

Logica e Filosofia della Scienza

Docente: Prof. Giuseppe Sergioli (giuseppe.sergioli@gmail.com)

I connettivi

Come si formano gli **enunciati composti** a partire dagli **enunciati semplici**?

Come si formano gli **enunciati composti** a partire dagli **enunciati semplici**?

Per mezzo di particolari locuzioni linguistico-sintattiche, che hanno la funzione di “collante” e che prendono il nome di **connettivi**.

I connettivi logici sono oggetti sintattici **ricavati dai linguaggi naturali**, che, come vedremo, possono essere “implementati” (“incarnati”) nei modi più diversi:

- **tavole di verità**

I connettivi logici sono oggetti sintattici **ricavati dai linguaggi naturali**, che, come vedremo, possono essere “implementati” (“incarnati”) nei modi più diversi:

- **tavole di verità**
- **funzioni aritmetiche (booleane)**

I connettivi logici sono oggetti sintattici **ricavati dai linguaggi naturali**, che, come vedremo, possono essere “implementati” (“incarnati”) nei modi più diversi:

- **tavole di verità**
- **funzioni aritmetiche (booleane)**
- **operazioni insiemistiche**

I connettivi logici sono oggetti sintattici **ricavati dai linguaggi naturali**, che, come vedremo, possono essere “implementati” (“incarnati”) nei modi più diversi:

- **tavole di verità**
- **funzioni aritmetiche (booleane)**
- **operazioni insiemistiche**
- **circuiti logici**

I CONNETTIVI LOGICI

I connettivi	
Linguaggi naturali	Linguaggio logico
non (not, keine, nicht, ne...pas, no, nu,...)	\neg
e (and, und, et, y/e, și)	\wedge
o (or, oder, ou, o, sau)	\vee
se...allora (if...then)	\rightarrow
se e solo se (if and only if)	\leftrightarrow

I CONNETTIVI LOGICI

I connettivi	
Linguaggi naturali	Linguaggio logico
non (not, keine, nicht, ne...pas, no, nu,...)	\neg
e (and, und, et, y/e, și)	\wedge
o (or, oder, ou, o, sau)	\vee
se...allora (if...then)	\rightarrow
se e solo se (if and only if)	\leftrightarrow

Il **comportamento logico** di ciascun connettivo è determinato dalla sua corrispondente **tavola di verità**.

I CONNETTIVI LOGICI: LA TAVOLA DI VERITÀ della CONGIUNZIONE (\wedge)

α := Cagliari è una grande città (enunciato semplice)

β := Cagliari si trova in Sardegna (enunciato semplice)

I CONNETTIVI LOGICI: LA TAVOLA DI VERITÀ della CONGIUNZIONE (\wedge)

α := Cagliari è una grande città (enunciato semplice)
 β := Cagliari si trova in Sardegna (enunciato semplice)

$\alpha \wedge \beta$:= $\underbrace{\text{Cagliari è una grande città}}_{\alpha}$ e $\underbrace{\text{Cagliari si trova in Sardegna}}_{\beta}$

$\alpha \wedge \beta$ è un enunciato **composto**.

I CONNETTIVI LOGICI: LA TAVOLA DI VERITÀ della CONGIUNZIONE (\wedge)

α := Cagliari è una grande città (enunciato semplice)
 β := Cagliari si trova in Sardegna (enunciato semplice)

$\alpha \wedge \beta$:= $\underbrace{\text{Cagliari è una grande città}}_{\alpha}$ e $\underbrace{\text{Cagliari si trova in Sardegna}}_{\beta}$

$\alpha \wedge \beta$ è un enunciato **composto**.

La **congiunzione** (“e”, in simboli \wedge) è un connettivo **binario** e viene quindi applicata a due enunciati (semplici o composti), detti i due *coniunti*, che si indicano con le “variabili” α e β (l'**input** del connettivo). L'*output* sarà proprio l'enunciato composto $\alpha \wedge \beta$.

I CONNETTIVI LOGICI: LA TAVOLA DI VERITÀ della CONGIUNZIONE

(\wedge)

Il connettivo \wedge agisce sui due enunciati dando:

- valore **1** (**Vero**) se e solo se i due congiunti sono **entrambi 1** (**Vero**);
- valore **0** (**Falso**), altrimenti, e, cioè, se e soltanto se almeno uno dei due congiunti è **0** (**Falso**).

I CONNETTIVI LOGICI: LA TAVOLA DI VERITÀ della CONGIUNZIONE (\wedge)

Pertanto, la **tavola di verità della congiunzione** è la seguente:

α	β	$\alpha \wedge \beta$
o	o	

I CONNETTIVI LOGICI: LA TAVOLA DI VERITÀ della CONGIUNZIONE (\wedge)

Pertanto, la **tavola di verità della congiunzione** è la seguente:

α	β	$\alpha \wedge \beta$
0	0	0
0	1	

I CONNETTIVI LOGICI: LA TAVOLA DI VERITÀ della CONGIUNZIONE (\wedge)

Pertanto, la **tavola di verità della congiunzione** è la seguente:

α	β	$\alpha \wedge \beta$
0	0	0
0	1	0
1	0	0

I CONNETTIVI LOGICI: LA TAVOLA DI VERITÀ della CONGIUNZIONE (\wedge)

Pertanto, la **tavola di verità della congiunzione** è la seguente:

α	β	$\alpha \wedge \beta$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

I CONNETTIVI LOGICI: LA TAVOLA DI VERITÀ della CONGIUNZIONE (\wedge)

Pertanto, la **tavola di verità della congiunzione** è la seguente:

α	β	$\alpha \wedge \beta$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Nelle prime due colonne di **sinistra** (colonna degli **input**) vengono riportati tutti i possibili valori che possono assumere gli enunciati α e β prima che agisca il connettivo di congiunzione.

La CONGIUNZIONE come funzione aritmetica (AND)

La congiunzione “e” può essere interpretata come una funzione **AND** che associa a una **coppia** di valori appartenenti all'insieme $\{0, 1\}$ un elemento appartenenti all'insieme $\{0, 1\}$.

Per ogni $x, y \in \{0, 1\}$:

$$\text{AND}(x, y) := x \cdot y$$

- $\text{AND}(0, 0) := 0 \cdot 0 = 0$
- $\text{AND}(0, 1) := 0 \cdot 1 = 0$
- $\text{AND}(1, 0) := 1 \cdot 0 = 0$
- $\text{AND}(1, 1) := 1 \cdot 1 = 1$

La CONGIUNZIONE come funzione aritmetica (AND)

La congiunzione “e” può essere interpretata come una funzione **AND** che associa a una **coppia** di valori appartenenti all'insieme $\{0, 1\}$ un elemento appartenenti all'insieme $\{0, 1\}$.

Per ogni $x, y \in \{0, 1\}$:

$$\text{AND}(x, y) := x \cdot y$$

- $\text{AND}(0, 0) := 0 \cdot 0 = 0$
- $\text{AND}(0, 1) := 0 \cdot 1 = 0$
- $\text{AND}(1, 0) := 1 \cdot 0 = 0$
- $\text{AND}(1, 1) := 1 \cdot 1 = 1$

α	β	$\alpha \wedge \beta$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

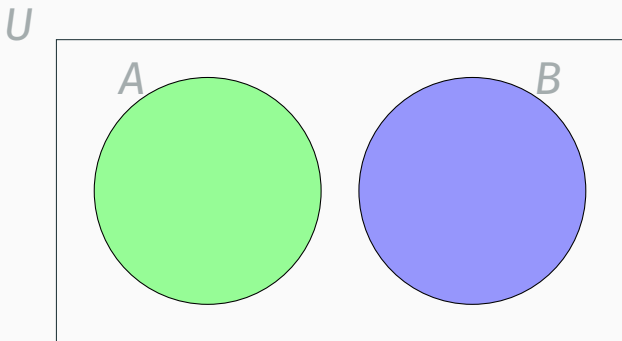
La CONGIUNZIONE come funzione aritmetica (AND)

Si dimostra facilmente che:

- Per ogni $x \in \{0, 1\}$: $AND(x, x) = x$ (**idempotenza**)
- Per ogni $x, y \in \{0, 1\}$: $AND(x, y) = AND(y, x)$ (**commutatività**)
- Per ogni $x, y, z \in \{0, 1\}$: $AND(x, AND(y, z)) = AND(AND(x, y), z)$
(**associatività**)

La CONGIUNZIONE come operazione insiemistica (\cap)

Dati due **insiemi** A, B rappresentati dai loro corrispondenti diagrammi di Eulero Venn



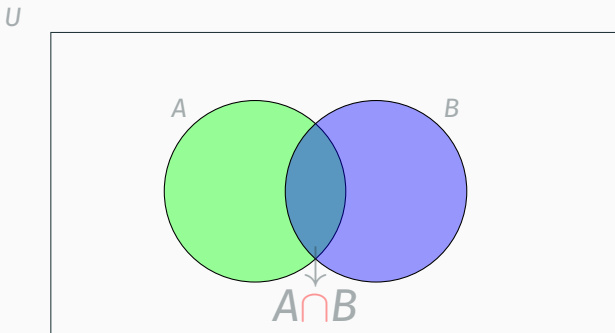
dove U rappresenta *l'universo del discorso*

La CONGIUNZIONE come operazione insiemistica (\cap)

Definizione 1.

