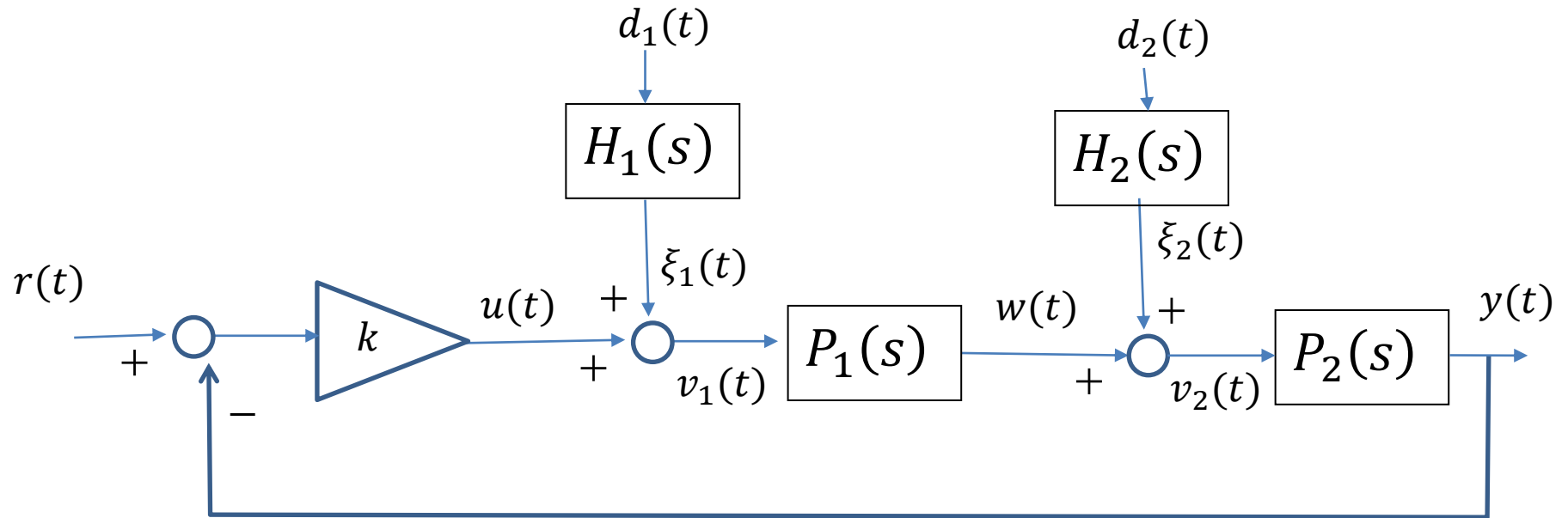


Controlli automatici

Esercitazione n. 2

Prof. Alessandro Pisano
`apisano@unica.it`

Si consideri il sistema di controllo in retroazione rappresentato dal seguente schema a blocchi



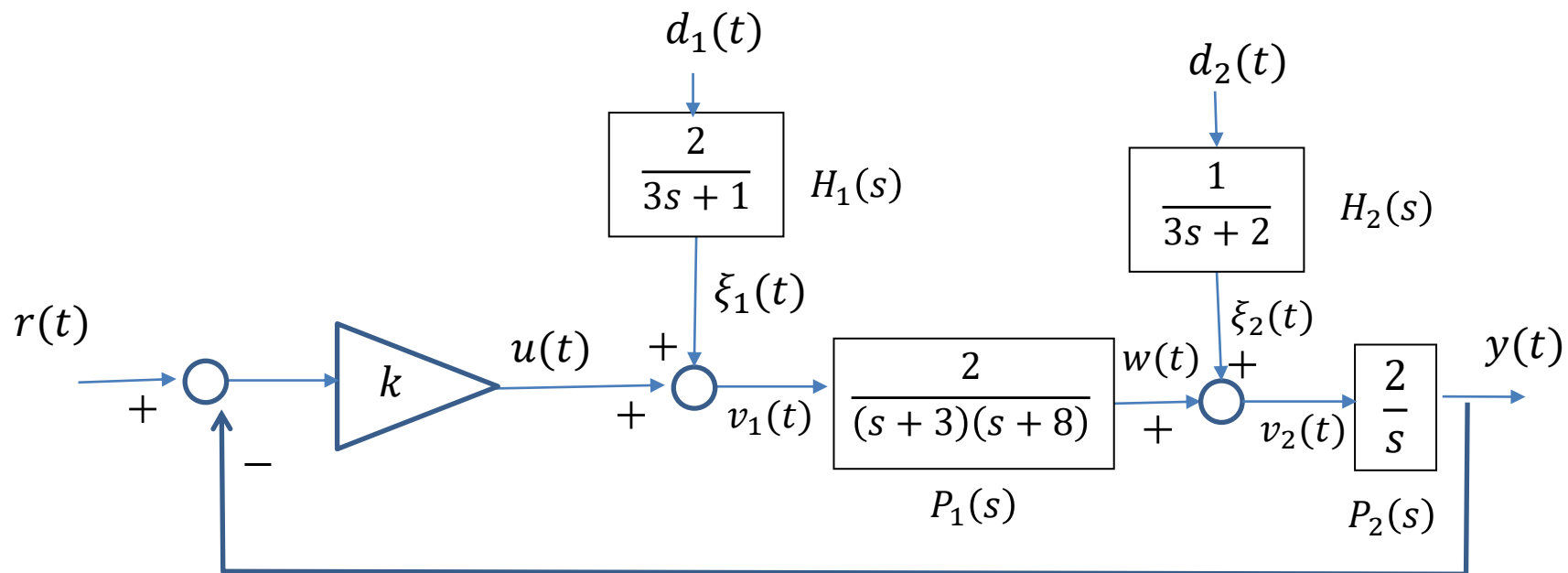
$$P_1(s) = \frac{2}{(s+3)(s+8)}$$

$$P_2(s) = \frac{2}{s}$$

$$H_1(s) = \frac{2}{3s+1}$$

$$H_2(s) = \frac{1}{3s+2}$$

Schema a blocchi esplicito



1. Analizzarne la stabilità a ciclo chiuso al variare del guadagno k
2. Valutare le funzioni di trasferimento $W_r^y(s)$, $W_{d_1}^y(s)$ e $W_{d_2}^y(s)$.
3. Assumendo il valore $k = 20$ determinare guadagni e struttura poli-zeri di $W_r^y(s)$, $W_{d_1}^y(s)$ e $W_{d_2}^y(s)$
4. Assumendo il valore $k = 20$ calcolare il valore di regime dell'uscita quando

$$r(t) = R = 5,$$

$$d_1(t) = D_1 = 1,$$

$$d_2(t) = D_2 = 0.1.$$

5. Considerando un set point costante $r(t) = R = 5$ e segnali disturbanti $d_1(t)$ e $d_2(t)$ entrambi nulli disegnare approssimativamente l'evoluzione temporale dell'uscita in corrispondenza dei tre valori del guadagno

