista un aggregato di punti di misura nulla in cui essa non è definita.* Ciò proviene dal fatto che i valori di una funzione in un aggregato di punti di misura nulla non hanno alcuna influenza sul valore di un suo integrale.

Osserv. 2ª. Un aggregato E misurabile (superficialmente) del piano (x, y) è contenuto in un aggregato E_1, e contiene un aggregato E_2, che sono misurabili (B), e quindi sono misurabili superficialmente e linearmente, ed hanno la stessa misura superficiale di E.

Da queste osservazioni si deduce:

Se $f(x, y)$ è una funzione misurabile superficialmente, esiste una funzione $\varphi(x, y)$ misurabile superficialmente e linearmente, tale che l'aggre-

---

pure $y = \text{cost}$, è l'aggregato dei punti comuni al campo Γ, o all'aggregato E con la retta $x = \text{cost}$, (oppure $y = \text{cost}$) considerata. Al solito le x, y indicano coordinate cartesiane ortogonali.

[1] Lebesgue, loc. cit., pag. 274 e seg. A pag. 276 riga 30 il Lebesgue dice che l'aggregato A dei punti comuni a un numero finito, o ad un' infinità numerabile di rettangoli, aventi i lati paralleli agli assi coordinati, si può considerare come l'aggregato dei punti comuni a un numero finito, o a un' infinità numerabile di rettangoli *n'empiétant pas les uns sur les autres*. Ciò si dimostra nel seguente modo: Se $E_1, E_2, E_3 \ldots$ sono i rettangoli in discorso, si sopprimano da ogni rettangolo E_n quelle sue parti, che sono comuni ad almeno uno dei rettangoli $E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}$, e si suddivida la parte residua in tanti rettangoletti $e_n^{(1)}, e_n^{(2)} \ldots$ L' insieme A dei punti appartenenti ad almeno uno dei punti rettangolari E coincide con l' insieme dei punti appartenenti ad almeno uno dei rettangoli e: i quali sono pure in numero finito, o formano un' infinità numerabile, e non si sovrappongono l'un l'altro.

gato dei punti, in cui $f \neq \varphi$, *è contenuto in un aggregato* E, *il quale gode delle seguenti proprietà:*

1°) E *è di misura superficiale nulla.*

2°) *Le rette* $x = \mathrm{cost}$ *oppure* $y = \mathrm{cost}$, *che intersecano* E *in un aggregato di misura* (*lineare*) *non nulla, formano un aggregato di misura* (*lineare*) *nulla.*

3°) E *è linearmente misurabile.*

Dim. I numeri razionali formano un aggregato numerabile, e noi li potremo individuare con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ L'aggregato e_i dei punti, ove $f \geq \alpha_i$, è misurabile (perchè f è una funzione misurabile). Per la seconda osserv. esiste in e_i un aggregato e'_i linearmente misurabile, avente la stessa misura superficiale di e_i. Costruiamo la funzione $\varphi(x, y)$, che coincide con $f(x, y)$ in ogni punto, che appartiene ad *almeno* uno degli aggregati e'_i, e che nei punti residui assume un qualsiasi valore $\lambda = \mathrm{cost}$. Sia E l'insieme di questi punti residui: ogni punto di E appartiene ad almeno uno degli aggregati $e_i - e'_i$, i quali sono tutti di misura nulla. Dunque E ha misura nulla. L'aggregato E è l'aggregato dei punti comuni a tutti gli aggregati $\Gamma - e'_i$: poichè Γ ed e'_i sono linearmente misurabili, anche E è linearmente misurabile; e quindi (Lebesgue loc. cit.) la sua misura superficiale si ottiene integrando, rapporto a x, la misura lineare della sua intersezione con una retta $x = \mathrm{cost}$. E, poichè detta misura superficiale è nulla, le rette $x = \mathrm{cost}$, che intersecano E in un aggregato di misura lineare non nulla, formano un aggregato di misura lineare nulla. Altrettanto avviene delle rette $y = \mathrm{cost}$.