L'**intersezione** fra gli insiemi A e B è l'insieme $A \cap B$ che contiene tutti e soli gli elementi che appartengono all'insieme A e all'insieme B .

$$A \cap B := \{x \in U : x \in A \text{ e } x \in B\}$$



La CONGIUNZIONE come operazione insiemistica (\cap)

Si dimostra facilmente che, presi tre sottoinsiemi A, B, C di U , valgono le seguenti proprietà:

- $A \cap A = A$ (**idempotenza**)
- $A \cap B = B \cap A$ (**commutatività**)
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (**associatività**)

Due insiemi particolari (U e \emptyset)

Quali insiemi “rappresentano” i valori di verità 1 (Vero) e 0 (Falso)?

$0 \Rightarrow$ insieme vuoto (\emptyset),

dove l'insieme vuoto \emptyset è l'insieme che **non** contiene elementi.

$1 \Rightarrow$ insieme universo (U),

Due insiemi particolari (U e \emptyset)

Quali insiemi “rappresentano” i valori di verità **1** (Vero) e **0** (Falso)?

0 \Rightarrow insieme vuoto (\emptyset),

dove l'insieme vuoto \emptyset è l'insieme che **non** contiene elementi.

1 \Rightarrow insieme universo (U),

- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap U = A$

Due insiemi particolari (U e \emptyset)

Quali insiemi “rappresentano” i valori di verità **1** (Vero) e **0** (Falso)?

0 \Rightarrow insieme vuoto (\emptyset),

dove l'insieme vuoto \emptyset è l'insieme che **non** contiene elementi.

1 \Rightarrow insieme universo (U),

- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap U = A$
- $\text{AND}(x, 0) = 0$
- $\text{AND}(x, 1) = x$

Due insiemi particolari (U e \emptyset)

Quali insiemi “rappresentano” i valori di verità **1** (Vero) e **0** (Falso)?

0 \Rightarrow insieme vuoto (\emptyset),

dove l'insieme vuoto \emptyset è l'insieme che **non** contiene elementi.

1 \Rightarrow insieme universo (U),

• $A \cap \emptyset = \emptyset$

• $\text{AND}(x, 0) = 0$

• $\alpha \wedge \text{Falso} = \text{Falso}$

• $A \cap U = A$

• $\text{AND}(x, 1) = x$

• $\alpha \wedge \text{Vero} = \text{Vero}$

La CONGIUNZIONE come **circuito seriale**

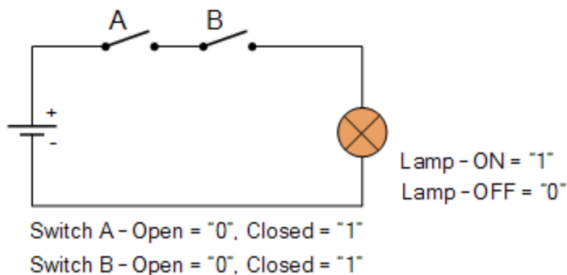
Claude E. Shannon, “A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits”, *Master of Science Thesis*, MIT, 1938.

La congiunzione può essere rappresentata anche come **circuito elettrico seriale**. Molte apparecchiature elettriche sono basate su un circuito formato da uno o più **interruttori** e da un congegno che si attiva quando c'è passaggio di corrente – per semplicità, pensiamo a una lampadina.

Nel caso più semplice, quello con un solo interruttore, la lampadina si accende se e solo se l'interruttore è **chiuso** (e consente quindi il passaggio della corrente). Supponiamo di indicare con **1** lo stato “**interruttore chiuso**” (o, equivalentemente, “**lampadina accesa**”) e con **0** lo stato “**interruttore non chiuso**” (o, equivalentemente, “**lampadina spenta**”).

La CONGIUNZIONE come **circuito seriale**

Possiamo allora dare la seguente interpretazione: la **congiunzione** corrisponde a un circuito in cui sono presenti **due interruttori in serie**, ossia posti uno dopo l'altro: la lampadina è **accesa** solo nel caso in cui **entrambi gli interruttori** sono **chiusi** e quindi la corrente riesce a passare;



I connettivi come **porta logiche**

Una **porta logica** (*logical gate*) è un oggetto idealizzato o fisico che implementa un'operazione logica su uno o più **input binari** in modo da produrre come output un unico bit.

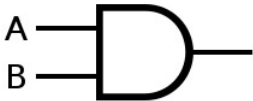
Fisicamente, le porte logiche sono implementate usando diodi che agiscono come interruttori elettronici. Attualmente, le porte logiche sono realizzate attraverso i *MOSFET* (metal-oxide-semiconductor field-effect transistors).

I microprocessori possono contenere più di **100 milioni di porte logiche**.

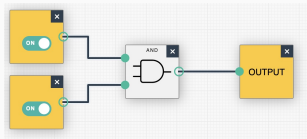


<https://academo.org/demos/logic-gate-simulator/>

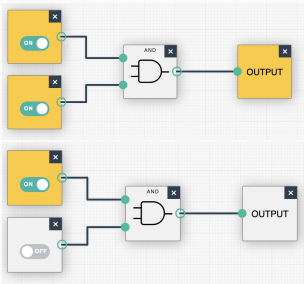
La porta logica *AND* è una porta logica a due input (e un output) che implementa la **congiunzione logica** (\wedge). Si ottiene **output HIGH (1)** se e solo se **entrambi gli input** sono **HIGH (1)**
La porta logica *AND* si simboleggia nel modo seguente:



La CONGIUNZIONE come porta logica

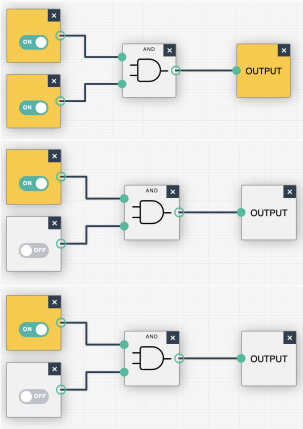


La CONGIUNZIONE come porta logica



- $\text{AND}(1, 1) = 1$

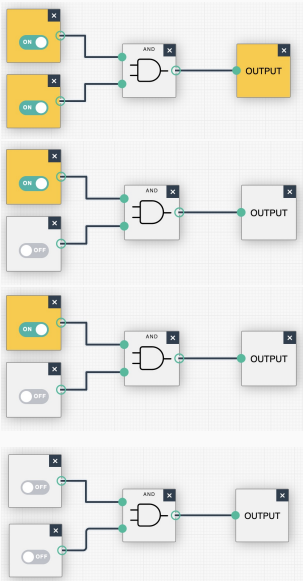
La CONGIUNZIONE come porta logica



- $\text{AND}(1, 1) = 1$

- $\text{AND}(1, 0) = 0$

La CONGIUNZIONE come porta logica



- $AND(1, 1) = 1$

- $AND(1, 0) = 0$

- $AND(1, 0) = 0$

- $AND(0, 0) = 0$

I CONNETTIVI LOGICI: LA TAVOLA DI VERITÀ della DISGIUNZIONE (V)

Consideriamo il seguente enunciato composto:

“Per avere la riduzione occorre avere meno di venti anni”
oppure (o) essere iscritti alla U.I.L.”

α := Per avere la riduzione occorre avere meno di venti anni

β := Per avere la riduzione occorre essere iscritti alla UIL

I CONNETTIVI LOGICI: LA TAVOLA DI VERITÀ della DISGIUNZIONE (V)

Consideriamo il seguente enunciato composto:

“Per avere la riduzione occorre avere meno di venti anni”
oppure (o) essere iscritti alla U.I.L.”

α := Per avere la riduzione occorre avere meno di venti anni

β := Per avere la riduzione occorre essere iscritti alla UIL

I CONNETTIVI LOGICI: LA TAVOLA DI VERITÀ della DISGIUNZIONE (V)

Consideriamo il seguente enunciato composto:

“Per avere la riduzione occorre avere meno di venti anni”
oppure (o) essere iscritti alla U.I.L.”

α := Per avere la riduzione occorre avere meno di venti anni

β := Per avere la riduzione occorre essere iscritti alla UIL

$\alpha \vee \beta$:= $\underbrace{\text{Per avere la riduzione occorre avere meno di venti anni}}_{\alpha}$ \vee $\underbrace{\text{essere iscritti alla UIL}}_{\beta}$

$\alpha \vee \beta$ è un enunciato **composto**.