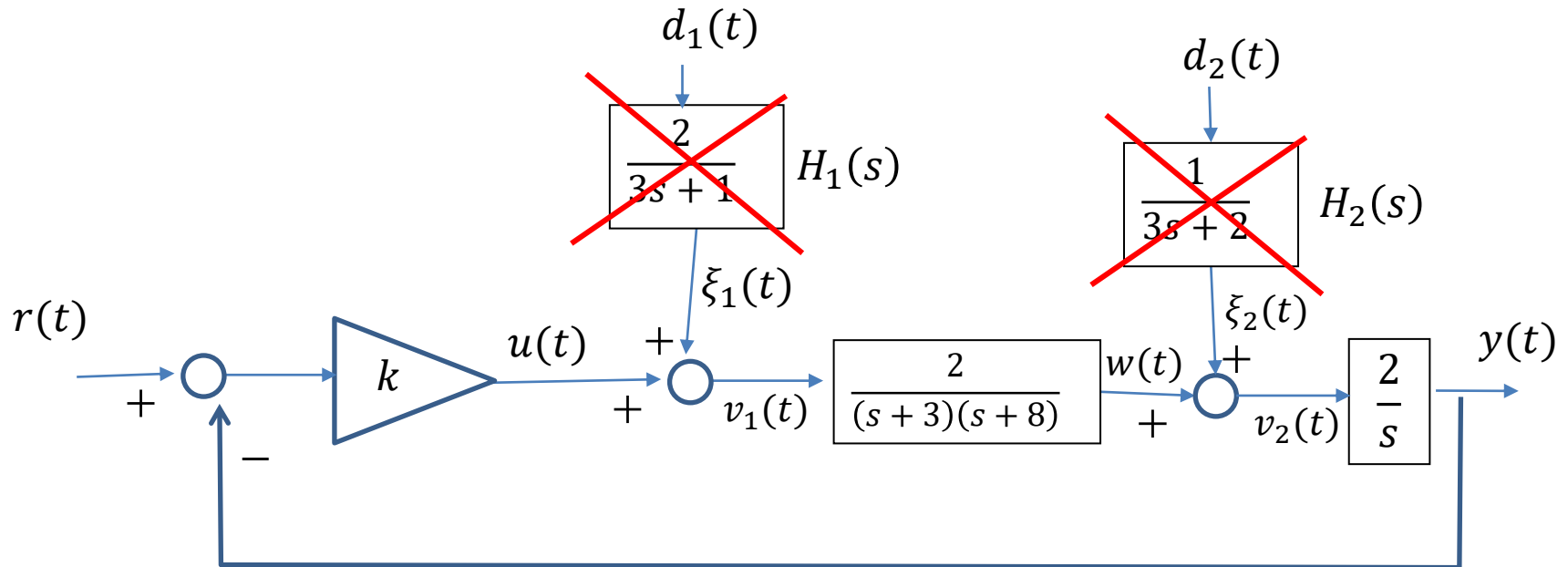
$$k = 3.7$$

$$k = 20$$

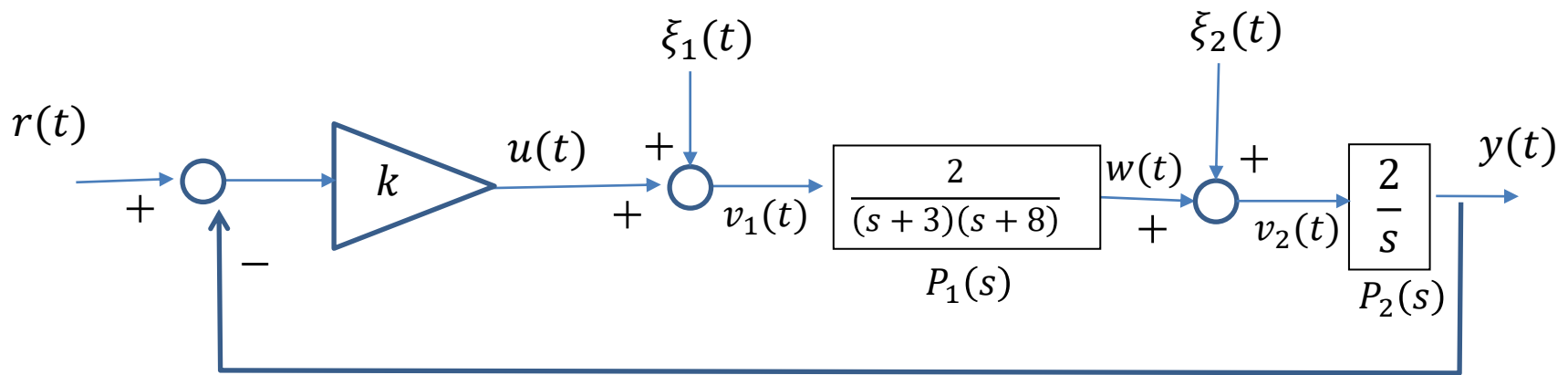
$$k = 70$$

6. Verificare mediante simulazione dinamica i risultati ottenuti

1. Analizzarne la stabilità a ciclo chiuso al variare del guadagno k



La stabilità a ciclo chiuso non è influenzata da $H_1(s)$ e $H_2(s)$



Analisi «polinomiale»

$$P_{car}(s) = s(s+3)(s+8) + 4k = s^3 + 11s^2 + 24s + 4k$$

$$11 \cdot 24 > 4k \quad k < 66 \quad k_{cr} = 66$$

Analisi mediante tracciamento del Luogo delle radici

Nel sistema di controllo in esame:

$$L(s) = P_1(s)P_2(s) = \frac{2}{(s+3)(s+8)} \cdot \frac{2}{s}$$

$$num_L = 4$$

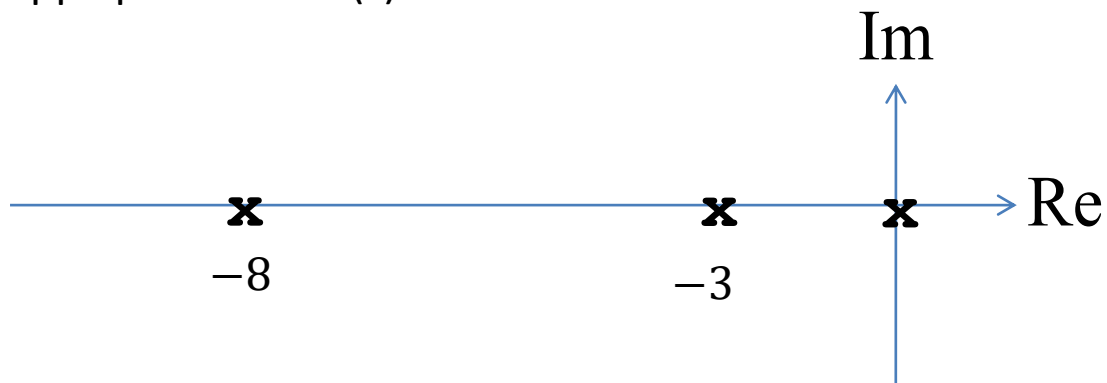
$$m = 0$$

$$den_L = s(s+3)(s+8) = s^3 + 11s^2 + 24s$$

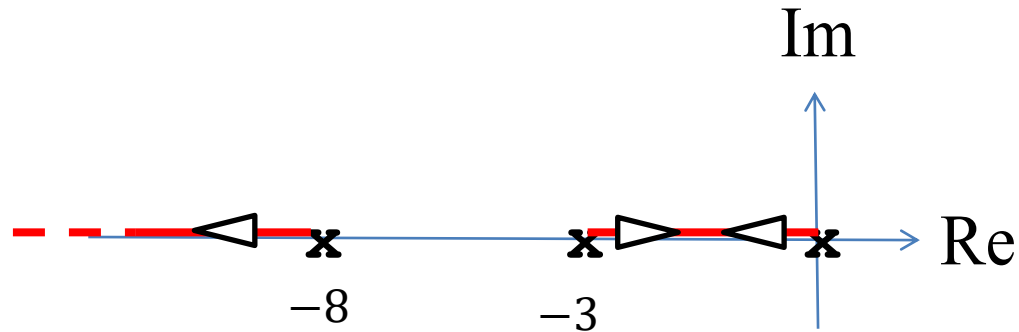
$$n = 3$$

Tracciamento manuale del LdR

Mappa poli-zeri di L(s)



Regola della appartenenza al LdR dei segmenti dell'asse reale



Il segmento che va dal polo in -8 verso meno infinito è uno dei rami del LdR.

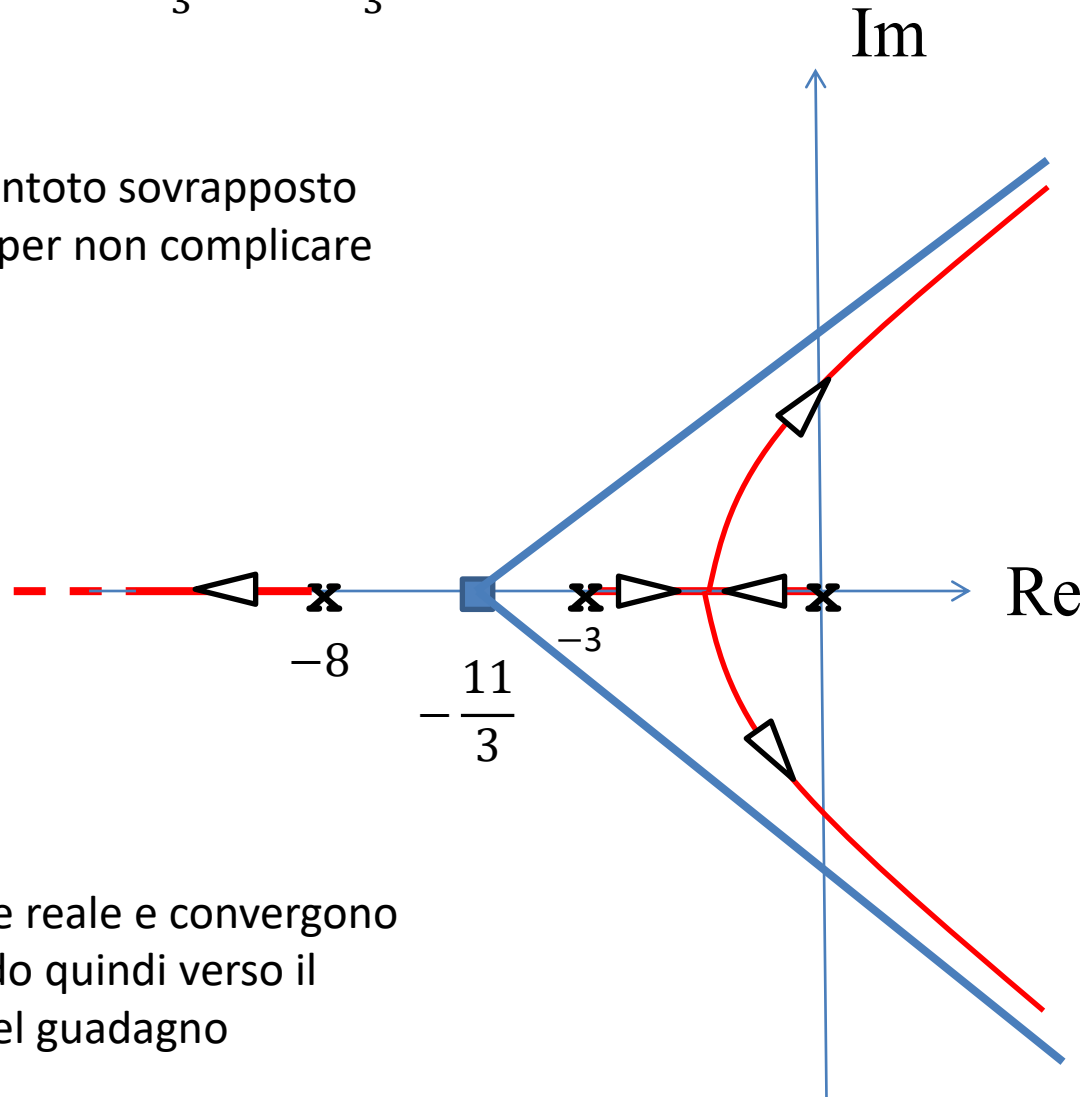
Il segmento che unisce l'origine ed il polo in -3 invece non è un ramo del luogo.

I due rami che partono rispettivamente dal polo nell'origine e dal polo in -3 vanno l'uno verso l'altro e si incontrano in un punto doppio appartenente all'intervallo $(-3, 0)$ per poi abbandonare l'asse reale e convergere verso gli asintoti.

