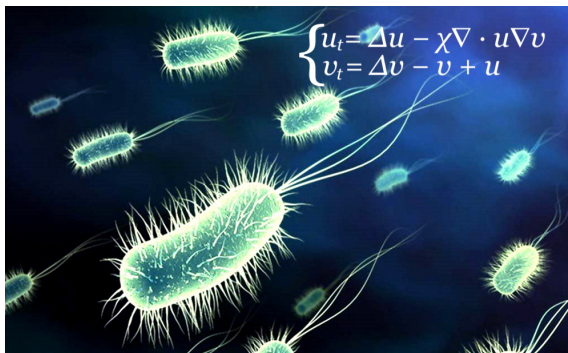




UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI
Dipartimento di Matematica e Informatica

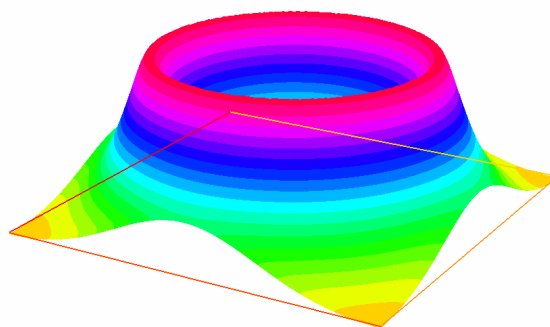
Facoltà di Scienze
Corso di laurea magistrale in Matematica

Alcune proprietà qualitative e quantitative di soluzioni di problemi chemiotattici



Tesista:
Alessandro Columbu
Matr. 60/65/65087

Relatore:
Prof. Giuseppe Viglialoro



Anno Accademico 2020-2021

Ringraziamenti

In primis, un ringraziamento speciale al mio relatore, il Prof. Viglialoro, per la sua immensa pazienza, per i suoi indispensabili consigli e per le conoscenze trasmesse durante tutto questo percorso.

Senza il supporto di tutta la mia famiglia, non sarei mai potuto arrivare fin qui. Grazie per esserci sempre stati.

Grazie infinite alla mia ragazza Angelica, che è sempre stata al mio fianco e mi ha trasmesso tutta la sua forza.

Un grazie speciale anche al mio collega Danilo, che ha reso meno pesanti questi anni di studio.

Un grazie importante va anche a tutti i miei amici, che hanno reso indimenticabili tutti questi anni a Cagliari.

Si ringrazia anche la Fondazione di Sardegna; infatti, questa tesi è stata parzialmente supportata dal progetto *Evolutionary and stationary Partial Differential Equations with a focus on biomathematics*, finanziato dalla Fondazione Sardegna (2019).

Indice

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introduzione e motivazioni | 7 |
| 1.1 | Interpretazione del modello: produttività e assorbimento cellulare | 9 |
| 1.1.1 | Il modello di produzione del segnale chimico | 10 |
| 1.1.2 | Il modello di consumazione del segnale chimico | 11 |
| 1.2 | Obiettivi, metodologie ed organizzazione della tesi | 13 |
| 2 | Alcuni prerequisiti fondamentali | 14 |
| 2.1 | Alcuni spazi funzionali | 14 |
| 2.2 | Disuguaglianze e teoremi | 15 |
| 3 | Definizione di due modelli chemiotattici di Keller–Segel | 20 |
| 3.1 | L’equazione di continuità: legge integrale e legge differenziale . | 20 |
| 3.2 | Derivazione dei modelli | 21 |
| 3.2.1 | Stabilità delle soluzioni | 23 |
| 3.3 | Il problema di produzione e il problema di consumazione . . . | 25 |
| 3.4 | Proprietà delle soluzioni per i problemi di produzione e consu- mazione: esistenza locale e criterio di estensione | 26 |
| 3.5 | Uniforme limitatezza per il Problema di produzione | 31 |
| 3.6 | Uniforme limitatezza per il Problema di consumazione | 36 |
| 4 | Metodo delle Differenze Finite e Metodo degli Elementi Finiti | 43 |
| 4.1 | Idea di base del Metodo degli Elementi Finiti | 43 |
| 4.2 | Analisi del Metodo delle Differenze Finite | 44 |
| 4.2.1 | Metodo di Eulero in avanti | 45 |
| 4.2.2 | Metodo di Eulero all’indietro | 46 |
| 4.3 | Analisi del Metodo degli Elementi Finiti | 47 |
| 4.3.1 | Discretizzazione nello spazio | 47 |
| 4.4 | Applicazione ai Problemi di produzione e di consumazione . . | 49 |
| 4.4.1 | Generazione della maglia del dominio e scelta delle funzioni di forma | 50 |
| 4.4.2 | Risoluzione tramite FEM del Problema di produzione . | 51 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4.4.3 | Risoluzione tramite FEM del Problema di consumazione | 53 |
| 5 | Simulazioni numeriche dei Problemi di produzione e di consumazione | 55 |
| 5.1 | Simulazioni del Problema di produzione | 55 |
| 5.1.1 | Test a campana singola | 56 |
| 5.1.2 | Test a campana quadrupla | 62 |
| 5.2 | Simulazioni del Problema di consumazione | 65 |
| 6 | Conclusioni e potenziali lavori futuri | 69 |
| 6.1 | Osservazioni e considerazioni conclusive | 69 |
| 6.2 | Potenziali progetti futuri | 71 |
| | Bibliografia | 73 |

Capitolo 1

Introduzione e motivazioni

In questa tesi analizzeremo due modelli provenienti dalla biomatematica le cui formulazioni risalgono ai lavori proposti da Keller e Segel¹ in [17, 18]. In questi articoli viene descritto essenzialmente il fenomeno della *chemiotassi*, ovvero il meccanismo attraverso il quale batteri e altri organismi uni o pluricellulari dirigono il proprio movimento a seconda della presenza di alcune sostanze chimiche nel loro ambiente.

Naturalmente, per descrivere il modello, sono essenziali alcuni elementi che rappresentino l'ambiente dove il citato fenomeno si produce, le due sostanze che intervengono nel meccanismo, l'interazione tra esse, le condizioni iniziali sulle stesse sostanze ed il loro comportamento nelle vicinanze del contorno del dominio. In tal senso, il modello matematico più generale che potenzialmente può tradurre formalmente la chemiotassi è il seguente sistema costituito da due equazioni differenziali alle derivate parziali accoppiate da un termine di tipo *deriva*²:

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot (A(u, v)\nabla u - B(u, v)\nabla v) + C(u, v) & \text{in } \Omega \times (0, T_{\max}), \\ \tau v_t = \Delta v + E(u, v) & \text{in } \Omega \times (0, T_{\max}), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \partial\Omega \times (0, T_{\max}), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 \text{ e } \tau v(x, 0) = \tau v_0(x) \geq 0 & x \in \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (1.1)$$

¹**Evelyn Fox Keller** (New York, 20 marzo 1936) è una fisica statunitense e una femminista. È docente di storia e filosofia presso l'Istituto di tecnologia del Massachusetts (MIT). **Lee Aaron Segel** (1932–2005) è stato un matematico applicato, particolarmente noto per i suoi contributi sull'apparizione spontanea di tipi di ordine in problemi di convezione e di chemiotassi.

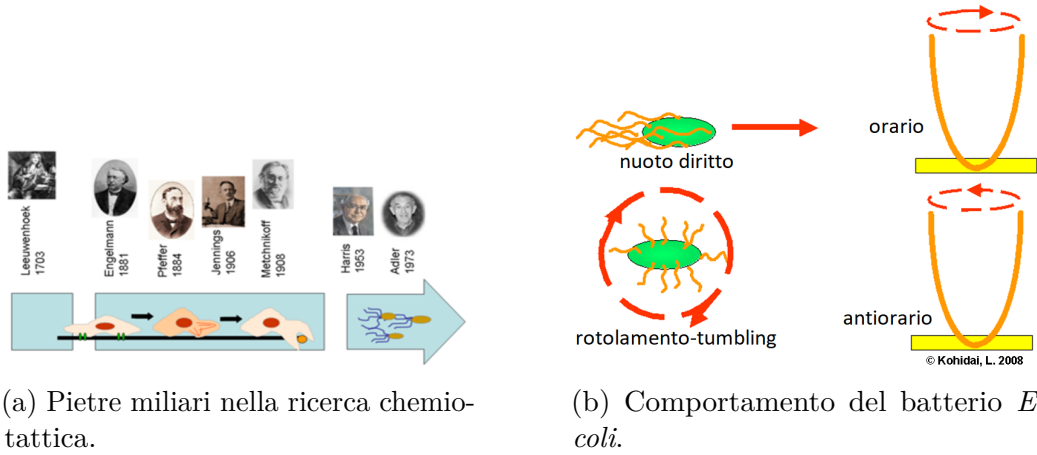
²Tale terminologia discende dall'inglese, *taxis-term* o *drift-term*, che esprime il movimento di una cellula o di un organismo in una particolare direzione in risposta a uno stimolo esterno.

Nel sistema ora descritto, $u = u(x, t)$ e $v = v(x, t)$ rappresentano rispettivamente le distribuzioni delle cellule e del segnale chimico nel punto dello spazio x (x in particolare appartiene ad un dominio limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, con $N \geq 1$, con frontiera $\partial\Omega$ regolare) ed al tempo $t > 0$; inoltre, T_{\max} (eventualmente infinito) indica l'istante di tempo fino al quale tali distribuzioni risultano definite, mentre $\tau \in \{0, 1\}$ stabilisce la natura, rispettivamente, stazionaria o evolutiva della seconda equazione. D'altra parte, le condizioni al bordo omogenee di Neumann, idealizzano l'isolamento dell'ambiente stesso (ovvero la sua impenetrabilità), e le condizioni $u_0(x)$ e $v_0(x)$ indicano le configurazioni delle cellule e del segnale chimico all'istante iniziale, rispettivamente. Nello specifico, per quanto riguarda la prima equazione (di tipo parabolico ed evolutivo), A indica come le cellule tendono a diffondersi e a stabilizzarsi nel dominio, B come il segnale chimico influisce su tale tendenza alla stabilizzazione, e C una sorgente esterna, che a seconda dell'espressione può favorire o meno tale equilibrio diffusivo. La seconda equazione, invece, indica come evolve il segnale chimico nel tempo secondo la legge di E ; in questo progetto considereremo il caso in cui l'espressione di E implica in un caso la produzione del segnale, e nell'altro il suo assorbimento o consumazione. Finalmente, come si è detto $\tau \in \{0, 1\}$: per $\tau = 1$ il modello è detto di tipo *parabolico-parabolico*, mentre per $\tau = 0$, invece, esso è denominato *parabolico-ellittico* (seconda equazione di tipo ellittico e stazionaria); dal punto di vista del modello biologico, tale equazione rappresenta la situazione nella quale il segnale chimico si diffonde molto più velocemente di quanto facciano le cellule.

Osservazione 1.1 (La chemiotassi nei batteri; Figura 1.1). *Come esempio, alcuni batteri come $E. coli$, hanno numerosi flagelli per cellula (tipicamente 4-10). Questi possono ruotare in due modi:*

- *La rotazione antioraria allinea i flagelli in un fastello singolo ruotante, cosicché il batterio nuota dritto.*
- *La rotazione oraria rompe il fastello di flagelli cosicché ciascun flagello punta in una direzione differente e, perciò, il batterio capitombola sul posto (tumble).*

Le direzioni della rotazione si riferiscono ad un osservatore al di fuori della cellula che guarda i flagelli verso la cellula.



(a) Pietre miliari nella ricerca chemiotattica.

(b) Comportamento del batterio *E. coli*.

Figura 1.1: Breve storia e schematizzazione della chemiotassi. (Fonte delle immagini: [20].)

1.1 Interpretazione del modello: produttività e assorbimento cellulare

In questa tesi ci concentreremo su due particolari casi del modello introdotto in (1.1); nello specifico, sempre $A(u, v) \equiv 1$, $B(u, v) = \chi u$, per $\chi > 0$, e $C \equiv 0$. Al contrario, nel primo caso fisseremo il termine E come $E(u, v) = -v + u$, con $\tau = 0$, ottenendo un modello di *produzione* di segnale chimico di tipo parabolico-ellittico; nel secondo porremo $E(u, v) = -uv$ con $\tau = 1$, rendendo il sistema di tipo parabolico-parabolico, con *consumazione* di segnale chimico. Riscriviamo, per comodità, le equazioni dei due problemi

$$u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot (u \nabla v) \quad 0 = \Delta v - v + u, \quad (1.2)$$

e

$$u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot (u \nabla v) \quad v_t = \Delta v - vu. \quad (1.3)$$

I termini *produzione* e *consumazione* risultano relativamente intuitivi. Infatti, e considerando il caso parabolico, l'equazione $v_t = \Delta v - v + u$ indica esattamente un aumento della variabile v in termini di un altro della u ; in altre parole, ad una crescita della densità cellulare u corrisponde un aumento del segnale chimico v . Totalmente opposta è la situazione per la quale $v_t = \Delta v - vu$; in tal caso ad alti valori di densità cellulare u corrispondono bassi valori del segnale v .

Al fine di dare un'interpretazione adeguata dei modelli, è estremamente necessario stabilire il segno di χ nell'espressione $B(u, v) = \chi u$, che come abbiamo specificato è *positivo*. Nella letteratura B è noto come sensibilità

chemiotattica ed il suo effetto sul movimento cellulare è di tipo *attrattivo*, crescente a misura che χ e/o la distribuzione di v aumenta.

Osservazione 1.2. *Facciamo due semplici considerazioni.*

1. *La controparte del fenomeno attrattivo ora spiegato si ottiene considerando $\chi < 0$. In tal caso l'effetto del termine $\chi u \nabla v$ (noto anche come termine diffusivo incrociato³) è repulsivo e l'analisi modellistica e matematica cambia. Noi non ci dedicheremo a questa situazione.*
2. *È da osservare che con A , B e C scelte come sopra specificato, il valore $\chi = 0$ risulterebbe in una situazione poco rilevante; in tal caso, infatti, la prima e la seconda equazione del problema (1.1) sarebbero del tutto disaccoppiate, ed una volta ottenuta la soluzione della prima, si procederebbe direttamente al calcolo di quella della seconda.*

1.1.1 Il modello di produzione del segnale chimico

Tornando a quanto discusso per i modelli attrattivi, è abbastanza naturale che un meccanismo di tipo produttivo possa presentare delle instabilità; in effetti, ad una tendenza di crescita della distribuzione cellulare corrisponde un'altrettanta crescita del segnale chimico, che a sua volta aumenta l'effetto attrattivo delle stesse cellule. Questo processo in alcuni casi può portare le cellule ad addensarsi in una zona dell'ambiente. Si parla in tal caso di *collasso chemiotattico*, dove il movimento sopraindicato può degenerare in un'aggregazione incontrollata. (Si veda la Figura 1.2.) Dal punto di vista strettamente matematico, il classico modello della chemiotassi è stato ampiamente studiato negli ultimi anni (la bibliografia sull'argomento è veramente molto abbondante; si vedano, solo a titolo d'esempio, [11, 12, 13, 27]). In particolare, il collasso chemiotattico implica che la soluzione u è *locale nel tempo* (o semplicemente *locale*), e ad un certo istante finito (il cosiddetto tempo del *blow-up*), diventa illimitata in uno o più punti del dominio. Questa instabilità può dipendere dalle condizioni iniziali, dall'interazione fra il termine di diffusione A e il termine di sensibilità chemiotattica B , e anche dal termine di produzione del segnale chimico E . Nel caso qui studiato, è la grandezza del prodotto della sensibilità χ per la massa cellulare $m := \int_{\Omega} u_0(x) dx = \|u_0\|_{L^1(\Omega)}$ a determinare la presenza del blow-up. Se χm è abbastanza grande, esso può apparire per alcune distribuzioni iniziali e non per altre; al contrario la distribuzione cellulare tenderà a stabilizzarsi nel tempo qualsiasi sia la configurazione iniziale della popolazione batterica. (Si suggerisce [16] per

³*Cross-diffusion term*, dall'inglese.

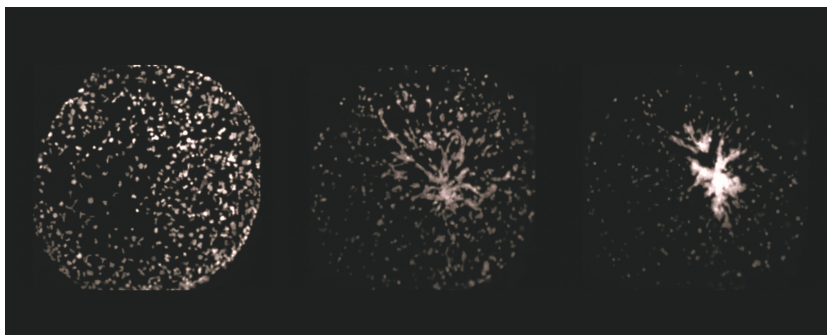


Figura 1.2: Il fenomeno della chemiotassi al microscopio; situazione di un collasso chemiotattico per un modello produttivo.

approfondimenti matematici su questa questione.) Matematicamente, e in maniera opposta alla situazione precedente, parleremo di soluzioni *globali nel tempo* (o semplicemente *globali*) ed, eventualmente, limitate⁴.

Se il problema in considerazione è analizzato in un dominio unidimensionale vedremo che il blow-up non ha modo di apparire; in alte dimensioni, invece, questo non è più vero e la soluzione del modello di Keller–Segel potrebbe diventare illimitata in un tempo finito o infinito per $N = 2$ o $N \geq 3$ (si consultino [10, 14, 13, 15, 24, 28] ed i riferimenti ivi contenuti).

1.1.2 Il modello di consumazione del segnale chimico

La versione relativa al modello di tipo consumazione descritta sopra è principalmente appropriata nella raffigurazione del comportamento a bande mobili dei batteri a causa della risposta chemiotattica, cioè il movimento distorto dei batteri verso il gradiente di concentrazione di ossigeno; tale aspetto è stato analizzato sperimentalmente in [1]. In alcuni casi è possibile stabilire l'esistenza di soluzioni d'onda viaggiante per questi modelli (si veda [19]). Per tali soluzioni, inoltre, sono state analizzate situazioni in cui appare per esse instabilità lineare ([25]) ed in altre quella non lineare ([35]).

Se per il problema di produzione abbiamo osservato che i dati iniziali (nello specifico u_0) e il segnale chimico (in particolare la sensibilità χ) possono se troppo grandi generare soluzioni illimitate in tempo finito, per il problema di consumazione questa possibilità è non chiara, e sembra molto complicato ottenere soluzioni con blow-up. Questo non deve apparire inatteso in quanto, come abbiamo specificato, l'aumento delle cellule tende a far svanire il segnale chimico e, di contro, sparisce anche l'effetto attrattivo sulla distribuzione

⁴Come è evidenziato nella letteratura menzionata, esistono situazioni nelle quali la soluzione è globale ma illimitata all'infinito.

| | N | $u_0 \geq 0$ | $v_0 \geq 0$ | $\chi > 0$ | Locale | Globale |
|-----------|----------|-------------------------------------|---|-------------------|--------|---------|
| PR | 1 | C^0 | | qualsiasi | | ✓ |
| | ≥ 2 | C^0 con norma L^1 piccola | | numero piccolo | | ✓ |
| | | C^0 con norma L^1 grande | | numero grande | ✓ | |
| PC | 1 e 2 | C^0 | C^1 | qualsiasi | | ✓ |
| | ≥ 3 | | C^1 con norma L^∞ piccola | numero piccolo | | ✓ |
| | | | C^1 con norma L^∞ grande | numero grande | ?? | ?? |

Tabella 1.1: Tabella riassuntiva sui risultati noti e questioni aperte relative ai problemi di produzione e consumazione. Con **PR** denotiamo il Problema di produzione, con **PC** il Problema di consumo. Inoltre con **Locale** si intende che la soluzione esplose in un tempo finito, con **Globale** che, non solo non esplose in tempo finito, ma neppure in tempo infinito, essendo così anche limitata.

cellulare. Se per $N = 1$ (e anche $N = 2$) tutte le soluzioni sono globali e limitate come nel caso del modello produttivo, al contrario per dimensioni più alte vale lo stesso (si veda [31]) per valori sufficientemente piccoli del prodotto della sensitività χ e del massimo di $v_0(x)$ (e quindi non della massa $m = \int_\Omega u_0(x) dx$). In particolare, non è chiaro ad oggi eventuale presenza di fenomeni di blow-up.

Schematizziamo quanto detto sulla limitatezza delle soluzioni dei problemi di produzione e consumazione, in termini dei dati iniziali e della dimensione nella Tabella 1.1.

1.2 Obiettivi, metodologie ed organizzazione della tesi

L'idea di fondo di questa tesi è analizzare i problemi di produzione e di consumo descritti dalle equazioni date in (1.2) e (1.3) da un duplice punto di vista: teorico e numerico. Più esattamente, da un punto di vista teorico, ci dedicheremo a derivare condizioni sufficienti sui dati dei due problemi al fine di garantire la limitatezza uniforme nel tempo di soluzioni classiche⁵; tale analisi verrà sviluppata nel §3. La metodologia utilizzata a tal fine è standard e si basa sulla ricerca di *stime a priori* della soluzione locale in opportuni spazi di Lebesgue. La strategia è associare un funzionale energetico dipendente dal tempo alla soluzione locale del problema e stimare la sua evoluzione temporale. In tal modo, l'obiettivo è ottenere tramite disequivalenze funzionali ed algebriche una disequazione differenziale ordinaria che restituisca la limitatezza uniforme di tale funzionale. Questo implicherebbe la limitatezza temporale di un'opportuna norma della soluzione ed infine risultati di regolarità garantiscono la limitatezza uniforme della soluzione.

È noto che le stime teoriche di problemi differenziali, e matematici in generale, son lungi dall'essere ottimali; rimanendo nell'ambito delle soluzioni limitate, la teoria non quantifica questa proprietà: una soluzione potrebbe rimanere limitata ma oscillare tra due valori o convergere ad uno stato stazionario (costante). O, se una soluzione esplose, spesso la stima teorica del tempo dell'esplosione è ben lontana da quella precisa. Nel §5 ci dedicheremo a tali aspetti quantitativi; più esattamente utilizzando il Metodo degli Elementi Finiti, potente strumento per la risoluzione approssimata di equazioni alle derivate parziali, considereremo i due modelli in domini bidimensionali e osserveremo il comportamento temporale in termini dei dati del relativo problema differenziale che li formalizza.

Il resto della tesi include altri tre capitoli: nel §2 e §4 si richiamano concetti e strumenti di base utilizzati nei ragionamenti svolti nel cuore della tesi, mentre §6 riassume e rianalizza la tesi, stabilendone le conclusioni e proponendo lavori futuri.

⁵Siccome la letteratura presente sull'argomento è estremamente vasta anche nel caso di analisi legate a soluzioni classiche, pensare di dare anche risultati riguardanti altri concetti di soluzione renderebbe più complicata l'organizzazione del documento.

Capitolo 2

Alcuni prerequisiti fondamentali

In questo capitolo enunceremo e, talvolta, dimostreremo alcuni risultati che ci serviranno nei capitoli successivi.

Con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, ci riferiremo ad un dominio limitato con frontiera $\partial\Omega$ lipschitziana¹ (in breve, $\Omega \in \text{Lip}$). Inoltre $x = (x_1, \dots, x_N)$ rappresenta il generico punto di Ω e $t \geq 0$ un parametro temporale. Inoltre considereremo funzioni sufficientemente regolari $f: \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, con $T > 0$. (L'operazione di integrazione va intesa nel senso di Lebesgue.)