I CONNETTIVI LOGICI: LA TAVOLA DI VERITÀ della DISGIUNZIONE (V)

Consideriamo il seguente enunciato composto:

“Per avere la riduzione occorre avere meno di venti anni”
oppure (o) essere iscritti alla U.I.L.”

α := Per avere la riduzione occorre avere meno di venti anni

β := Per avere la riduzione occorre essere iscritti alla UIL

$\alpha \vee \beta$:= $\underbrace{\text{Per avere la riduzione occorre avere meno di venti anni}}_{\alpha}$ o $\underbrace{\text{essere iscritti alla UIL}}_{\beta}$

$\alpha \vee \beta$ è un enunciato **composto**.

La **disgiunzione inclusiva** (o semplicemente **disgiunzione**) (“o”, in simboli \vee) è un connettivo **binario** e viene quindi applicata a due enunciati (semplici o composti), detti i due *disgiunti*, che si indicano con le “variabili” α e β (l’**input** del connettivo). L’*output* sarà proprio l’enunciato composto $\alpha \vee \beta$.

I CONNETTIVI LOGICI: LA TAVOLA DI VERITÀ della DISGIUNZIONE (\vee)

Il connettivo \vee agisce sui due enunciato dando:

- valore **0** (**Falso**) se e solo se i due congiunti sono **entrambi 0** (**Falso**);
- valore **1** (**Vero**), altrimenti, e, cioè, se e soltanto se almeno uno dei due congiunti è **1** (**Falso**).

I CONNETTIVI LOGICI: LA TAVOLA DI VERITÀ della DISGIUNZIONE (V)

Pertanto, la **tavola di verità della disgiunzione** è la seguente:

α	β	$\alpha \vee \beta$
0	0	

I CONNETTIVI LOGICI: LA TAVOLA DI VERITÀ della DISGIUNZIONE (\vee)

Pertanto, la **tavola di verità della disgiunzione** è la seguente:

α	β	$\alpha \vee \beta$
0	0	0
0	1	

I CONNETTIVI LOGICI: LA TAVOLA DI VERITÀ della DISGIUNZIONE (\vee)

Pertanto, la **tavola di verità della disgiunzione** è la seguente:

α	β	$\alpha \vee \beta$
0	0	0
0	1	1
1	0	1

I CONNETTIVI LOGICI: LA TAVOLA DI VERITÀ della DISGIUNZIONE (\vee)

Pertanto, la **tavola di verità della disgiunzione** è la seguente:

α	β	$\alpha \vee \beta$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

I CONNETTIVI LOGICI: LA TAVOLA DI VERITÀ della DISGIUNZIONE (V)

Pertanto, la **tavola di verità della disgiunzione** è la seguente:

α	β	$\alpha \vee \beta$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Nelle prime due colonne di **sinistra** (colonna degli **input**) vengono riportati tutti i possibili valori che possono assumere gli enunciati α e β prima che agisca il connettivo di disgiunzione.

Due disgiunzioni: vel e aut

Nella lingua italiana la particella **o** (**oppure**) ammette due interpretazioni diverse:

- **disgiunzione inclusiva** (corrispondente al latino **vel**), di cui abbiamo visto la tavola di verità;
- **disgiunzione esclusiva** (corrispondente al latino **aut**). In questo caso, $\alpha \text{ aut } \beta$ è vero se e soltanto la verità di uno dei disgiunti implica la falsità dell'altro,

Esempio: “O compri la moto o compri il trattore”, intendendo che la **verità** dell'enunciato “compri la moto” implica la **falsità** dell'enunciato “compri il trattore”, e viceversa.

Se non specificato diversamente, intenderemo sempre la disgiunzione in senso inclusivo.

La DISGIUNZIONE come funzione aritmetica (OR)

La disgiunzione “o” può essere interpretata come una funzione **OR** che associa a una **coppia** di valori appartenenti all'insieme $\{0, 1\}$ un elemento appartenenti all'insieme $\{0, 1\}$.

Per ogni $x, y \in \{0, 1\}$:

$$\text{OR}(x, y) :=$$

La DISGIUNZIONE come funzione aritmetica (OR)

La disgiunzione “o” può essere interpretata come una funzione **OR** che associa a una **coppia** di valori appartenenti all'insieme $\{0, 1\}$ un elemento appartenenti all'insieme $\{0, 1\}$.

Per ogni $x, y \in \{0, 1\}$:

$$\text{OR}(x, y) := x + y - x \cdot y$$

- $\text{OR}(0, 0) := 0 + 0 - 0 \cdot 0 = 0$
- $\text{OR}(0, 1) := 0 + 1 - 0 \cdot 1 = 1$
- $\text{OR}(1, 0) := 1 + 0 - 1 \cdot 0 = 1$
- $\text{OR}(1, 1) := 1 + 1 - 1 \cdot 1 = 1$

La DISGIUNZIONE come funzione aritmetica (OR)

La disgiunzione “o” può essere interpretata come una funzione **OR** che associa a una **coppia** di valori appartenenti all'insieme $\{0, 1\}$ un elemento appartenenti all'insieme $\{0, 1\}$.

Per ogni $x, y \in \{0, 1\}$:

$$\text{OR}(x, y) := x + y - x \cdot y$$

- $\text{OR}(0, 0) := 0 \cdot 0 = 0$
- $\text{OR}(0, 1) := 0 + 1 - 0 \cdot 1 = 1$
- $\text{OR}(1, 0) := 1 - 0 + 1 \cdot 0 = 1$
- $\text{OR}(1, 1) := 1 + 1 - 1 \cdot 1 = 1$

α	β	$\alpha \wedge \beta$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

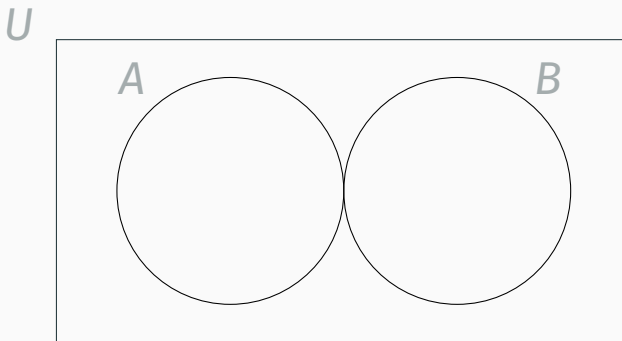
La DISGIUNZIONE come funzione aritmetica (OR)

Si dimostra facilmente che:

- Per ogni $x \in \{0, 1\}$: $OR(x, x) = x$ (**idempotenza**)
- Per ogni $x, y \in \{0, 1\}$: $OR(x, y) = OR(y, x)$ (**commutatività**)
- Per ogni $x, y, z \in \{0, 1\}$: $OR(x, OR(y, z)) = OR(OR(x, y), z)$
(**associatività**)
- $OR(x, 0) = x$
- $OR(x, 1) = 1$

La DISGIUNZIONE come operazione insiemistica (\cup)

Dati due **insiemi** A, B rappresentati dai loro corrispondenti diagrammi di Eulero Venn



dove U rappresenta *l'universo del discorso*

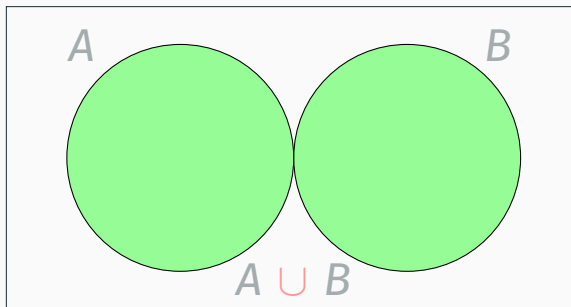
La DISGIUNZIONE come operazione insiemistica (\cup)

Definizione 2.

L'**unione** fra gli insiemi A e B è l'insieme $A \cup B$ che contiene tutti e soli gli elementi che appartengono all'insieme A o all'insieme B .

$$A \cup B := \{x \in U : x \in A \text{ o } x \in B\}$$

U



La DISGIUNZIONE come operazione insiemistica (\cup)

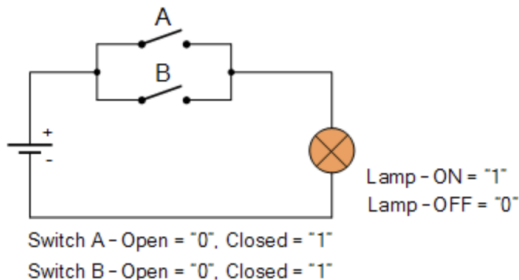
Si dimostra facilmente che, presi tre sottoinsiemi A, B, C di U , valgono le seguenti proprietà:

- $A \cup A = A$ (**idempotenza**)
- $A \cup B = B \cup A$ (**commutatività**)
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (**associatività**)

La DISGIUNZIONE come **circuito parallelo**

La disgiunzione (o) può essere rappresentata anche come **circuito elettrico parallelo**.