Centro stella asintoti: $x_s = \frac{-3-8}{3} = -\frac{11}{3}$

$$n - m = 3$$

Non disegniamo il terzo asintoto sovrapposto al semiasse reale negativo per non complicare oltremodo il disegno



I due rami abbandonano l'asse reale e convergono verso i due asintoti, confluyendo quindi verso il semipiano destro per valori del guadagno sufficientemente elevati.

L'asse immaginario viene attraversato in corrispondenza del guadagno critico $k = k_{cr}=66$

Tracciamento del luogo delle radici mediante Matlab

Funzione “**rlocus**”

Per il tracciamento mediante Matlab del luogo delle radici si impiega la funzione **rlocus**, alla quale devono essere passati come argomenti di ingresso i (vettori associati ai) polinomi a numeratore e denominatore della $L(s)$

Sintassi generica:

rlocus(numL,denL)

$$L(s) = \frac{4}{s(s+3)(s+8)}$$

$$num_L = 4$$

$$den_L = s(s+3)(s+8) = s^3 + 11s^2 + 24s$$

```
numL=4;  
denL=poly([0 -3 -8])  
%definizione alternativa di denL  
denL=[1 11 24 0]
```

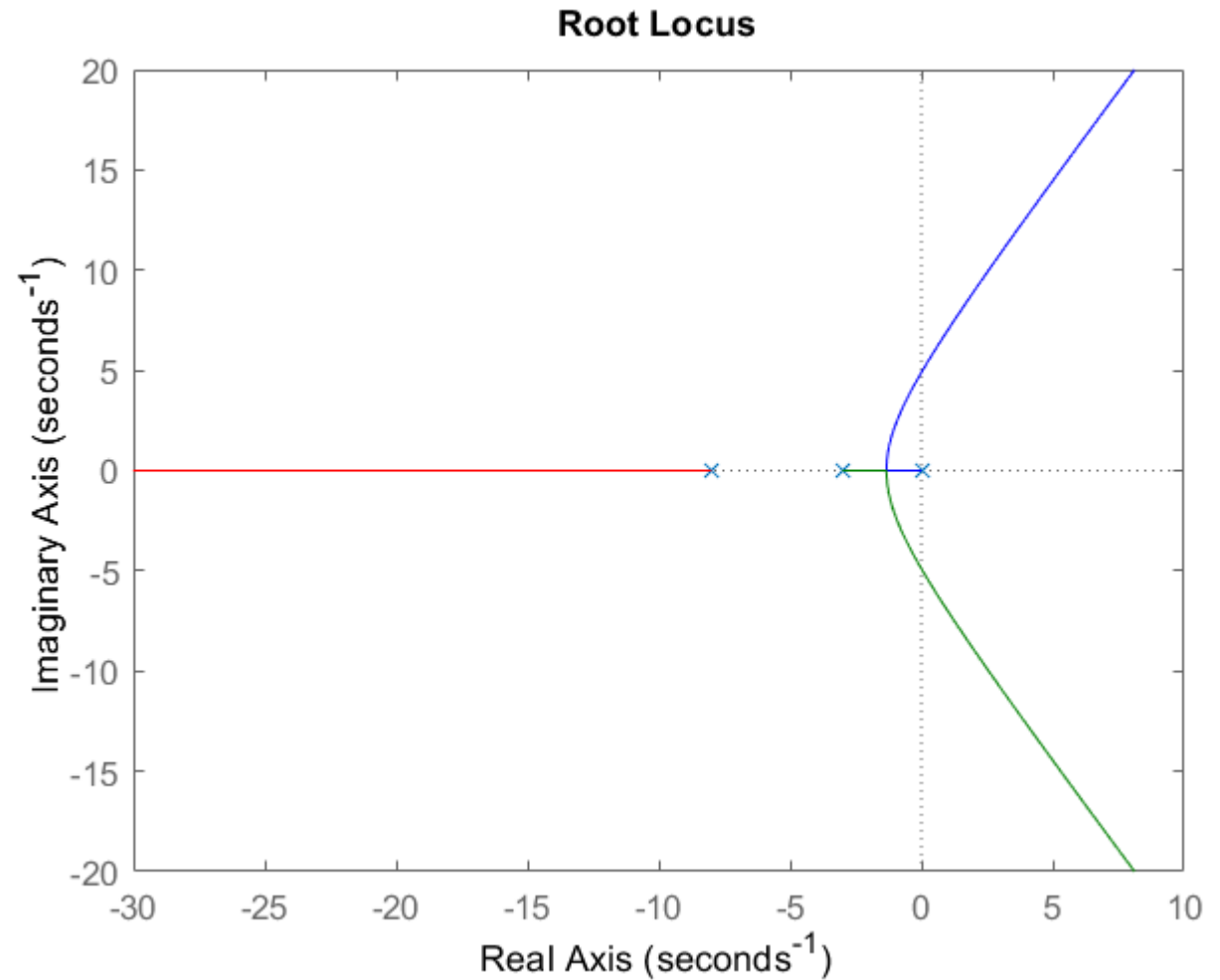
```
rlocus(numL,denL)
```



```
numL=4;  
denL=poly([0 -3 -8])  
%definizione alternativa di denL  
denL=[1 11 24 0]
```



```
rlocus(numL,denL)
```



```
numL=4;  
denL=poly([0 -3 -8])
```

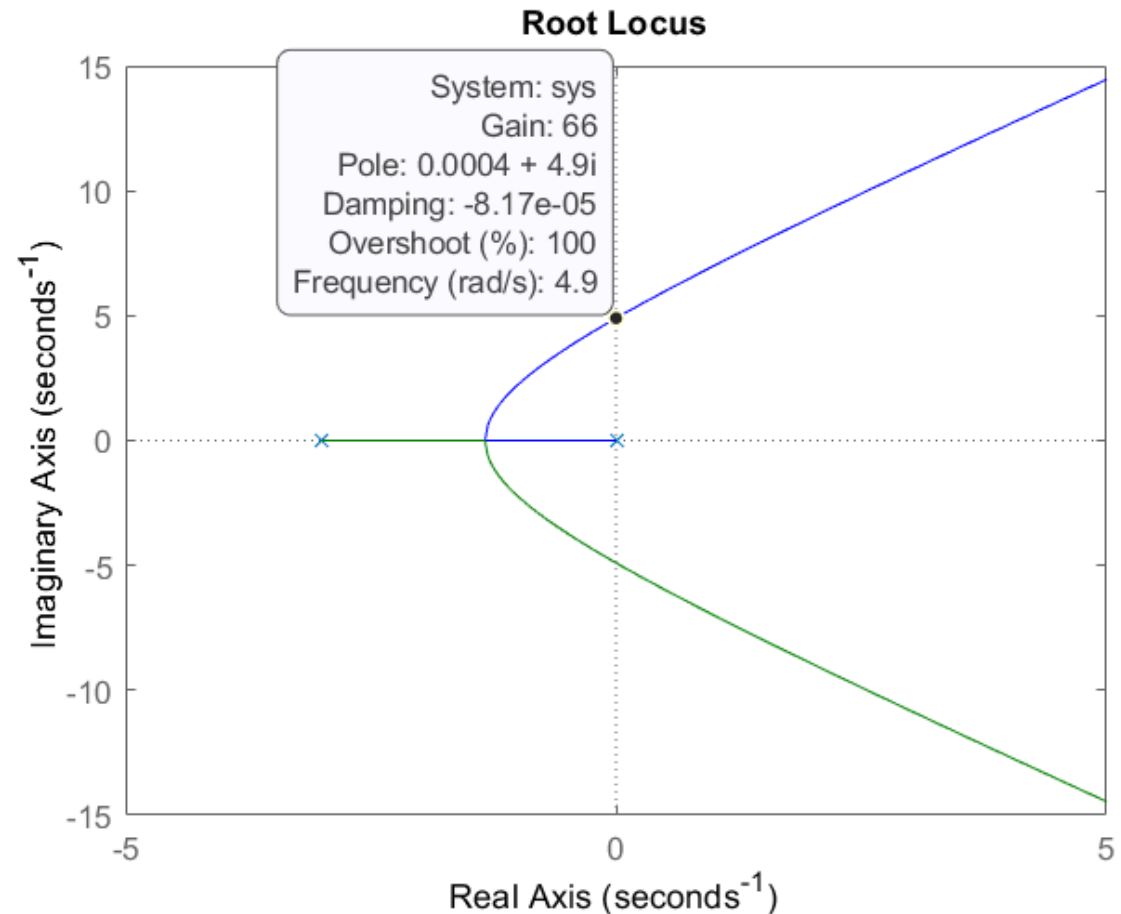
```
rlocus(numL,denL)  
axis([-5 5 -15 15])
```

Intervallo di visualizzazione assi coordinati (zoom sull'origine)

Portare la freccia del mouse in prossimità del punto superiore di attraversamento dell'asse immaginario e premere il tasto sinistro del mouse.

Scorrere successivamente sul ramo corrispondente.