2.1 Alcuni spazi funzionali

Faremo uso continuo dei seguenti spazi: per approfondimenti si consiglia il classico testo [3].

Definizione 2.1 (Lo spazio $L^\infty((0, T); L^p(\Omega))$). Sia $1 \leq p < +\infty$ e $f: \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$. Diremo che $f \in L^\infty((0, T); L^p(\Omega))$ se esiste una costante $L > 0$ tale che

$$\|f(\cdot, t)\|_{L^p(\Omega)}^p = \|f(\cdot, t)\|_p^p := \int_{\Omega} |f|^p \leq L \quad \text{per ogni } t \in (0, T).$$

Definizione 2.2 (Lo spazio $L^\infty((0, T); L^\infty(\Omega))$). Sia $f: \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$. Diremo che $f \in L^\infty((0, T); L^\infty(\Omega))$ se esiste una costante $L > 0$ tale che

$$\|f(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \|f(\cdot, t)\|_\infty := \sup_{x \in \Omega} |f(\cdot, t)| \leq L \quad \text{per ogni } t \in (0, T).$$

¹Con questo ci riferiamo a un dominio la cui frontiera è localmente il grafico di una funzione lipschitziana, ovvero una funzione di variabili reali che ha una crescita limitata, nel senso che il rapporto tra variazione dei valori assunti e variazione delle controimmagini non può superare un valore fissato.

2.2 Disuguaglianze e teoremi

Verranno inoltre utilizzati i seguenti risultati funzionali e algebrici.

Proposizione 2.3 (Disuguaglianza di Young). *Siano $a, b \geq 0$. Allora, per ogni $p, q > 1$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, si ha che*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad (2.1)$$

Dimostrazione. Considerata la funzione $f(x) = e^x$, essendo la sua derivata seconda positiva per ogni valore di x , abbiamo che essa è convessa. Pertanto

$$ab = e^{\ln(a)} e^{\ln(b)} = e^{\frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q)} \leq \frac{1}{p} e^{\ln(a^p)} + \frac{1}{q} e^{\ln(b^q)} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

In particolare, nell'ultimo passaggio è stata usata la disuguaglianza di convessità, ossia il fatto per ogni $t \in [0, 1]$

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

□

Proposizione 2.4 (Disuguaglianza “ ε -Young”). *Siano $a, b \geq 0$ e $\alpha \in (0, 1)$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $C_Y = C_Y(\varepsilon, \alpha)$ tale che:*

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \varepsilon a + C_Y b. \quad (2.2)$$

Dimostrazione. Utilizzando la (2.1) con $p = \frac{1}{\alpha}$ e $q = \frac{1}{1-\alpha}$, si verifica che

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b. \quad (2.3)$$

Pertanto si ha la catena di relazioni:

$$a^\alpha b^{1-\alpha} = \frac{\varepsilon^\alpha a^\alpha}{\alpha^\alpha} \frac{\alpha^\alpha b^{1-\alpha}}{\varepsilon^\alpha} = \left(\frac{\varepsilon a}{\alpha}\right)^\alpha \left(\frac{\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} b}{\varepsilon^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\right)^{1-\alpha} \leq \varepsilon a + \frac{(1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{\varepsilon^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} b,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la (2.3), trovando che

$$C_Y(\varepsilon, \alpha) = \frac{(1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{\varepsilon^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}. \quad \square$$

Proposizione 2.5. *Siano $a, b \geq 0$ e $\delta \geq 1$. Allora si ha che:*

$$(a+b)^\delta \leq 2^\delta (a^\delta + b^\delta). \quad (2.4)$$

Dimostrazione. Sia $c = \max\{a, b\}$, allora $a + b \leq 2c$. Di conseguenza:

$$(a + b)^\delta \leq (2c)^\delta = 2^\delta c^\delta \leq 2^\delta (a^\delta + b^\delta). \quad \square$$

Teorema 2.6 (Disuguaglianza di Hölder in $L^\infty((0, T); L^p(\Omega))$). *Siano $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Siano, inoltre, $f \in L^\infty((0, T); L^p(\Omega))$ e $g \in L^\infty((0, T); L^q(\Omega))$. Allora $fg \in L^\infty((0, T); L^1(\Omega))$ e*

$$\|(fg)(\cdot, t)\|_1 \leq \|f(\cdot, t)\|_p \|g(\cdot, t)\|_q, \quad (2.5)$$

per ogni $t \in (0, T)$.

Dimostrazione. Si veda [3, p. 92]. \square

Proposizione 2.7. *Sia Ω un insieme di misura $|\Omega|$ finita e $1 < p \leq q$. Allora si ha che*

$$L^\infty((0, T); L^q(\Omega)) \subseteq L^\infty((0, T); L^p(\Omega)).$$

Dimostrazione. Sia $f \in L^\infty((0, T); L^q(\Omega))$. Allora

$$\int_\Omega |f|^q = \int_\Omega (|f|^p)^{\frac{q}{p}} < +\infty,$$

per ogni $t \in (0, T)$, quindi $|f|^p \in L^\infty((0, T); L^{\frac{q}{p}}(\Omega))$. Inoltre $\frac{p}{q} + \frac{q-p}{q} = 1$ e $1 \in L^\infty((0, T); L^{\frac{q}{q-p}}(\Omega))$ perché $|\Omega|$ finita. Applicando la (2.5), ricaviamo che

$$\begin{aligned} \|f(\cdot, t)\|_p &= \left(\int_\Omega |f|^p \cdot 1 \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left[\left(\int_\Omega (|f|^p)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_\Omega 1^{\frac{q}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{q}} \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f(\cdot, t)\|_q |\Omega|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad \square$$

In questo lavoro tratteremo funzioni f dello spazio e del tempo che conservano in $(0, T)$ la loro norma spaziale L^1 , più precisamente $f \in L^\infty((0, T); L^1(\Omega))$. Tali funzioni, in generale, non appartengono a $L^\infty((0, T); L^\infty(\Omega))$; diamo di seguito un

Controesempio 2.8. *Nell'intervallo $I = (0, 1)$ e $J = (0, 1)$ consideriamo la funzione*

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 t}} \quad \text{in } I \times J.$$

Osservando che

$$u_x(x, t) = \frac{tx}{(1 - tx^2)^{\frac{3}{2}}} > 0 \quad \text{in } I \times J,$$

otteniamo che

$$\|u\|_{L^\infty(I)} = \sup_{x \in I} u(x, t) = u(1, t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}},$$

e, di conseguenza,

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-t}} = +\infty.$$

Questo implica che $u \notin L^\infty(J; L^\infty(I))$. Al contrario, visto che

$$\|u\|_{L^1(I)} = \int_0^1 u(x, t) dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2t}} dx = \frac{\arcsin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}},$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{\arcsin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} = \frac{\pi}{2},$$

abbiamo che $u \in L^\infty(J; L^1(I))$

Teorema 2.9 (Disuguaglianza di Gagliardo–Nirenberg). *Siano N, m, j interi non negativi, $0 \leq d, q, r \leq +\infty$ e $\theta \in [0, 1]$ tali che*

$$\frac{1}{d} = \frac{j}{N} + \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{N}\right)\theta + \frac{1-\theta}{q} \quad e \quad \frac{j}{m} \leq \theta \leq 1.$$

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, con $\Omega \in \text{Lip}$ e $N \geq 1$, e sia $f: \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f \in L^\infty((0, T); L^q(\Omega))$ e le sue derivate deboli m -esime siano contenute in $L^\infty((0, T); L^r(\Omega))$. Allora, per ogni $s > 0$ esiste C_{GN} costante tale che

$$\|D^j f\|_d \leq C_{GN} \left(\|D^m f\|_r^\theta \|f\|_q^{1-\theta} + \|f\|_s \right) \quad \text{per ogni } t \in (0, T). \quad (2.6)$$

Dimostrazione. Per approfondimenti si veda [26]. \square

Osservazione 2.10. *Utilizzeremo la (2.6) nel caso in cui $j = 0$, $r = 2$ e $m = 1$. In questo modo otteniamo:*

$$\|f\|_d \leq C_{GN} \left(\|\nabla f\|_2^\theta \|f\|_q^{1-\theta} + \|f\|_s \right) \quad \text{per ogni } t \in (0, T), \quad (2.7)$$

con

$$\frac{1}{d} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N}\right)\theta + \frac{1-\theta}{q} \quad (2.8)$$

Teorema 2.11 (Teorema della divergenza di Green). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, un aperto limitato tale che $\Omega \in \text{Lip}$. Sia ν la normale esterna a $\partial\Omega$, $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap C^0(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ e $g \in C^1(\Omega; \mathbb{R}) \cap C^0(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$. Allora vale l'identità:*

$$\int_\Omega f \cdot \nabla g dx = \int_{\partial\Omega} fg \cdot \nu dS - \int_\Omega g \nabla \cdot f dx. \quad (2.9)$$

In particolare, se $g \equiv 1$

$$\int_{\partial\Omega} f \cdot \nu dS = \int_\Omega \nabla \cdot f dx.$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione e gli approfondimenti, consultare [29]. \square

Proposizione 2.12. *Sia Ω un aperto regolare e limitato di \mathbb{R}^N , $N \geq 1$ e $f \in C^0(\overline{\Omega})$. Se per ogni $\Omega_0 \subset \Omega$ vale $\int_{\Omega_0} f dx = 0$, allora $f \equiv 0$ in $\overline{\Omega}$.*

Dimostrazione. Per assurdo sia $x_0 \in \Omega$ tale che $f(x_0) > 0$. Allora, per continuità, esiste un intorno non vuoto e di misura finita, I_{x_0} di x_0 , con la proprietà che $f(x) > 0$ per ogni $x \in I_{x_0}$; siccome questo implica che $\int_{I_{x_0}} f(x) dx > 0$, la tesi è contraddetta. \square

Teorema 2.13 (Schauder). *Sia $R > 0$, $X = C^0(\overline{\Omega} \times [0, T])$ e $S := \{0 \leq f \in X : \|f(\cdot, t)\|_\infty \leq R \text{ per ogni } t \in [0, T]\} \subset X$ un sottoinsieme non vuoto, chiuso e convesso. Sia $\varphi: S \rightarrow S$ una funzione continua tale che $\varphi(S) \subseteq S$. Allora φ ha un punto fisso in S .*

Dimostrazione. La dimostrazione è un caso particolare di quella contenuta in [3, p. 179]. \square

Proposizione 2.14. *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$, $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili e $\varphi: \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ tali che:*

- $\varphi(\cdot, t)$ lipschitziana per ogni $t \in I$;
- $g'(t) \leq \varphi(g(t), t)$ con $g(a) = \alpha$;
- $f'(t) = \varphi(f(t), t)$ con $f(a) \geq \alpha$.

Allora $g(t) \leq f(t)$ per ogni $t \in I$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista $b > a$ tale che $g(b) > f(b)$ e sia $h(t) = g(t) - f(t)$. Innanzitutto h continua perché f, g continue, $h(a) \leq 0$ e $h(b) > 0$. Questo implica che esiste $c \in [a, b]$ tale che $h(c) = 0$ e $h(t) > 0$ per ogni $t \in (c, b]$. Inoltre si verifica che

$$h'(t) = g'(t) - f'(t) = \varphi(g(t), t) - \varphi(f(t), t) \leq M|g(t) - f(t)| = Mh(t),$$

ottenendo:

$$h'(t) \leq Mh(t),$$

per un certo $M > 0$ e per ogni $t \in (c, b]$. Dividendo per $h(t)$ e integrando in $(c, b]$, ne ricaviamo l'assurdo:

$$h(b) \leq h(c)e^{M(b-c)} = 0. \quad \square$$

Ci torneranno utili i seguenti principi del massimo.

Proposizione 2.15 (Principio del massimo ellittico). *Per qualche $\delta \in (0, 1)$, sia $f \in C^\delta(\overline{\Omega} \times (0, T))$ e $z \in C^{2,\delta}(\overline{\Omega} \times (0, T))$ la soluzione del problema*

$$\begin{cases} f = -\Delta z + z & \text{in } \Omega \times (0, T) \\ z_\nu = 0 & \text{su } \partial\Omega \times (0, T). \end{cases}$$

Allora

$$\min_{\Omega} f(\cdot, t) \leq z(x, t) \leq \max_{\Omega} f(\cdot, t) \quad \text{per ogni } t \in (0, T).$$

Dimostrazione. Si veda [3, Proposizione 9.30]. □

Proposizione 2.16 (Principio del massimo parabolico). *Per qualche $\delta \in (0, 1)$, sia $f \in C^{\delta, \frac{\delta}{2}}(\overline{\Omega} \times [0, T])$, con $f \geq 0$, e $z_0 \in C^1(\overline{\Omega})$. Sia inoltre $z \in C^{2+\delta, 1+\frac{\delta}{2}}(\overline{\Omega} \times [0, T])$ la soluzione del problema*

$$\begin{cases} z_t = \Delta z - fz & \text{in } \Omega \times (0, T) \\ z_\nu = 0 & \text{su } \partial\Omega \times (0, T) \\ z(x, 0) = z_0 & x \in \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Allora

$$0 \leq z(x, t) \leq \max_{\Omega} z_0 \quad \text{per ogni } t \in (0, T).$$

Dimostrazione. Si veda [6, Teorema 9, § 7.1.4]. □

Capitolo 3

Definizione di due modelli chemiotattici di Keller–Segel

3.1 L'equazione di continuità: legge integrale e legge differenziale

L'*equazione di continuità* è un'equazione differenziale che esprime la legge di conservazione per una generica grandezza fisica utilizzando il flusso della grandezza attraverso una superficie chiusa. L'equazione di continuità può essere espressa come legge differenziale (*locale*) oppure integrale (*non-locale*).

Enunciamo la legge di continuità per una quantità fisica generale, distribuita in un certo ambiente dello spazio; tale quantità varia nel tempo e nello spazio.

La variazione nel tempo di una determinata quantità distribuita in un ambiente, ed eventualmente prodotta e/o consumata nel tempo, viene bilanciata dal flusso entrante e/o uscente della stessa attraverso le pareti di tale ambiente.

Per formulare matematicamente la suddetta legge consideriamo:

- un volume di controllo Ω dello spazio circostante (\mathbb{R}^3 per problemi reali o \mathbb{R}^N in generale);
- la distribuzione della quantità in esame nella posizione x ed al tempo t , $\rho = \rho(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^N$ e $t > 0$. Ne deriva che la quantità è $q(t) = \int_V \rho(x, t) dx$;
- la sorgente per unità di volume responsabile della produzione/riduzione; $\sigma = \sigma(x, t)$ e quindi $\Sigma(t) = \int_V \sigma(x, t) dx$;
- il flusso per unità di area, $j = j(x, t)$.

La *forma integrale* della legge di continuità si scrive, omettendo la dipendenza dalle variabili x e t ,

$$\frac{d}{dt}q = \int_V \sigma dx - \int_{\partial V} j \cdot \hat{\nu} dS \quad \text{per } t > 0. \quad (3.1)$$

Osservazione 3.1. Il segno “-” nell’espressione sopra indica la situazione per la quale se $j \cdot \hat{\nu} > 0$ il flusso fuoriesce da V attraversando le sue pareti. Questa convenzione è giustificata dall’osservazione che, in assenza di sorgente ($\sigma = 0$), ad un flusso uscente deve corrispondere una diminuzione di quantità; per l’appunto $\frac{d}{dt}q < 0$.

La *forma differenziale* dell’equazione (3.1) si ottiene applicando il Teorema della divergenza 2.9. Siccome $-\int_{\partial V} j \cdot \hat{\nu} dS = -\int_V \nabla \cdot j dx$ e $q = \int_V \rho dx$, si ha

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dx = \int_V \sigma dx - \int_V \nabla \cdot j dx \quad \text{per } t > 0,$$

ovvero

$$\int_V \left(\frac{d}{dt} \rho + \nabla \cdot j - \sigma \right) dx = 0 \quad \text{per } t > 0.$$

Vista l’arbitrarietà del dominio di controllo V , concludiamo grazie alla Proposizione 2.12 che

$$\rho_t + \nabla \cdot j = \sigma \quad \text{per } t > 0. \quad (3.2)$$

3.2 Derivazione dei modelli

Sia Ω il dominio contenente la popolazione biologica e $\partial\Omega$ la sua frontiera. In accordo con l’equazione di conservazione (3.2), ed utilizzando la stessa nomenclatura introdotta nel §1, abbiamo

$$u_t = -\nabla \cdot \Phi + C(u, v).$$

Nel nostro caso, il flusso Φ è costituito da due termini: il flusso diffusivo e il flusso chemiotattico;

$$\Phi = \Phi_{diff} + \Phi_{chemio}.$$

Inoltre, la legge di Fick¹ afferma che

$$\Phi_{diff} = -A(u, v)\nabla u \quad \text{e} \quad \Phi_{chemio} = B(u, v)\nabla v,$$

¹In fisica, in particolare nell’ambito dello studio dei fenomeni di trasporto, le leggi di Fick sono relazioni costitutive che descrivono le variazioni di concentrazione nei materiali in cui sono in atto fenomeni di diffusione molecolare in assenza di diffusione termica. Prendono il nome dal fisiologo tedesco Adolf Fick, che per primo le sviluppò nel 1855.

dove $A(u, v)$ descrive la diffusione e la stabilizzazione delle cellule nel dominio e $B(u, v)$ indica l'influenza del segnale chimico su tale stabilizzazione. Con un ragionamento analogo ma applicato alla funzione v , otteniamo le due equazioni

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot (A(u, v)\nabla u - B(u, v)\nabla v) + C(u, v) & \text{in } \Omega \times (0, +\infty), \\ \tau v_t = \Delta v + E(u, v) & \text{in } \Omega \times (0, +\infty), \end{cases}$$

in cui la funzione $E(u, v)$ descrive l'evoluzione del segnale chimico nel tempo in base alla densità cellulare u e alla densità del segnale chimico stesso v ; $\tau \in \{0, 1\}$ ci consentirà di rendere la seconda equazione di tipo ellittico o parabolico.

Dobbiamo però aggiungere ancora delle ipotesi per rendere più semplice lo studio di questo sistema:

- $A(u, v) = 1$ e $B(u, v) = \chi u$;
- $u_\nu = v_\nu = 0$, rendendo isolato il complesso dall'ambiente esterno;
- le cellule non muoiono e non si riproducono, rendendo di fatto nulla la sorgente $C(u, v)$;
- il movimento delle cellule è una combinazione di *moto browniano* e di *attrazione chemiotattica*;
- $u(x, 0) = u_0 \geq 0$ e $v(x, 0) = v_0 \geq 0$ per ogni $x \in \Omega$.

Con queste ipotesi aggiuntive, il sistema assume la forma finale

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot (u \nabla v) & \text{in } \Omega \times (0, +\infty), \\ \tau v_t = \Delta v + E(u, v) & \text{in } \Omega \times (0, +\infty), \\ u_\nu = v_\nu = 0 & \text{su } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 \text{ e } v(x, 0) = v_0(x) \geq 0 & x \in \Omega. \end{cases}$$

Distinguiamo ora il caso di *produzione* da quello di *consumazione*. Nel primo, la produzione di segnale è proporzionale alla densità cellulare u mentre la sua degradazione è proporzionale al segnale stesso v , facendo risultare $E(u, v) = -v + u$ e, di conseguenza,

$$\tau v_t = \Delta v - v + u \quad \text{in } \Omega \times (0, +\infty).$$

Nel secondo, invece, è presente la sola componente di degradazione, o appunto consumazione, proporzionale sia alla densità cellulare u , sia alla densità di segnale v rendendo la funzione $E(u, v) = -uv$ e conseguentemente

$$\tau v_t = \Delta v - uv \quad \text{in } \Omega \times (0, +\infty).$$

3.2.1 Stabilità delle soluzioni

Con il fine di intuire un possibile comportamento asintotico dei modelli citati, studiamo ora il caso in cui $\Omega = (0, L) \subset \mathbb{R}$ e cerchiamo di risolvere analiticamente il sistema

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot (u \nabla v) & \text{in } \Omega \times (0, +\infty), \\ v_t = \Delta v - v + u & \text{in } \Omega \times (0, +\infty), \\ u_\nu = v_\nu = 0 & \text{su } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 \text{ e } v(x, 0) = v_0(x) \geq 0 & x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.3)$$

Per *stato stazionario omogeneo* del problema adesso riscritto si intendono soluzioni costanti sia nello spazio sia nel tempo, cioè

$$u(x, t) = u_1 \geq 0, \quad v(x, t) = v_1 \geq 0,$$

e

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial v_1}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0.$$

Questo implica che con $a, b > 0$

$$au_1 = bv_1,$$

e quindi che produzione e degradazione sono perfettamente equilibrate. Per quel che concerne la stabilità dedichiamoci alla ricerca di condizioni necessarie e sufficienti che provocano instabilità nel modello. A tal proposito, definiamo $u_2(x, t)$ e $v_2(x, t)$ tali che

$$\begin{cases} u(x, t) = u_1 + u_2(x, t), \\ v(x, t) = v_1 + v_2(x, t), \end{cases}$$

che inserite nella prima equazione del sistema (3.3) producono

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \chi \left((u_1 + u_2) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial v_2}{\partial x} \right).$$

Supponiamo ora che u_1 e v_1 siano molto piccole e che $u_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial v_2}{\partial x}$ siano trascurabili rispetto agli altri termini dell'equazione: la prima equazione è quindi ridotta a

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \chi u_1 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2},$$

e la seconda a

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + au_2 - bv_2.$$

Utilizzando, adesso, le condizioni di Neumann al contorno, ricaviamo

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)_{x=L} = 0, \quad \left(\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)_{x=L} = 0,$$

e definendo il vettore

$$y = \begin{pmatrix} u - u_1 \\ v - v_1 \end{pmatrix},$$

possiamo riscrivere le equazioni del sistema in modo più compatto come

$$y_t = A \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + By, \quad (3.4)$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\chi u_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & -b \end{pmatrix}.$$

Chiamando $Y(x)$ la soluzione, indipendente rispetto al tempo, dell'equazione agli autovalori

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + k^2 Y = 0,$$

ed imponendo che la soluzione supposta esprimibile tramite separazione delle variabili

$$y(x, t) = \sum_k c_k e^{\lambda t} Y_k.$$

soddisfi la (3.4), giungiamo all'equazione:

$$\lambda Y_k = B Y_k - k^2 A Y_k.$$

Imponendo il calcolo degli autovalori della matrice

$$B - k^2 A = \begin{pmatrix} -k^2 & k^2 \chi u_1 \\ a & -b - k^2 \end{pmatrix},$$

otteniamo l'equazione caratteristica

$$0 = \det(B - k^2 A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -k^2 - \lambda & k^2 \chi u_1 \\ a & -b - k^2 - \lambda \end{pmatrix},$$

anche equivalente a

$$\lambda^2 + q\lambda + r = 0,$$

dove

$$q = 2k^2 + b \quad \text{e} \quad r = k^2(k^2 + b - a\chi u_1).$$

Essendo le soluzioni

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{4a\chi k^2 u_1 + b^2} - b - 2k^2 \right) \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{4a\chi k^2 u_1 + b^2} - b - 2k^2 \right),$$

risulta essere χ a determinare la stabilità del sistema. In particolare, se χ è sufficientemente piccolo, λ_1 e λ_2 sono entrambi negativi ed avremo un modello stabile, al contrario per χ grande, il segno di λ_2 potrebbe essere nullo o positivo e la stabilità potrebbe perdersi.