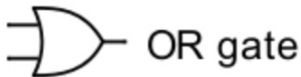
la **disgiunzione** corrisponde a un circuito in cui sono presenti **due interruttori in parallelo**: la lampadina è **accesa** solo nel caso in cui **almeno uno dei due interruttori** è **chiusi** e quindi la corrente riesce a passare;



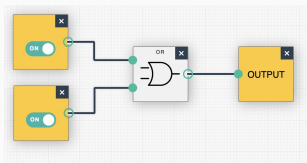


<https://academo.org/demos/logic-gate-simulator/>

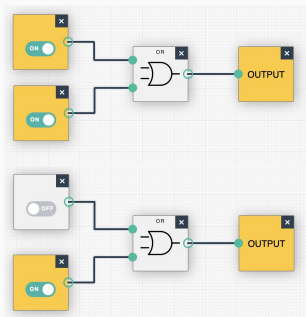
La porta logica *OR* è una porta logica a due input (e un output) che implementa la disgiunzione logica (\vee). Si ottiene **output HIGH (1)** se e solo almeno uno dei due **input è HIGH (1)**.
La porta logica *OR* si simboleggia nel modo seguente:



La disgiunzione come **porta logica**

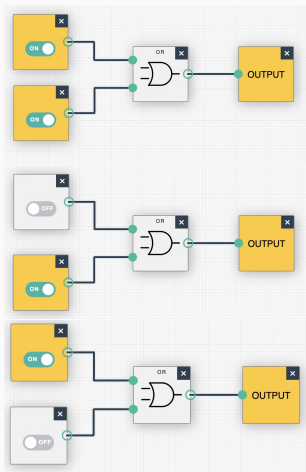


La disgiunzione come porta logica



- $OR(1, 1) = 1$

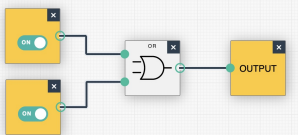
La disgiunzione come porta logica



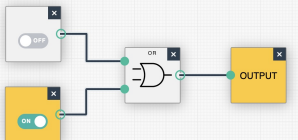
- $OR(1, 1) = 1$

- $OR(1, 0) = 1$

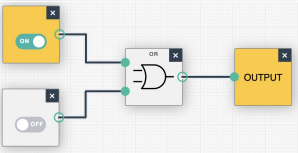
La disgiunzione come porta logica OR gate



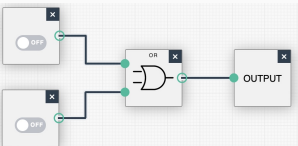
- $OR(1, 1) = 1$



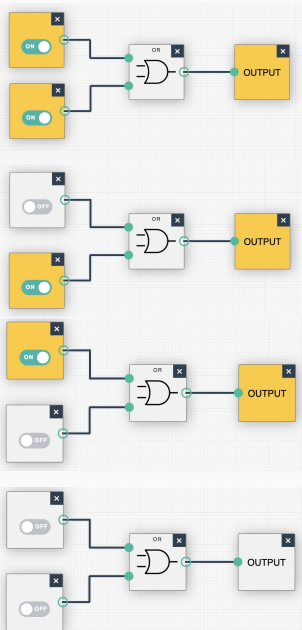
- $OR(1, 0) = 1$



- $OR(0, 1) = 1$



La disgiunzione come porta logica OR gate



- $OR(1, 1) = 1$

- $OR(1, 0) = 1$

- $OR(1, 0) = 1$

- $OR(0, 0) = 0$

I CONNETTIVI LOGICI: LA NEGAZIONE (\neg)

- α := Carlo mangia il panino (enunciato semplice)

I CONNETTIVI LOGICI: LA NEGAZIONE (\neg)

- $\alpha :=$ Carlo mangia il panino (enunciato semplice)



- Carlo **non** mangia il panino (enunciato composto)

$$\neg\alpha = \text{Carlo } \mathbf{non} \text{ mangia il panino}$$

I CONNETTIVI LOGICI: LA NEGAZIONE (\neg)

- $\alpha :=$ Carlo mangia il panino (enunciato semplice)



- Carlo **non** mangia il panino (enunciato composto)

$$\neg\alpha = \text{Carlo } \mathbf{non} \text{ mangia il panino}$$

Il connettivo “negazione” è un connettivo **unario** (cioè richiede un solo enunciato per essere applicato), che si scrive in notazione **prefissa** (ossia, prima dell’enunciato che si vuole negare).

I CONNETTIVI LOGICI: LA NEGAZIONE (\neg)

Ricordiamoci che siamo in un contesto in cui un enunciato può assumere solo due valori: **vero** (1) o **falso** (0).

I CONNETTIVI LOGICI: LA NEGAZIONE (\neg)

Ricordiamoci che siamo in un contesto in cui un enunciato può assumere solo due valori: **vero** (1) o **falso** (0).

- Quand'è che un enunciato della forma $\neg\alpha$ è **vero**?

I CONNETTIVI LOGICI: LA NEGAZIONE (\neg)

Ricordiamoci che siamo in un contesto in cui un enunciato può assumere solo due valori: **vero** (1) o **falso** (0).

- Quand'è che un enunciato della forma $\neg\alpha$ è **vero**?
 $\neg\alpha$ è **vero** (1) se e solo se (sse) α è **falso** (0)

I CONNETTIVI LOGICI: LA NEGAZIONE (\neg)

Ricordiamoci che siamo in un contesto in cui un enunciato può assumere solo due valori: **vero** (1) o **falso** (0).

- Quand'è che un enunciato della forma $\neg\alpha$ è **vero**?
 $\neg\alpha$ è **vero** (1) se e solo se (sse) α è **falso** (0)
- Quand'è che un enunciato della forma $\neg\alpha$ è **falso**?

I CONNETTIVI LOGICI: LA NEGAZIONE (\neg)

Ricordiamoci che siamo in un contesto in cui un enunciato può assumere solo due valori: **vero** (1) o **falso** (0).

- Quand'è che un enunciato della forma $\neg\alpha$ è **vero**?
 $\neg\alpha$ è **vero** (1) se e solo se (sse) α è **falso** (0)
- Quand'è che un enunciato della forma $\neg\alpha$ è **falso**?

$\neg\alpha$ è **falso** (0) se e solo se (sse) α è **vero** (1)

I CONNETTIVI LOGICI: LA TAVOLA DI VERITÀ della NEGAZIONE (\neg)

Tutte queste informazioni possono essere riassunte nella
tavola di verità della **negazione**:

α	$\neg\alpha$
0	

I CONNETTIVI LOGICI: LA TAVOLA DI VERITÀ della NEGAZIONE (\neg)

Tutte queste informazioni possono essere riassunte nella
tavola di verità della **negazione**:

α	$\neg\alpha$
0	1
1	0

I CONNETTIVI LOGICI: LA TAVOLA DI VERITÀ della NEGAZIONE (\neg)

Tutte queste informazioni possono essere riassunte nella **tavola di verità della negazione**:

α	$\neg\alpha$
0	1
1	0

Nella colonna **sinistra** (colonna degli **input**) vengono riportati tutti i possibili valori che può assumere l'enunciato α prima che agisca il connettivo di negazione. Nelle colonna di **destra** (colonna degli **output**) sono riportati i valori che assume il nuovo enunciato $\neg\alpha$.

I CONNETTIVI LOGICI

I connettivi	
Linguaggi naturali	Linguaggio logico
non (not, keine, nicht, ne...pas, no, nu,...)	\neg
e (and, und, et, y/e, și)	\wedge
o (or, oder, ou, o, sau)	\vee
se...allora (if...then)	\rightarrow
se e solo se (if and only if)	\leftrightarrow

I CONNETTIVI LOGICI

I connettivi	
Linguaggi naturali	Linguaggio logico
non (not, keine, nicht, ne...pas, no, nu,...)	\neg
e (and, und, et, y/e, și)	\wedge
o (or, oder, ou, o, sau)	\vee
se...allora (if...then)	\rightarrow
se e solo se (if and only if)	\leftrightarrow

Il **comportamento logico** di ciascun connettivo è determinato dalla sua corrispondente **tavola di verità**.

Una prima definizione di equivalenza fra enunciati

Definition 1.

Due enunciati α , β si dicono **equivalenti** sse valgono le seguenti condizioni:

- α e β contengono gli stessi sottoenunciati (“variabili”);
- a input uguali (valori di verità uguali dei sottoenunciati) per α e β corrisponde lo stesso output (valore di verità finale) dei due enunciati.