Punto doppio approssimativamente con ascissa -1.33



2. Valutare le funzioni di trasferimento $W_r^y(s)$, $W_{d_1}^y(s)$ e $W_{d_2}^y(s)$.

$$W_r^y(s) = \frac{kP_1(s)P_2(s)}{1+kP_1(s)P_2(s)} = \frac{k \frac{2}{(s+3)(s+8)} \cdot \frac{2}{s}}{1+k \frac{2}{(s+3)(s+8)} \cdot \frac{2}{s}} = \frac{4k}{s^3+11s^2+24s+4k}$$

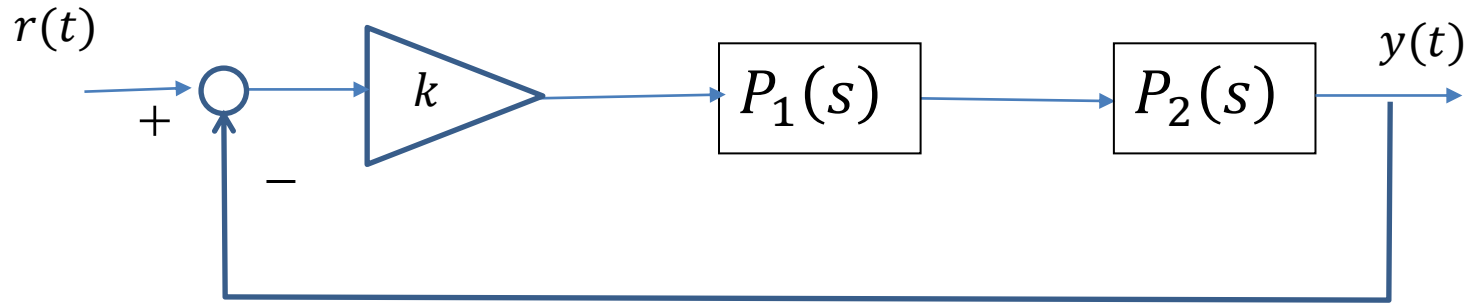
$$W_{d_1}^y(s) = H_1(s) \frac{P_1(s)P_2(s)}{1+kP_1(s)P_2(s)} = \frac{2}{3s+1} \cdot \frac{\frac{2}{(s+3)(s+8)} \cdot \frac{2}{s}}{1+k \frac{2}{(s+3)(s+8)} \cdot \frac{2}{s}} =$$

$$= \frac{2}{3s+1} \cdot \frac{4}{s^3+11s^2+24s+4k}$$

$$W_{d_2}^y(s) = H_2(s) \frac{P_2(s)}{1+kP_1(s)P_2(s)} = \frac{1}{3s+2} \cdot \frac{\frac{2}{s}}{1+k \frac{2}{(s+3)(s+8)} \cdot \frac{2}{s}} =$$

$$= \frac{1}{3s+2} \cdot \frac{2(s+3)(s+8)}{s^3+11s^2+24s+4k}$$

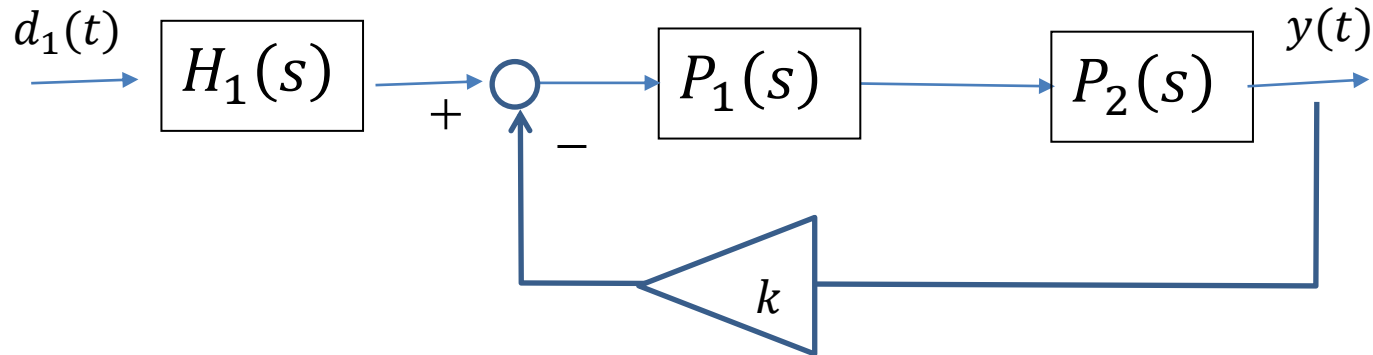
Schema equivalente per il calcolo di $W_r^y(s)$



$$P_1(s) = \frac{2}{(s+3)(s+8)} \quad P_2(s) = \frac{2}{s}$$

$$W_r^y(s) = \frac{kP_1(s)P_2(s)}{1+kP_1(s)P_2(s)} = \frac{k \frac{2}{(s+3)(s+8)} \cdot \frac{2}{s}}{1+k \frac{2}{(s+3)(s+8)} \cdot \frac{2}{s}} = \frac{4k}{s^3 + 11s^2 + 24s + 4k}$$

Schema equivalente per il calcolo di $W_{d_1}^y(s)$



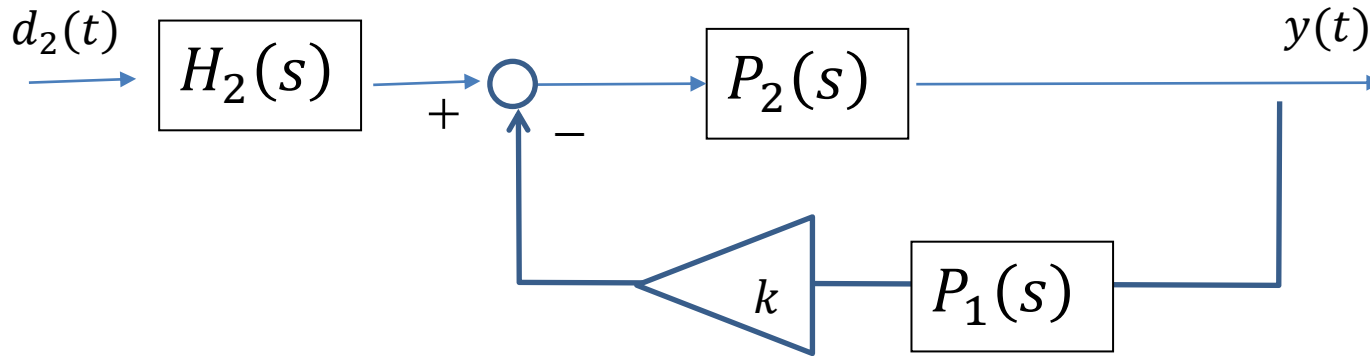
$$H_1(s) = \frac{2}{3s + 1}$$

$$P_1(s) = \frac{2}{(s + 3)(s + 8)}$$

$$P_2(s) = \frac{2}{s}$$

$$\begin{aligned}
 W_{d_1}^y(s) &= H_1(s) \frac{P_1(s)P_2(s)}{1 + kP_1(s)P_2(s)} = \frac{2}{3s + 1} \cdot \frac{\frac{2}{(s + 3)(s + 8)} \cdot \frac{2}{s}}{1 + k \frac{2}{(s + 3)(s + 8)} \cdot \frac{2}{s}} \\
 &= \frac{2}{3s + 1} \cdot \frac{4}{s^3 + 11s^2 + 24s + 4k}
 \end{aligned}$$

Schema equivalente per il calcolo di $W_{d_2}^y(s)$



$$H_1(s) = \frac{1}{3s + 2}$$

$$P_1(s) = \frac{2}{(s + 3)(s + 8)}$$

$$P_2(s) = \frac{2}{s}$$

$$\begin{aligned} W_{d_2}^y(s) &= H_2(s) \frac{P_2(s)}{1 + kP_1(s)P_2(s)} = \frac{1}{3s + 2} \cdot \frac{\frac{2}{s}}{1 + k \frac{2}{(s + 3)(s + 8)} \cdot \frac{2}{s}} \\ &= \frac{1}{3s + 2} \cdot \frac{2(s + 3)(s + 8)}{s^3 + 11s^2 + 24s + 4k} \end{aligned}$$

$$W_r^y(s) = \frac{4k}{s^3 + 11s^2 + 24s + 4k}$$

$$W_{d_1}^y(s) = \frac{2}{3s + 1} \cdot \frac{4}{s^3 + 11s^2 + 24s + 4k}$$

$$W_{d_2}^y(s) = \frac{1}{3s + 2} \cdot \frac{2(s + 3)(s + 8)}{s^3 + 11s^2 + 24s + 4k}$$

3. Assumendo il valore $k = 20$ determinare guadagni e struttura poli-zeri di $W_r^y(s)$, $W_{d_1}^y(s)$ e $W_{d_2}^y(s)$

$$W_r^y(s) = \frac{4k}{s^3 + 11s^2 + 24s + 4k} = \frac{80}{s^3 + 11s^2 + 24s + 80}$$

Guadagno statico $\mu_r = W_r^y(0) = 1$

Calcolo dei Poli con Matlab

```
roots([1 11 24 80])
```

ans =

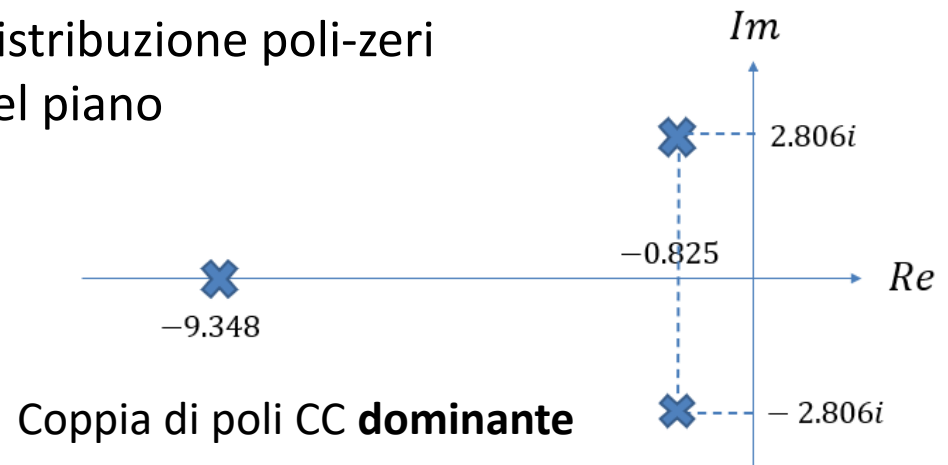
```
-9.3481 + 0.0000i  
-0.8259 + 2.8064i  
-0.8259 - 2.8064i
```