Osservazione 3.2. *L'analisi ora sviluppata è consistente con il modello; in effetti, se la chemiosensibilità χ aumenta, il meccanismo presenta forte attrazione cellulare che può superare l'effetto diffusivo rompendo l'equilibrio naturale e degenerando in alcune instabilità. Al contrario, se la chemiosensibilità χ è relativamente piccola, il meccanismo tende ad uno stato di equilibrio $u(x, t) = v(x, t) = \text{costante}$, che effettivamente risolve il problema (3.3). Come vedremo successivamente, ed in particolare nel capitolo dedicato alle simulazioni numeriche, tale costante è determinata da $u_0(x)$ ed è esattamente $c := \frac{m}{|\Omega|}$.*

3.3 Il problema di produzione e il problema di consumazione

In questa sezione ci dedicheremo ai modelli di Keller–Segel già menzionati, e quindi prima al caso in cui il segnale chimico è linearmente prodotto dalle cellule, dopo a quello in cui le cellule consumano il segnale chimico stesso. In entrambi i casi considereremo la formulazione in un generico dominio N -dimensionale e a tal fine faremo uso delle seguenti notazioni e risultati.

Problema di produzione (\mathcal{P}). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, un aperto limitato tale che $\Omega \in \text{Lip}$, $\chi > 0$ e $T_{\max} \in (0, +\infty]$. Inoltre siano $u_0 = u(x, 0) \in C^0(\bar{\Omega})$ con $u_0 \geq 0$. Trovare $u = u(x, t)$ e $v = v(x, t)$ tali che*

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot u \nabla v & \text{in } \Omega \times (0, T_{\max}), \\ 0 = \Delta v - v + u & \text{in } \Omega \times (0, T_{\max}), \\ u(x, 0) = u_0 & \text{se } x \in \bar{\Omega}, \\ u_\nu = v_\nu = 0 & \text{in } \partial\Omega \times (0, T_{\max}). \end{cases} \quad (3.5)$$

Il risultato teorico principale che dimostreremo in questo lavoro, collegato al problema adesso definito, è il seguente

Teorema 3.3. *Sia $N = 1$, $\chi > 0$, $u_0 \geq 0$ e $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$. Allora il problema \mathcal{P} ammette un'unica soluzione classica (u, v) globale e uniformemente limitata nel tempo. Formalmente*

$$(u, v) \in \left(C^{2,1}(\Omega \times (0, +\infty)) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega} \times [0, +\infty)) \right)^2,$$

ed inoltre

$$u, v \in L^\infty((0, +\infty); L^\infty(\Omega)).$$

La stessa conclusione vale per $N \geq 2$ se $\chi \int_\Omega u_0$ è sufficientemente piccolo.

Problema di consumazione (\mathcal{C}). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, un aperto limitato tale che $\Omega \in \text{Lip}$, $\chi > 0$ e $T_{\max} \in (0, +\infty]$. Inoltre siano $u_0 = u(x, 0) \in C^0(\overline{\Omega})$ con $u_0 \geq 0$ e $v_0 = v(x, 0) \in C^1(\overline{\Omega})$ con $v_0 \geq 0$. Trovare $u = u(x, t)$ e $v = v(x, t)$ tali che*

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot u \nabla v & \text{in } \Omega \times (0, T_{\max}), \\ v_t = \Delta v - uv & \text{in } \Omega \times (0, T_{\max}), \\ u(x, 0) = u_0, v(x, 0) = v_0 & \text{se } x \in \overline{\Omega}, \\ u_\nu = v_\nu = 0 & \text{in } \partial\Omega \times (0, T_{\max}). \end{cases} \quad (3.6)$$

Teorema 3.4. *Sia $N \in \{1, 2\}$, $\chi > 0$, $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ con $u_0 \geq 0$, e $v_0 \in C^0(\overline{\Omega})$, con $v_0 \geq 0$. Allora il problema \mathcal{C} ammette un'unica soluzione classica (u, v) globale e uniformemente limitata nel tempo. Formalmente.*

$$(u, v) \in \left(C^{2,1}(\Omega \times (0, +\infty)) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega} \times [0, +\infty)) \right)^2,$$

ed inoltre

$$u, v \in L^\infty((0, +\infty); L^\infty(\Omega)).$$

La stessa conclusione vale per $N \geq 3$ se $\chi \|v_0\|_\infty < \frac{2}{3N}$.

3.4 Proprietà delle soluzioni per i problemi di produzione e consumazione: esistenza locale e criterio di estensione

In riferimento ai problemi \mathcal{P} e \mathcal{C} osserviamo che essi sono almeno localmente, nel tempo, risolvibili. Questo significa che partendo dai dati iniziali, ovvero funzioni della sola variabile spaziale, per tempi piccoli esistono funzioni delle variabili spaziali e temporali che risolvono classicamente i problemi menzionati. Daremo una dimostrazione formale di quanto detto solo per il problema \mathcal{P} , essendo la dimostrazione simile nell'altro caso.

Lemma 3.5 (Esistenza locale per il \mathcal{P}). *Siano verificate tutte le ipotesi del Problema \mathcal{P} . Allora esistono $T_{\max} \in (0, +\infty)$ e un'unica coppia*

$$(u, v) \in \left(C^{2,1}(\Omega \times (0, T_{\max})) \cap C^{1,0}(\bar{\Omega} \times (0, T_{\max})) \right)^2,$$

con $u, v \geq 0$ in $\bar{\Omega} \times [0, T_{\max})$, che risolve (3.5). Inoltre vale la seguente conservazione della massa:

$$\int_{\Omega} u = \int_{\Omega} u_0 = m \quad \text{per ogni } t \in (0, T_{\max}).$$

Infine se $T_{\max} < \infty$, necessariamente

$$\limsup_{t \rightarrow T_{\max}} \|u(\cdot, t)\|_{\infty} = +\infty \quad (3.7)$$

Dimostrazione. Supponendo nota la soluzione (la dimostrazione segue più in basso), verifichiamo la conservazione della massa. Utilizzando la prima equazione del sistema (3.5) e partendo dalla derivata di m rispetto al tempo t , otteniamo, per ogni $t \in (0, T_{\max})$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u = \int_{\Omega} u_t = \int_{\Omega} (\Delta u - \chi \nabla \cdot u \nabla v) = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla u - \chi u \nabla v).$$

Applicando la (2.9) e tenendo conto del fatto che $u_{\nu} = v_{\nu} = 0$, otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= \int_{\Omega} (\nabla u - \chi u \nabla v) \cdot \nu \, dS \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nu \, dS - \chi \int_{\Omega} u \nabla v \cdot \nu \, dS \\ &= \int_{\Omega} u_{\nu} \, dS - \chi \int_{\Omega} u v_{\nu} \, dS = 0. \end{aligned}$$

Esistenza. Dimostriamo ora l'esistenza di T_{\max} e della coppia di funzioni (u, v) , soluzione di (3.5). Per ogni $T \in (0, 1)$, $0 \neq u_0 \in C^0(\bar{\Omega})$, definiamo $R := \|u_0\|_{\infty} + 1$ e $X = C^0(\bar{\Omega} \times [0, T])$. Sia $S := \{0 \leq u \in X : \|u(\cdot, t)\|_{\infty} \leq R \text{ per ogni } t \in [0, T]\}$ sottoinsieme chiuso di X . Fissiamo $\hat{u} \in S$ e sia v la soluzione di

$$\begin{cases} \hat{u} = -\Delta v + v & \text{in } \Omega \times (0, T) \\ v_{\nu} = 0 & \text{su } \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (3.8)$$

Sia inoltre u la soluzione di

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot u \nabla v & \text{in } \Omega \times (0, T) \\ u_{\nu} = 0 & \text{su } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.9)$$

L'obiettivo è mostrare che per l'applicazione $\varphi: S \rightarrow S$, con $\varphi(\hat{u}) = u$, è possibile applicare il teorema del punto fisso di Schauder. Prima di tutto osserviamo che, fissato $\hat{u} \in S$, il Teorema di Morrey [3, p. 282] insieme ad alcuni risultati sulla regolarità delle soluzioni di equazioni ellittiche ci garantiscono che $v(\cdot, t) \in C^{1,\delta}(\Omega)$ per ogni $\delta \in (0, 1)$ e che v è unica. Inoltre $\nabla v \in L^\infty(\Omega)$ per ogni $t \in (0, T)$. D'altra parte, il principio del massimo ellittico (si utilizzi la Proposizione 2.15 con $f = \hat{u} \geq 0$ e $z = v$), ci garantisce che

$$0 \leq v(x, t) \leq \sup_{\Omega} \hat{u} = \Gamma.$$

Quindi, utilizzando le proprietà di ∇v [21, Teorema V 1.1] applicate al sistema (3.9), otteniamo che $u \in C^{\delta_1, \frac{\delta_1}{2}}(\Omega \times (0, T))$ per qualche $\delta_1 \in (0, 1)$. Quindi:

$$|u(x_1, t_1) - u(x_2, t_2)| \leq c \left(|x_1 - x_2|^{\delta_1} + |t_1 - t_2|^{\frac{\delta_1}{2}} \right),$$

per ogni $x_1, x_2 \in \Omega$ e $t_1, t_2 \in (0, T)$, cioè:

$$u(x, t) \leq u_0(\cdot) + ct^{\frac{\delta_1}{2}} \quad \text{per ogni } t \in (0, T).$$

Questo implica a sua volta che

$$\max_{t \in [0, T]} \|u(\cdot, t)\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty + cT^{\frac{\delta_1}{2}}.$$

Inoltre, se $T < c^{-\frac{2}{\delta_1}}$, otteniamo che

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty + 1 = R.$$

Per quel che riguarda la non negatività di u e v , osserviamo quanto segue. Se consideriamo $\underline{u} \equiv 0$ notiamo che essa risolve evidentemente la prima equazione del sistema (3.5). In particolare, in linea con [6, §7.1.4], essa è una sua sottosoluzione. Inoltre u risolve la stessa equazione e pertanto è una soprasoluzione; otteniamo quindi che $u \geq \underline{u} \equiv 0$ in $\Omega \times (0, T)$. Considerata la non negatività di u nella seconda equazione del sistema (3.5), invociamo il principio del massimo per le equazioni ellittiche (si veda [6, §6.4]) ed otteniamo che anche $v \geq 0$ in $(0, T)$. In definitiva quindi risulta $\varphi(S) \subseteq S$. Inoltre φ compatta perché $C^{\delta_1, \frac{\delta_1}{2}}(\Omega \times (0, T)) \hookrightarrow X$. Possiamo quindi applicare il Teorema 2.13, che ci assicura che esiste $u \in S$ tale che $\varphi(u) = u$. Grazie a [3, Teorema 9.33] e [21, Teorema V 6.1] applicati ai sistemi (3.8) e (3.9), otteniamo che $v \in C^{2+\delta_1, \frac{\delta_1}{2}}(\bar{\Omega} \times [\tau, T])$ e $u \in C^{2+\delta_1, 1+\frac{\delta_1}{2}}(\bar{\Omega} \times [\tau, T])$ per ogni

$\tau \in (0, T)$. Possiamo estendere quindi la soluzione nell'intervallo $[0, T_{\max})$ dove $T_{\max} < +\infty$ se e solo se

$$\limsup_{t \rightarrow T_{\max}} \|u(\cdot, t)\|_{\infty} = +\infty.$$

Unicit . Siano per assurdo (u_1, v_1) e (u_2, v_2) due soluzioni distinte non negative del sistema (3.5) tali che $u_1(\cdot, 0) = u_2(\cdot, 0)$. Questo implica che:

$$u_{1t} - u_{2t} = \Delta(u_1 - u_2) - \chi \nabla \cdot (u_1 \nabla v_1 - u_2 \nabla v_2).$$

Moltiplicando entrambi i membri per $(u_1 - u_2)$ e integrando in Ω , otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u_1 - u_2)^2 &= \int_{\Omega} (u_1 - u_2) \Delta(u_1 - u_2) - \chi \int_{\Omega} (u_1 - u_2) \nabla \cdot (u_1 \nabla v_1 - u_2 \nabla v_2) \\ &= - \int_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 + \chi \int_{\Omega} (u_1 \nabla v_1 - u_2 \nabla v_2) \cdot \nabla(u_1 - u_2) \\ &\leq - \int_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 + \int_{\Omega} |\chi(u_1 \nabla v_1 - u_2 \nabla v_2)| |\nabla(u_1 - u_2)| \\ &\leq - \int_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 + \frac{\chi^2}{2} \int_{\Omega} |u_1 \nabla v_1 - u_2 \nabla v_2|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \\ &= - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 + \frac{\chi^2}{2} \int_{\Omega} |u_1 \nabla v_1 - u_2 \nabla v_2|^2 \\ &\leq \frac{\chi^2}{2} \int_{\Omega} |u_1 \nabla v_1 - u_2 \nabla v_2|^2, \end{aligned}$$

dove la seconda uguaglianza   la (2.9), tenendo conto del fatto che $u_{\nu} = v_{\nu} = 0$, la prima disuguaglianza   quella di Cauchy-Schwarz e la seconda disuguaglianza   la (2.1). Notiamo che possiamo scrivere l'argomento dell'ultimo integrale come

$$|u_1 \nabla v_1 - u_2 \nabla v_2 \pm u_2 \nabla v_1|^2 = |(u_1 - u_2) \nabla v_1 + u_2 \nabla(v_1 - v_2)|^2,$$

facendo risultare che

$$\begin{aligned} \frac{\chi^2}{2} \int_{\Omega} |u_1 \nabla v_1 - u_2 \nabla v_2|^2 &= \frac{\chi^2}{2} \int_{\Omega} |(u_1 - u_2) \nabla v_1 + u_2 \nabla(v_1 - v_2)|^2 \\ &\leq \chi^2 \left(\int_{\Omega} (u_1 - u_2)^2 |\nabla v_1|^2 + \int_{\Omega} u_2^2 |\nabla(v_1 - v_2)|^2 \right), \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $|v+w|^2 \leq 2(|v|^2 + |w|^2)$ per ogni $v, w \in V$ spazio vettoriale dotato di prodotto scalare. Otteniamo quindi che

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u_1 - u_2)^2 \leq \chi^2 \left(\int_{\Omega} (u_1 - u_2)^2 |\nabla v_1|^2 + \int_{\Omega} u_2^2 |\nabla(v_1 - v_2)|^2 \right), \quad (3.10)$$

e inoltre vale

$$\int_{\Omega} (u_1(\cdot, 0) - u_2(\cdot, 0))^2 = 0. \quad (3.11)$$

Consideriamo ora la seconda equazione del sistema (3.5). Sempre per il fatto che (u_1, v_1) e (u_2, v_2) sono soluzioni distinte, si ha che:

$$-\Delta(v_1 - v_2) = (u_1 - u_2) - (v_1 - v_2).$$

Moltiplicando entrambi i membri per $(v_1 - v_2)$ e integrando in Ω , otteniamo

$$-\int_{\Omega} (v_1 - v_2)\Delta(v_1 - v_2) = \int_{\Omega} (u_1 - u_2)(v_1 - v_2) - \int_{\Omega} (v_1 - v_2)^2,$$

e, applicando la (2.9) sempre ricordando che $u_\nu = v_\nu = 0$, osserviamo che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla(v_1 - v_2)|^2 &= \int_{\Omega} (u_1 - u_2)(v_1 - v_2) - \int_{\Omega} (v_1 - v_2)^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_1 - u_2)^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (v_1 - v_2)^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_1 - u_2)^2 \leq \int_{\Omega} (u_1 - u_2)^2, \end{aligned} \quad (3.12)$$

dove la prima disuguaglianza è $ab - b^2 \leq \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2}$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, ricavando che

$$\int_{\Omega} |\nabla(v_1 - v_2)|^2 \leq \int_{\Omega} (u_1 - u_2)^2. \quad (3.13)$$

In modo simile, operando in (3.12), arriviamo anche alla conclusione che

$$\int_{\Omega} (v_1 - v_2)^2 \leq \int_{\Omega} (u_1 - u_2)^2. \quad (3.14)$$

Possiamo inoltre affermare che, preso un arbitrario $T_0 \in (0, T_{\max})$, esiste $C = C(T_0) \geq 0$ tale che $|\nabla v_1| \leq C$ e $u_2 \leq C$ in $(0, T_0)$. Utilizzando la (3.10) insieme alla (3.13), ricaviamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u_1 - u_2)^2 &\leq \chi^2 \left(\int_{\Omega} (u_1 - u_2)^2 |\nabla v_1|^2 + \int_{\Omega} u_2^2 |\nabla(v_1 - v_2)|^2 \right) \\ &\leq \chi^2 C^2 \left(\int_{\Omega} (u_1 - u_2)^2 + \int_{\Omega} |\nabla(v_1 - v_2)|^2 \right) \\ &\leq \chi^2 C^2 \left(\int_{\Omega} (u_1 - u_2)^2 + \int_{\Omega} (u_1 - u_2)^2 \right) \\ &= 2\chi^2 C^2 \int_{\Omega} (u_1 - u_2)^2. \end{aligned}$$

Ponendo $F(t) = \int_{\Omega} (u_1 - u_2)^2$, insieme alla (3.11), giungiamo al problema:

$$\begin{cases} F'(t) \leq 4\chi^2 C^2 F(t) & \text{in } (0, T_0), \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $F(t) \equiv 0$. Essendo T_0 arbitrario, abbiamo anche che $F(t) \equiv 0$ in $(0, T_{\max})$. Quindi $u_1 = u_2$ in $(0, T_{\max})$ e grazie alla (3.14) abbiamo che $v_1 = v_2$. \square

Essendo l'obiettivo quello di dimostrare che le soluzioni dei nostri problemi sono globali e limitate nel tempo, sarà sufficiente verificare che per qualche $L > 0$

$$\|u(\cdot, t)\|_{\infty} \leq L \quad \text{per ogni } t \in (0, T_{\max}). \quad (3.15)$$

Infatti se la soluzione fosse locale, T_{\max} sarebbe finito e tale reazione contraddirebbe (3.7).

D'altra parte però verificare (3.15) usando direttamente la definizione di $\|\cdot\|_{\infty}$ non sembra triviale; di fatto la norma infinito non è differenziabile rispetto al tempo. Fortunatamente il problema può essere ovviato controllando la $\|u\|$ in un opportuno spazio di Lebesgue. Nello specifico utilizzeremo fortemente il seguente

Lemma 3.6 (Criterio di estensione). *Sia (u, v) l'unica soluzione locale del problema \mathcal{P} . Se esiste una costante $C > 0$ tale che, per qualche $p > \max\{1, \frac{N}{2}\}$, si ha che*

$$\int_{\Omega} u^p \leq C \quad \text{per ogni } t \in (0, T_{\max}),$$

allora vale la (3.15).

Dimostrazione. Si veda [34, Lemma 4.1] unito a [2, Lemma 3.2]. \square

Osservazione 3.7. *Così come per il Lemma 3.5, che abbiamo dimostrato per il problema \mathcal{P} , anche il sopraccitato Lemma 3.6 vale nella stessa forma per il problema \mathcal{C} .*

3.5 Uniforme limitatezza per il Problema di produzione

Per quanto commentato sopra, al fine di dimostrare il Teorema 3.3 è sufficiente limitare $\int_{\Omega} u^p$ in $(0, T_{\max})$. A tal fine analizzeremo l'andamento nel tempo del funzionale

$$g(t) = \int_{\Omega} u^p = \|u\|_p^p, \quad \text{per ogni } t \in (0, T_{\max}), \quad (3.16)$$

definito sulla soluzione locale u .

Dimostrazione del Teorema 3.3

Consideriamo il funzionale definito in (3.16) e deriviamolo rispetto al tempo. Si ha

$$\begin{aligned} g'(t) &= p \int_{\Omega} u^{p-1} u_t = p \int_{\Omega} u^{p-1} (\Delta u - \chi \nabla \cdot u \nabla v) \\ &= p \int_{\Omega} u^{p-1} \Delta u - p \chi \int_{\Omega} u^{p-1} \nabla \cdot u \nabla v \quad t \in (0, T_{\max}). \end{aligned}$$

Applicando la (2.9) e ricordando che $u_\nu = v_\nu = 0$, otteniamo

$$\begin{aligned} g'(t) &= -p(p-1) \int_{\Omega} u^{p-2} |\nabla u|^2 + p(p-1) \chi \int_{\Omega} u^{p-1} \nabla u \cdot \nabla v \\ &= -p(p-1) \int_{\Omega} \frac{4}{p^2} |\nabla u^{\frac{p}{2}}|^2 + p(p-1) \chi \int_{\Omega} \frac{1}{p} \nabla u^p \cdot \nabla v \\ &= -\frac{4(p-1)}{p} \int_{\Omega} |\nabla u^{\frac{p}{2}}|^2 + (p-1) \chi \int_{\Omega} \nabla u^p \cdot \nabla v \quad t \in (0, T_{\max}). \end{aligned}$$

Un ulteriore uso della (2.9) al secondo addendo della relazione precedente, e tenendo sempre conto del fatto che $u_\nu = v_\nu = 0$, produce

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\frac{4(p-1)}{p} \int_{\Omega} |\nabla u^{\frac{p}{2}}|^2 - (p-1) \chi \int_{\Omega} u^p \Delta v \\ &= -\frac{4(p-1)}{p} \int_{\Omega} |\nabla u^{\frac{p}{2}}|^2 - (p-1) \chi \int_{\Omega} u^p (v-u) \\ &= -\frac{4(p-1)}{p} \int_{\Omega} |\nabla u^{\frac{p}{2}}|^2 - (p-1) \chi \int_{\Omega} u^p v + (p-1) \chi \int_{\Omega} u^{p+1} \\ &\leq -\frac{4(p-1)}{p} \int_{\Omega} |\nabla u^{\frac{p}{2}}|^2 + (p-1) \chi \int_{\Omega} u^{p+1}, \quad t \in (0, T_{\max}). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Il nostro obiettivo è costruire una disequazione differenziale ordinaria per il funzionale g sopra definito e dimostrare che la relativa soluzione è uniformemente limitata nel tempo. A tal fine consideriamo

$$g(t) = \int_{\Omega} u^p = \int_{\Omega} \left(u^{\frac{p}{2}}\right)^2 = \left\|u^{\frac{p}{2}}\right\|_2^2 \quad t \in (0, T_{\max}), \tag{3.18}$$

che andremo a manipolare tramite la disuguaglianza di Gagliardo–Nirenberg, menzionata nel Teorema 2.9. Nello specifico, utilizzando la (2.8) con $d = 2$ e $q = s = \frac{2}{p}$, otteniamo

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N}\right) \theta_1 + \frac{1 - \theta_1}{2} p$$

e quindi

$$\theta_1 = \frac{N(p-1)}{N(p-1)+2} \in (0, 1).$$

Di conseguenza possiamo applicare la (2.7) con $f = u^{\frac{p}{2}}$ a (3.18) e, successivamente, la (2.4) con $\delta = 2$.

$$\begin{aligned} g(t) &= \left\| u^{\frac{p}{2}} \right\|_2^2 \leq C_{GN}^2 \left(\left\| \nabla u^{\frac{p}{2}} \right\|_2^{\theta_1} \left\| u^{\frac{p}{2}} \right\|_{\frac{2}{p}}^{1-\theta_1} + \left\| u^{\frac{p}{2}} \right\|_{\frac{2}{p}} \right)^2 \\ &\leq C_{GN}^2 2^2 \left[\left(\int_{\Omega} |\nabla u^{\frac{p}{2}}|^2 \right)^{\frac{\theta_1}{2} 2} \left(\int_{\Omega} \left(u^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{2}{p}} \right)^{\frac{p}{2}(1-\theta_1)2} + \left(\int_{\Omega} \left(u^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{2}{p}} \right)^{\frac{p}{2} 2} \right]. \end{aligned}$$