Una prima definizione di equivalenza fra enunciati

Definition 1.

Due enunciati α , β si dicono **equivalenti** sse valgono le seguenti condizioni:

- α e β contengono gli stessi sottoenunciati (“variabili”);
- a input uguali (valori di verità uguali dei sottoenunciati) per α e β corrisponde lo stesso output (valore di verità finale) dei due enunciati.

G. W. Leibniz (1646–1716):

“**Eadem** sunt, quae sibi substituito possunt **salva veritate**”.

“[Due termini] sono uguali (*eadem*) se possono essere sostituiti **senza alterare la verità** [di nessuno dei due]”.

Una prima definizione di equivalenza fra enunciati

Consideriamo i due enunciati $\alpha \wedge \beta$ e $\beta \wedge \alpha$.

Abbiamo che $\alpha \wedge \beta$ è **vera** se e solo se $\beta \wedge \alpha$ è **vera**.

Abbiamo che $\alpha \wedge \beta$ è **falsa** se e sol se $\beta \wedge \alpha$ è **falsa**

α	β	$\alpha \wedge \beta$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

α	β	$\beta \wedge \alpha$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

I CONNETTIVI LOGICI: LA TAVOLA DI VERITÀ della NEGAZIONE (\neg)

I connettivi che abbiamo considerato fino a questo momento (“congiunzione” (\wedge) e “disgiunzione” (\vee)) sono **binari** nel senso che hanno bisogno di **due e soltanto due** enunciati per essere applicati. Torneremo dopo su altri connettivi binari.

Adesso, consideriamo un connettivo **unario**, che risulta fondamentale in logica classica: la **negazione** (in simboli \neg).

I CONNETTIVI LOGICI: LA NEGAZIONE (\neg)

- α := Carlo mangia il panino (enunciato semplice)

I CONNETTIVI LOGICI: LA NEGAZIONE (\neg)

- $\alpha :=$ Carlo mangia il panino (enunciato semplice)



- Carlo **non** mangia il panino (enunciato composto)

$$\neg\alpha = \text{Carlo non mangia il panino}$$

I CONNETTIVI LOGICI: LA NEGAZIONE (\neg)

- $\alpha :=$ Carlo mangia il panino (enunciato semplice)



- Carlo **non** mangia il panino (enunciato composto)

$$\neg\alpha = \text{Carlo non mangia il panino}$$

Il connettivo “negazione” è un connettivo **unario** (cioè richiede un solo enunciato per essere applicato), che si scrive in notazione **prefissa** (ossia, prima dell’enunciato che si vuole negare).

I CONNETTIVI LOGICI: LA NEGAZIONE (\neg)

Ricordiamoci che siamo in un contesto in cui un enunciato può assumere solo due valori: **vero** (1) o **falso** (0).

I CONNETTIVI LOGICI: LA NEGAZIONE (\neg)

Ricordiamoci che siamo in un contesto in cui un enunciato può assumere solo due valori: **vero** (1) o **falso** (0).

- Quand'è che un enunciato della forma $\neg\alpha$ è **vero**?

I CONNETTIVI LOGICI: LA NEGAZIONE (\neg)

Ricordiamoci che siamo in un contesto in cui un enunciato può assumere solo due valori: **vero** (1) o **falso** (0).

- Quand'è che un enunciato della forma $\neg\alpha$ è **vero**?
 $\neg\alpha$ è **vero** (1) se e solo se (sse) α è **falso** (0)

I CONNETTIVI LOGICI: LA NEGAZIONE (\neg)

Ricordiamoci che siamo in un contesto in cui un enunciato può assumere solo due valori: **vero** (1) o **falso** (0).

- Quand'è che un enunciato della forma $\neg\alpha$ è **vero**?
 $\neg\alpha$ è **vero** (1) se e solo se (sse) α è **falso** (0)
- Quand'è che un enunciato della forma $\neg\alpha$ è **falso**?

I CONNETTIVI LOGICI: LA NEGAZIONE (\neg)

Ricordiamoci che siamo in un contesto in cui un enunciato può assumere solo due valori: **vero** (1) o **falso** (0).

- Quand'è che un enunciato della forma $\neg\alpha$ è **vero**?
 $\neg\alpha$ è **vero** (1) se e solo se (sse) α è **falso** (0)
- Quand'è che un enunciato della forma $\neg\alpha$ è **falso**?

$\neg\alpha$ è **falso** (0) se e solo se (sse) α è **vero** (1)

I CONNETTIVI LOGICI: LA TAVOLA DI VERITÀ della NEGAZIONE (\neg)

Tutte queste informazioni possono essere riassunte nella
tavola di verità della **negazione**:

α	$\neg\alpha$
0	

I CONNETTIVI LOGICI: LA TAVOLA DI VERITÀ della NEGAZIONE (\neg)

Tutte queste informazioni possono essere riassunte nella **tavola di verità della negazione**:

α	$\neg\alpha$
0	1
1	0

I CONNETTIVI LOGICI: LA TAVOLA DI VERITÀ della NEGAZIONE (\neg)

Tutte queste informazioni possono essere riassunte nella **tavola di verità della negazione**:

α	$\neg\alpha$
0	1
1	0

I CONNETTIVI LOGICI: LA TAVOLA DI VERITÀ della NEGAZIONE (\neg)

Tutte queste informazioni possono essere riassunte nella **tavola di verità della negazione**:

α	$\neg\alpha$
0	1
1	0

Nella colonna **sinistra** (colonna degli **input**) vengono riportati tutti i possibili valori che può assumere l'enunciato α prima che agisca il connettivo di negazione. Nelle colonne di **destra** (colonna degli **output**) sono riportati i valori che assume il nuovo enunciato $\neg\alpha$.

I CONNETTIVI LOGICI: LA TAVOLA DI VERITÀ della NEGAZIONE (\neg)

Se si vuole negare un enunciato α più di una volta (diciamo n volte) allora si fa precedere α da n volte il simbolo di negazione \neg senza parentesi.

I CONNETTIVI LOGICI: LA TAVOLA DI VERITÀ della NEGAZIONE (\neg)

Se si vuole negare un enunciato α più di una volta (diciamo n volte) allora si fa precedere α da n volte il simbolo di negazione \neg senza parentesi.

Esempio: $\neg\neg\alpha$ è un enunciato in cui α è negato **due volte**. Si legge “non non α ”.

Sia α := Gino vuole che tu vada vada in spiaggia

I CONNETTIVI LOGICI: LA TAVOLA DI VERITÀ della NEGAZIONE (\neg)

Se si vuole negare un enunciato α più di una volta (diciamo n volte) allora si fa precedere α da n volte il simbolo di negazione \neg senza parentesi.

Esempio: $\neg\neg\alpha$ è un enunciato in cui α è negato **due volte**. Si legge “non non α ”.

Sia α := Gino vuole che tu vada vada in spiaggia

Qual è la formalizzazione di “Gino **non** vuole che tu **non** vada in spiaggia”?

I CONNETTIVI LOGICI: LA TAVOLA DI VERITÀ della NEGAZIONE (\neg)

Se si vuole negare un enunciato α più di una volta (diciamo n volte) allora si fa precedere α da n volte il simbolo di negazione \neg senza parentesi.

Esempio: $\neg\neg\alpha$ è un enunciato in cui α è negato **due volte**. Si legge “non non α ”.

Sia α := Gino vuole che tu vada vada in spiaggia

Qual è la formalizzazione di “Gino **non** vuole che tu **non** vada in spiaggia”? $\neg\neg\alpha$

A che cos'è “equivalente” $\neg\neg\alpha$?

I CONNETTIVI LOGICI: LA TAVOLA DI VERITÀ della NEGAZIONE (\neg)

Se si vuole negare un enunciato α più di una volta (diciamo n volte) allora si fa precedere α da n volte il simbolo di negazione \neg senza parentesi.

Esempio: $\neg\neg\alpha$ è un enunciato in cui α è negato **due volte**. Si legge “non non α ”.

Sia α := Gino vuole che tu vada vada in spiaggia

Qual è la formalizzazione di “Gino **non** vuole che tu **non** vada in spiaggia”? $\neg\neg\alpha$

A che cos'è “equivalente” $\neg\neg\alpha$?

È equivalente ad α (legge della **doppia negazione**)

Alcune regole convenzionali sulle parentesi

Cominciamo a introdurre delle **regole convenzionali sulle parentesi**:

- la **negazione** \neg “prevale” su (o “lega” di più di) tutti i connettivi.