Per dimostrare il nostro teorema, basterà dunque dimostrare che $\varphi(x, y)$ è linearmente misurabile, ossia che, presa una qualsiasi quantità β, il gruppo G dei punti, in cui $\varphi > \beta$, è linearmente misurabile.

Ora, se $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots$ sono i numeri razionali maggiori di β, e se $\beta \geq \lambda$, l'aggregato G è l'aggregato somma degli aggregati $e'_{i_1}, e'_{i_2}, e'_{i_3} \ldots$, che sono tutti linearmente misurabili. Quindi anche G è linearmente misurabile.

Se invece $\beta < \lambda$, l'aggregato G è l'aggregato somma dell'aggregato E, e degli aggregati $e'_{i_1}, e'_{i_2}, e'_{i_3} \ldots$ Quindi ancora G è linearmente misurabile. c.d.d.

Si intende che con le parole « aggregato somma di più aggregati » abbiamo qui alluso all'aggregato formato da tutti i punti appartenenti ad almeno uno degli aggregati, di cui si fa la somma.

3. Se la funzione f è limitata, altrettanto avviene della φ: poichè i punti, in cui $f \neq \varphi$, formano un aggregato di misura nulla, si ha:

$$\int_\Gamma f d\sigma = \int \varphi d\sigma .$$

Poichè φ è misurabile anche linearmente, si ha, per i ricordati teoremi del Lebesgue:

$$\int_\Gamma \varphi d\sigma = \int dy \int \varphi\, dx = \int dx \int \varphi\, dy .$$

Ora le rette $y = \text{cost}$ ($x = \text{cost}$), che intersecano l'aggregato in cui $f \neq \varphi$ in un aggregato di misura lineare non nulla, formano un aggregato di misura nulla.

Su *tutte* le altre rette si ha quindi

$$\int \varphi\, dx = \int f dx \left(\int \varphi\, dy = \int f dy \right).$$

Quindi l' integrale $\int f dx$ ($\int f dy$) esiste su ogni retta $y = \text{cost}$ ($x = \text{cost}$) ed è uguale all' integrale corrispondente della funzione φ, escluso al più un aggregato di rette di misura nulla. Si ha, dunque, per l'osserv. prima:

$$\int dx \int f dy = \int dx \int \varphi\, dy ; \int dy \int f dx = \int dy \int \varphi\, dx .$$

Riunendo i risultati finora ottenuti, si conclude:

$$\int_\Gamma f d\sigma = \int dy \int f dx = \int dx \int f dy \qquad \text{c.d.d.}$$

4. Noi abbiamo così dimostrato il precedente teorema per le funzioni $f(x, y)$ limitate: ora lo estenderemo alle funzioni $f(x, y)$ illimitate. Premetteremo un'osservazione. *Se $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sono funzioni positive o nulle di una variabile x in un certo intervallo l, e se esiste il* $\lim_{n=\infty} \sum_1^n \int_l \varphi_n\, dx$, *la serie $\sum_n \varphi_n$ converge nell' intervallo l, escluso al più un aggregato di punti di misura nulla* (¹).

Infatti, se $\mathrm{L} = \lim_{n=\infty} \sum_1^n \int \varphi_n\, dx$, si ha, per ogni valore di n:

$$\sum_1^n \int \varphi_n\, dx \leq \mathrm{L} .$$

Se k è una qualsiasi costante positiva, il gruppo $G_{k,n}$ dei punti, in cui $\sum_1^n \varphi_i > k$, ha una misura minore od uguale a $\frac{\mathrm{L}}{k}$. Il gruppo $G_{k,n+1}$ contiene il gruppo $G_{k,n}$; il gruppo G_k dei punti appartenenti a uno almeno degli aggregati $G_{k,n}$ ($n = 1, 2, \ldots$), ossia il gruppo limite di $G_{k,n}$ per $n = \infty$ è misurabile, ed ha una misura non maggiore di $\frac{\mathrm{L}}{k}$. Ma il gruppo G dei punti, in cui $\sum_i \varphi_i$ è una serie divergente, è il gruppo dei punti, comuni agli aggregati $G_{k_1}, G_{k_2}, G_{k_3}, \ldots$, quando con $k_1, k_2, k_3 \ldots$ si indichino delle costanti tali che $\lim_{i=\infty} k_i = \infty$.

