

## Analisi dei circuiti nel dominio del tempo

Abbiamo imparato ad analizzare i circuiti in condizione di regime (stazionario e sinusoidale) nell'ipotesi che il circuito, lineare e tempo invariante, sia assolutamente stabile. Occupiamoci ora di determinare la risposta completa del circuito e non solo la risposta a regime. L'analisi può essere condotta nel dominio del tempo, come vedremo di seguito, o nel dominio della variabile di Laplace, come vedremo successivamente. La teoria della Trasformata di Laplace è oggetto di altri corsi e si supponerà che lo studente ne abbia acquisito le principali nozioni.

Per determinare la risposta completa di un circuito dovremo, come per altro già fatto per lo studio dei circuiti a regime, scrivere le equazioni del circuito. Dal grafo del circuito, che abbiamo imparato a tracciare, possiamo determinare il numero di incognite del problema che saranno  $L$  tensioni ed  $L$  correnti, se  $L$  è il numero di lati del circuito. Si dovranno quindi scrivere  $2L$  equazioni,  $L$  equazioni topologiche che descrivono il modo in cui i componenti sono collegati, e  $L$  equazioni dei componenti che non sono altro che le equazioni che caratterizzano i componenti. Per tutti i componenti elementari abbiamo già imparato a scriverne le equazioni caratteristiche. Le equazioni topologiche possono essere facilmente scritte applicando la Legge di Kirchhoff alle correnti agli  $N - 1$  co-cicli fondamentali e applicando la Legge di Kirchhoff alle tensioni alle  $L - N + 1$  maglie fondamentali. Co-cicli fondamentali e maglie fondamentali sono ricavate, come visto in precedenza, facendo uso del grafo del circuito.

In generale, se nel circuito sono presenti componenti con memoria (induttori, capacitori, mutue induttanze) questi introdurranno delle equazioni differenziali nel sistema risolvibile. Per risolvere il problema circuitale occorre quindi fare ricorso ai metodi per la risoluzione di equazione differenziali ordinarie.

Quando fossimo interessati alla sola risposta a regime il problema, come visto, è riconducibile ad un problema algebrico in algebra reale o complessa a seconda che il regime conseguito dal circuito sia stazionario o sinusoidale.

### Esempio 1 Circuito del 1° ordine

Consideriamo un circuito elettrico come in Figura 1 e consideriamo  $u(t)$  come ingresso al circuito.

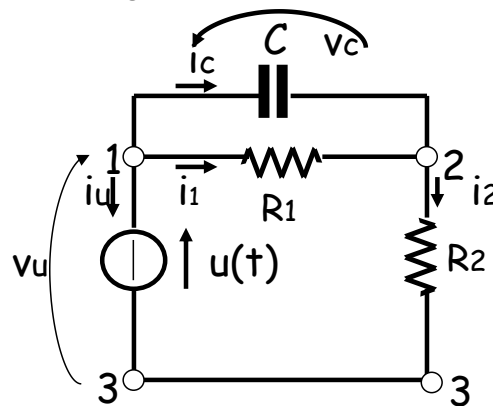


Figura 1. Circuito del 1° ordine

### Soluzione

Per questa rete possiamo disegnare il grafo (vedi Figura 2) e scegliere un albero (in blu). Il co-albero associato sarà quello in rosso nella stessa Figura 2.

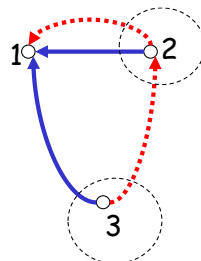


Figura 2. Grafo del circuito in Figura 1 con  $L = 4$  lati e  $N = 3$  nodi.