Poli

$$p_1 = -9.3481$$

$$p_{2,3} = -0.8259 \pm 2.8064i$$

Distribuzione poli-zeri
nel piano



Poli

$$p_1 = -9.3481$$

$$p_{2,3} = -0.8259 \pm 2.8064i$$

Costante di tempo associata al polo reale p_1

$$T_1 = -\frac{1}{-9.3481} = 0.107 \text{ s}$$

Calcolo dei parametri associati alla coppia di poli CC

Pulsazione naturale

$$\omega_n = \sqrt{(-0.8259)^2 + (2.8064)^2} = 2.9254 \text{ rad/s}$$

Smorzamento

$$\xi = -\frac{-0.8259}{\omega_n} = 0.28$$

Costate di tempo equivalente

$$\tau_{eq} = \frac{1}{\xi \omega_n} = 1.22 \text{ s}$$



```
k=20;
numP1=2;
denP1=poly([-8 -3]);
P1=tf(numP1,denP1)
numP2=2;
denP2=[1 0];
P2=tf(numP2,denP2)
Wry=k*P1*P2/(1+k*P1*P2);
Wry=minreal(Wry)

mur=dcgain(Wry)

[numWry,denWry]=tfdata(Wry,'v')

poli=roots(denWry)

p1=poli(1) % polo reale
p2=poli(2) % coppia CC
p3=poli(3) % coppia CC

T1=-1/p1 % costante di tempo del polo reale p1
omegan=abs(p2) % puls. naturale della coppia di poli complessi coniugati p2-p3
xi=-real(p2)/omegan % smorzamento della coppia di poli complessi coniugati

pzmap(Wry), % disegna la distribuzione poli zeri nel piano complesso
grid
```

P1 =

$$\frac{2}{s^2 + 11s + 24}$$

Continuous-time transfer function.

P2 =

$$\frac{2}{s}$$

Continuous-time transfer function.

Wry =

$$\frac{80}{s^3 + 11s^2 + 24s + 80}$$

Continuous-time transfer function.

mur =

$$1.0000$$

p1 =

$$-9.3481$$

p2 =

$$-0.8259 + 2.8064i$$

p3 =

$$-0.8259 + 2.8064i$$

T1 =

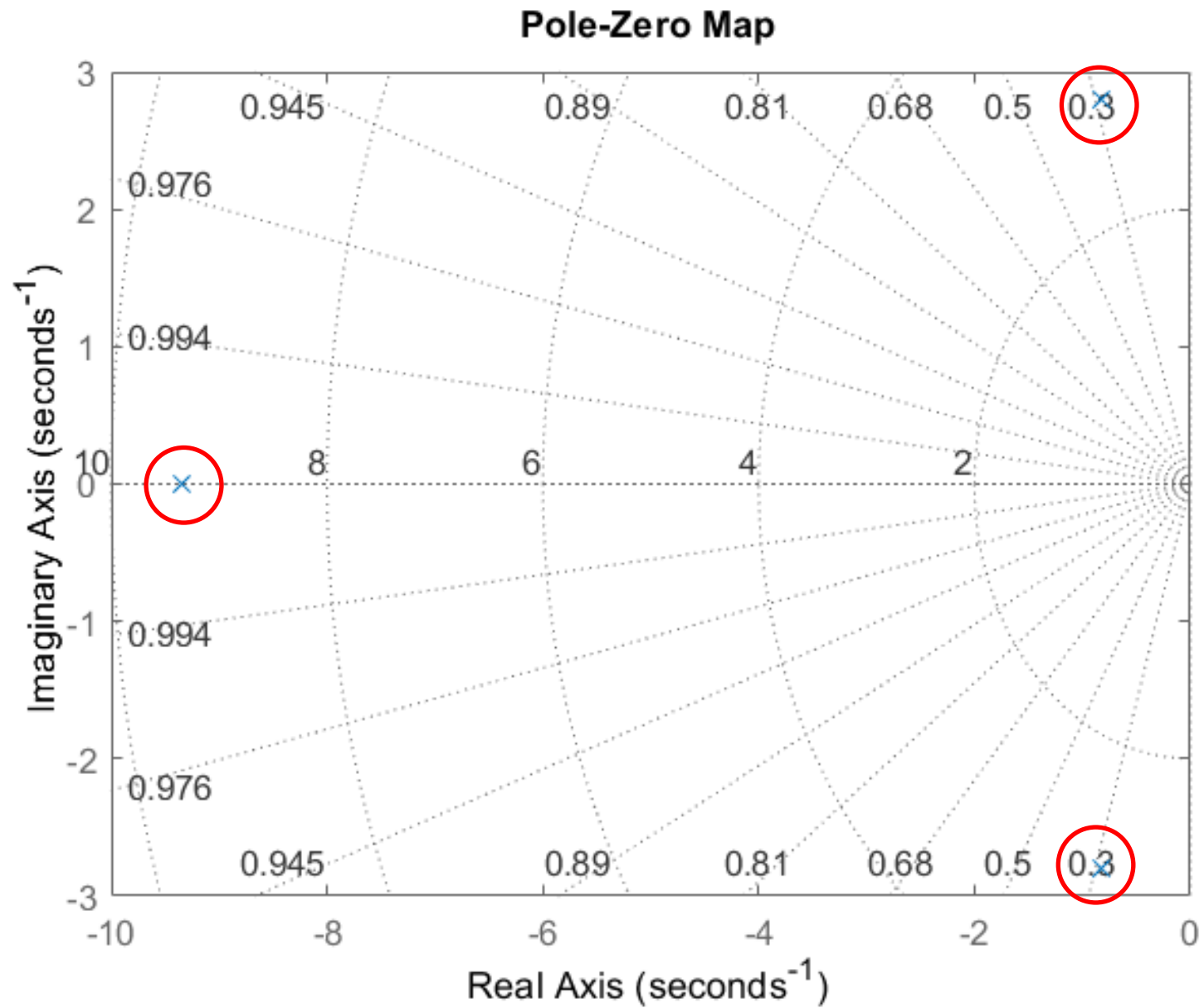
$$0.1070$$

omegan =

$$2.9254$$

xi =

$$0.2823$$



$$W_{d_1}^y(s) = \frac{2}{3s+1} \cdot \frac{4}{s^3+11s^2+24s+4k} = \frac{2}{3s+1} \cdot \frac{4}{s^3+11s^2+24s+80}$$

Guadagno statico $W_{d_1}^y(0) = 0.1$

Poli Stessi poli della $W_{y_{des}}^y(s)$ più in aggiunta il polo della $H_1(s)$ in $-1/3$

$$p_1 = -9.3481$$

$$p_{2,3} = -0.8259 \pm 2.8064i$$

$$p_{4,d1} = -1/3$$

$$W_{d_2}^y(s) = \frac{1}{3s+2} \cdot \frac{2(s+3)(s+8)}{s^3+11s^2+24s+4k} = \frac{1}{3s+2} \cdot \frac{2(s+3)(s+8)}{s^3+11s^2+24s+80}$$

Guadagno statico $W_{d_1}^y(0) = 0.3$

Poli Stessi poli della $W_{y_{des}}^y(s)$ più in aggiunta il polo della $H_2(s)$ in $-2/3$

$$p_1 = -9.3481$$

$$p_{2,3} = -0.8259 \pm 2.8064i$$

$$p_{4,d2} = -2/3$$

Zeri Ha come zeri i poli di $P_1(s)$

$$z_1 = -3 \quad z_2 = -8$$

4. Assumendo il valore $k = 20$, calcolare il valore di regime dell'uscita quando

$$r(t) = R = 5,$$

$$d_1(t) = D_1 = 1,$$

$$d_2(t) = D_2 = 0.1.$$

Principio di sovrapposizione degli effetti

$$y_{\infty} = R \cdot W_{y_{des}}^y(0) + D_1 \cdot W_{d_1}^y(0) + D_2 \cdot W_{d_2}^y(0)$$

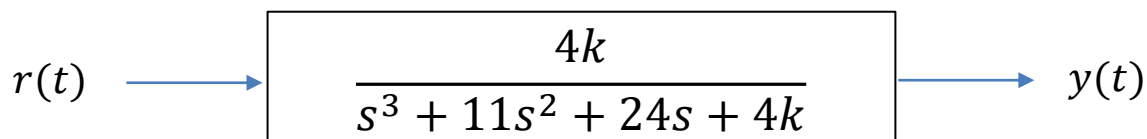
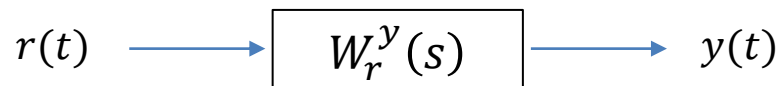
$$= 5 \cdot 1 + 1 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.3 = 5.13$$