Quindi G ha una misura nulla. c. d. d.

(¹) Cfr. Vitali, Rend. del Circ. Matem. di Palermo, tomo 23, (1907).

Il precedente teorema, che noi abbiamo dimostrato per le serie a termini positivi, vale evidentemente anche per *le successioni di funzioni non decrescenti.*

In virtù di un teorema del prof. Levi sull' integrazione delle serie (1) e della precedente osservazione, si può concludere. *Se* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ *sono funzioni non negative in un intervallo* l, *e se esiste ed è finito il*

$$\lim_{n=\infty} \sum_1^n \int_l \varphi_n\, dx,$$

si ha:

$$\lim_{n=\infty} \sum_1^n \int \varphi_n\, dx = \int \left(\lim_{n=\infty} \sum_1^n \varphi_n \right) dx.$$

E un teorema analogo vale per le successioni di funzioni non decrescenti, o non crescenti.

Sia ora $f(x, y)$ una funzione illimitata integrabile nel campo $\boldsymbol{\Gamma}$. Essa si può considerare come somma di due funzioni φ_1, φ_2, ambedue integrabili, di cui l'una non è mai positiva, l'altra non è mai negativa. Per dimostrare la formola del n° 1, basterà dimostrarla per ciascuna delle due funzioni φ_1, φ_2, che hanno un segno costante. Potremo dunque senz'altro supporre $f \geq 0$. Allora siano $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \mathrm{K}_3 \ldots$ costanti positive tali che $\mathrm{K}_{n-1} < \mathrm{K}_n$ e che $\lim\limits_{n=\infty} \mathrm{K}_n = \infty$. Sia ψ_n la funzione positiva o nulla, che è uguale a f nei punti ove $f \leq \mathrm{K}_n$, e che è nulla negli altri punti. La ψ_n è funzione limitata; e quindi (n° 3) $\int_\Gamma \psi_n\, d\sigma = \int dx \int \psi_n\, dy$. Ora, per definizione di integrale, si ha $\int_\Gamma f d\sigma = \lim\limits_{n=\infty} \int_\Gamma \psi_n\, d\sigma$. Esiste quindi, posto $v_n = \int \psi_n\, dy$, il $\lim\limits_{n=\infty} \int v_n\, dx$ ed è uguale a $\int_\Gamma f d\sigma$. Ora la successione delle v_n è una successione non decrescente; per le osservazioni precedenti si ha quindi

$$\int_\Gamma f d\sigma = \int \left(\lim_{n=\infty} v_n \right) dx = \int \left(\lim_{n=\infty} \int \psi_n\, dy \right) dx.$$

Ma, per la definizione stessa di integrale, si ha:

$$\lim_{n=\infty} \int \psi_n\, dy = \int f dy.$$

Quindi anche nel caso di funzioni illimitate, vale la formola enunciata al n° 1. c.d.d.

5. In questo ultimo numero accennerò alle varie generalizzazioni della formola precedente, quando si vogliano usare coordinate polari, o altri

(1) Rend. dell'Istituto Lombardo, 1906.

sistemi di coordinate. Osserviamo che per giungere al concetto di *misura* di un aggregato E, il Lebesgue parte dal concetto di *misura esteriore* di E. Egli definisce quest'ultima nel seguente modo: Consideriamo un sistema Σ di triangoli, tali che ogni punto di E sia interno ad almeno un triangolo di Σ; e sia σ la somma delle loro aree. Il limite inferiore delle quantità σ è la *misura esteriore* di E. Come si vede, il punto di partenza per Lebesgue è il sistema S dei triangoli del piano (x, y): dal concetto di *area di un triangolo* egli giunge ai concetti di misura esteriore, o di misura di un aggregato. Ma noi potremo evidentemente, senza alterare il valore della misura di un aggregato qualsiasi, sostituire al sistema S dei triangoli piani un sistema S′ di aree piane δ, il quale godesse delle seguenti due proprietà:

1ª) Ogni area δ di S′ è misurabile.