L'albero ha 2 lati quindi possiamo individuare due co-cicli fondamentali. Inoltre i lati di co-albero sono 2 e quindi possiamo individuare due maglie fondamentali, e scrivere le 4 equazioni topologiche:

$$\begin{cases} i_1 + i_c - i_2 = 0 \\ i_u + i_2 = 0 \\ v_u - v_c - v_2 = 0 \\ v_c - v_1 = 0 \end{cases}$$

A queste possiamo associare le equazioni dei componenti che, essendo la rete costituita da 4 bipoli saranno quattro e legheranno le 4 tensioni ai morsetti dei bipoli alla relative correnti associate utilizzando la convenzione degli utilizzatori. Le quattro equazioni dei componenti sono:

$$\begin{cases} v_u = u(t) \\ v_1 = R_1 i_1 \\ i_c = C \frac{dv_c}{dt} \\ v_2 = R_2 i_2 \end{cases}$$

Il sistema che descrive il comportamento del circuito è un sistema di 8 equazioni nelle 8 incognite (4 tensioni e 4 correnti). Come si può notare, in esso compare una equazione differenziale associata al capacitore. Il sistema non è quindi un sistema algebrico ma differenziale.

Supponiamo di essere interessati a determinare una qualunque delle 8 variabili, che chiameremo uscita. Possiamo fare in modo che dal sistema di equazioni si ricavi una equazione che contiene solo l'uscita desiderata e l'ingresso. Per esempio, scegliamo come uscita la tensione ai capi del capacitore  $v_c(t)$ . Tale relazione prende il nome di Relazione Ingresso/Uscita (I/O). Nel caso in esame, operando alcune sostituzioni si avrà:

$$\begin{cases} u(t) = v_c + R_2 i_2 \\ i_2 = i_1 + i_c = \frac{v_c}{R_1} + C \frac{dv_c}{dt} \end{cases}$$

da cui:

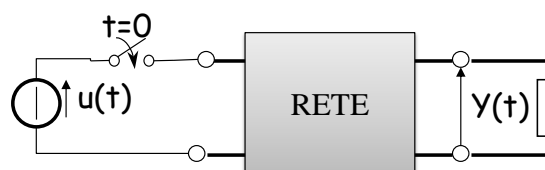
$$u(t) = v_c + R_2 \left( \frac{v_c}{R_1} + C \frac{dv_c}{dt} \right)$$

La Relazione I/O è:

$$u(t) = R_2 C_1 \frac{dv_c}{dt} + \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) v_c$$

La Relazione I/O è una equazione differenziale ordinaria del primo ordine. In generale, nei circuiti reali, se si ha un solo componente con memoria la relazione I/O sarà del primo ordine e il circuito sarà del primo ordine. Se nel circuito vi sono due componenti con memoria relazione I/O e circuito saranno del secondo ordine, e così via. Fanno eccezione i circuiti che (per l'idealità del modello costruito) presentano delle particolari topologie, che chiameremo patologiche, che riducono l'ordine del circuito. Questi casi patologici saranno esaminati successivamente.

In generale data una rete lineare e tempo invariante, alimentata con un segnale di ingresso  $u(t)$ , e scelta una uscita  $y(t)$  la relazione I/O sarà una equazione differenziale ordinaria il cui ordine è l'ordine del circuito. Si faccia riferimento allo schema in Figura 3, dove l'ingresso è applicato a partire da un istante iniziale preso convenzionalmente come  $t = 0$ , mediante la chiusura di un tasto.



**Figura 3.** Schema circuitale. L'alimentazione è applicata all'istante  $t = 0$ .

Sia l'ingresso che l'uscita possono essere sia tensioni che correnti. Ci possono essere, quindi, 4 possibili combinazioni a seconda della natura dell'ingresso e dell'uscita.

Una volta ricavata la relazione I/O essa potrà essere integrata con le regole dell'analisi matematica. Un modo per ricavare l'uscita  $y(t)$  desiderata consiste nel sommare l'integrale generale dell'omogenea associata con un integrale particolare dell'equazione completa. Dovranno quindi essere determinate le costanti di integrazione applicando le condizioni iniziali per l'uscita, calcolate all'istante  $t = 0^+$ , intendendo con  $t = 0^+$  l'istante immediatamente successivo all'applicazione dell'ingresso, o di qualunque perturbazione che altera il funzionamento del circuito.

Le condizioni iniziali sono legate algebricamente allo stato del circuito in  $t = 0^+$ , cioè alla energia immagazzinata nel circuito in quell'istante.