Alcune regole convenzionali sulle parentesi

Cominciamo a introdurre delle **regole convenzionali sulle parentesi**:

- la **negazione** \neg “prevale” su (o “lega” di più di) tutti i connettivi. Supponiamo di voler negare la congiunzione $\alpha \wedge \beta$. Scriveremo allora $\neg(\alpha \wedge \beta)$. Lo stesso accade per la disgiunzione. Se vogliamo negare $\alpha \vee \beta$, scriveremo $\neg(\alpha \vee \beta)$.

Alcune regole convenzionali sulle parentesi

Cominciamo a introdurre delle **regole convenzionali sulle parentesi**:

- la **negazione** \neg “prevale” su (o “lega” di più di) tutti i connettivi. Supponiamo di voler negare la congiunzione $\alpha \wedge \beta$. Scriveremo allora $\neg(\alpha \wedge \beta)$. Lo stesso accade per la disgiunzione. Se vogliamo negare $\alpha \vee \beta$, scriveremo $\neg(\alpha \vee \beta)$. Se scriviamo $\neg\alpha \vee \beta$ (o $\neg\alpha \wedge \beta$) la negazione si applica **solo** ad α .

Alcune regole convenzionali sulle parentesi

Cominciamo a introdurre delle **regole convenzionali sulle parentesi**:

- la **negazione** \neg “prevale” su (o “lega” di più di) tutti i connettivi. Supponiamo di voler negare la congiunzione $\alpha \wedge \beta$. Scriveremo allora $\neg(\alpha \wedge \beta)$. Lo stesso accade per la disgiunzione. Se vogliamo negare $\alpha \vee \beta$, scriveremo $\neg(\alpha \vee \beta)$. Se scriviamo $\neg\alpha \vee \beta$ (o $\neg\alpha \wedge \beta$) la negazione si applica **solo** ad α .
- I connettivi **congiunzione** (\wedge) e **disgiunzione** (\vee) “legano” con la stessa forza; quindi occorrono le parentesi per ottenere una formula sintatticamente ben formata. Per esempio, la scrittura $\alpha \wedge \beta \vee \gamma$ è scorretta (ambigua) perché si può interpretare sia come $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma$ sia come $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$ e i due enunciati non sono equivalenti.

La NEGAZIONE come funzione aritmetica (NOT)

La negazione “e” può essere interpretata come una funzione NOT che associa a ogni elemento appartenente all'insieme $\{0, 1\}$ un elemento appartenente all'insieme $\{0, 1\}$.

Per ogni $x \in \{0, 1\}$:

$$\text{NOT}(x) :=$$

La NEGAZIONE “e” come funzione aritmetica (NOT)

La negazione “e” può essere interpretata come una funzione NOT che associa a ogni elemento appartenente all'insieme $\{0, 1\}$ un elemento appartenente all'insieme $\{0, 1\}$.

Per ogni $x \in \{0, 1\}$:

$$\text{NOT}(x) := 1 - x$$

- $\text{NOT}(0) := 1 - 0 = 1$
- $\text{NOT}(1) = 1 - 1 = 0$

La NEGAZIONE “e” come funzione aritmetica (NOT)

La negazione “e” può essere interpretata come una funzione NOT che associa a ogni elemento appartenente all'insieme $\{0, 1\}$ un elemento appartenente all'insieme $\{0, 1\}$.

Per ogni $x \in \{0, 1\}$:

$$\text{NOT}(x) := 1 - x$$

- $\text{NOT}(0) := 1 - 0 = 1$
- $\text{NOT}(1) = 1 - 1 = 0$

α	$\neg\alpha$
0	1
1	0

La NEGAZIONE come funzione aritmetica (NOT)

Si dimostra facilmente che, per ogni $x \in \{0, 1\}$:

- $\text{NOT}(\text{NOT}(x)) = x$ (principio della doppia negazione)

La NEGAZIONE come funzione aritmetica (NOT)

Si dimostra facilmente che, per ogni $x \in \{0, 1\}$:

- $\text{NOT}(\text{NOT}(x)) = x$ (principio della doppia negazione)

In termini logici: l'enunciato $\neg\neg\alpha$ è **equivalente** all'enunciato α .

La NEGAZIONE come funzione aritmetica (NOT)

Si dimostra facilmente che, per ogni $x \in \{0, 1\}$:

- $\text{NOT}(\text{NOT}(x)) = x$ (principio della doppia negazione)

In termini logici: l'enunciato $\neg\neg\alpha$ è **equivalente** all'enunciato α .

- $\text{OR}(x, \text{NOT}(x)) = 1$ (principio del terzo escluso)

La NEGAZIONE come funzione aritmetica (NOT)

Si dimostra facilmente che, per ogni $x \in \{0, 1\}$:

- $\text{NOT}(\text{NOT}(x)) = x$ (principio della doppia negazione)

In termini logici: l'enunciato $\neg\neg\alpha$ è **equivalente** all'enunciato α .

- $\text{OR}(x, \text{NOT}(x)) = 1$ (principio del terzo escluso)

In termini logici: l'enunciato $\alpha \vee \neg\alpha$ è sempre **vero**.

- $\text{NOT}(\text{AND}(x, \text{NOT}(x))) = 1$ (principio di non contraddizione)

La NEGAZIONE come funzione aritmetica (NOT)

Si dimostra facilmente che, per ogni $x \in \{0, 1\}$:

- $\text{NOT}(\text{NOT}(x)) = x$ (principio della doppia negazione)

In termini logici: l'enunciato $\neg\neg\alpha$ è **equivalente** all'enunciato α .

- $\text{OR}(x, \text{NOT}(x)) = 1$ (principio del terzo escluso)

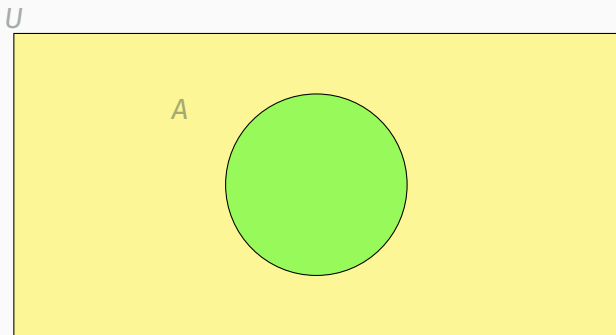
In termini logici: l'enunciato $\alpha \vee \neg\alpha$ è sempre **vero**.

- $\text{NOT}(\text{AND}(x, \text{NOT}(x))) = 1$ (principio di non contraddizione)

In termini logici: l'enunciato $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ è sempre **vero**, o, equivalentemente, una contraddizione $\alpha \wedge \neg\alpha$ non può mai essere vera.

La NEGAZIONE come operazione insiemistica (\neg)

Dato un **insieme** A rappresentato dal suo diagramma di Eulero-Venn:



dove U rappresenta *l'universo del discorso*

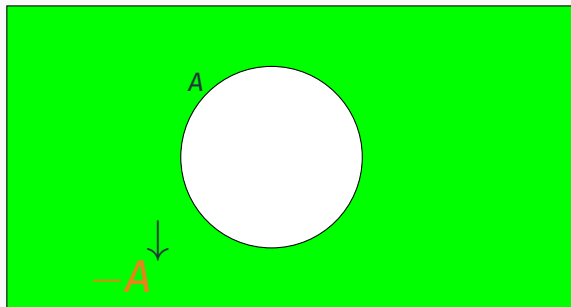
La NEGAZIONE come operazione insiemistica (\neg)

Definizione 3.

Il **complemento** dell'insieme A (relativamente all'universo del discorso U) è l'insieme $\neg A$ che contiene tutti e soli gli elementi che **non** appartengono all'insieme A (e appartengono all'insieme U):

$$\neg A := \{x \in U : x \notin A\}$$

U



La CONGIUNZIONE come operazione insiemistica (\cap)

Si dimostra facilmente che, preso un sottoinsieme A di U , valgono le seguenti proprietà:

- $--A = A$ (**legge della doppia negazione**)

La CONGIUNZIONE come operazione insiemistica (\cap)

Si dimostra facilmente che, preso un sottoinsieme A di U , valgono le seguenti proprietà:

- $--A = A$ (legge della doppia negazione)
- $A \cup -A = U$ (legge del “terzo escluso”)

La CONGIUNZIONE come operazione insiemistica (\cap)

Si dimostra facilmente che, preso un sottoinsieme A di U , valgono le seguenti proprietà:

- $--A = A$ (legge della doppia negazione)
- $A \cup -A = U$ (legge del “terzo escluso”)
- $-(A \cap -A) = U$ (legge di “non contraddizione”)

La CONGIUNZIONE come operazione insiemistica (\cap)

Si dimostra facilmente che, preso un sottoinsieme A di U , valgono le seguenti proprietà:

- $--A = A$ (legge della doppia negazione)
- $A \cup -A = U$ (legge del “terzo escluso”)
- $-(A \cap -A) = U$ (legge di “non contraddizione”)
- $-U = \emptyset$
- $-\emptyset = U$

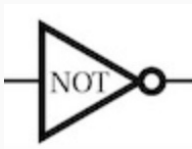
Ricordiamo che l'**insieme vuoto** (\emptyset) rappresenta il **falso** (0), mentre **insieme universo** (U) rappresenta il **vero** (1)



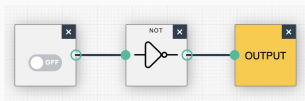
<https://academo.org/demos/logic-gate-simulator/>

Ricordiamo che una **porta logica** (*logical gate*) è un oggetto idealizzato o fisico che implementa un'operazione logica su uno o più **input binari** in modo da produrre come output un unico bit.