2ª) Se Δ è un triangolo scelto ad arbitrio, si può, dato un numero qualsiasi ε, trovare un numero finito o un infinità numerabile di aree δ di S′, tali che ogni punto interno a Δ sia interno ad almeno una delle aree δ considerate, e che la somma di queste aree differisca dall'area di Δ di una quantità minore di ε.

Così p. es., se O è un punto qualsiasi del piano, noi potremmo scegliere come sistema S′ di aree δ il sistema dei quadrangoli limitati da due raggi uscenti da O, e da due cerchi aventi il centro nel punto O.

Definita in questo modo la misura di un aggregato, si può con metodi analoghi ai precedenti estendere la formola del n° 1 (che vale, quando si vogliano usare coordinate cartesiane ortogonali) al caso, che si applichino coordinate polari.

E, con considerazioni perfettamente analoghe, si possono estendere i risultati precedenti a sistemi più generali di coordinate curvilinee.

Osserv. Se Γ non è linearmente misurabile, si noti che esso sarà [1] contenuto in un campo Γ' linearmente misurabile, tale che l'aggregato $\Gamma' - \Gamma$ è di misura nulla; l'aggregato $\Gamma' - \Gamma$ è (osserv. 2ª del n° 2) contenuto in un aggregato E di misura superficiale nulla, misurabile linearmente. Quindi (cfr. la dim. del teor. del n° 2) esiste soltanto un aggregato di misura nulla di rette $x = \text{cost}$, oppure $y = \text{cost}$, che intersechino E, o $\Gamma' - \Gamma$ in un aggregato di misura lineare non nulla. Se $\varphi(x, y)$ è una funzione uguale a $f(x, y)$ in Γ, e nulla in $\Gamma' - \Gamma$ si ha dunque:

$$\int_\Gamma f d\sigma = \int_{\Gamma'} \varphi d\sigma .$$

E di più si ha:

$$\int f dx = \int \varphi dx \qquad ; \qquad \int f dy = \int \varphi dy ,$$

[1] Infatti, poichè si può parlare di integrali estesi a Γ, il campo Γ è (superficialmente) misurabile. Si ricordi poi l'osserv. 2ª del n° 2.

tranne al più in un aggregato di rette $y = \text{cost}$ o $x = \text{cost}$ di misura (lineare) nulla. Poichè per il teor. precedente si ha

$$\int \varphi d\sigma = \int dy \int \varphi dx = \int dx \int \varphi dy ,$$

se ne deduce tosto:

$$\int_{\Gamma} f d\sigma = \int dy \int f dx = \int dx \int f dy \qquad \text{c. d. d.}$$

Sorge ora la questione, se dall'esistenza del secondo o del terzo membro della formola precedente si possa dedurre l'uguaglianza testè dimostrata: ciò, che io sono riuscito finora a dimostrare soltanto in casi particolari, e in modo speciale ammettendo che f sia una funzione limitata.

Fisica-matematica. — *La teoria delle equazioni integrali e le sue applicazioni alla Fisica-matematica.* Nota del prof. R. MARCOLONGO, presentata dal Socio V. CERRUTI.

Fisica. — *Sulla resistenza elettrica dei metalli fra temperature molto alte e molto basse.* Nota del dott. GUIDO NICCOLAI, presentata dal Corrispondente A. BATTELLI.

Fisica. — *Misure di viscosità sopra i cristalli fluidi del Lehmann.* Nota del dott. LUIGI PUCCIANTI, presentata dal Socio A. RÒITI.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.