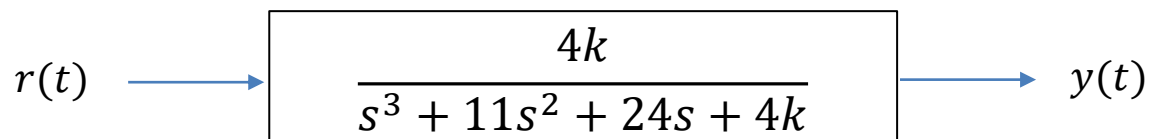
5. Considerando un set point costante $r(t) = R = 5$ e segnali disturbanti $d_1(t)$ e $d_2(t)$ entrambi nulli disegnare approssimativamente l'evoluzione temporale dell'uscita $y(t)$ in corrispondenza dei tre valori del guadagno

$$k = 3.7$$

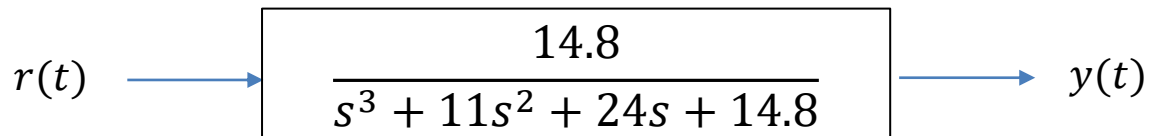
$$k = 20$$

$$k = 70$$

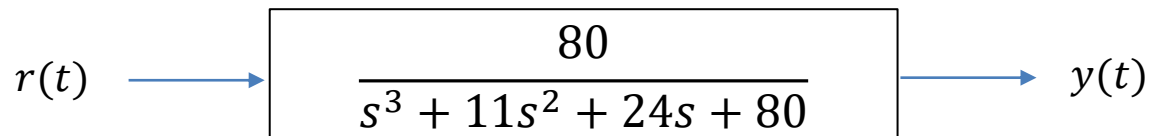




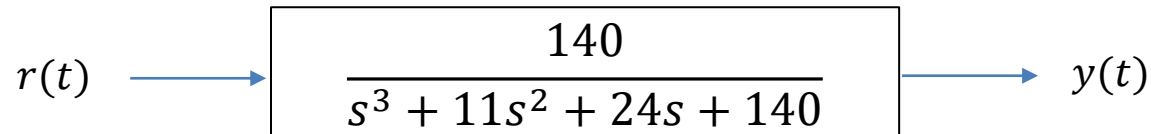
$$k = 3.7$$



$$k = 20$$



$$k = 70$$



$$k = 3.7$$

$$r(t) = R = 5$$

$$\frac{14.8}{s^3 + 11s^2 + 24s + 14.8}$$

$y(t)$

Guadagno statico $\mu_r = W_r^y(0) = 1$

Calcolo dei Poli con Matlab

$$k=3.7$$

$$p=\text{roots}([1 \ 11 \ 24 \ 4*k])$$



p =

-8.3330
-1.3795
-1.2875

Poli

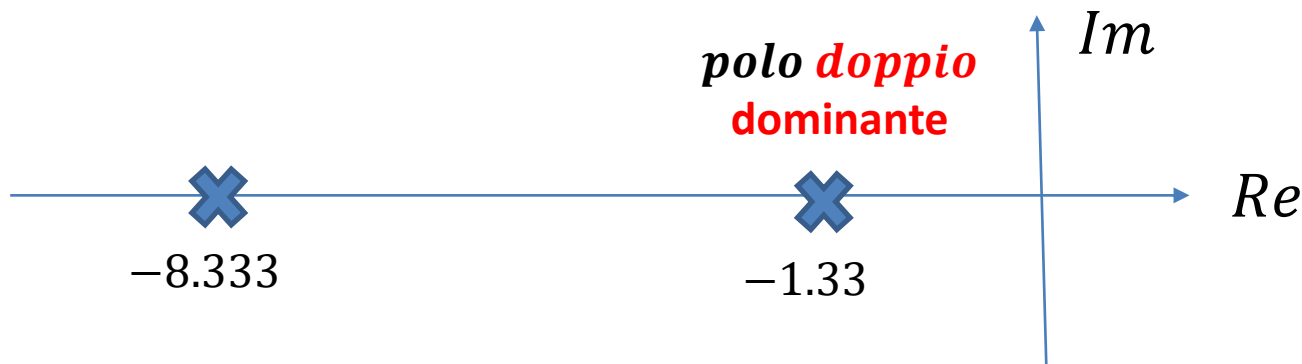
$$p_1 = -8.333$$

$$p_2 \approx p_3 \approx -1.33$$

$$\tau = \frac{1}{-1.33} = 0.75 \text{ s}$$

Cost. di tempo associata al polo
«circa doppio» reale

Distribuzione poli-zeri nel piano



Valore di regime: $y_{\infty} = R \cdot W_r^y(0) = 5 \cdot 1 = 5$

Risposta al gradino monotona crescente

$$W_r^y(s) \approx W_{r,APPR}^y(s) = \frac{1}{(1 + \tau s)^2} = \frac{1}{(1 + 0.75 s)^2}$$

$$F(s) = \frac{1}{(1 + \tau s)^2}$$

$$\tau = 0.75 \text{ s}$$

$$T_{a5\%}$$

$$4.7\tau$$

$$3.52 \text{ s}$$

Fascia del 5%:

$$5 \pm 0.25$$

$$T_{a2\%}$$

$$5.8\tau$$

$$4.35 \text{ s}$$

Fascia del 2%:

$$5 \pm 0.1$$

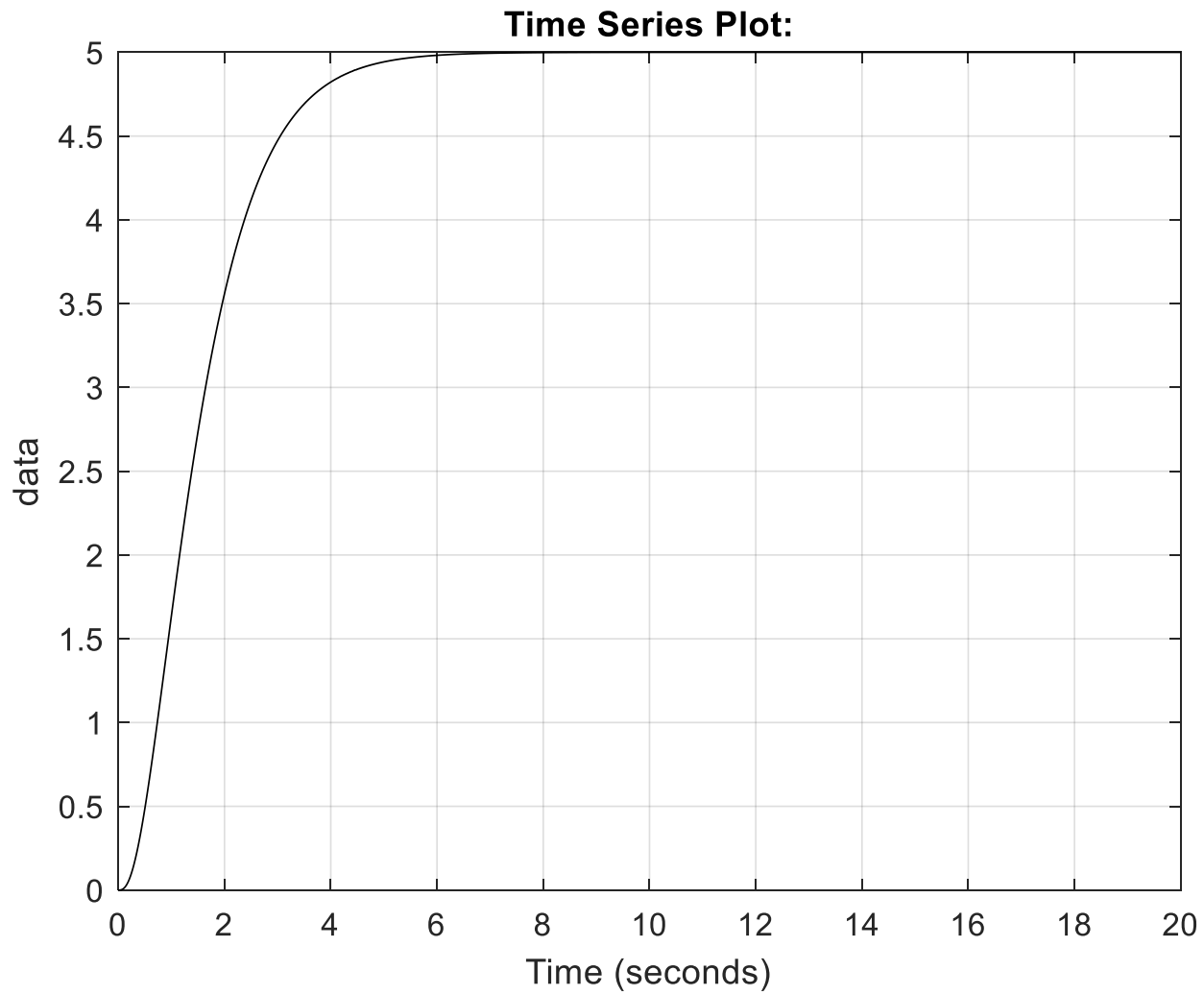
$$T_{a1\%}$$

$$6.6\tau$$

$$4.95 \text{ s}$$

Fascia dell'1%:

$$5 \pm 0.05$$

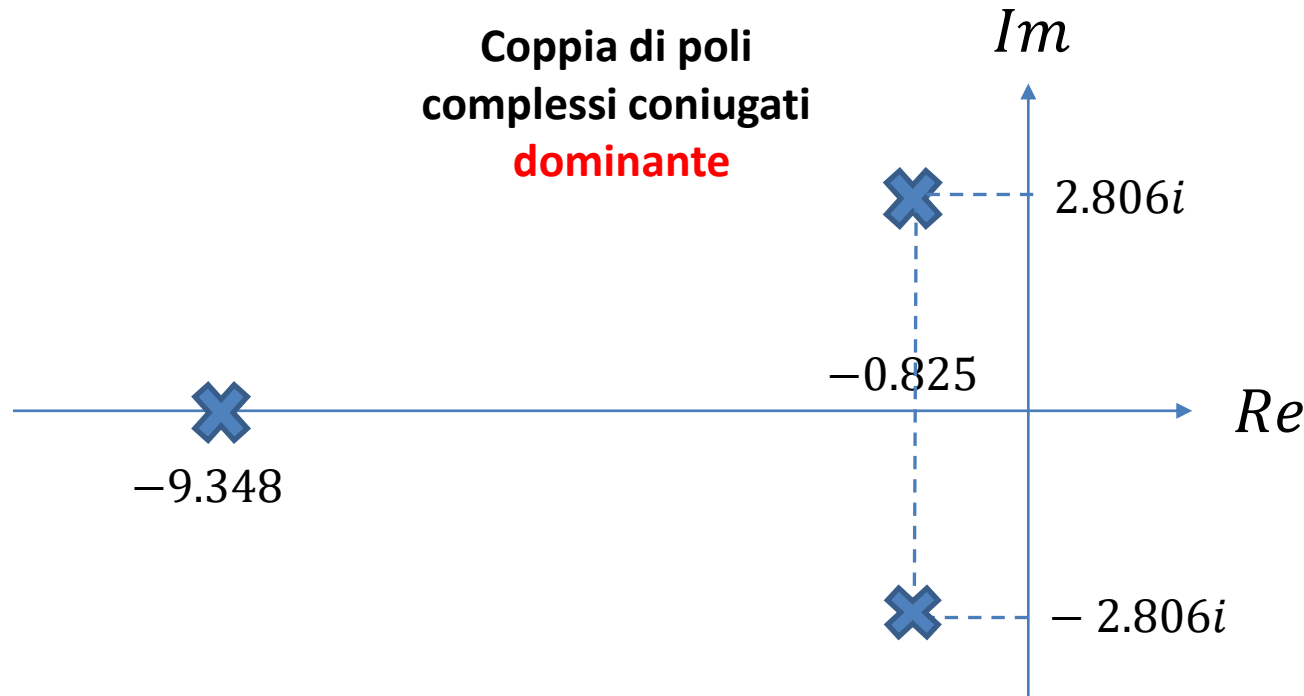


$$k = 20$$

Distribuzione poli-zeri nel piano complesso calcolata in precedenza al punto 3

$$p_1 = -9.3481$$

$$p_{2,3} = -0.8259 \pm 2.8064i$$



Smorzamento

$$\xi = 0.28$$

Costate di tempo equivalente

$$\tau_{eq} = 1.22 \text{ s}$$

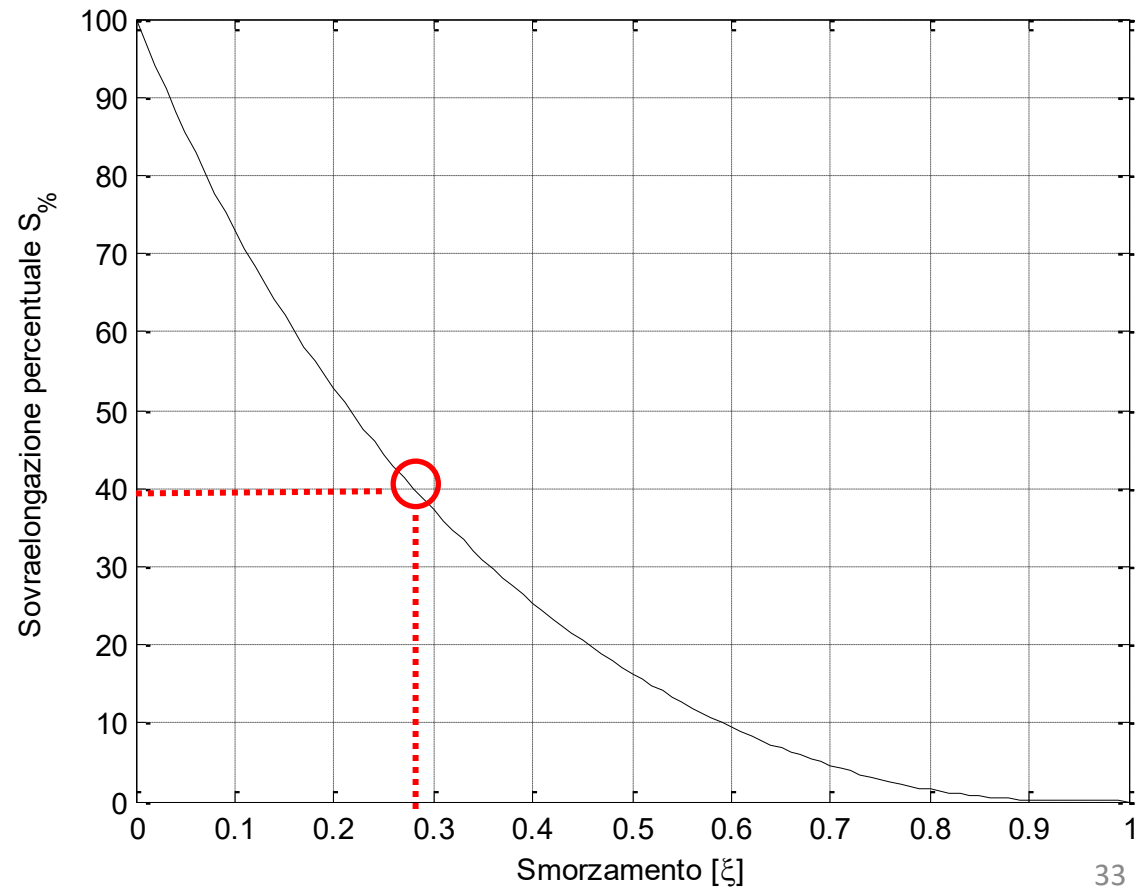
Risposta oscillatoria

$$\xi = 0.28$$

Sovraelongazione percentuale vs. smorzamento

$$S_{\%} = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$S_{\%} \approx 40$$



Tempi di assestamento

$$F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\tau_{eq} = 1.22 \text{ s}$$