Ricordando la conservazione della massa, poniamo $m = \int_{\Omega} u$ e, utilizzando la (2.2) con $\alpha = \theta_1$, dalla precedente relazione si ha che in $(0, T_{\max})$

$$\begin{aligned} g(t) &\leq 4C_{GN}^2 \left[\left(\int_{\Omega} |\nabla u^{\frac{p}{2}}|^2 \right)^{\theta_1} m^{p(1-\theta_1)} + m^p \right] \\ &= 4C_{GN}^2 \left(\int_{\Omega} |\nabla u^{\frac{p}{2}}|^2 \right)^{\theta_1} m^{p(1-\theta_1)} + 4C_{GN}^2 m^p \\ &\leq 4C_{GN}^2 \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u^{\frac{p}{2}}|^2 + 4C_{GN}^2 C_Y(\varepsilon, \theta_1) m^p + 4C_{GN}^2 m^p \\ &= C_1 \int_{\Omega} |\nabla u^{\frac{p}{2}}|^2 + C_2, \end{aligned} \tag{3.19}$$

con

$$C_1 = 4C_{GN}^2 \varepsilon \quad \text{e} \quad C_2 = 4C_{GN}^2 m^p [C_Y(\varepsilon, \theta_1) + 1].$$

Consideriamo ora il secondo termine della somma nell'ultima riga della (3.17) e trattiamolo in modo simile; a tal proposito scriviamo

$$\chi(p-1) \int_{\Omega} u^{p+1} = \chi(p-1) \int_{\Omega} u^{\frac{p}{2} \frac{2(p+1)}{p}} = \chi(p-1) \left\| u^{\frac{p}{2}} \right\|_{\frac{2(p+1)}{p}}^{\frac{2(p+1)}{p}}.$$

Utilizzando la (2.8) con $d = \frac{2(p+1)}{p}$ e $q = s = \frac{2}{p}$, si ha che

$$\frac{p}{2(p+1)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N} \right) \theta + \frac{1-\theta}{2} p$$

e quindi

$$\theta = \frac{\frac{p}{2} - \frac{p}{p+1}}{\frac{p}{2} + \frac{1}{N} - \frac{1}{2}} \tag{3.20}$$

Dal momento che $p > \max\{1, \frac{N}{2}\}$, risulta che $\theta \in (0, 1)$ e possiamo quindi applicare la (2.7) con $f = u^{\frac{p}{2}}$ e, successivamente, la (2.4) con $\delta = \frac{2(p+1)}{p}$ ottenendo per ogni $t \in (0, T_{\max})$

$$\begin{aligned}
\chi(p-1) \int_{\Omega} u^{p+1} &= \chi(p-1) \left\| u^{\frac{p}{2}} \right\|_{\frac{2(p+1)}{p}}^{\frac{2(p+1)}{p}} \\
&\leq \chi(p-1) \hat{C}_{GN}^{\frac{2(p+1)}{p}} \left(\left\| \nabla u^{\frac{p}{2}} \right\|_2^{\theta} \left\| u^{\frac{p}{2}} \right\|_{\frac{2}{p}}^{1-\theta} + \left\| u^{\frac{p}{2}} \right\|_{\frac{2}{p}} \right)^{\frac{2(p+1)}{p}} \\
&\leq \chi(p-1) \hat{C}_{GN}^{\frac{2(p+1)}{p}} 2^{\frac{2(p+1)}{p}} \left\{ \left(\int_{\Omega} |\nabla u^{\frac{p}{2}}|^2 \right)^{\frac{\theta}{2} \frac{2(p+1)}{p}} \left(\int_{\Omega} \left(u^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{2}{p}} \right)^{\frac{p}{2}(1-\theta) \frac{2(p+1)}{p}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_{\Omega} \left(u^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{2}{p}} \right)^{\frac{p}{2} \frac{2(p+1)}{p}} \right\} \\
&= \chi(p-1) (2\hat{C}_{GN})^{\frac{2(p+1)}{p}} \left[\left(\int_{\Omega} |\nabla u^{\frac{p}{2}}|^2 \right)^{\theta \frac{(p+1)}{p}} m^{(1-\theta)(p+1)} + m^{(p+1)} \right] \\
&= C_3 \left(\int_{\Omega} |\nabla u^{\frac{p}{2}}|^2 \right)^{\theta \frac{(p+1)}{p}} + C_4,
\end{aligned}$$

con

$$C_3 = \chi(p-1) (2\hat{C}_{GN})^{\frac{2(p+1)}{p}} m^{(1-\theta)(p+1)} \quad \text{e} \quad C_4 = \chi(p-1) (2\hat{C}_{GN})^{\frac{2(p+1)}{p}} m^{(p+1)}.$$

Se $N = 1$, dalla (3.20) ricaviamo che $\theta = \left(\frac{p}{p+1}\right)^2$. In questo modo possiamo applicare la (2.2) con $\alpha = \theta \frac{p+1}{p} = \frac{p}{p+1}$, arrivando a

$$\chi(p-1) \int_{\Omega} u^{p+1} \leq \hat{\varepsilon} C_3 \left(\int_{\Omega} |\nabla u^{\frac{p}{2}}|^2 \right) + C_3 C_Y \left(\hat{\varepsilon}, \frac{p}{p+1} \right) + C_4, \quad (3.21)$$

per un certo $\hat{\varepsilon}$ e per ogni $t \in (0, T_{\max})$.

Tenendo conto che ε e $\hat{\varepsilon}$ sono costanti positive arbitrarie, scegliendo

$$\hat{\varepsilon} = \frac{2}{p\chi(2\hat{C}_{GN})^{\frac{2(p+1)}{p}} m^{\frac{2p+1}{p+1}}},$$

e confrontando l'ultima riga della (3.17) con la (3.19) e la (3.21), otteniamo

$$g'(t) \leq C_5 - C_6 g(t) \quad \text{per ogni } t \in (0, T_{\max}),$$

dove

$$C_5 = (p-1)\chi(2\hat{C}_{GN})^{\frac{2(p+1)}{p}}m^{(p+1)}\left[C_Y\left(\hat{\varepsilon}, \frac{p}{p+1}\right) + 1\right] \\ + \frac{2(p-1)}{\varepsilon p}\left[C_Y(\varepsilon, \theta_1) + m^{(\theta_1-1)}\right],$$

e

$$C_6 = \frac{p-1}{2\varepsilon p C_{GN}^2 m^{p(1-\theta_1)}}.$$

Possiamo costruire dunque il seguente sistema:

$$\begin{cases} g'(t) \leq C_5 - C_6 g(t) \\ g(0) = g_0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Essendo $f(t) = \frac{C_5}{C_6}$ soluzione dell'equazione $f'(t) = C_5 - C_6 f(t)$, grazie alla Proposizione 2.14 ricaviamo che $g(t)$ è limitata e, applicando il lemma 3.6, arriviamo alla conclusione che $\|u\|_\infty \leq K$, per un certo $K > 0$. Questo implica che $T_{\max} = +\infty$ e che quindi u è una soluzione globale del sistema (3.5).

Se invece $N = 2$, dalla (3.20) troviamo che $\theta = \frac{p}{p+1}$, facendo risultare che, per $t \in (0, T_{\max})$

$$\chi(p-1) \int_{\Omega} u^{p+1} \leq \\ \leq \chi(p-1)(2\hat{C}_{GN})^{\frac{2(p+1)}{p}}m \int_{\Omega} |\nabla u^{\frac{p}{2}}|^2 + \chi(p-1)(2\hat{C}_{GN})^{\frac{2(p+1)}{p}}m^{p+1}. \quad (3.23)$$

Confrontando quindi l'ultima riga della (3.17) con la (3.19) e la (3.23), ricaviamo che per ogni $t \in (0, T_{\max})$

$$g'(t) \leq \hat{C}_1 - \hat{C}_2 g(t),$$

dove

$$\hat{C}_1 = \chi(p-1)(2\hat{C}_{GN})^{\frac{2(p+1)}{p}}m^{p+1} + \\ + \left[\frac{4(p-1)}{p} - m\chi(p-1)(2\hat{C}_{GN})^{\frac{2(p+1)}{p}} \right] \frac{C_Y(\varepsilon, \theta_1)m^{1-\theta_1} + 1}{m^{1-\theta_1}\varepsilon},$$

*

$$\hat{C}_2 = \frac{\frac{4(p-1)}{p} - m\chi(p-1)(2\hat{C}_{GN})^{\frac{2(p+1)}{p}}}{4C_{GN}^2 m^{p(1-\theta_1)}\varepsilon},$$

e $\hat{C}_1, \hat{C}_2 > 0$ se

$$\chi m < \frac{4}{p \left(2\hat{C}_{GN} \right)^{\frac{2(p+1)}{p}}}.$$

Possiamo dunque costruire il sistema:

$$\begin{cases} g'(t) \leq \hat{C}_1 - \hat{C}_2 g(t) \\ g(0) = g_0 \end{cases}$$

Ragionando analogamente al caso $N = 1$, essendo $f(t) = \frac{\hat{C}_1}{\hat{C}_2}$ soluzione dell'equazione $f'(t) = \hat{C}_1 - \hat{C}_2 f(t)$, grazie alla Proposizione 2.14 ricaviamo che $g(t)$ è limitata e, applicando il lemma 3.6, arriviamo alla conclusione che $\|u\|_\infty \leq \hat{K}$, per un certo $\hat{K} > 0$. Questo implica che $T_{\max} = +\infty$ e che quindi u è una soluzione globale del sistema (3.5).

Il caso $N > 3$ è più tecnico ed i relativi dettagli vengono omessi. L'idea di base è legata ad una applicazione diversa della disuguaglianza di Gagliardo–Nirenberg che, finalmente, implica che il funzionale $g(t)$ soddisfa un problema differenziale come quello in [33, (3.9)]. In tal modo, imponendo condizioni di piccolezza su χm si giunge alla conclusione ragionando esattamente come in [33, Lemma 4.7]. \square

3.6 Uniforme limitatezza per il Problema di consumazione

Così come per il caso di un modello di segnale chimico prodotto, anche in questa circostanza l'uniforme limitatezza deriva dalla limitatezza di u in L^p , per $p > \frac{N}{2}$. (Si veda l'Osservazione 3.7.)

In particolare la dimostrazione del Teorema 3.4 farà uso del seguente

Lemma 3.8. *Per ogni $p > 1$, $\chi > 0$ sia v_0 non negativo con $v_0 \in C^1$, e tale che*

$$\chi \|v_0\|_\infty < \frac{1}{6p}. \quad (3.24)$$

Allora, per ogni u_0 non negativa, con $u_0 \in C^0(\bar{\Omega})$, la soluzione locale (u, v) del Problema \mathcal{C} è tale che

$$\int_{\Omega} u^p \leq K \quad \text{in } (0, T_{\max}),$$

per qualche $K > 0$.

Dimostrazione. Questa dimostrazione è basata su [31]. L'obiettivo primario di questa dimostrazione è la ricerca di una disequazione differenziale simile alla (3.22). Per fare questo, partiamo con il definire, per ogni $t \in (0, T_{\max})$,

$$\beta := \sqrt{\frac{p-1}{24p}} \frac{1}{\|v_0\|_\infty}, \quad (3.25)$$

e

$$\varphi(s) := e^{(\beta s)^2} \quad \text{per ogni } 0 \leq s \leq \|v_0\|_\infty.$$

Consideriamo ora le equazioni del sistema (3.6) e calcoliamo la seguente derivata:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^p \varphi(v) &= \frac{1}{p} \left[p \int_{\Omega} u^{p-1} u_t \varphi(v) + \int_{\Omega} u^p \varphi'(v) v_t \right] = \\ &= \int_{\Omega} u^{p-1} u_t \varphi(v) + \frac{1}{p} \int_{\Omega} u^p \varphi'(v) v_t = \\ &= \int_{\Omega} u^{p-1} \varphi(v) [\Delta u - \chi \nabla \cdot (u \nabla v)] + \frac{1}{p} \int_{\Omega} u^p \varphi'(v) [\Delta v - uv] \\ &= \int_{\Omega} u^{p-1} \varphi(v) \Delta u - \chi \int_{\Omega} u^{p-1} \varphi(v) \nabla \cdot (u \nabla v) \\ &\quad + \frac{1}{p} \int_{\Omega} u^p \varphi'(v) \Delta v - \frac{1}{p} \int_{\Omega} u^{p+1} \varphi'(v) v, \quad \text{per ogni } t \in (0, T_{\max}). \end{aligned}$$

Utilizzando la (2.9), tenendo conto che $u_\nu = v_\nu = 0$, possiamo riscrivere i primi tre addendi dell'ultimo membro nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^{p-1} \varphi(v) \Delta u &= -(p-1) \int_{\Omega} u^{p-2} \varphi(v) |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} u^{p-1} \varphi'(v) \nabla u \cdot \nabla v, \\ -\chi \int_{\Omega} u^{p-1} \varphi(v) \nabla \cdot (u \nabla v) &= \chi(p-1) \int_{\Omega} u^{p-1} \varphi(v) \nabla u \cdot \nabla v + \chi \int_{\Omega} u^p \varphi'(v) |\nabla v|^2, \\ \frac{1}{p} \int_{\Omega} u^p \varphi'(v) \Delta v &= - \int_{\Omega} u^{p-1} \varphi'(v) \nabla u \cdot \nabla v - \frac{1}{p} \int_{\Omega} u^p \varphi''(v) |\nabla v|^2. \end{aligned}$$

Osservazione 3.9. *Essendo $\varphi(v)$ crescente per ogni $0 \leq v \leq \|v_0\|_\infty$, si ha che $\varphi'(v) \geq 0$, e di conseguenza*

$$\frac{1}{p} \int_{\Omega} u^{p+1} \varphi'(v) v \geq 0 \quad \text{per ogni } v.$$

Ora, sostituendo nella catena di uguaglianze i tre addendi riscritti in precedenza e tenendo conto dell'Osservazione 3.9, giungiamo alla seguente disuguaglianza:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^p \varphi(v) + (p-1) \int_{\Omega} u^{p-2} \varphi(v) |\nabla u|^2 + \frac{1}{p} \int_{\Omega} u^p \varphi''(v) |\nabla v|^2 &\leq \\ \leq -2 \int_{\Omega} u^{p-1} \varphi'(v) \nabla u \cdot \nabla v + \chi(p-1) \int_{\Omega} u^{p-1} \varphi(v) \nabla u \cdot \nabla v + \chi \int_{\Omega} u^p \varphi'(v) |\nabla v|^2, \end{aligned}$$

per ogni $t \in (0, T_{\max})$. A questo punto utilizziamo la (2.2) con $\alpha = \frac{1}{2}$, per fare alcune maggiorazioni: abbiamo, da una parte,

$$\begin{aligned}
-2 \int_{\Omega} u^{p-1} \varphi'(v) \nabla u \cdot \nabla v &\leq \left| 2 \int_{\Omega} u^{p-1} \varphi'(v) \nabla u \cdot \nabla v \right| \\
&\leq 2 \int_{\Omega} u^{p-1} \varphi'(v) |\nabla u| |\nabla v| \\
&= \int_{\Omega} \left(u^{p-2} \varphi(v) |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(u^p \frac{\varphi'^2(v)}{\varphi(v)} |\nabla v|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{p-1}{4} \int_{\Omega} u^{p-2} \varphi(v) |\nabla u|^2 + \frac{4}{p-1} \int_{\Omega} u^p \frac{\varphi'^2(v)}{\varphi(v)} |\nabla v|^2,
\end{aligned}$$

e dall'altra

$$\begin{aligned}
\chi(p-1) \int_{\Omega} u^{p-1} \varphi(v) \nabla u \cdot \nabla v &\leq \chi(p-1) \int_{\Omega} u^{p-1} \varphi(v) |\nabla u| |\nabla v| \\
&= \int_{\Omega} \left(u^{p-2} \varphi(v) |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\chi^2(p-1) u^p \varphi(v) |\nabla v|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{p-1}{4} \int_{\Omega} u^{p-2} \varphi(v) |\nabla u|^2 + \chi^2(p-1) \int_{\Omega} u^p \varphi(v) |\nabla v|^2,
\end{aligned}$$

per ogni $t \in (0, T_{\max})$, dove, in entrambi i casi, abbiamo scelto $\varepsilon = \frac{p-1}{4}$ e, di conseguenza,

$$C_Y \left(\frac{p-1}{4}, \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{p-1}.$$

Utilizzando le maggiorazioni appena scritte, ricaviamo la seguente disuguaglianza:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^p \varphi(v) + \frac{p-1}{2} \int_{\Omega} u^{p-2} \varphi(v) |\nabla u|^2 + \frac{1}{p} \int_{\Omega} u^p \varphi''(v) |\nabla v|^2 \leq \\
&\leq \frac{4}{p-1} \int_{\Omega} u^p \frac{\varphi'^2(v)}{\varphi(v)} |\nabla v|^2 + \chi^2(p-1) \int_{\Omega} u^p \varphi(v) |\nabla v|^2 + \chi \int_{\Omega} u^p \varphi'(v) |\nabla v|^2 \\
&= \int_{\Omega} u^p \left(\frac{4}{p-1} \frac{\varphi'^2(v)}{\varphi(v)} + \chi^2(p-1) \varphi(v) + \chi \varphi'(v) \right) |\nabla v|^2. \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Faremo ora vedere che questo termine finale viene maggiorato dal termine

$$\frac{1}{p} \int_{\Omega} u^p \varphi''(v) |\nabla v|^2.$$

Ricordiamo innanzitutto che:

$$\begin{aligned}
\varphi(s) &= e^{(\beta s)^2}, \\
\varphi'(s) &= 2\beta^2 s e^{(\beta s)^2}, \\
\varphi''(s) &= 2\beta^2 e^{(\beta s)^2} + 4\beta^4 s^2 e^{(\beta s)^2},
\end{aligned}$$

e definiamo le seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}
I_1(s) &:= \frac{4}{p-1} \frac{\varphi'^2(s)}{\varphi(s)} = \frac{4}{p-1} 4\beta^4 s^2 e^{(\beta s)^2}, \\
I_2(s) &:= \chi^2(p-1)\varphi(s) = \chi^2(p-1)e^{(\beta s)^2}, \\
I_3(s) &:= \chi\varphi'(s) = 2\chi\beta^2 s e^{(\beta s)^2}, \\
I_4(s) &:= \frac{1}{p}\varphi''(s) = \frac{2}{p}\beta^2 e^{(\beta s)^2} + \frac{4}{p}\beta^4 s^2 e^{(\beta s)^2}.
\end{aligned}$$

Utilizzando la (3.25), il fatto che $0 \leq v \leq \|v_0\|_\infty$ e l'ipotesi (3.24), possiamo analizzare, per ogni $t \in (0, T_{\max})$, i seguenti rapporti:

$$\begin{aligned}
\frac{I_1(v)}{\frac{1}{3}I_4(v)} &= \frac{\frac{4}{p-1}4\beta^4 v^2 e^{(\beta v)^2}}{\frac{1}{3}\frac{2}{p}\beta^2 e^{(\beta v)^2} + \frac{1}{3}\frac{4}{p}\beta^4 v^2 e^{(\beta v)^2}} \leq \frac{\frac{4}{p-1}4\beta^4 v^2 e^{(\beta v)^2}}{\frac{1}{3}\frac{2}{p}\beta^2 e^{(\beta v)^2}} \\
&= \frac{24p}{p-1}\beta^2 v^2 = \frac{1}{\beta^2 \|v_0\|_\infty^2} \beta^2 v^2 \leq 1.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
\frac{I_2(v)}{\frac{1}{3}I_4(v)} &= \frac{\chi^2(p-1)e^{(\beta v)^2}}{\frac{1}{3}\frac{2}{p}\beta^2 e^{(\beta v)^2} + \frac{1}{3}\frac{4}{p}\beta^4 v^2 e^{(\beta v)^2}} \leq \frac{\chi^2(p-1)e^{(\beta v)^2}}{\frac{1}{3}\frac{2}{p}\beta^2 e^{(\beta v)^2}} \\
&= \frac{3}{2}p(p-1)\chi^2 \frac{1}{\beta^2} = 36p^2 \chi^2 \|v_0\|_\infty^2 \leq 36p^2 \frac{1}{36p^2} = 1.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
\frac{I_3(v)}{\frac{1}{3}I_4(v)} &= \frac{2\chi\beta^2 v e^{(\beta v)^2}}{\frac{1}{3}\frac{2}{p}\beta^2 e^{(\beta v)^2} + \frac{1}{3}\frac{4}{p}\beta^4 v^2 e^{(\beta v)^2}} \leq \frac{2\chi\beta^2 v e^{(\beta v)^2}}{\frac{1}{3}\frac{2}{p}\beta^2 e^{(\beta v)^2}} \\
&= 3p\chi v \leq 3p\chi \|v_0\|_\infty \leq 3p \frac{1}{6p} = \frac{1}{2} < 1.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Sommando (3.27), (3.28) e (3.29), giungiamo alla conclusione che, per ogni $t \in (0, T_{\max})$,

$$I_1(v) + I_2(v) + I_3(v) \leq I_4(v),$$

o, equivalentemente,

$$\frac{4}{p-1} \frac{\varphi'^2(v)}{\varphi(v)} + \chi^2(p-1)\varphi(v) + \chi\varphi'(v) \leq \frac{1}{p}\varphi''(v), \tag{3.30}$$

per ogni $t \in (0, T_{\max})$. Inserendo la (3.30) in (3.26), concludiamo questa prima parte scrivendo la seguente disuguaglianza valida per ogni $t \in (0, T_{\max})$:

$$\frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^p \varphi(v) + \frac{p-1}{2} \int_{\Omega} u^{p-2} \varphi(v) |\nabla u|^2 \leq 0. \tag{3.31}$$

Prima di continuare, ricaviamo una disuguaglianza che ci sarà utile in seguito. Essendo $0 \leq v \leq \|v_0\|_\infty$, sappiamo che $1 \leq \varphi(v) \leq e^{(\beta\|v_0\|_\infty)^2} := b$, che implica a sua volta che, per ogni $t \in (0, T_{\max})$,

$$\int_{\Omega} u^{p-2} \varphi(v) |\nabla u|^2 \geq \int_{\Omega} u^{p-2} |\nabla u|^2 = \frac{4}{p^2} \int_{\Omega} |\nabla u^{\frac{p}{2}}|^2,$$

ottenendo la disuguaglianza cercata:

$$\int_{\Omega} |\nabla u^{\frac{p}{2}}|^2 \leq \frac{p^2}{4} \int_{\Omega} u^{p-2} \varphi(v) |\nabla u|^2 \quad \text{per ogni } t \in (0, T_{\max}). \quad (3.32)$$

Definiamo ora il funzionale:

$$g(t) = \int_{\Omega} u^p \varphi(v) \quad \text{per ogni } t \in (0, T_{\max}),$$

e osserviamo che:

$$g(t) = \int_{\Omega} u^p \varphi(v) \leq b \int_{\Omega} u^p = b \|u^{\frac{p}{2}}\|_2^2. \quad (3.33)$$

Se consideriamo la (2.8) con $d = 2$ e $q = s = \frac{2}{p}$, risulta che

$$\theta = \frac{\frac{p}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{p}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{N}} \in (0, 1).$$