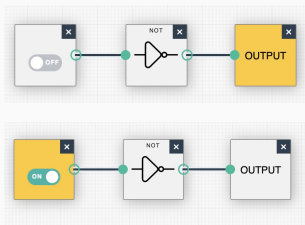
La porta logica *NOT* è una porta logica a un solo input (e un output) che implementa la **negazione logica** (\neg). Si tratta di un *inverter*, ossia di un dispositivo il cui **output** è **1**) se e solo se l'**input** è **0**) La porta logica *NOT* si simboleggia nel modo seguente:



La NEGAZIONE come **porta logica**

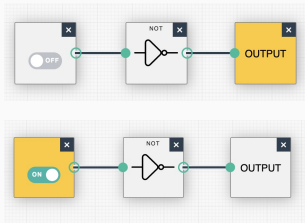


La NEGAZIONE come **porta logica**



- $\text{NOT}(0) = 1$

La NEGAZIONE come **porta logica**



- $\text{NOT}(0) = 1$

- $\text{NOT}(1) = 0$

CONNETTIVI LOGICI: il CONDIZIONALE o IMPLICAZIONE(\rightarrow)

α := aumenta l'inflazione

β := mi rifugio in una caverna del Gennargentu

$\alpha \rightarrow \beta$:= **se** $\underbrace{\text{aumenta l'inflazione}}_{\alpha}$ **allora** $\underbrace{\text{mi rifugio in una caverna del Gennargentu}}_{\beta}$

CONNETTIVI LOGICI: il CONDIZIONALE o IMPLICAZIONE(\rightarrow)

α := aumenta l'inflazione

β := mi rifugio in una caverna del Gennargentu

$\alpha \rightarrow \beta$:= **se** $\underbrace{\text{aumenta l'inflazione}}_{\alpha}$ **allora** $\underbrace{\text{mi rifugio in una caverna del Gennargentu}}_{\beta}$

Il **condizionale** o **implicazione** (in simboli \rightarrow) è un connettivo **binario** e viene quindi applicato a due enunciati (semplici o composti) in modalità **infissa**.

Dato un condizionale $\alpha \rightarrow \beta$, l'enunciato α viene detto **antecedente** (del condizionale), mentre β viene detto **conseguente** (del condizionale).

CONNETTIVI LOGICI: il CONDIZIONALE o IMPLICAZIONE(\rightarrow)

Intuitivamente, un enunciato della forma $\alpha \rightarrow \beta$ ci sta dicendo che se si verifica α , allora deve verificarsi anche β , e che ,quindi, quando α è vero, β non dev'essere falso.

Quindi, se α è vero e β falso, allora $\alpha \rightarrow \beta$ sarà falso.

L'approccio classico alla logica proposizionale assume che questo sia l'**unico caso** in cui $\alpha \rightarrow \beta$ sia falso.

CONNETTIVI LOGICI: il CONDIZIONALE o IMPLICAZIONE(\rightarrow)

Intuitivamente, un enunciato della forma $\alpha \rightarrow \beta$ ci sta dicendo che se si verifica α , allora deve verificarsi anche β , e che ,quindi, quando α è vero, β non dev'essere falso.

Quindi, se α è vero e β falso, allora $\alpha \rightarrow \beta$ sarà falso.

L'approccio classico alla logica proposizionale assume che questo sia l'**unico caso** in cui $\alpha \rightarrow \beta$ sia falso.

- $\alpha \rightarrow \beta$ è **0 (Falso)** se e solo se l'antecedente α è **1 (Vero)** e il conseguente β è **0 (Falso)**
- $\alpha \rightarrow \beta$ ha valore **1 (Vero)**, in tutti i rimanenti **tre** casi

CONNETTIVI LOGICI: il CONDIZIONALE o IMPLICAZIONE(\rightarrow)

Ne segue che la tavola di verità del condizionale sarà la seguente:

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
0	0	

CONNETTIVI LOGICI: il CONDIZIONALE o IMPLICAZIONE(\rightarrow)

Ne segue che la tavola di verità del condizionale sarà la seguente:

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
0	0	1
0	1	

CONNETTIVI LOGICI: il CONDIZIONALE o IMPLICAZIONE(\rightarrow)

Ne segue che la tavola di verità del condizionale sarà la seguente:

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
0	0	1
0	1	1
1	0	

CONNETTIVI LOGICI: il CONDIZIONALE o IMPLICAZIONE(\rightarrow)

Ne segue che la tavola di verità del condizionale sarà la seguente:

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

CONNETTIVI LOGICI: il CONDIZIONALE o IMPLICAZIONE(\rightarrow)

Ne segue che la tavola di verità del condizionale sarà la seguente:

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

CONNETTIVI LOGICI: il CONDIZIONALE o IMPLICAZIONE(\rightarrow)

Ne segue che la tavola di verità del condizionale sarà la seguente:

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

I casi meno intuitivi sono quelli in cui l'antecedente α è falso. Per l'interpretazione di questi casi si adotta il **principio di Duns Scoto** :

ex falso sequitur quodlibet

(letteralmente, “dal falso segue qualsiasi cosa (scelta) a piacere”).

Questo principio stabilisce che da un enunciato contraddittorio consegue logicamente qualsiasi altro enunciato.

Il condizionale come funzione aritmetica (IMP)

Il Condizionale “se,...,allora” può essere interpretato come una funzione **IMP** che associa a una **coppia** di valori appartenente all'insieme $\{0, 1\}$ un elemento appartenente all'insieme $\{0, 1\}$.

Il condizionale come funzione aritmetica (**IMP**)

Il Condizionale “se,...,allora” può essere interpretato come una funzione **IMP** che associa a una **coppia** di valori appartenente all'insieme $\{0, 1\}$ un elemento appartenente all'insieme $\{0, 1\}$.

Per ogni $x, y \in \{0, 1\}$:

$$\mathbf{IMP}(x, y) := (1 - x) + y - (1 - x) \cdot y = 1 - x + x \cdot y$$

Il condizionale come funzione aritmetica (IMP)

Il Condizionale “se,...,allora” può essere interpretato come una funzione **IMP** che associa a una **coppia** di valori appartenente all'insieme $\{0, 1\}$ un elemento appartenente all'insieme $\{0, 1\}$.

Per ogni $x, y \in \{0, 1\}$:

$$\text{IMP}(x, y) := (1 - x) + y - (1 - x) \cdot y = 1 - x + x \cdot y$$

- $\text{IMP}(0, 0) := 1 - 0 + 0 \cdot 0 = 1$

Il condizionale come funzione aritmetica (IMP)

Il Condizionale “se,...,allora” può essere interpretato come una funzione **IMP** che associa a una **coppia** di valori appartenente all'insieme $\{0, 1\}$ un elemento appartenente all'insieme $\{0, 1\}$.

Per ogni $x, y \in \{0, 1\}$:

$$\text{IMP}(x, y) := (1 - x) + y - (1 - x) \cdot y = 1 - x + x \cdot y$$

- $\text{IMP}(0, 0) := 1 - 0 + 0 \cdot 0 = 1$
- $\text{IMP}(0, 1) := 1 - 0 + 0 \cdot 1 = 1$

Il condizionale come funzione aritmetica (IMP)

Il Condizionale “se,...,allora” può essere interpretato come una funzione **IMP** che associa a una **coppia** di valori appartenente all'insieme $\{0, 1\}$ un elemento appartenente all'insieme $\{0, 1\}$.

Per ogni $x, y \in \{0, 1\}$:

$$\text{IMP}(x, y) := (1 - x) + y - (1 - x) \cdot y = 1 - x + x \cdot y$$

- $\text{IMP}(0, 0) := 1 - 0 + 0 \cdot 0 = 1$
- $\text{IMP}(0, 1) := 1 - 0 + 0 \cdot 1 = 1$
- $\text{IMP}(1, 0) := 1 - 1 + 1 \cdot 0 = 0$

Il condizionale come funzione aritmetica (IMP)

Il Condizionale “se,...,allora” può essere interpretato come una funzione **IMP** che associa a una **coppia** di valori appartenente all'insieme $\{0, 1\}$ un elemento appartenente all'insieme $\{0, 1\}$.