$$T_{a5\%}$$

$$3\tau_{eq}$$

$$3.66 \text{ s}$$

$$T_{a2\%}$$

$$3.9 \tau_{eq}$$

$$4.75 \text{ s}$$

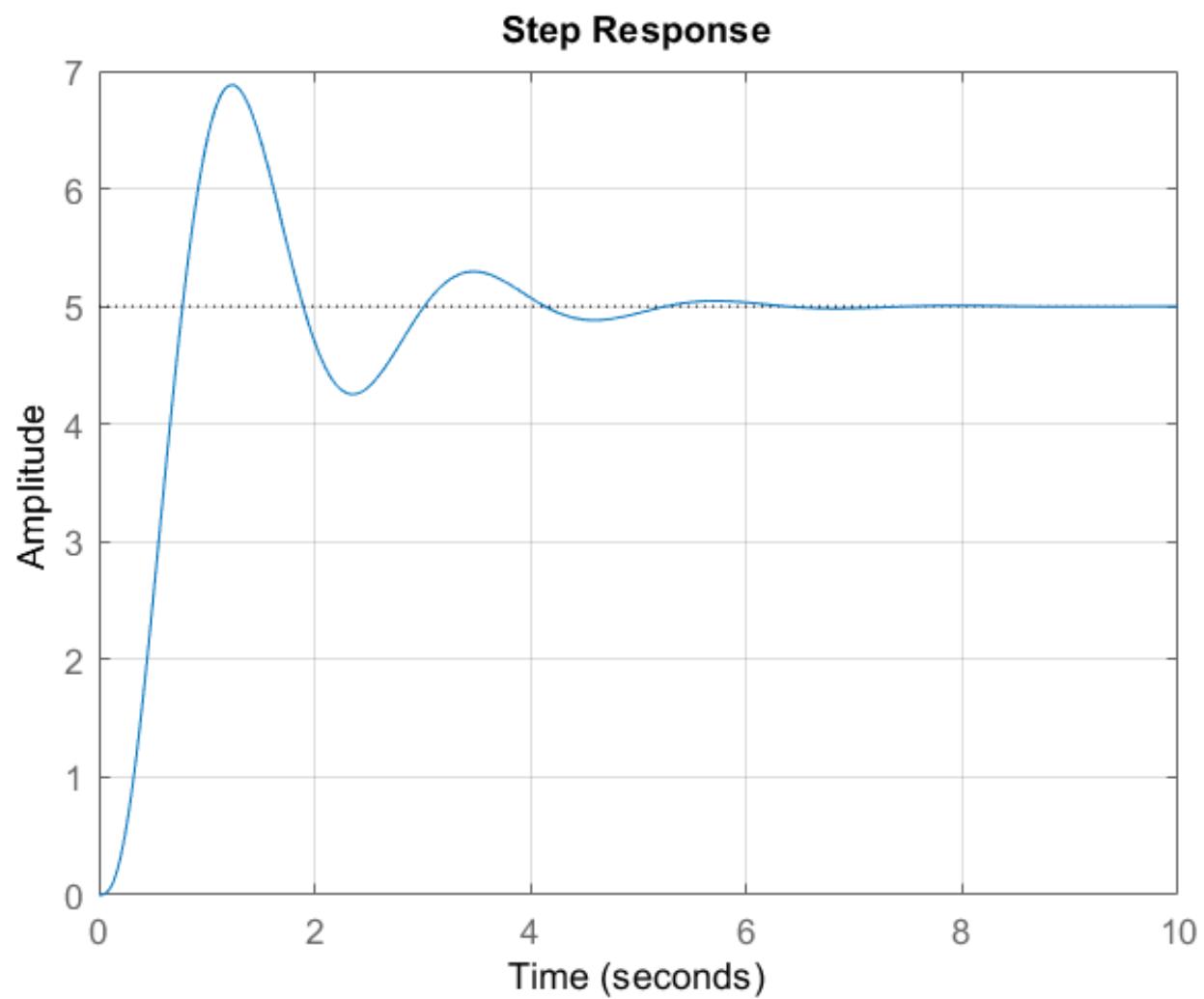
$$T_{a1\%}$$

$$4.6\tau_{eq}$$

$$5.61 \text{ s}$$

T_{max} = *istante del primo punto di massimo*

$$T_{max} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = 1.11 \text{ s}$$



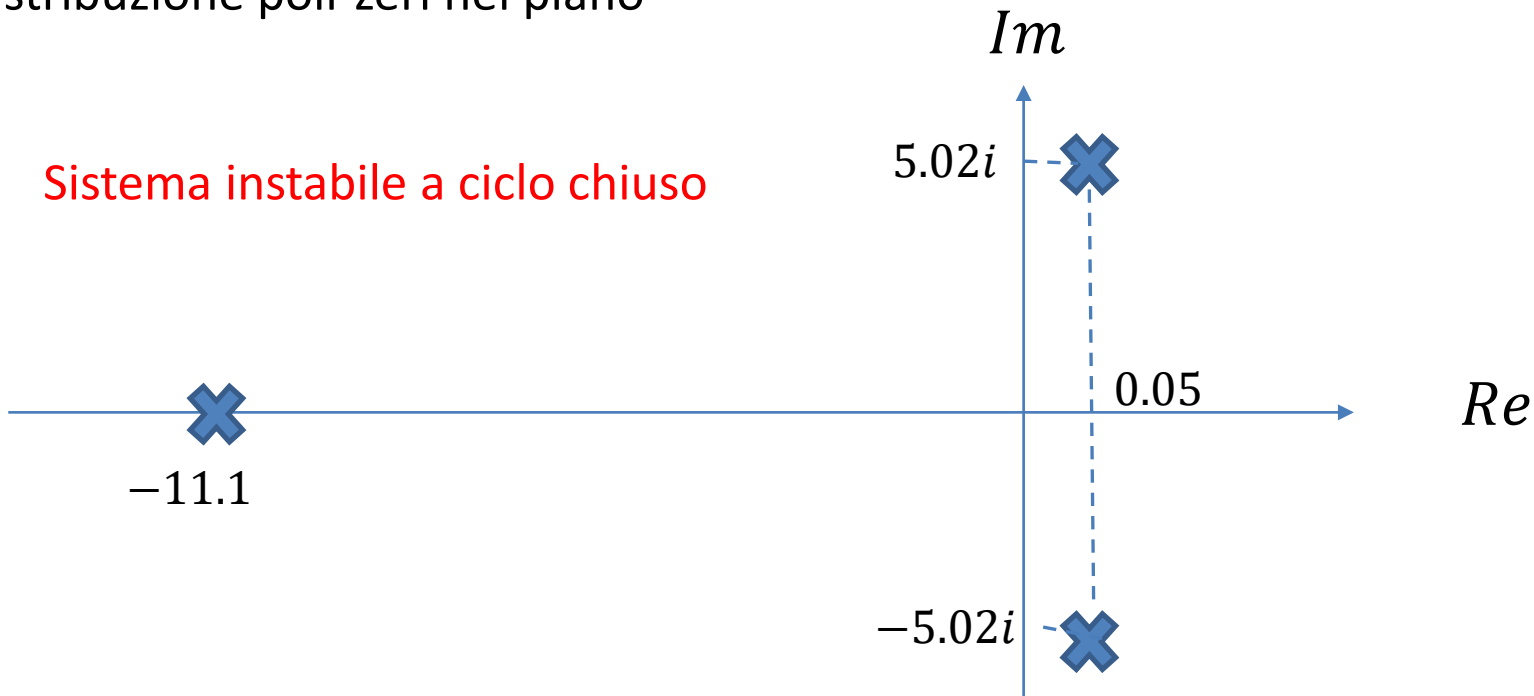
$$k = 70$$

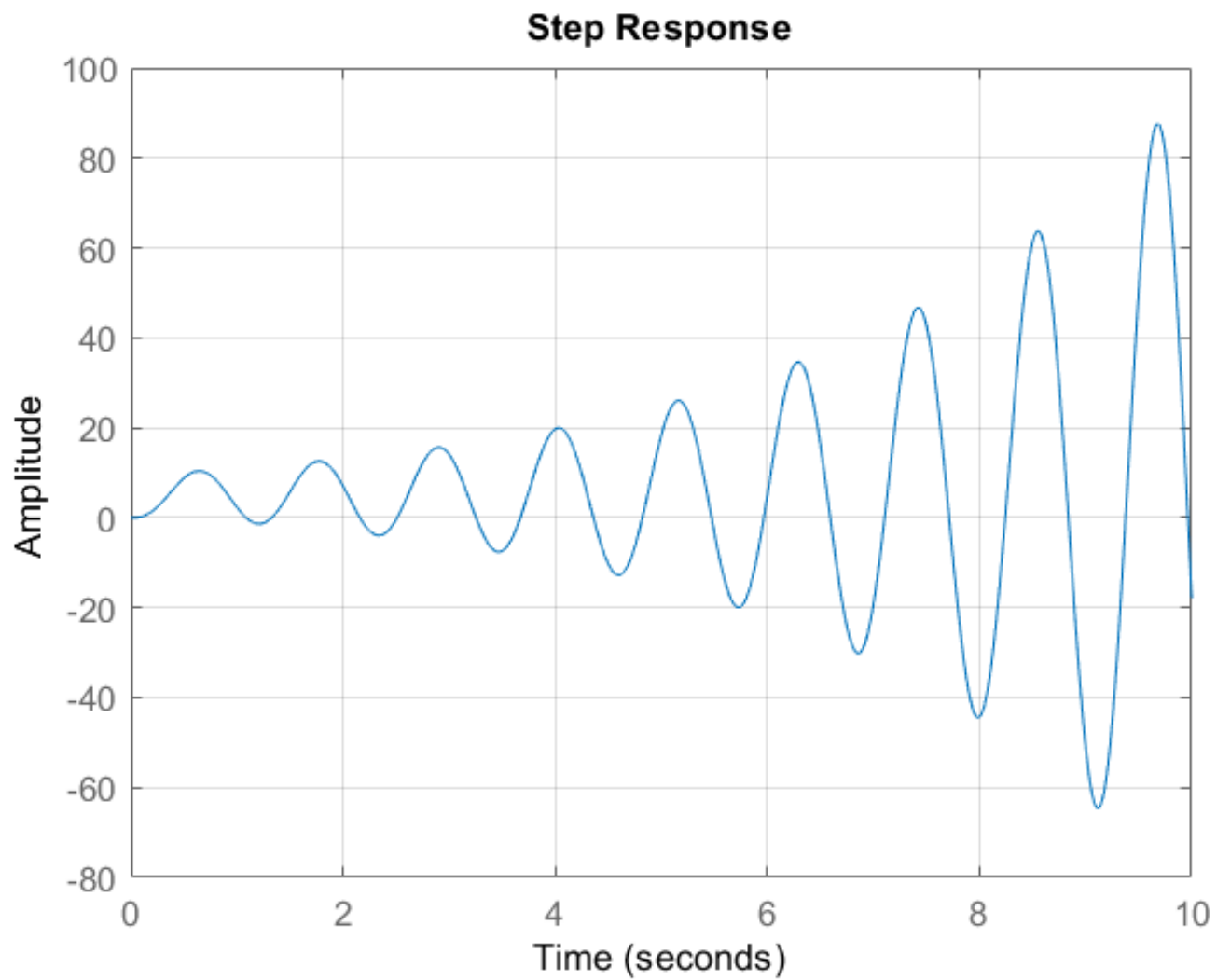
```
k=70  
roots([1 11 24 4*k])
```

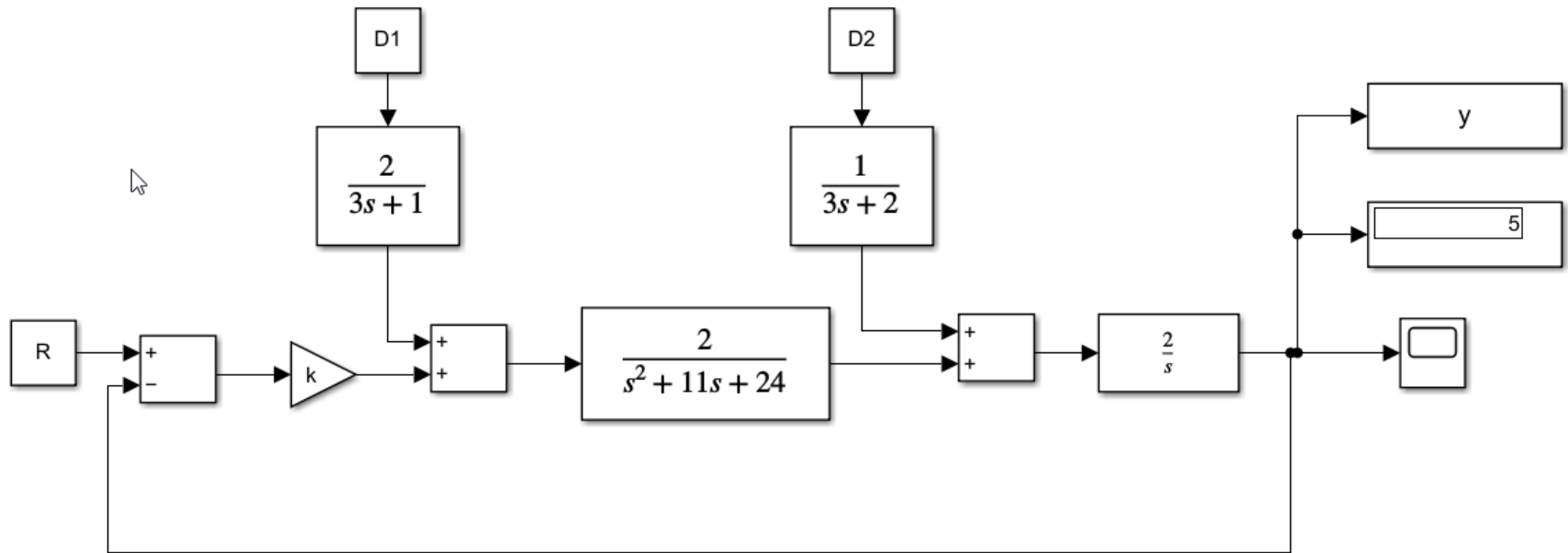
```
ans =  
  
-11.1085 + 0.0000i  
 0.0543 + 5.0202i  
 0.0543 - 5.0202i
```

Valore di k maggiore del guadagno critico

Distribuzione poli-zeri nel piano







Files:

Es02_2022_23_model.slx
 Es02_2022_23_script.m