Possiamo quindi applicare la (2.7) con $d = 2$ e $q = s = \frac{2}{p}$, e successivamente la (2.4) con $\delta = 2$, ottenendo, per ogni $t \in (0, T_{\max})$,

$$\begin{aligned} g(t) &\leq b \|u^{\frac{p}{2}}\|_2^2 \leq b C_{GN}^2 \left(\|\nabla u^{\frac{p}{2}}\|_2^\theta \|u^{\frac{p}{2}}\|_2^{1-\theta} + \|u^{\frac{p}{2}}\|_2^{\frac{p}{2}} \right)^2 \\ &\leq b C_{GN}^2 2^2 \left[\left(\int_{\Omega} |\nabla u^{\frac{p}{2}}|^2 \right)^{\frac{\theta}{2}} \left(\int_{\Omega} (u^{\frac{p}{2}})^{\frac{2}{p}} \right)^{\frac{p}{2}(1-\theta)^2} + \left(\int_{\Omega} (u^{\frac{p}{2}})^{\frac{2}{p}} \right)^{\frac{p}{2} \cdot 2} \right] \\ &= 4b C_{GN}^2 \left[\left(\int_{\Omega} |\nabla u^{\frac{p}{2}}|^2 \right)^\theta m^{p(1-\theta)} + m^p \right], \end{aligned}$$

dove, ricordando la conservazione della massa, abbiamo posto $m = \int_{\Omega} u$. Possiamo ora applicare la (2.2) con $\alpha = \theta$, facendo risultare che, in $(0, T_{\max})$:

$$\begin{aligned} g(t) &\leq 4b C_{GN}^2 \left[\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u^{\frac{p}{2}}|^2 + C_Y(\varepsilon, \theta) m^p + m^p \right] \\ &= 4\varepsilon b C_{GN}^2 \int_{\Omega} |\nabla u^{\frac{p}{2}}|^2 + 4b C_{GN}^2 m^p [C_Y(\varepsilon, \theta) + 1] \\ &= C_1 \int_{\Omega} |\nabla u^{\frac{p}{2}}|^2 + C_2, \end{aligned} \quad (3.34)$$

dove

$$C_1 = 4\varepsilon b C_{GN}^2 \quad \text{e} \quad C_2 = 4b C_{GN}^2 m^p [C_Y(\varepsilon, \theta) + 1].$$

Unendo l'ultima riga della (3.34) con la (3.32), si ottiene quindi che, in $(0, T_{\max})$:

$$g(t) \leq C_1 \frac{p^2}{4} \int_{\Omega} u^{p-2} \varphi(v) |\nabla u|^2 + C_2,$$

che si traduce in

$$- \int_{\Omega} u^{p-2} \varphi(v) |\nabla u|^2 \leq \frac{4C_2}{p^2 C_1} - \frac{4}{p^2 C_1} g(t). \quad (3.35)$$

Dalla (3.31), insieme alla (3.35), possiamo affermare che, in $(0, T_{\max})$:

$$\begin{aligned} g'(t) &\leq -\frac{p(p-1)}{2} \int_{\Omega} u^{p-2} \varphi(v) |\nabla u|^2 \leq 2 \frac{p-1}{p} \frac{C_2}{C_1} - \frac{2(p-1)}{p C_1} g(t) \\ &= C_3 - C_4 g(t), \end{aligned}$$

dove

$$C_3 = \frac{2(p-1)C_2}{p C_1} \quad \text{e} \quad C_4 = \frac{2(p-1)}{p C_1}.$$

Possiamo costruire dunque il seguente sistema:

$$\begin{cases} g'(t) \leq C_3 - C_4 g(t) \\ g(0) = g_0 \end{cases} \quad (3.36)$$

Essendo $f(t) = \frac{C_3}{C_4}$ soluzione dell'equazione $f'(t) = C_3 - C_4 f(t)$, grazie alla Proposizione 2.14 ricaviamo che $g(t)$ è limitata. Quindi, per ogni $t \in (0, T_{\max})$,

$$\|u(\cdot, t)\|_p^p = \int_{\Omega} u^p \leq \int_{\Omega} u^p \varphi(t) \leq K \quad \text{per un certo } K > 0.$$

□

Dimostrazione del Teorema 3.4

Per $N \in \{1, 2\}$ la dimostrazione non è legata all'utilizzo del funzionale citato nel lemma precedente. Al contrario, per $N = 1$, si basa su un funzionale più generale e più complesso da trattare come quello considerato in [23]. Per $N = 2$, invece, la conclusione è conseguenza degli articoli [36, 37], che valgono per un sistema più generale di quello che stiamo considerando (nello specifico in tale modello vengono considerati anche effetti fluidodinamici). I risultati di questi lavori, da un lato garantiscono che la soluzione è globale e dall'altro la

convergenza ad uno stato stazionario; entrambe le caratteristiche implicano ovviamente la globale limitatezza della soluzione.

Per $N \geq 3$ la dimostrazione è una conseguenza del Lemma 3.8. In particolare, la funzione $f(p) = \chi \|v_0\| - \frac{1}{6p}$ è, per l'ipotesi (3.24), negativa e continua per ogni $p \in (1, +\infty)$, e quindi, per il Teorema della permanenza del segno, lo è anche per $p > \frac{N}{2}$. Pertanto, passando alla dimensione, abbiamo che

$$\chi \|v_0\|_\infty - \frac{2}{3N} < 0,$$

ovvero

$$\chi \|v_0\|_\infty < \frac{2}{3N},$$

che coincide esattamente con le ipotesi del nostro Teorema. Applicando il Lemma 3.6, arriviamo alla conclusione che $\|u(\cdot, t)\|_\infty \leq L$, per un certo $L > 0$. Questo implica che $T_{\max} = +\infty$ e che quindi u è una soluzione globale e limitata del sistema (3.6). \square

Capitolo 4

Metodo delle Differenze Finite e Metodo degli Elementi Finiti

In matematica, il Metodo delle Differenze Finite (o FDM¹) è una strategia utilizzata per risolvere numericamente equazioni differenziali che, nelle sue varianti, si basa sull'approssimazione delle derivate con equazioni alle differenze finite. Tale metodo, a differenza del Metodo degli Elementi Finiti (o FEM²), viene utilizzato prevalentemente per equazioni differenziali ordinarie.

Restringendo la nostra attenzione a quel che in questa tesi viene analizzato, siccome nelle nostre equazioni appaiono derivate ordinarie nel tempo e parziali nello spazio, utilizzeremo come vedremo una combinazione FDM e FEM.

4.1 Idea di base del Metodo degli Elementi Finiti

Il *Metodo degli Elementi Finiti* o FEM è una tecnica numerica che ha come obiettivo quello di risolvere equazioni differenziali, trasformando queste ultime in equazioni algebriche. Le soluzioni ottenute risolvendo questi problemi algebrici sono, chiaramente, delle approssimazioni di quelle dell'equazione di partenza.

La caratteristica principale del metodo è la suddivisione del dominio, dove l'equazione differenziale è definita, attraverso una griglia³ composta da primitive, i cosiddetti *elementi finiti*, di forma codificata. Solitamente si parla di intervalli per domini 1D, triangoli e quadrilateri per domini 2D e di tetraedri e esaedri per domini 3D. Su ciascuno di questi elementi la

¹Dall'inglese *Finite Difference Method*.

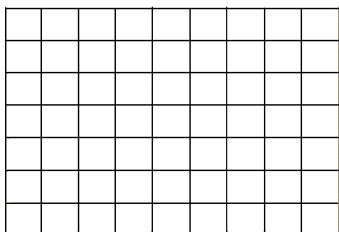
²Dall'inglese *Finite Element Method*.

³Dall'inglese *mesh*.

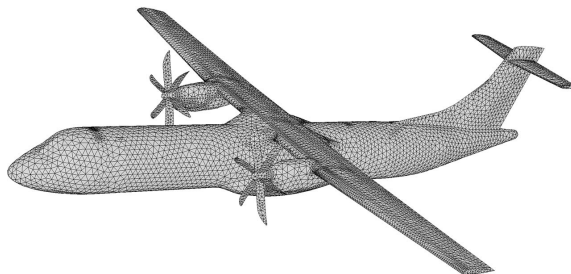
soluzione è assunta essere combinazione lineare di funzioni dette *di base* o *di forma* o *funzioni test*. I coefficienti di tale combinazione, diventeranno le incognite del problema algebrico ottenuto tramite la discretizzazione. Spesso si fa riferimento a funzioni polinomiali, essendo la soluzione complessiva del problema approssimata con funzioni polinomiali a pezzi.

Il procedimento, che sarà descritto più in basso, è noto con il nome di metodo di *Galerkin*⁴, il cui punto di partenza è la formulazione debole del problema differenziale; alcuni dettagli verranno dati in seguito nel caso di problemi affini a quelli analizzati in questa tesi.

Con il fine di intuire la potenza del Metodo degli Elementi Finiti, ma anche di familiarizzare il lettore con la nomenclatura, considereremo dapprima il Metodo delle Differenze Finite; tale metodo è estremamente utilizzabile in caso di domini 1D o 2D/3D in forma di rettangoli/parallelepipedi; al contrario, nel caso di domini con qualsiasi forma, il Metodo degli Elementi finiti è più appropriato. In particolare, al di là del fatto che il FEM consente una più facile modellazione di forme geometriche complesse e irregolari (si guardi la Figura (4.1)), esso presenta altri vantaggi come l'adattabilità a diversi problemi, la precisione, la possibilità di simulare problemi evolutivi e la visualizzazione.



(a) Discretizzazione rettangolare di un dominio rettangolare, tipica del FDM.



(b) Discretizzazione di un aeroplano, tipica del FEM.

Figura 4.1: Esempi di discretizzazione nel FEM e FDM.

4.2 Analisi del Metodo delle Differenze Finite

Analizziamo il Metodo delle Differenze Finite con un esempio riguardante il caso dell'equazione del calore in cui l'incognita $u = u(x, t)$ è tale che la

⁴Boris Grigor'evič Galërkin (Polack, 20 febbraio 1871 – Mosca, 12 luglio 1945) è stato un matematico e ingegnere sovietico.

$x \in \Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ e $t \in (0, T)$. È noto che il calore lungo una barra di lunghezza 1, inizialmente a temperatura u_0 , e con temperatura nulla agli estremi evolve in presenza di una sorgente esterna $f = f(x, t)$ secondo il seguente sistema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f & \text{in } (0, 1) \times (0, T), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0 & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (4.1)$$

Sia, quindi, $\{0 = x^0 < x^1 < \dots < x^n = 1\}$ una suddivisione di $(0, 1)$, con $x^i = ih$ dove $h = \frac{1}{n}$ è la lunghezza del generico sotto intervallo (x^i, x^{i+1}) , e $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = 1\}$ una suddivisione di $(0, T)$, con $t_m = m\delta_t$ e $\delta_t = \frac{T}{M}$, ed $m = 0, \dots, M$. Il prodotto cartesiano $(0, 1) \times (0, T)$ di queste due suddivisioni genera una griglia nel piano xOt .

4.2.1 Metodo di Eulero in avanti

Se $u(x, t)$ è la soluzione del problema (4.1), indichiamo il valore approssimato della funzione nel nodo (x^i, t_m) , ovvero $u(x^i, t_m)$, con U_m^i e approssimiamo $u_{xx}(x^i, t_m)$ con il metodo delle differenze centrali del secondo ordine

$$u_{xx}(x^i, t_m) \approx \frac{U_m^{i-1} + U_m^{i+1} - 2U_m^i}{h^2}.$$

Per la derivata temporale utilizziamo invece il metodo di Eulero in avanti, cioè scriviamo

$$u_t(x^i, t_m) = \frac{U_{m+1}^i - U_m^i}{\delta_t}.$$

Ponendo $F_m^i = f(x^i, t_m)$, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{U_{m+1}^i - U_m^i}{\delta_t} = \frac{U_m^{i-1} + U_m^{i+1} - 2U_m^i}{h^2} + F_m^i & 1 \leq i \leq n-1, 0 \leq m \leq M-1, \\ U_0^i = u_0(x^i) & 0 \leq i \leq n, \\ U_m^0 = U_m^1 = 0 & 0 \leq m \leq M. \end{cases} \quad (4.2)$$

Introduciamo il parametro $\lambda = \frac{\delta_t}{h^2}$ e il vettore $U_m = (u_m^1, \dots, u_m^n)^{tr}$. Osserviamo che l'apice *tr* sta per *trasposto* e che U_m raccoglie al passo m i valori dell'approssimazione di u in tutti i nodi i . Di conseguenza possiamo scrivere la prima equazione del sistema (4.2) come

$$U_{m+1} = AU_m + \delta_t F_m \quad (4.3)$$

per ogni $m = 0, \dots, M - 1$, dove

$$A = I + \lambda \Delta_h = \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 - 2\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \lambda & 1 - 2\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 - 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Partendo da $t = 0$, possiamo comporre il vettore U_0 e calcolare il vettore U_1 . Al passaggio j -esimo calcoliamo U_j utilizzando U_{j-1} . Per quanto riguarda la stabilità nel tempo, se $f \equiv 0$, possiamo usufruire del seguente

Teorema 4.1. *Se $\delta_t \leq \frac{h^2}{2}$, il metodo di Eulero in avanti è stabile nella norma del massimo, cioè se $U_{m+1} = AU_m$, allora*

$$\|U_m\|_\infty \leq \|U_0\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty.$$

Dimostrazione. Si consultino i testi [4, 38]. □

4.2.2 Metodo di Eulero all'indietro

Questo metodo è simile al precedente, ma il calcolo della derivata temporale viene svolto in un modo leggermente diverso, ottenendo il seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{U_m^i - U_{m-1}^i}{\delta_t} = \frac{U_m^{i-1} + U_m^{i+1} - 2U_m^i}{h^2} + F_m^i & 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq m \leq M, \\ U_0^i = u_0(x^i) & 1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

che in forma matriciale si esprime come

$$(I - \lambda \Delta_h)U_m = U_{m-1} + \delta_t F_m.$$

Invertendo la matrice, possiamo riscriverla come

$$U_m = (I - \lambda \Delta_h)^{-1}(U_{m-1} + \delta_t F_m).$$

In questo modo, a differenza del caso precedente, abbiamo sempre la stabilità nel tempo. Nella situazione in cui $f \equiv 0$, infatti, viene dimostrato il seguente

Teorema 4.2. *Se $(I - \lambda \Delta_h)U_m = U_{m-1}$, allora*

$$\|U_m\|_\infty \leq \|U_{m-1}\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty.$$

Dimostrazione. Si consultino i testi [4, 38]. □

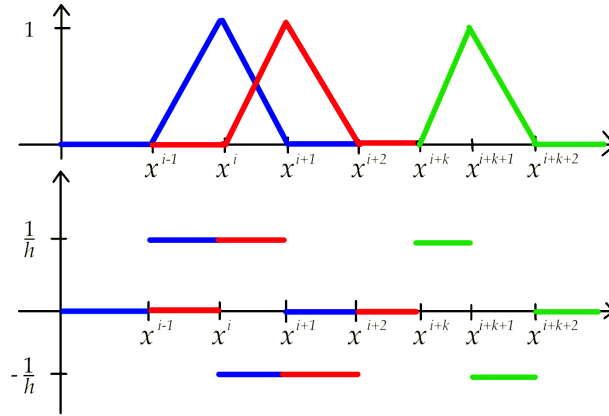


Figura 4.2: Tipiche funzioni a cappello in un dominio unidimensionale e le rispettive derivate. Caso particolare in cui $x^{i+1} - x^{i+1} = h$.

4.3 Analisi del Metodo degli Elementi Finiti

Analizziamo il Metodo degli Elementi Finiti in termini dello stesso problema del calore visto sopra.

4.3.1 Discretizzazione nello spazio

Riconsideriamo il problema del calore formalizzato nel sistema (4.1) e risolviamolo con il Metodo degli Elementi Finiti.

Immaginando di cercare la soluzione approssimata u_h tramite separazione di variabili, poniamo

$$u_h = \sum_{i=1}^n u_i(t) \varphi_i(x), \quad (4.4)$$

dove φ_i è la funzione a cappello standard nel vertice x^i (si veda la rappresentazione Figura 4.2), con $i = 1, \dots, n$, e il coefficiente u_i è una funzione del tempo. In particolare φ_i vale 0 in tutti gli altri nodi della maglia, ed ai suoi estremi.

Osservazione 4.3. *Da notare che il pedice h in u_h è associato al fatto che la lunghezza del generico intervallino (x^i, x^{i+1}) è esattamente h .*

Formalmente, testando su $(0, 1)$ l'equazione per φ_j , si ottiene

$$\int_0^1 u_t \varphi_j dx = \int_0^1 u_{xx} \varphi_j dx + \int_0^1 f \varphi_j dx,$$

che, usando le condizioni l'annullamento di φ_j agli estremi dell'intervallo e un'integrazione per parti, è ridotto a

$$\int_0^1 u_t \varphi_j dx + \int_0^1 u_x \varphi_j' dx = \int_0^1 f \varphi_j dx.$$

In tale situazione, se al posto di u inseriamo u_h data da (4.4) otteniamo per ogni $j = 1, \dots, n$

$$\sum_{i=1}^n \int_0^1 u_i'(t) \varphi_i \varphi_j dx + \sum_{i=1}^n \int_0^1 u_i(t) \varphi_i' \varphi_j' dx = \sum_{i=1}^n \int_0^1 f \varphi_j dx,$$

o anche introducendo il simbolismo

$$(H, G) := \int_0^1 H(x)G(x) dx = \int_0^1 HG dx, \quad (4.5)$$

$$\sum_{i=1}^n u_i'(t) (\varphi_i, \varphi_j) + \sum_{i=1}^n u_i(t) (\varphi_i', \varphi_j') = \sum_{i=1}^n (f, \varphi_j). \quad (4.6)$$

Come ben dettagliato in [5, §5], al variare di i e j le espressioni (φ_i, φ_j) e (φ_i', φ_j') si traducono in due matrici \mathbf{M} e \mathbf{K} date da

$$\mathbf{M} = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{K} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

denominate *matrice di massa* e *matrice di rigidezza*, rispettivamente⁵. A questo punto, riconsideriamo l'espressione (4.6) e rammentiamo quanto detto sulla discretizzazione temporale di $u_i(t)$ nei §4.2.1 e §4.2.2. In tal modo, è possibile mostrare che il problema differenziale in questione si trasforma in un problema algebrico dello stesso tipo visto in (4.3), che riscriviamo per comodità

$$U_{m+1} = \mathbf{A}U_m + \delta F_m, \quad (4.7)$$

ma dove ora la matrice $\mathbf{A} = \mathbf{M} + \Delta t \mathbf{K}$, quadrata ed invertibile in quanto di determinante non nullo.

⁵I nomi provengono dall'ampio utilizzo del FEM al calcolo strutturale.

Osservazione 4.4. Osserviamo come le matrici di massa e rigidezza siano sparse e tridiagonali. In matematica, per matrice sparsa si intende una matrice i cui valori sono quasi tutti uguali a zero; per matrice tridiagonale una matrice quadrata che al di fuori della diagonale principale e delle linee immediatamente al di sopra e al di sotto di essa (la prima sovradiagonale e la prima sottodiagonale), ha solo valori nulli. Tali caratteristiche fanno sì che la risoluzione del sistema (4.7) nel caso di un numero elevato di punti del dominio e di istanti di tempo sia relativamente rapida dal punto di vista computazionale.

Inoltre il motivo della struttura delle due matrici è chiaro: infatti, siccome i supporti di due funzioni di forma sono disgiunti se esse sono “lontane” tra loro, molti integrali che definiscono gli elementi di M e K sono nulli.

4.4 Applicazione ai Problemi di produzione e di consumazione

L’obiettivo di questa sezione è stabilire un procedimento numerico basato sul Metodo degli Elementi Finiti per risolvere numericamente e, successivamente, sviluppare delle simulazioni per i due problemi visti in precedenza ed analizzati dal punto di vista teorico. In particolare, per quel che riguarda il Problema di produzione, discuteremo il caso in cui anche la seconda equazione è parabolica⁶, noto come modello *parabolico-parabolico* e formulato come segue:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot u \nabla v & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ v_t = \Delta v - v + u & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x) & \text{se } x \in \bar{\Omega}, \\ u_\nu = v_\nu = 0 & \text{in } \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (4.8)$$

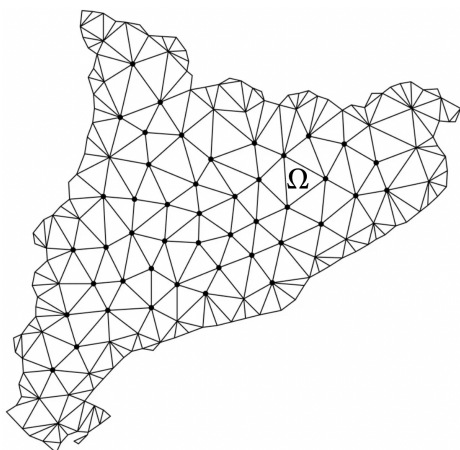
Al contrario, il Problema \mathcal{C} rimarrà invariato e per comodità lo riscriviamo a continuazione:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot u \nabla v & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ v_t = \Delta v - uv & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x) & \text{se } x \in \bar{\Omega}, \\ u_\nu = v_\nu = 0 & \text{in } \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (4.9)$$

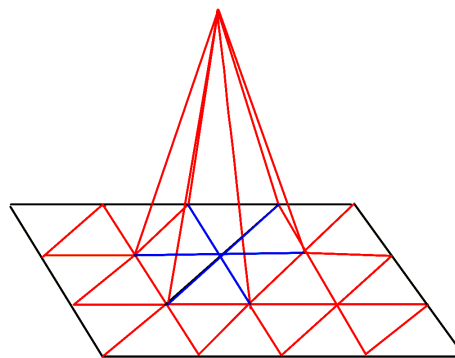
⁶Nella parte precedente abbiamo discusso il Problema \mathcal{P} di tipo *parabolico-ellittico* per motivi di semplicità; in effetti, la teoria ed i calcoli relativi al caso parabolico-parabolico richiede dei dettagli, a volte troppo tecnici.

4.4.1 Generazione della maglia del dominio e scelta delle funzioni di forma

Focalizziamoci al caso bidimensionale e consideriamo un dominio piano Ω . Se nel caso 1D la suddivisione di un intervallo è, come abbiamo visto, estremamente naturale e semplice, nel caso 2D è un problema topologico non triviale⁷. In effetti, bisogna stabilire che poligoni usare nella suddivisione, e bisogna specificare cosa si intende per suddivisione. Nella pratica, si uti-



(a) Discretizzazione tramite triangoli di un dominio bidimensionale.



(b) Funzione di forma per un problema piano.

Figura 4.3: Esempi di discretizzazione di un dominio piano e di una tipica funzione di forma.

lizzano triangoli (a volte quadrilateri)⁸ ed esistono software che in base ad alcune indicazioni dell'utente, che ovviamente dipendono dal tipo di problema, generano maglie opportune (si veda la Figura 4.3a). Fissato il numero di nodi n e scelte delle opportune (si guardi la precisazione nell'Osservazione 4.5 sottostante) funzioni di forma φ^i , definiamo (U, V) come l'approssimazione numerica della soluzione (u, v) dei sistemi (4.8) e (4.9), ottenendo, dopo la separazione delle variabili,

$$\begin{cases} U(x, t) = \sum_{i=1}^n u^i(t) \varphi^i(x), \\ V(x, t) = \sum_{i=1}^n v^i(t) \varphi^i(x). \end{cases} \quad (4.10)$$

⁷Il lettore potrà naturalmente intuire che il caso 3D è ancora più complesso.

⁸Per problemi 3D, tetraedri e esaedri.

Per calcolare le evoluzioni temporali dei coefficienti u^i e v^i , suddividiamo l'intervallo $(0, T)$ in sottointervalli di ampiezza $\Delta t = t_{m+1} - t_m$, dove $m \in \mathbb{N}$ e $t_0 = 0$. Sia $(U_m, V_m) = (U(x, t_m), V(x, t_m))$.