Per ogni $x, y \in \{0, 1\}$:

$$\text{IMP}(x, y) := (1 - x) + y - (1 - x) \cdot y = 1 - x + x \cdot y$$

- $\text{IMP}(0, 0) := 1 - 0 + 0 \cdot 0 = 1$
- $\text{IMP}(0, 1) := 1 - 0 + 0 \cdot 1 = 1$
- $\text{IMP}(1, 0) := 1 - 1 + 1 \cdot 0 = 0$
- $\text{IMP}(1, 1) := 1 - 1 + 1 \cdot 1 = 1$

Il condizionale come funzione aritmetica (IMP)

Il Condizionale “se,...,allora” può essere interpretato come una funzione **IMP** che associa a una **coppia** di valori appartenente all'insieme $\{0, 1\}$ un elemento appartenente all'insieme $\{0, 1\}$.

Per ogni $x, y \in \{0, 1\}$:

$$\text{IMP}(x, y) := (1 - x) + y - (1 - x) \cdot y = 1 - x + x \cdot y$$

- $\text{IMP}(0, 0) := 1 - 0 + 0 \cdot 0 = 1$
- $\text{IMP}(0, 1) := 1 - 0 + 0 \cdot 1 = 1$
- $\text{IMP}(1, 0) := 1 - 1 + 1 \cdot 0 = 0$
- $\text{IMP}(1, 1) := 1 - 1 + 1 \cdot 1 = 1$

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

CONNETTIVI LOGICI:IL BICONDIZIONALE o DOPPIA IMPLICAZIONE o EQUIVALENZA (\leftrightarrow)

Intuitivamente, l'enunciato $\alpha \leftrightarrow \beta$ significa che se è vero α , è vero anche β , e se è vero β , allora è vero anche α .

In altri termini, $\alpha \leftrightarrow \beta$ è vero se e soltanto se α e β hanno lo **stesso valore di verità**. Ne deriva, allora che la tavola di verità della doppia implicazione è la seguente:

α	β	$\alpha \leftrightarrow \beta$
0	0	

CONNETTIVI LOGICI:IL BICONDIZIONALE o DOPPIA IMPLICAZIONE o EQUIVALENZA (\leftrightarrow)

Intuitivamente, l'enunciato $\alpha \leftrightarrow \beta$ significa che se è vero α , è vero anche β , e se è vero β , allora è vero anche α .

In altri termini, $\alpha \leftrightarrow \beta$ è vero se e soltanto se α e β hanno lo **stesso valore di verità**. Ne deriva, allora che la tavola di verità della doppia implicazione è la seguente:

α	β	$\alpha \leftrightarrow \beta$
0	0	1
0	1	

CONNETTIVI LOGICI:IL BICONDIZIONALE o DOPPIA IMPLICAZIONE o EQUIVALENZA (\leftrightarrow)

Intuitivamente, l'enunciato $\alpha \leftrightarrow \beta$ significa che se è vero α , è vero anche β , e se è vero β , allora è vero anche α .

In altri termini, $\alpha \leftrightarrow \beta$ è vero se e soltanto se α e β hanno lo **stesso valore di verità**. Ne deriva, allora che la tavola di verità della doppia implicazione è la seguente:

α	β	$\alpha \leftrightarrow \beta$
0	0	1
0	1	0
1	0	0

CONNETTIVI LOGICI:IL BICONDIZIONALE o DOPPIA IMPLICAZIONE o EQUIVALENZA (\leftrightarrow)

Intuitivamente, l'enunciato $\alpha \leftrightarrow \beta$ significa che se è vero α , è vero anche β , e se è vero β , allora è vero anche α .

In altri termini, $\alpha \leftrightarrow \beta$ è vero se e soltanto se α e β hanno lo **stesso valore di verità**. Ne deriva, allora che la tavola di verità della doppia implicazione è la seguente:

α	β	$\alpha \leftrightarrow \beta$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

CONNETTIVI LOGICI:IL BICONDIZIONALE o DOPPIA IMPLICAZIONE o EQUIVALENZA (\leftrightarrow)

Intuitivamente, l'enunciato $\alpha \leftrightarrow \beta$ significa che se è vero α , è vero anche β , e se è vero β , allora è vero anche α .

In altri termini, $\alpha \leftrightarrow \beta$ è vero se e soltanto se α e β hanno lo **stesso valore di verità**. Ne deriva, allora che la tavola di verità della doppia implicazione è la seguente:

α	β	$\alpha \leftrightarrow \beta$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

CONNETTIVI LOGICI:IL BICONDIZIONALE o DOPPIA IMPLICAZIONE o EQUIVALENZA (\leftrightarrow)

Ricordiamo la prima definizione che abbiamo dato di **equivalenza** fra enunciati:

Due enunciati α, β si dicono **equivalenti** sse valgono le seguenti condizioni:

- α e β contengono gli stessi sottoenunciati (“variabili”);
- a input uguali (valori di verità uguali dei sottoenunciati) per α e β corrisponde lo stesso output (valore di verità finale) dei due enunciati.

CONNETTIVI LOGICI:IL BICONDIZIONALE o DOPPIA IMPLICAZIONE o EQUIVALENZA (\leftrightarrow)

Un'altra idea intuitiva del bicondizionale $\alpha \leftrightarrow \beta$ è che esso possa essere espresso come **coniunzione** di due **condizionali**, in cui vengono scambiati il ruolo dell'antecedente e del conseguente:

$$(\alpha \rightarrow \beta) \wedge$$

CONNETTIVI LOGICI:IL BICONDIZIONALE o DOPPIA IMPLICAZIONE o EQUIVALENZA (\leftrightarrow)

Un'altra idea intuitiva del bicondizionale $\alpha \leftrightarrow \beta$ è che esso possa essere espresso come **coniunzione** di due **condizionali**, in cui vengono scambiati il ruolo dell'antecedente e del conseguente:

$$(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$$

Se confrontiamo la tavola di verità di $\alpha \leftrightarrow \beta$ e di $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$ ci accorgeremo che i due enunciati sono equivalenti:

CONNETTIVI LOGICI:IL BICONDIZIONALE o DOPPIA IMPLICAZIONE o EQUIVALENZA (\leftrightarrow)

α	β	$\alpha \leftrightarrow \beta$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

CONNETTIVI LOGICI:IL BICONDIZIONALE o DOPPIA IMPLICAZIONE o EQUIVALENZA (\leftrightarrow)

α	β	$\alpha \leftrightarrow \beta$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

α	β	$(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$						
0	0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	0	1	0	1

CONNETTIVI LOGICI:IL BICONDIZIONALE o DOPPIA IMPLICAZIONE o EQUIVALENZA (\leftrightarrow)

α	β	$\alpha \leftrightarrow \beta$	α	β	$(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$						
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1

Dunque, gli enunciati $\alpha \leftrightarrow \beta$ e $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$ sono **equivalenti**

CONNETTIVI LOGICI:IL BICONDIZIONALE o DOPPIA IMPLICAZIONE o EQUIVALENZA (\leftrightarrow)

Un'altra definizione di **equivalenza** fra enunciati può essere formulata proprio attraverso il bicondizionale.

Definition 2.

Due enunciati α e β sono **equivalenti** se e soltanto se il **valore di verità** (finale) dell'enunciato $\alpha \leftrightarrow \beta$ è sempre **1**, vale a dire $\alpha \leftrightarrow \beta$ è sempre **vero**, o, come definiremo in seguito, $\alpha \leftrightarrow \beta$ è una **verità logica** (o **tautologia**).

Questa è la definizione che adotteremo in seguito, anche in riferimento agli esercizi.

CONNETTIVI LOGICI:IL BICONDIZIONALE o DOPPIA IMPLICAZIONE o EQUIVALENZA (\leftrightarrow)

Vogliamo dimostrare che i due enunciati $\alpha \wedge \beta$ e $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ sono equivalenti.

Metodo1:

α	β	$\alpha \wedge \beta$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

CONNETTIVI LOGICI:IL BICONDIZIONALE o DOPPIA IMPLICAZIONE o EQUIVALENZA (\leftrightarrow)

Vogliamo dimostrare che i due enunciati $\alpha \wedge \beta$ e $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ sono equivalenti.

Metodo1:

α	β	$\alpha \wedge \beta$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

α	$\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$
0 0	0 1 0 1 0
0 1	0 1 0 1 0 1
1 0	0 0 1 1 1 0
1 1	1 0 1 0 0 1

CONNETTIVI LOGICI:IL BICONDIZIONALE o DOPPIA IMPLICAZIONE o EQUIVALENZA (\leftrightarrow)

Metodo 2:

α	β	$(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \neg(\neg \alpha \vee \neg \beta)$									
0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1