Osservazione 4.5. *Come per gli elementi che compongono la maglia, anche la scelta delle funzioni di forma è un problema delicato e che dipende dal modello analizzato. In molti casi, l'equivalente bidimensionale delle funzioni introdotte nel §4.3 (in particolare si osservi la Figura 4.2) risulta opportuno in quanto ai risultati attesi. Nello specifico, in ogni punto della maglia la funzione di forma vale 1 in quel punto, 0 nei rimanenti unendo con dei piani la quota 1 con la quota 0 dei punti adiacenti a quello in considerazione. La Figura 4.3b chiarisce quanto detto.*

4.4.2 Risoluzione tramite FEM del Problema di produzione

Partendo dal sistema (4.8) che definisce il problema in considerazione, il nostro obiettivo è strutturare un procedimento (o algoritmo) numerico capace di produrre un sistema lineare le cui soluzioni siano i coefficienti u^i e v^i che appaiono nella (4.10), dove $U(x, t)$ e $V(x, t)$ rappresentano le soluzioni approssimate del problema stesso.

A tal fine, per una generica funzione test φ^j , utilizzando le approssimazioni introdotte in (4.10) e il Teorema (2.9) unito alle condizioni di Neumann (derivata normale nulla su $\partial\Omega$) ed alle equazioni in (4.8), otteniamo⁹ in $\Omega \times (0, T)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} U_t \varphi^j &= \int_{\Omega} \varphi^j \Delta U - \chi \int_{\Omega} \varphi^j \nabla \cdot (U \nabla V) \\ &= - \int_{\Omega} \nabla V \cdot \nabla \varphi^j + \chi \int_{\Omega} U \nabla V \cdot \nabla \varphi^j. \end{aligned}$$

e

$$\int_{\Omega} V_t \varphi^j = \int_{\Omega} \varphi^j \Delta V + \int_{\Omega} (U - V) \varphi^j = - \int_{\Omega} \nabla V \cdot \nabla \varphi^j + \int_{\Omega} (U - V) \varphi^j.$$

Utilizzando in modo simile il simbolismo introdotto in (4.5), riscriviamo le due equazioni precedenti come

$$(U_t, \varphi^j) + (\nabla U, \nabla \varphi^j) = \chi (U \nabla V, \nabla \varphi^j) \quad \text{su } (0, T),$$

e

$$(V_t, \varphi^j) + (\nabla V, \nabla \varphi^j) = (U - V, \varphi^j) \quad \text{su } (0, T).$$

⁹Per comodità, e questa è prassi comune ed accettata in tali contesti, evitiamo di specificare la dipendenza delle variabili nelle funzioni e differenziali negli integrali.

Sostituendo inoltre le derivate temporali di U e V con le sue approssimazioni, ovvero

$$U_t = \frac{U_{m+1} - U_m}{\Delta t} \quad \text{e} \quad V_t = \frac{V_{m+1} - V_m}{\Delta t} \quad \text{su} \quad \Omega \times (0, T),$$

ricaviamo, al tempo t_m ,

$$\frac{1}{\Delta t}(U_{m+1} - U_m, \varphi^j) + (\nabla U_{m+1}, \nabla \varphi^j) = \chi(U_m \nabla V_m, \varphi^j) \quad \text{su} \quad \Omega,$$

e

$$\frac{1}{\Delta t}(V_{m+1} - V_m, \varphi^j) + (\nabla V_{m+1}, \nabla \varphi^j) = (U_m - V_m, \varphi^j) \quad \text{su} \quad \Omega.$$

Definendo $\mathbf{u}_m = (u_m^1, \dots, u_m^n)^{tr}$, $\mathbf{v}_m = (v_m^1, \dots, v_m^n)^{tr}$ e utilizzando la (4.10), giungiamo alle seguenti equazioni matriciali richieste

$$\mathbf{M} \frac{\mathbf{u}_{m+1} - \mathbf{u}_m}{\Delta t} + \mathbf{K} \mathbf{u}_{m+1} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_m),$$

e

$$\mathbf{M} \frac{\mathbf{v}_{m+1} - \mathbf{v}_m}{\Delta t} + \mathbf{K} \mathbf{v}_{m+1} = \mathbf{M}(\mathbf{u}_m - \mathbf{v}_m),$$

dove la matrice di massa $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_n$, la matrice di rigidità $\mathbf{K} \in \mathcal{M}_n$ e $\mathbf{F}(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_m) \in \mathbb{R}^n$, sono tali che

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{ij} = \int_{\Omega} \varphi^i \varphi^j, & \mathbf{K}_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi^i \cdot \nabla \varphi^j, \\ \mathbf{F}(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_m)_j = \chi \int_{\Omega} \left(\sum_{p,q=1}^n u_m^p v_m^q \varphi^p \nabla \varphi^q \right) \cdot \nabla \varphi^j. \end{cases}$$

In particolare, introducendo le seguenti opportune matrici ed i seguenti opportuni vettori

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} + \mathbf{K}, \\ \mathbf{b} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} \mathbf{u}_m + \mathbf{F}(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_m), \\ \mathbf{c} = \mathbf{M} \left(\mathbf{u}_m - \mathbf{v}_m + \frac{\mathbf{v}_m}{\Delta t} \right), \end{cases} \quad (4.11)$$

concludiamo scrivendo le equazioni algebriche che, risolte, forniscono i coefficienti delle funzioni $U(x, t)$ e $V(x, t)$ date in (4.10), soluzioni approssimate del modello (4.8)

$$\begin{cases} \mathbf{A} \mathbf{u}_{m+1} = \mathbf{b}, \\ \mathbf{A} \mathbf{v}_{m+1} = \mathbf{c}. \end{cases} \quad (4.12)$$

Osservazione 4.6 (Sull'utilizzo dei sistemi (4.11) e (4.12)). *Da quel che si è detto, rimane chiaro che l'algoritmo di risoluzione prevede innanzitutto fissare i dati iniziali, ovvero \mathbf{u}_0 e \mathbf{v}_0 , un passo temporale Δt ; in tal modo, costruendo \mathbf{A} , \mathbf{b} e \mathbf{c} da (4.11), è possibile calcolare \mathbf{u}_1 e \mathbf{v}_1 tramite (4.12), e così ricorsivamente.*

4.4.3 Risoluzione tramite FEM del Problema di consumazione

Operando in modo del tutto analogo al caso precedente, da sistema (4.9) si ottiene per una generica funzione test φ^j ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} U_t \varphi^j &= \int_{\Omega} \varphi^j \Delta U - \chi \int_{\Omega} \varphi^j \nabla \cdot (U \nabla V) \\ &= - \int_{\Omega} \nabla V \cdot \nabla \varphi^j + \chi \int_{\Omega} U \nabla V \cdot \nabla \varphi^j \quad \text{su } \Omega \times (0, T), \end{aligned}$$

e, su $\Omega \times (0, T)$,

$$\int_{\Omega} V_t \varphi^j = \int_{\Omega} \varphi^j \Delta V + \int_{\Omega} (U - V) \varphi^j = - \int_{\Omega} \nabla V \cdot \nabla \varphi^j - \int_{\Omega} UV \varphi^j,$$

o in modo più compatto

$$(U_t, \varphi^j) + (\nabla U, \nabla \varphi^j) = \chi (U \nabla V, \nabla \varphi^j) \quad \text{su } \Omega \times (0, T),$$

e

$$(V_t, \varphi^j) + (\nabla V, \nabla \varphi^j) = -(UV, \varphi^j) \quad \text{su } \Omega \times (0, T).$$

Sostituendo

$$U_t = \frac{U_{m+1} - U_m}{\Delta t} \quad \text{e} \quad V_t = \frac{V_{m+1} - V_m}{\Delta t},$$

ricaviamo, al tempo t_m ,

$$\frac{1}{\Delta t} (U_{m+1} - U_m, \varphi^j) + (\nabla U_{m+1}, \nabla \varphi^j) = \chi (U_m \nabla V_m, \nabla \varphi^j) \quad \text{su } \Omega,$$

$$\frac{1}{\Delta t} (V_{m+1} - V_m, \varphi^j) + (\nabla V_{m+1}, \nabla \varphi^j) = -(U_m V_m, \varphi^j) \quad \text{su } \Omega.$$

Definendo $\mathbf{u}_m = (u_m^1, \dots, u_m^n)^{tr}$, $\mathbf{v}_m = (v_m^1, \dots, v_m^n)^{tr}$ e utilizzando la (4.10), giungiamo alle equazioni matriciali

$$\mathbf{M} \frac{\mathbf{u}_{m+1} - \mathbf{u}_m}{\Delta t} + \mathbf{K} \mathbf{u}_{m+1} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_m),$$

$$\mathbf{M} \frac{\mathbf{v}_{m+1} - \mathbf{v}_m}{\Delta t} + \mathbf{K} \mathbf{v}_{m+1} = \mathbf{G}(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_m),$$

dove la matrice di massa $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_n$, la matrice di rigidità $\mathbf{K} \in \mathcal{M}_n$, $\mathbf{F}(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_m) \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{G}(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_m) \in \mathbb{R}^n$, sono tali che

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{ij} = \int_{\Omega} \varphi^i \varphi^j, & \mathbf{K}_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi^i \cdot \nabla \varphi^j, \\ \mathbf{F}(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_m)_j = \chi \int_{\Omega} \left(\sum_{p,q=1}^n u_m^p v_m^q \varphi^p \nabla \varphi^q \right) \cdot \nabla \varphi^j, \\ \mathbf{G}(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_m)_j = - \int_{\Omega} \left(\sum_{p,q=1}^n u_m^p v_m^q \varphi^p \varphi^q \right) \varphi^j. \end{cases}$$

Senza aggiungere ulteriori considerazioni già fatte nella sezione precedente, otteniamo il sistema lineare

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{u}_{m+1} = \mathbf{b}, \\ \mathbf{A}\mathbf{v}_{m+1} = \mathbf{d}, \end{cases}$$

dove

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} + \mathbf{K}, \quad \mathbf{b} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}\mathbf{u}_m + \mathbf{F}(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_m), \quad \mathbf{d} = \mathbf{M} \frac{\mathbf{v}_m}{\Delta t} + \mathbf{G}(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_m).$$

Capitolo 5

Simulazioni numeriche dei Problemi di produzione e di consumazione

In questo capitolo tratteremo alcune simulazioni utilizzando il software *FreeFem++*¹. Risolveremo numericamente i Problemi \mathcal{P} e \mathcal{C} , e tali simulazioni saranno atte ad analizzare il comportamento delle soluzioni di tali problemi al variare dei dati. In particolare, e quando questo sarà possibile, cercheremo situazioni in cui appaia il fenomeno del *blow-up*, dando enfasi a come i dati del problema influiscano sul valore temporale di tale fenomeno. (Al colore arancione corrisponde il valore più basso, 0, a quello rosso il più alto.)

5.1 Simulazioni del Problema di produzione

Abbiamo visto che se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ la soluzione $u(x, t)$ è limitata per ogni $t \in (0, T_{\max})$. La limitatezza in $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, invece, dipende dalla grandezza di χ e m . Scegliamo quindi $\Omega \in \mathbb{R}^2$ come il cerchio di centro l'origine e raggio 9:

$$\Omega = B_9(0).$$

In questa prima serie di test, manterremo invariate le distribuzioni iniziali delle cellule e del segnale chimico, ovvero u_0 e v_0 (in particolare la massa m sarà sempre uguale), e faremo variare il valore del coefficiente chemiotattico χ

¹*FreeFem++* è un linguaggio di programmazione e un software focalizzato sulla risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali utilizzando il metodo degli elementi finiti. *FreeFem++* è scritto in C++ e sviluppato e mantenuto da Université Pierre et Marie Curie e Laboratoire Jacques-Louis Lions. Funziona su sistemi Linux, Solaris, macOS e Microsoft Windows; si veda per i dettagli [9].

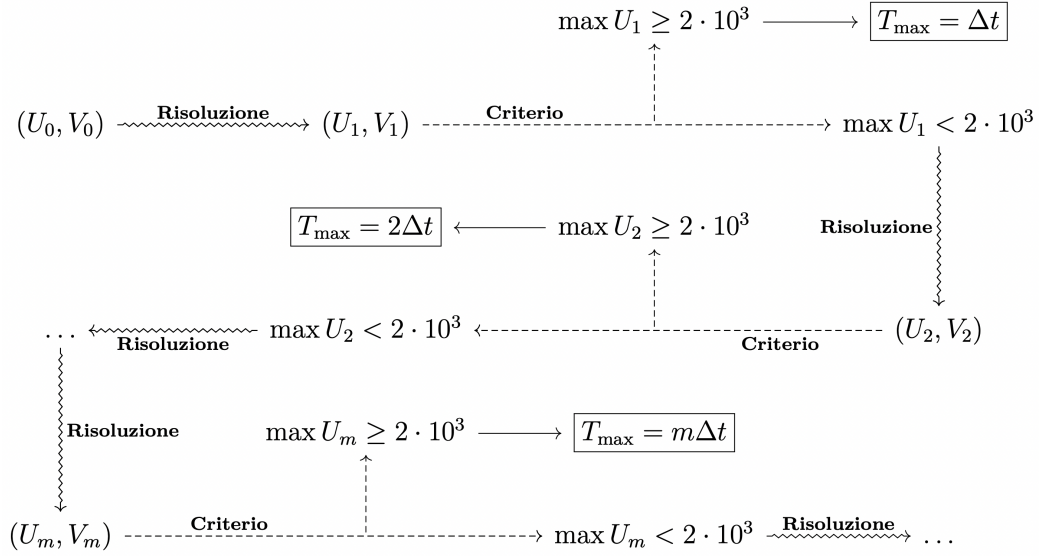


Figura 5.1: Algoritmo risolutivo: il termine **Risoluzione** indica che stiamo inserendo nel sistema (4.12) la coppia $(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_m)$ delle n -ple dei coefficienti di (U_m, V_m) , che ricordiamo essere l'approssimazione della coppia $(u(x, t_m), v(x, t_m))$, e stiamo ricavando \mathbf{u}_{m+1} dalla prima equazione e \mathbf{v}_{m+1} dalla seconda. Inoltre il **Criterio** controlla se il $\max U_m$ ha superato o no il valore $2 \cdot 10^3$. Quando ciò accade l'algoritmo si ferma e stabilisce il tempo di blow-up T_{\max} , altrimenti prosegue. I dati iniziali sono la coppia (U_0, V_0) e l'intervallo di tempo Δt .

per vederne l'influenza sull'eventuale tempo di blow-up T_{\max} ; nello specifico, considereremo avvenuto tale fenomeno quando $\max u \geq 2 \cdot 10^3$.

La Figura 5.1 riassume e schematizza l'algoritmo risolutivo la cui analisi è stata discussa nell'Osservazione 4.6 per il modello produttivo, ma totalmente valida per quello di consumazione.

Consideriamo interessanti due situazioni, entrambe collegate alla distribuzione iniziale delle cellule. Vedremo alcune differenze nelle simulazioni che esattamente dipendono da u_0 ; nei primi test u_0 presenterà un solo picco, generalmente fissato nel centro del dominio, mentre negli altri sarà caratterizzato da diversi picchi.

5.1.1 Test a campana singola

Nei successivi sei test fisseremo u_0 e v_0 (Figura 5.2), e faremo variare il coefficiente χ . I dati sono i seguenti

$$u_0 = e^{-(x^2+y^2)}(81 - x^2 - y^2), v_0 = e^{-(x^2+y^2)}, m = 251,313. \quad (5.1)$$

L'obiettivo è congetturare tramite esperimenti un valore critico (da intendersi come a continuazione) di χ al di sopra del quale alcune soluzioni esplodano in tempo finito, mentre al di sotto rimanga limitata nel tempo in svariati casi². Come vedremo nei test successivi, tale valore sembra approssimarsi a 0,197, e nel momento in cui $\chi m < 49,5$ le soluzioni si diffondono e omogeneizzano nel tempo. Che il valore 0,197 possa essere tale elemento critico è motivato dai Test-Produzione 1 e 2.

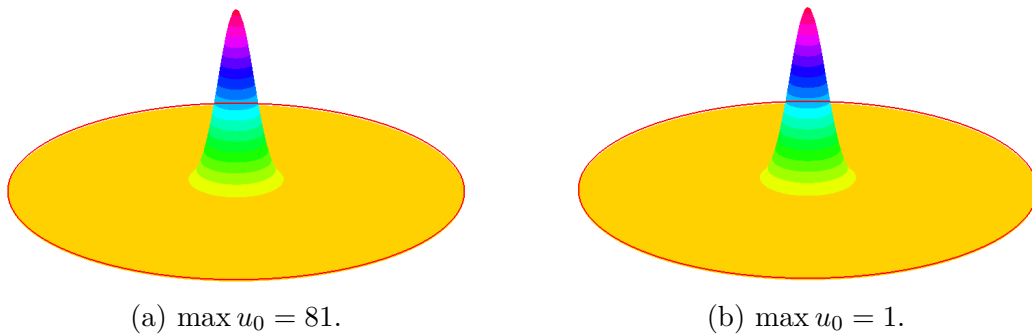


Figura 5.2: Distribuzioni iniziali u_0 (a sinistra) e v_0 (a destra) dei Test-Produzione 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Test-Produzione 1. Dati utilizzati: u_0, v_0, m come in (5.1), e $\chi = 0,18$.
 Conclusione del test: $T_{\max} = +\infty$ e soluzione globalmente limitata.

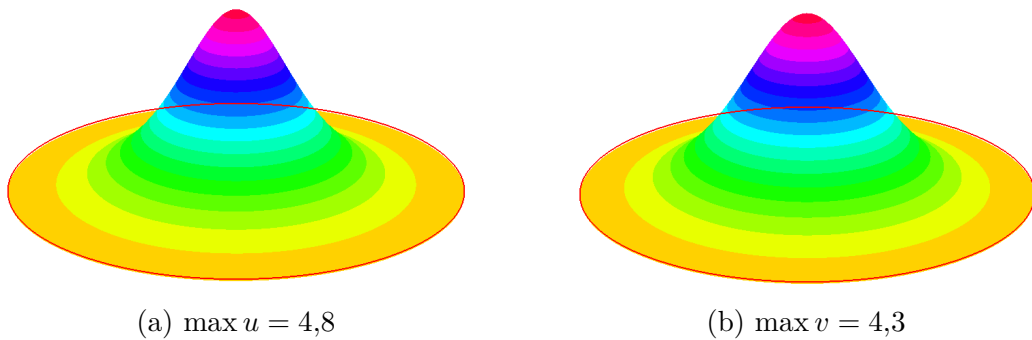


Figura 5.3: Test-Produzione 1: u e v al tempo $t = 10$.

Test-Produzione 2. Dati utilizzati: u_0, v_0, m come in (5.1), e $\chi = 0,2$.
 Conclusione del test: $T_{\max} = 2,8$ e soluzione illimitata in tempo finito.

²Rigorosamente, per valore critico, si intende un numero reale sotto il quale tutte le soluzioni sono limitate e sopra il quale ne esiste almeno una illimitata.

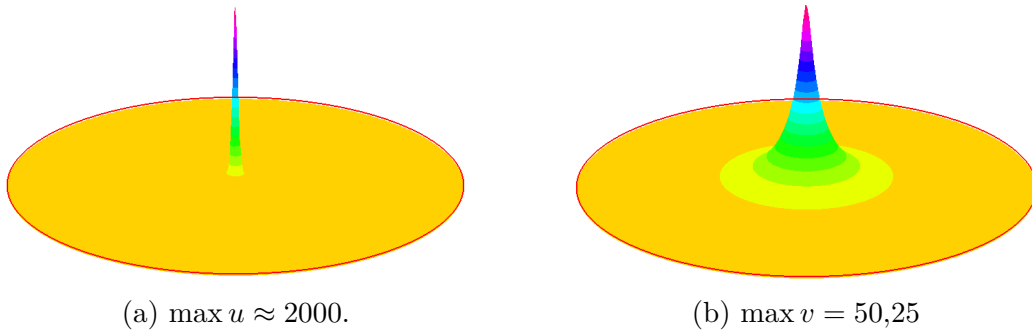


Figura 5.4: Test-Produzione 2: u e v al tempo $T_{\max} = 2,8$.

Per quanto riguarda il comportamento delle soluzioni nel Test-Produzione 1, come si può vedere dalla Figura 5.5a, il massimo di u_0 decresce nel tempo e conseguentemente il materiale biologico in tutto il dominio si ridistribuisce in modo omogeneo. In particolare ad un tempo elevato come $t = 10$ si osservano le distribuzioni di u e v in Figura 5.3 e dalle Figure 5.5a e 5.5c osserviamo che le distribuzioni tendono ad uno stato stazionario costante (si ricordi l'Osservazione 3.2).

Situazione totalmente opposta la si può riscontrare nel Test-Produzione 2: nonostante un leggerissimo calo iniziale della distribuzione cellulare, come possiamo notare dalla Figura 5.5b, essa successivamente aumenta e si assiste a una progressiva crescita fino al blow-up (si veda la Figura 5.4a).

Test-Produzione 3. Dati utilizzati: u_0, v_0, m come in (5.1), e $\chi = 0,3$.

Conclusione del test: $T_{\max} = 0,55$.

Test-Produzione 4. Dati utilizzati: u_0, v_0, m come in (5.1), e $\chi = 0,4$.

Conclusione del test: $T_{\max} = 0,328$.

Test-Produzione 5. Dati utilizzati: u_0, v_0, m come in (5.1), e $\chi = 0,5$.

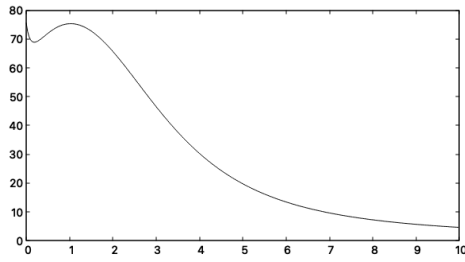
Conclusione del test: $T_{\max} = 0,237$.

Test-Produzione 6. Dati utilizzati: u_0, v_0, m come in (5.1), e $\chi = 0,6$.

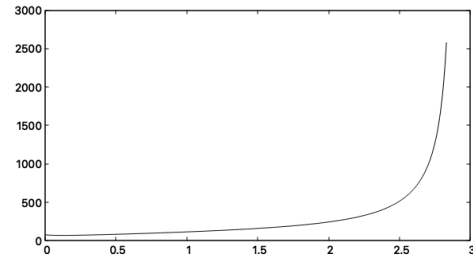
Conclusione del test: $T_{\max} = 0,18$.

La Tabella 5.1 schematizza i risultati adesso analizzati; da essa è esplicitamente chiaro che a un aumento della chemiosensibilità χ corrisponde un aumento dell'instabilità del meccanismo chemiotattico che risulta in una diminuzione del tempo del blow-up.

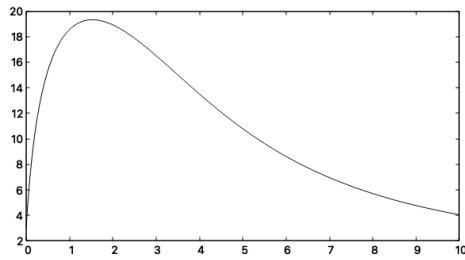
Una volta vista l'influenza del valore di χ sul modello di produzione mantenendo fisse le distribuzioni cellulari e chimiche, è naturale chiedersi cosa accade invertendo la situazione: nei test che seguono fissiamo $\chi = 0,18$ e faremo variare u_0 , lasciando v_0 come in (5.1).



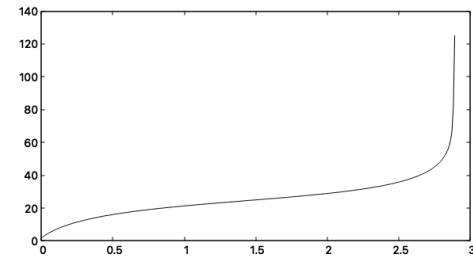
(a) Test-Produzione 1: max u .



(b) Test-Produzione 2: max u .



(c) Test-Produzione 1: max v .



(d) Test-Produzione 2: max v .

Figura 5.5: Confronto tra il max u e il max v nei Test-Produzione 1 e 2: l'asse orizzontale rappresenta il tempo, quello verticale il valore massimo della distribuzione.

Test-Produzione 7. Dati utilizzati:

$$u_0 = 2e^{-(x^2+y^2)}(81 - x^2 - y^2), v_0 = e^{-(x^2+y^2)}, m = 502,627, \chi = 0,18.$$

Conclusione del test: $T_{\max} = 0,387$.

Test-Produzione 8. Dati utilizzati:

$$u_0 = 3e^{-(x^2+y^2)}(81 - x^2 - y^2), v_0 = e^{-(x^2+y^2)}, m = 753,94, \chi = 0,18.$$

Conclusione del test: $T_{\max} = 0,212$.

Test-Produzione 9. Dati utilizzati:

$$u_0 = 4e^{-(x^2+y^2)}(81 - x^2 - y^2), v_0 = e^{-(x^2+y^2)}, m = 1005,43, \chi = 0,18.$$

Conclusione del test: $T_{\max} = 0,149$.

Test-Produzione 10. Dati utilizzati:

$$u_0 = 5e^{-(x^2+y^2)}(81 - x^2 - y^2), v_0 = e^{-(x^2+y^2)}, m = 1256,78, \chi = 0,18.$$

Conclusione del test: $T_{\max} = 0,117$.

| Test-Produzione | m | χ | blow-up | T_{\max} |
|-----------------|---------|--------|---------|------------|
| 1 | 251,313 | 0,18 | no | ∞ |
| 2 | 251,313 | 0,2 | ✓ | 2,8 |
| 3 | 251,313 | 0,3 | ✓ | 0,55 |
| 4 | 251,313 | 0,4 | ✓ | 0,328 |
| 5 | 251,313 | 0,5 | ✓ | 0,237 |
| 6 | 251,313 | 0,6 | ✓ | 0,18 |

Tabella 5.1: Tabella riassuntiva dei risultati dei primi sei Test-Produzione

Test-Produzione 11. Dati utilizzati:

$$u_0 = 4e^{-(x^2+y^2)}(81 - x^2 - y^2), v_0 = e^{-(x^2+y^2)}, m = 1508,14, \chi = 0,18.$$

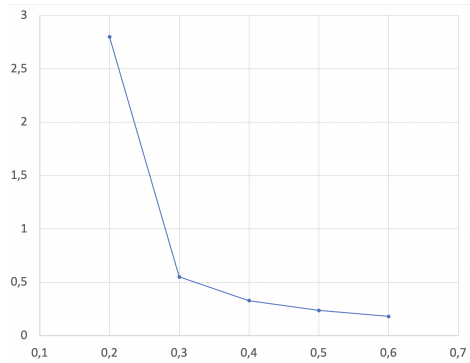
Conclusione del test: $T_{\max} = 0,096$.

Come nel caso precedente, raccogliamo i dati nella Tabella 5.2, e anche in questo caso, coerentemente con la teoria, osserviamo che il tempo di blow-up diminuisce all'aumentare della massa.

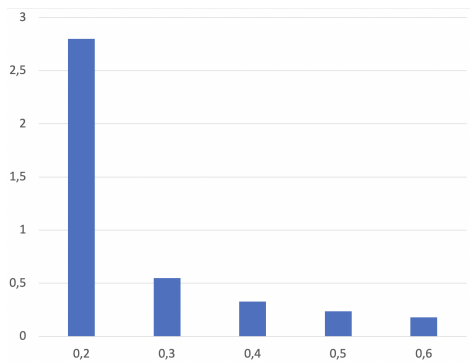
| Test-Produzione | m | χ | blow-up | T_{\max} |
|-----------------|---------|--------|---------|------------|
| 7 | 502,627 | 0,18 | ✓ | 0,387 |
| 8 | 753,94 | 0,18 | ✓ | 0,212 |
| 9 | 1005,43 | 0,18 | ✓ | 0,149 |
| 10 | 1256,78 | 0,18 | ✓ | 0,117 |
| 11 | 1508,14 | 0,18 | ✓ | 0,096 |

Tabella 5.2: Tabella riassuntiva dei risultati dei Test-Produzione con χ fisso.

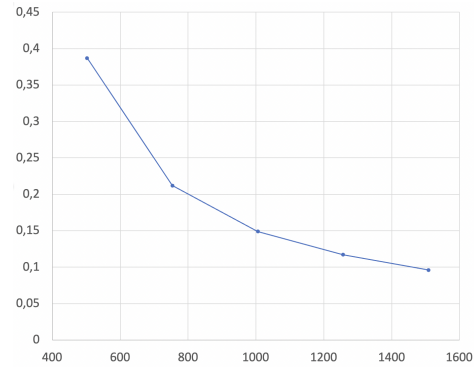
Osservazione 5.1 (Considerazioni finali sui test relativi al problema di produzione con distribuzione iniziale a campana singola.). *Prendiamo in considerazione i Test-Produzione 2, 3, 4, 5 e 6. Dalle Figure 5.6a e 5.6c, possiamo notare che aumentando χ del 50%, del 100%, del 150% e infine del 200%, assistiamo a una diminuzione di T_{\max} rispettivamente dell'80%, dell'88%, del 91% e del 93%. Dalle Figure 5.6b e 5.6d, considerando quindi i Test-Produzione 7, 8, 9, 10 e 11 notiamo che aumentando la massa del 50%, del 100%, del 150% e infine del 200%, abbassiamo il tempo di blow-up del 45%, del 61%, del 70% e del 75% rispettivamente.*



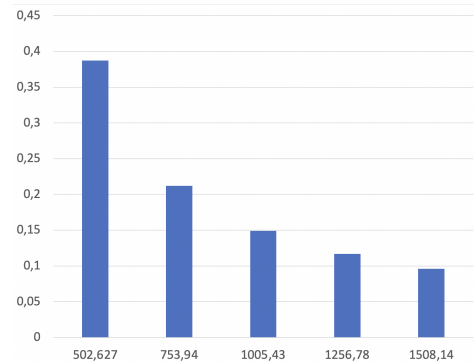
(a) Grafico, riferito ai Test-Produzione 2, 3, 4, 5, e 6, rappresentante il tempo di blow-up T_{\max} , nell'asse verticale, in funzione di χ , nell'asse orizzontale, tenendo $m = 251,313$.



(c) Istogramma, riferito ai Test-Produzione 2, 3, 4, 5 e 6, rappresentante il tempo di blow-up T_{\max} , nell'asse verticale, in funzione di χ , nell'asse orizzontale, tenendo $m = 251,313$.



(b) Grafico, riferito ai Test-Produzione 7, 8, 9, 10, e 11, rappresentante il tempo di blow-up T_{\max} , nell'asse verticale, in funzione della massa m , nell'asse orizzontale, tenendo $\chi = 0,18$.



(d) Istogramma, riferito ai Test-Produzione 7, 8, 9, 10 e 11, rappresentante il tempo di blow-up T_{\max} , nell'asse verticale, in funzione della massa m , nell'asse orizzontale, tenendo $\chi = 0,18$.

Figura 5.6: Grafici e istogrammi indicanti la variazione del tempo di blow-up in funzione della variazione del coefficiente chemiotattico e della massa.

5.1.2 Test a campana quadrupla

Vediamo ora un caso molto interessante. La domanda che ci poniamo è: *come si comporta una distribuzione iniziale con alcuni picchi separati, distanti dal centro, rispetto a un potente segnale chimico centrale e a un coefficiente chemiotattico alto?* Per l'analisi di tale situazione, sceglieremo una distribuzione cellulare iniziale con tali caratteristiche, e massa simile ai casi trattati in precedenza, mentre considereremo un segnale chimico iniziale notevolmente più elevato. Ci dedicheremo a tre specifiche simulazioni riguardanti quest'aspetto.

Test-Produzione 12. Dati utilizzati:

$$u_0 = 20e^{-(|x|-4)^2-(|y|-4)^2}, v_0 = 10e^{-(x^2+y^2)}, m = 251,319, \chi = 0,5.$$

Conclusione del test: $T_{\max} = +\infty$ e soluzione globalmente limitata. Fin dai

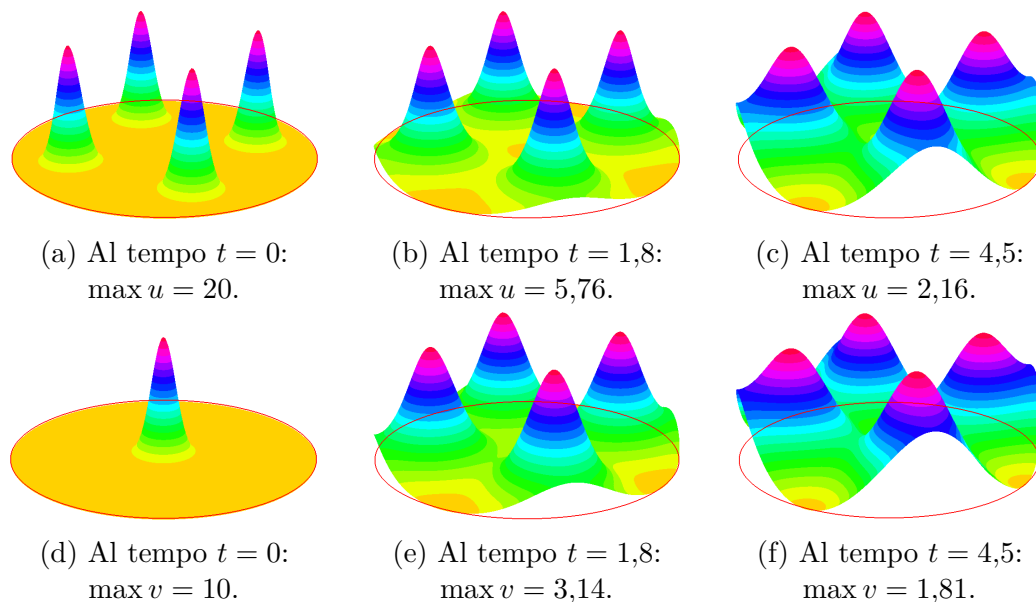


Figura 5.7: Test-Produzione 12: u e v in alcuni istanti di tempo.

primi istanti del test, assistiamo ad un continua diminuzione del massimo di u , rendendo evidente che non sarà presente il blow-up. Si osservino in Figura 5.7 le due distribuzioni del modello in alcuni istanti.

Test-Produzione 13. Dati utilizzati:

$$u_0 = 20e^{-(|x|-2)^2-(|y|-2)^2}, v_0 = 10e^{-(x^2+y^2)}, m = 251,151, \chi = 0,5.$$

Conclusione del test: $T_{\max} = 8,415$ e soluzione illimitata in tempo finito. In Figura 5.8 possiamo osservare, ancora una volta, le distribuzioni di u e

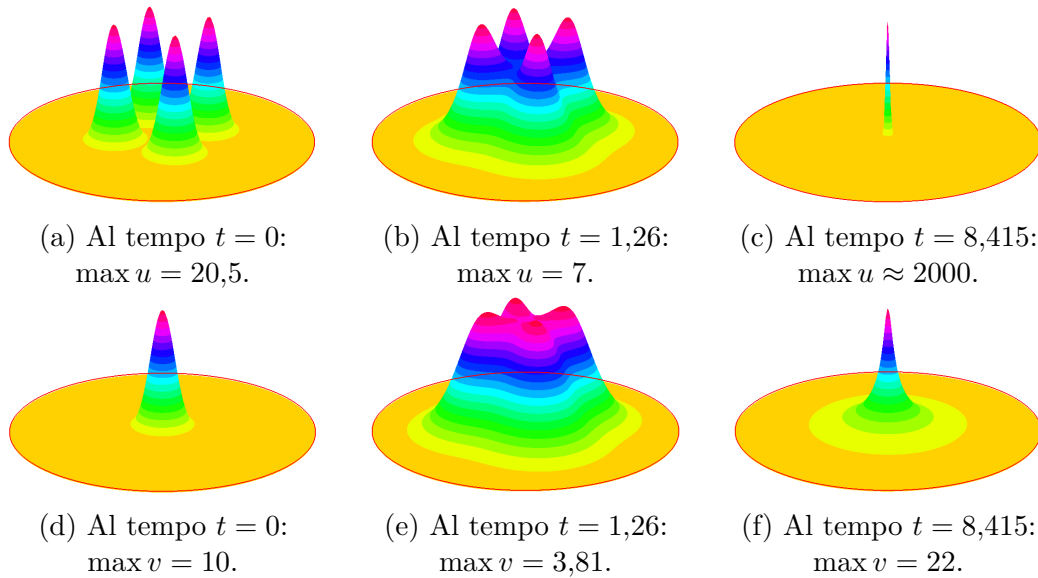


Figura 5.8: Test-Produzione 13: u e v in alcuni istanti di tempo.

v in alcuni istanti del test. Appena il test inizia, si può notare che viene prodotto del segnale chimico in corrispondenza delle quattro campane della distribuzione cellulare, mentre il suo picco centrale tende ad abbassarsi. Anche per quanto riguarda la distribuzione cellulare possiamo notare una diminuzione iniziale, ma di contro i quattro picchi iniziano ad unirsi. Progressivamente, essi continuano ad avvicinarsi al centro e questo succede anche ai picchi del segnale chimico appena creati. Il massimo di u e di v continua ad abbassarsi ma questa tendenza viene invertita poco dopo. Dopo aver iniziato la crescita, l'unico picco centrale di u continua a produrre segnale chimico, che a sua volta alimenta la sua crescita, diventando incontrollata e generando il blow-up.

Osservazione 5.2 (Sul ruolo chiave della distribuzione cellulare iniziale.). *I Test-Produzione 12 e 13 vanno analizzati con attenzione in termini della difficoltà nella ricerca di eventuali parametri critici. In tal senso, il primo test presenta una massa superiore al secondo, a parità di coefficiente chemiotattico, ma è solo il secondo che esplose; questo in parte è sorprendente. In realtà, come detto, al di là dell'esistenza di un certo valore critico che decida la limitatezza o no delle soluzioni, quando l'analisi è ristretta a ranghi grandi di tale valore, l'esplosione è strettamente collegata alla distribuzione iniziale.*

Test-Produzione 14. Dati utilizzati:

$$u_0 = 20e^{-(|x|-2)^2 - (|y|-2)^2}, v_0 = 10e^{-(x^2+y^2)}, m = 251,151, \chi = 1.$$

Conclusione del test: $T_{\max} = 1,38$ e soluzione illimitata in tempo finito. In

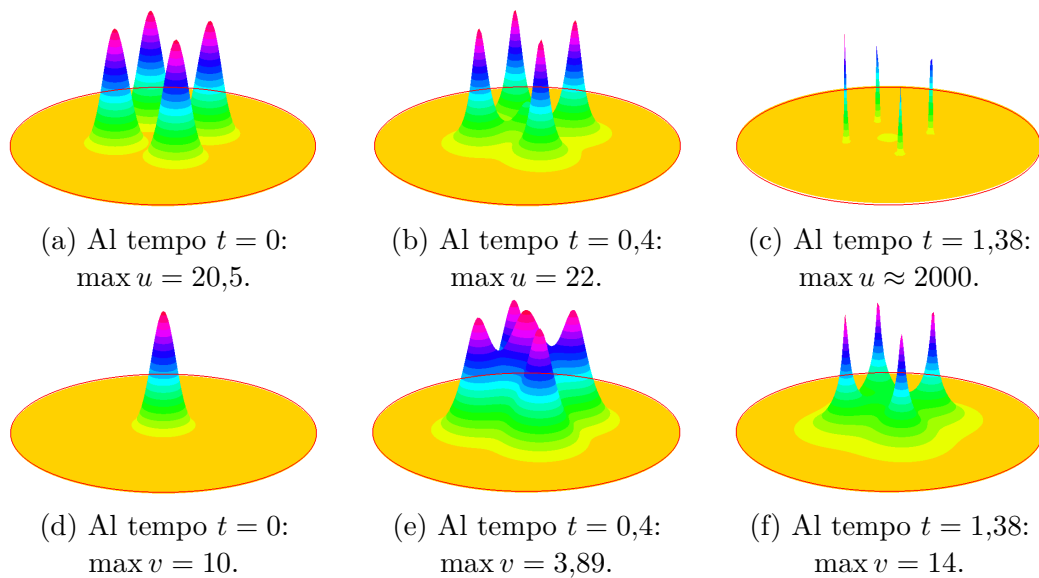


Figura 5.9: Test-Produzione 14: u e v in alcuni istanti di tempo.

questo test, similmente al caso precedente, viene prodotto del segnale chimico in corrispondenza delle quattro campane della u . Come possiamo osservare in Figura 5.9, i quattro picchi della distribuzione cellulare iniziano a crescere molto velocemente senza unirsi nel centro, fino a collassare. Questo è dovuto al fatto che il coefficiente chemiotattico è doppio rispetto al caso precedente.

In Figura 5.10 è presente un confronto tra i grafici del $\max u$ e del $\max v$ nei Test-Produzione 13 e 14.

Osservazione 5.3. Nella Figura 5.10d possiamo notare una sorta di punto angoloso in corrispondenza del minimo della funzione. Teoricamente si tratta di funzioni abbastanza lisce ma in questo caso la simulazione numerica non ci offre un risultato regolare.

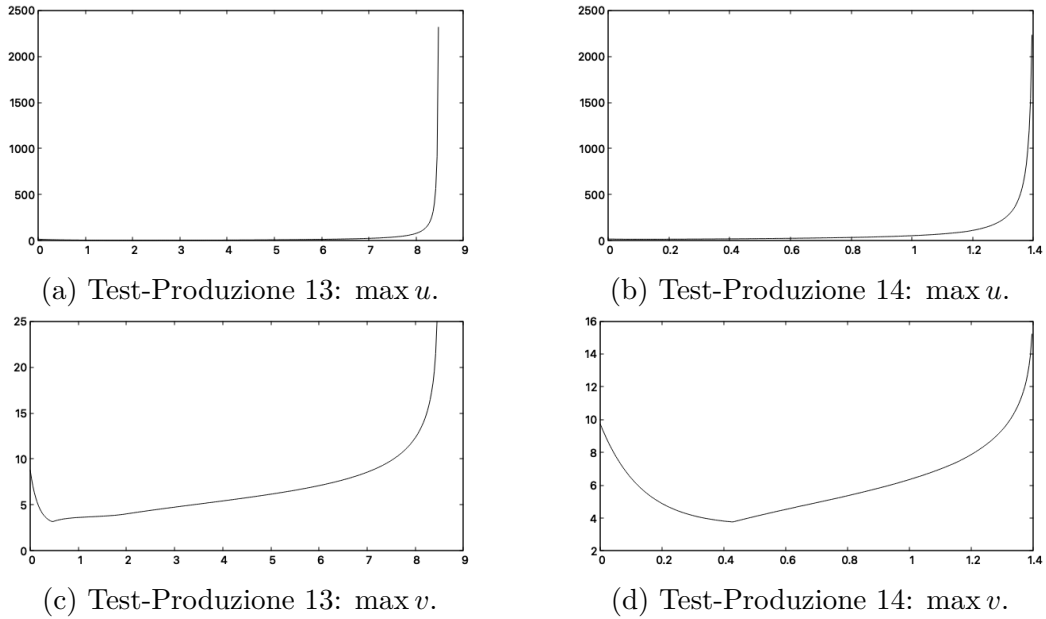


Figura 5.10: Confronto tra il $\max u$ e il $\max v$ nei Test-Produzione 13 e 14: l'asse orizzontale rappresenta il tempo, quello verticale il valore massimo della distribuzione.

5.2 Simulazioni del Problema di consumazione

Dedichiamo quest'ultima sezione a due simulazioni bidimensionali del problema \mathcal{C} . Sebbene la teoria indica l'assenza di fenomeni legati al blow-up (essendo $u(x, t)$ limitata per ogni t ed indipendentemente dai dati iniziali u_0 e v_0 e dal coefficiente chemiotattico χ), vogliamo comunque fare dei test con alti valori di χ e grandi segnali chimici v_0 cercando di confrontarli con i test precedenti. Per esempio cambiamo il coefficiente chemiotattico χ e la distribuzione iniziale del segnale chimico v_0 del Test-Produzione 8, lasciando inalterata u_0 .

Test-Cosumazione 1. Dati utilizzati:

$$u_0 = 3e^{-(x^2+y^2)}(81 - x^2 - y^2), v_0 = 10e^{-(x^2+y^2)}, m = 753,94, \chi = 10.$$

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < \frac{9}{4}, |y| < \frac{9}{4} \right\}.$$

Conclusione del test: $T_{\max} = +\infty$ e soluzione globalmente limitata.

In questo test, le cui raffigurazioni grafiche sono riportate in Figura 5.11, possiamo notare che, anche in presenza di un coefficiente chemiotattico alto, non è presente alcun blow-up, contrariamente al Test-Produzione 8. Inoltre il segnale chimico tende a spostarsi verso l'esterno e a diminuire fino a essere praticamente nullo. Proprio per questo, il suo gradiente cambia direzione, orientandosi verso l'esterno.

Test-Cosumazione 2. In questo test consideriamo $\Omega = B_9(0)$ e fissiamo dati simili al Test-Produzione 12 ma con χ molto più elevato, ancora una volta per notare l'effetto di un'alta azione di aggregazione; nello specifico siano

$$u_0 = 20e^{-(|x|-2)^2 - (|y|-2)^2}, v_0 = 10e^{-(x^2+y^2)}, m = 251,151, \chi = 5.$$

Conclusione del test: $T_{\max} = +\infty$ e soluzione globalmente limitata.

In questo test la distribuzione cellulare aumenta nei primi istanti, ma successivamente inizia la sua discesa e tende a stabilizzarsi: anche in questo caso non è presente il blow-up. (Si veda la Figura 5.12 per l'evoluzione di u e v in alcuni istanti di tempo e la Figura 5.13 per l'andamento del $\max u$ e del $\max v$ al variare del tempo t .)

Osservazione 5.4. *Notiamo che in entrambi i test fatti, l'annullarsi del segnale chimico comporta che la soluzione (u, v) converga allo stato stazionario $(\frac{m}{|\Omega|}, 0)$.*

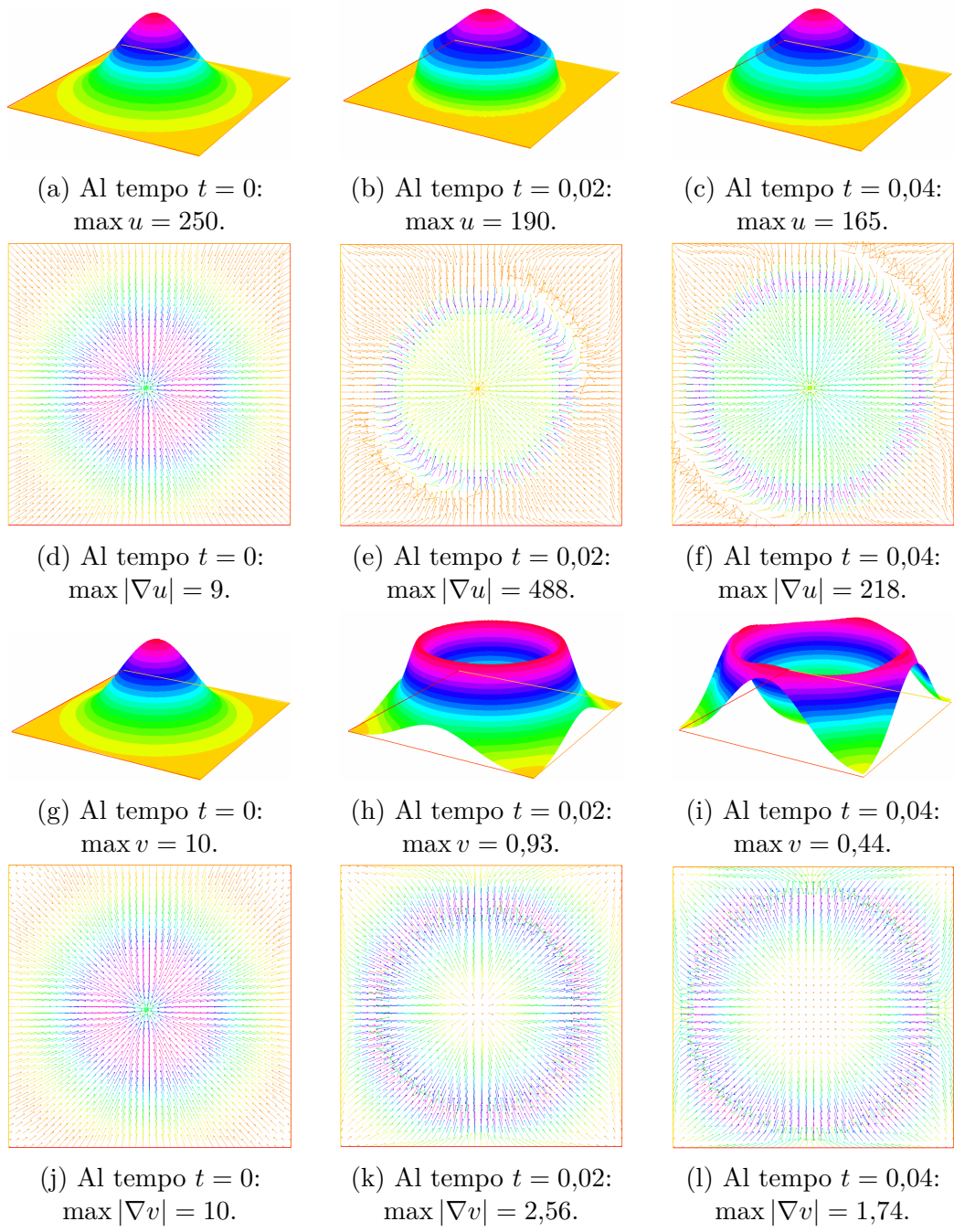


Figura 5.11: Test-Consumazione 1: u , ∇u , v e ∇v in alcuni istanti di tempo.

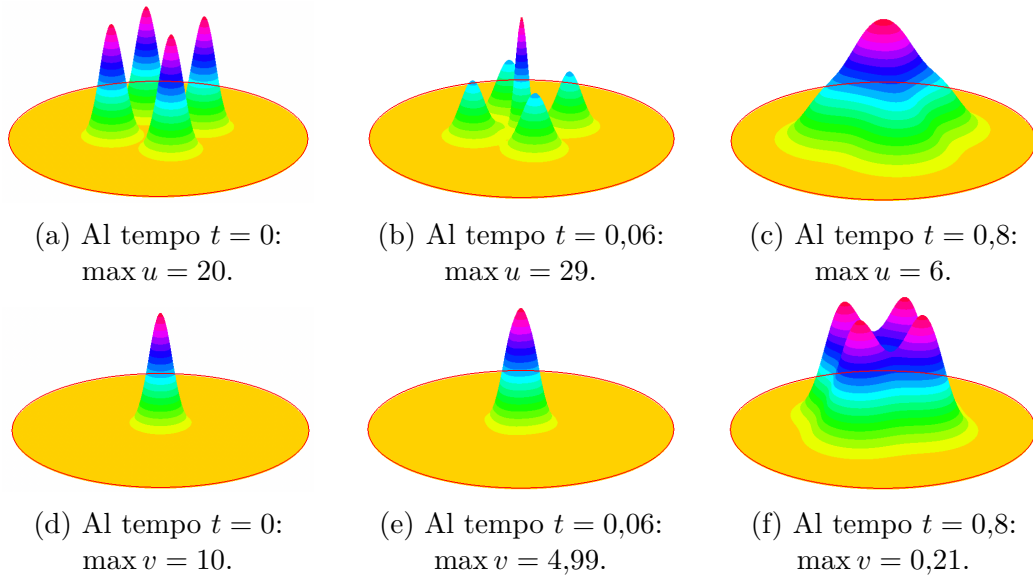


Figura 5.12: Test-Consumazione 2: u e v in alcuni istanti di tempo.

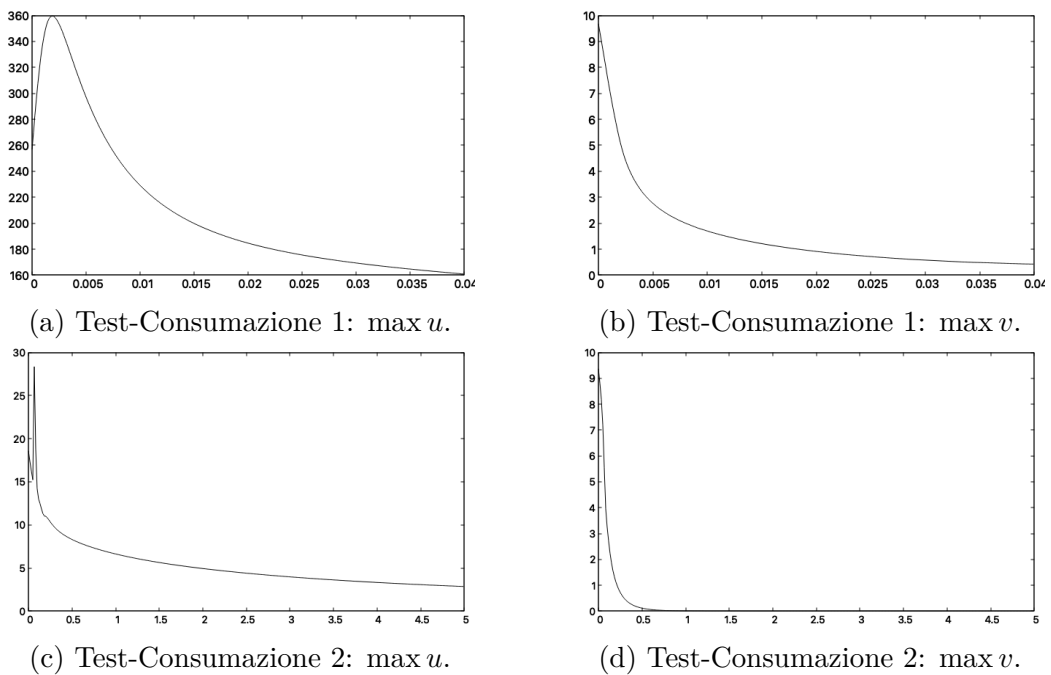


Figura 5.13: Confronto tra il $\max u$ e il $\max v$ nei Test-Consumazione 1 e Test-Consumazione 2: l'asse orizzontale rappresenta il tempo, quello verticale il valore massimo della distribuzione.

Capitolo 6

Conclusioni e potenziali lavori futuri

6.1 Osservazioni e considerazioni conclusive

In questa tesi abbiamo studiato due modelli provenienti dalla biomatemática descritti da un sistema di due equazioni differenziali accoppiate. La formulazione idealizza la cosiddetta *chemiotassi*, il fenomeno secondo cui alcuni organismi dirigono il loro movimento in virtù della presenza di un segnale chimico nell'ambiente. Dal punto di vista matematico, è proprio l'interazione tra la popolazione cellulare e la sostanza chimica che rende il problema complesso e impegnativo. La letteratura presente è estremamente abbondante, ma altrettanto sono le questioni aperte che affascinano i ricercatori del settore.

I due modelli accennati sono attribuiti agli scienziati Keller e Segel, che hanno proposto due formulazioni pionieristiche di tali fenomeni. La principale differenza tra queste formulazioni è essenzialmente legata all'influenza della popolazione sulla sostanza chimica; in particolare, in un caso il segnale chimico viene prodotto dalle cellule stesse (nominato Problema \mathcal{P}), nell'altro consumato (Problema \mathcal{C}). Entrambe le situazioni, però, hanno in comune il cosiddetto termine diffusivo-incrociato (chemiosensibilità), che quantifica l'impatto dell'interazione fra la popolazione e la sostanza chimica e destabilizza essenzialmente l'effetto della diffusione; quanto più alta è tale chemiosensibilità, maggiore tendenza al caos appare nel modello. Per essere più precisi, esperimenti reali dimostrano che il comportamento generale delle cellule nel tempo è lungi dall'essere regolare e omogeneo: infatti, se da un lato la diffusione tende a stabilizzare l'evoluzione delle cellule, la controparte data dall'interazione tra popolazione e segnale chimico rompe questa tendenza all'equilibrio. Quindi, da ciò, sono possibili diversi scenari: la distribuzio-

ne omogenea o eterogenea delle cellule nel tempo oppure la formazione di pattern o fenomeni di aggregazione in uno o più punti del dominio (collasso chemiotattico).

Per quanto riguarda questa relazione, abbiamo limitato il nostro interesse a una versione semplificata dei due modelli citati in precedenza, e in particolare ci siamo dedicati all'analisi teorica e numerica dei due problemi. L'approccio teorico ci ha permesso di ottenere, per quanto riguarda il Problema \mathcal{P} , condizioni sufficienti sui dati (in particolare la chemiosensibilità χ e la massa $m = \int_{\Omega} u_0$, essendo u_0 la distribuzione cellulare iniziale) che garantiscono la limitatezza uniforme nel tempo di tali soluzioni. Nello specifico, se in una dimensione χ e m possono essere arbitrarie a tal fine, in dimensioni più alte questo smette di essere vero: non solo χ deve essere sufficientemente piccolo, ma u_0 deve assumere una determinata forma. La limitatezza, invece, del Problema \mathcal{C} è automatica fino a dimensione due, vincolata a piccoli valori di χ e del $\max v_0$ (v_0 rappresenta la distribuzione iniziale del segnale chimico attrattivo) dalla terza dimensione in su. Questo non è sorprendente visto che in questo modello il segnale attrattivo scema nel tempo, tant'è che situazioni in cui appaia un'esplosione in tempo finito è uno dei problemi aperti più complessi del campo.

Con il fine di rispondere a questioni quantitative non deducibili dall'analisi teorica, d'altra parte, abbiamo analizzato alcuni esempi numerici bidimensionali, ottenuti risolvendo i problemi in considerazione con un algoritmo FEM-FDM, ovvero che prevede l'implementazione del Metodo degli Elementi Finiti, nello spazio, e del Metodo delle Differenze Finite, nel tempo. Queste simulazioni, che sono state di grande supporto, mostrano proprietà delle soluzioni che non sono facilmente deducibili tramite la mera analisi qualitativa. Più precisamente, per il Problema \mathcal{P} , fissate delle distribuzioni iniziali a campana singola centrale, abbiamo cercato di individuare inizialmente un valore di χ al di sotto del quale la soluzione fosse limitata e al di sopra illimitata. Da qui, abbiamo analizzato la diminuzione del tempo di blow-up in base all'aumento del coefficiente χ fissando la distribuzione iniziale e la massa, e all'aumento della massa fissando il coefficiente χ . Inoltre, considerando delle distribuzioni a campana quadrupla, abbiamo assistito a dei comportamenti diversi delle soluzioni nonostante i dati fossero simili. Più precisamente, abbiamo confermato il fatto che la dinamica del modello non dipende solamente dal prodotto χm , ma anche dalla distribuzione u_0 . Infine, e per quel che riguarda il Problema \mathcal{C} , abbiamo suffragato numericamente quello che avevamo dimostrato, e cioè che in dimensione 2, anche considerando alti coefficienti chemiotattici, distribuzioni iniziali con grande massa e potenti segnali chimici, le soluzioni rimangono limitate e convergenti ad uno stato stazionario.

6.2 Potenziali progetti futuri

La formulazione più generale per descrivere modelli della biomatematica che idealizzano fenomeni chemiotattici è la seguente:

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot (A(u, v)\nabla u - B(u, v)\nabla v) + C(u, v) & \text{in } \Omega \times (0, T_{\max}), \\ \tau v_t = \Delta v + E(u, v) & \text{in } \Omega \times (0, T_{\max}), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \partial\Omega \times (0, T_{\max}), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 \text{ e } \tau v(x, 0) = \tau v_0(x) \geq 0 & x \in \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (6.1)$$

In questa relazione la nostra scelta ha previsto $\tau \in \{0, 1\}$, $A(u, v) = 1$, $B(u, v) = \chi u$, $C(u, v) = 0$ e $E(u, v) = -v + u$ oppure $E(u, v) = -vu$, e l'analisi dello studio affrontato lo abbiamo riassunto nel paragrafo precedente.

Possibili lavori futuri si basano nel considerare il problema (6.1) per il quale A, B, C e E hanno espressioni diverse da quelle scelte sopra. (Variare tali espressioni non ha solo un interesse matematico ma, in talune circostanze, anche modellistiche.) A titolo d'esempio, come problemi di ispirazione ad analisi successive, menzioniamo:

- ([22]) nel sistema si considerano $A(u, v) = 1$, $B(u, v) = u$, viene aggiunta la sorgente $C(u, v) = \kappa u - \mu u^2$, con $\kappa \in \mathbb{R}$ e $\mu \in \mathbb{R}^+$, e inoltre la seconda equazione è parabolica (cioè $\tau = 1$) con $E(u, v) = -v + u$; si analizza il comportamento asintotico di soluzioni globali;
- ([8]) in questo caso $A(u, v) = 1$, $B(u, v) = \chi \frac{u}{v}$, $C(u, v) = ru - \mu u^2$, con $r \in \mathbb{R}$ e $\mu \in \mathbb{R}^+$, e $E(u, v) = -v + u$; si dimostra che l'effetto dissipativo della sorgente garantisce l'esistenza di una soluzione classica globale, e se r è abbastanza grande tale soluzione diventa globalmente limitata;
- ([7]) in tale lavoro $A(u, v) = 1$, $B(u, v) = f(u)$, con $f(u) = u^\alpha$, $E(u, v) = -v + g(u)$, con $g(u) = u^l$, e $\tau = 1$; viene dimostrata l'esistenza di un'unica soluzione globalmente limitata per determinati valori di α e l ;
- ([32]) qui $A(u, v) = D(u)$, $B(u, v) = S(u)$, $C(u, v) = 0$, $E(u, v) = -v + u$, $\tau = 1$ e le funzioni $D(u)$ e $S(u)$ sono tali che $\frac{D(u)}{S(u)} \leq cu^\alpha$ con $\alpha < \frac{2}{N}$, $c > 0$ e $u > 1$; si dimostra che le soluzioni classiche sono globalmente limitate;
- ([30]) in questa ricerca $\tau = 1$, $E(u, v) = -v + g(u)$ e le funzioni $D(u)$, $S(u)$ e $g(u)$ sono tali che, per opportune costanti, $d_0(1+u)^{-\alpha} \leq D(u) \leq d_1(1+u)^{-\alpha_1}$, $0 \leq S(u) \leq s_1(1+u)^{\beta-1}$ e $0 \leq g(u) \leq g_1 u^\gamma$, $\gamma < 1$;

anche in questa ricerca viene provata l'esistenza di un'unica soluzione globalmente limitata.

Anche se appare difficoltoso, potrebbe essere auspicabile considerare ranghi diversi dei parametri fissati sopra e sviluppare la relativa teoria riguardante le proprietà di soluzioni dei corrispondenti problemi. Senz'altro utile per ovviare a non sorprendenti difficoltà tecniche (prettamente legate a questioni teoriche riguardanti, specialmente, disequaglianze funzionali) è il supporto dell'analisi numerica. Nello specifico, il linguaggio *FreeFem++* utilizzato in questa tesi appare semplice ed automatico per alcuni aspetti, ma deficiente in altri. Esso, infatti, non è ottimizzato per lavorare con delle *CPU multicore*¹: lascia decidere all'utente che tipo di parallelizzazione fare, e questo rende il codice molto più complicato. Per questo in futuro si utilizzeranno dei linguaggi di programmazione come *MATLAB* e *Python*, già ottimizzati per lavorare in multicore. Rimane ben inteso che uno sforzo sensibile, in termini tanto di tempo come di dettagli tecnici, deve essere preventivato per problemi tridimensionali.

¹Per CPU multicore si intende un processore formato da più nuclei fisici, capace quindi di eseguire più calcoli in parallelo.

Bibliografia

- [1] J. Adler. “Chemotaxis in Bacteria”. In: *Science* 153.3737 (1966), pp. 708–716.
- [2] N. Bellomo et al. “Toward a mathematical theory of Keller-Segel models of pattern formation in biological tissues”. In: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 25.9 (2015), pp. 1663–1763.
- [3] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. New York: Springer, 2011.
- [4] F. Cesari. *Il metodo degli elementi finiti applicato alla meccanica delle strutture per problemi non lineari. Nuova ediz. vol.3*. Pitagora, 2019.
- [5] S. Endre. “Lecture Notes on Finite Element Methods for Partial Differential Equations”. In: Mathematical Institute. University of Oxford (2020).
- [6] L. C. Evans. *Partial differential equations*. American Mathematical Society, 2010.
- [7] S. Frassu e G. Viglialoro. “Boundedness for a Fully Parabolic Keller–Segel Model with Sublinear Segregation and Superlinear Aggregation”. In: *Acta Applicandae Mathematicae* 171 (2021).
- [8] K Fujie, M. Winkler e T. Yokota. “Blow-up prevention by logistic sources in a parabolic-elliptic Keller–Segel system with singular sensitivity”. In: *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications* 109 (2014), pp. 56–71.
- [9] F. Hecht. “New development in FreeFem++”. In: *Journal of Numerical Mathematics* 20.3-4 (2012), pp. 251–265.
- [10] M. A. Herrero e J. J. L. Velázquez. “A blow-up mechanism for a chemotaxis model”. In: *Annali Della Scuola Normale Superiore Di Pisa-Classe Di Scienze* 24 (1997), pp. 633–683.

- [11] T. Hillen e K. J. Painter. “Global Existence for a Parabolic Chemotaxis Model with Prevention of Overcrowding”. In: *Advances in Applied Mathematics* 26 (2001), pp. 280–301.
- [12] D. Horstmann. “From 1970 until present: the Keller-Segel model in chemotaxis and its consequences”. In: *Jahresber. DMV* 105 (2003), pp. 103–165.
- [13] D. Horstmann. “From 1970 until present: the Keller-Segel model in chemotaxis and its consequences”. In: *Jahresber. DMV* 106 (2004), pp. 51–69.
- [14] D. Horstmann. “The nonsymmetric case of the Keller-Segel model in chemotaxis: some recent results”. In: *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA* 8 (2001), pp. 399–423.
- [15] D. Horstmann e G. Wang. “Blow-up in a chemotaxis model without symmetry assumptions”. In: *European Journal of Applied Mathematics* 12 (2001), pp. 159–177.
- [16] W. Jäger e S. Luckhaus. “On explosions of solutions to a system of partial differential equations modelling chemotaxis”. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 329 (1992), pp. 819–824.
- [17] E. F. Keller e Lee A. Segel. “Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability”. In: *Journal of Theoretical Biology* 26.3 (1970), pp. 399–415.
- [18] E. F. Keller e Lee A. Segel. “Traveling bands of chemotactic bacteria”. In: *Journal of Theoretical Biology* 30.2 (1971), pp. 235–248.
- [19] E. F. Keller e Lee A. Segel. “Traveling bands of chemotactic bacteria: A theoretical analysis”. In: *Journal of Theoretical Biology* 30.2 (1971), pp. 235–248.
- [20] L. Kohidai. “Chemotaxis: the proper physiological response to evaluate phylogeny of signal molecules”. In: *Acta Biologica Hungarica* 50.4 (1999), pp. 375–394.
- [21] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov e N. N. Ural’ceva. *Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type*. Translations of Mathematical Monographs 23. American Mathematical Society, 1988.
- [22] J. Lankeit. “Eventual smoothness and asymptotics in a three-dimensional chemotaxis system with logistic source”. In: *Journal of Differential Equations* 258 (2014), pp. 1158–1191.

- [23] J. Lankeit e Y. Wang. “Global existence, boundedness and stabilization in a high-dimensional chemotaxis system with consumption”. In: *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A* 37.12 (2017).
- [24] T. Nagai. “Blowup of nonradial solutions to parabolic–elliptic systems modeling chemotaxis in two-dimensional domains”. In: *Journal of Inequalities and Applications* 6 (2001), pp. 37–55.
- [25] T. Nagai. “Traveling waves in a chemotactic model”. In: *Journal of Theoretical Biology* 30.2 (1991), pp. 169–184.
- [26] L. Nirenberg. “On elliptic partial differential equations”. In: *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze* 13.2 (1959), pp. 115–162.
- [27] K. Painter e T. Hillen. “Volume-filling and quorum-sensing in models for chemosensitive movement”. In: *Canadian Applied Mathematics Quarterly* 10 (2002), pp. 501–543.
- [28] T. Senba e T. Suzuki. “Parabolic system of chemotaxis: blowup in a finite and the infinite time”. In: *Methods and Applications of Analysis* 8 (2001), pp. 349–368.
- [29] M. R. Spiegel, S. Lipschutz e D. Spellman. *Vector Analysis, 2nd Edition*. McGraw Hill (USA), 2009.
- [30] Y. Tanaka, G. Vigliani e T. Yokota. “Remarks on two connected papers about Keller–Segel systems with nonlinear production”. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 501.2 (2021), pp. 125–188.
- [31] Y. Tao. “Boundedness in a chemotaxis model with oxygen consumption by bacteria”. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 381.2 (2011), pp. 521–529.
- [32] Y. Tao e M. Winkler. “Boundedness in a quasilinear parabolic-parabolic Keller-Segel system with subcritical sensitivity”. In: *Journal of Differential Equations* 252 (2011).
- [33] G. Vigliani. “Influence of nonlinear production on the global solvability of an attraction-repulsion chemotaxis system”. In: *Mathematische Nachrichten* 294.12 (2021), pp. 2441–2454.
- [34] G. Vigliani e T. E. Woolley. “Solvability of a Keller-Segel system with signal-dependent sensitivity and essentially sublinear production”. In: *Applicable Analysis* 99.14 (2020), pp. 2507–2525.
- [35] L. Wang e T. Li. “Asymptotic nonlinear stability of traveling waves to conservation laws arising from chemotaxis”. In: *Journal of Differential Equations* 250.3 (2011), pp. 1310–1333.

- [36] M. Winkler. “Global large-data solutions in a chemotaxis-(Navier-)Stokes system modeling cellular swimming in fluid drops”. In: *Communications in Partial Differential Equations* 37.2 (2012), pp. 319–351.
- [37] M. Winkler. “Stabilization in a two-dimensional chemotaxis-Navier-Stokes system”. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 211.2 (2014), pp. 455–487.
- [38] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor e J. Z. Zhu. *The finite element method: its basis and fundamentals*. Seventh. Elsevier/Butterworth Heinemann, Amsterdam, 2013.