Nel seguito, oltre a richiamare le regole per l'integrazione delle equazioni differenziali ordinarie per una categorie di segnali di ingresso, tipici dei circuiti elettrici, si mostrerà come, a partire dallo conoscenza dello stato del circuito nell'istante  $t = 0^-$ , cioè un istante prima di alimentare il circuito, si possa risalire alla conoscenza dello stato in  $t = 0^+$ , e da questo alla determinazione delle condizioni iniziali.

Vedremo prima, facendo riferimento all'esempio precedente, come trovare l'uscita desiderata  $v_C(t)$  nell'ipotesi di conoscere già la condizione iniziale  $v_C(0^+)$ . In seguito si mostrerà come ricavare le condizioni iniziali noto lo stato in  $t = 0^-$ . Infatti, l'ipotesi di conoscere lo stato del circuito in  $t = 0^-$ , è un'ipotesi plausibile, mentre non lo è quella di conoscere direttamente le condizioni iniziali.

Nel circuito in esame, come detto, vi è un solo componente in grado di immagazzinare energia. Questo componente è il condensatore che può immagazzinare energia sotto forma di energia elettrica. Questo componente ha quindi «memoria» del suo passato, e questa memoria è rappresentata dall'energia elettrica immagazzinata in un determinato istante  $t$ :  $W_E(t) = \frac{1}{2} C v_C^2(t)$ . Poiché questa energia è funzione della tensione  $v_C(t)$ , lo stato del componente è rappresentabile anche con il valore della tensione in un certo istante. Lo stato del circuito è rappresentato, in questo esempio, dal valore della tensione  $v_C$  in un certo istante. La variabile  $v_C$  prende il nome di variabile di stato. Poiché nel circuito dell'esempio vi è un solo componente con memoria, vi sarà una sola variabile di stato e il circuito sarà del primo ordine (salvo le eccezioni che vedremo più avanti e di cui ho già accennato). La relazione I/O è infatti una equazione differenziale del primo ordine.

Nel caso dell'esempio, la variabile di uscita è anche variabile di stato, ma questo non è prescrittivo. Per poter integrare la relazione I/O del 1° ordine occorre conoscere l'unica condizione iniziale, rappresentata dal valore dell'uscita  $v_C$  all'istante  $t = 0^+$ .

Si supponga, per semplicità, di conoscerla e che sia pari a zero. Ciò significa che, all'istante di alimentazione del circuito il condensatore era scarico. Più avanti si mostrerà come generalizzare a circuiti di ordine diverso da uno e con condizioni iniziali diverse da zero.

Una seconda ipotesi che deve essere assunta nell'analisi di un circuito è la conoscenza dell'ingresso. Nell'Esempio 1 considerato si suppone sia costante e pari ad  $E$ . Supponiamo inoltre che l'ingresso sia applicato a partire dall'istante  $t = 0$ . Questo equivale a considerare la presenza di un tasto che viene chiuso all'istante  $t = 0$ . In generale si è interessati a studiare l'evoluzione del circuito a partire dall'istante  $t = 0$  in poi, cioè per  $t > 0$ .

$$\text{Ipotesi: } \begin{cases} v_C(0^+) = 0 \\ u(t) = E = \text{costante} \end{cases}$$

$$\text{Relazione I/O: } u(t) = R_2 C \frac{dv_C}{dt} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_C$$

$$\text{Polinomio caratteristico: } R_2 C \lambda + \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 0$$

$$\text{L'unica radice del polinomio caratteristico è: } \lambda = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}$$

$\lambda$  è dimensionalmente l'inverso di un tempo e prende il nome di frequenza libera del circuito. L'inverso di  $\lambda$  è quindi un tempo che prende il nome di costante di tempo del circuito e verrà indicata come  $\tau$ .

La soluzione dell'omogenea associata è:

$$v_{c_{oa}} = A e^{\lambda t}$$

dove  $A$  è la costante di integrazione che è dimensionalmente una tensione.

Calcoliamo ora un integrale particolare dell'equazione generale. Poiché  $u(t)$  è costante, anche l'integrale particolare sarà una costante  $v_{cp} = K$  il cui valore può essere determinato imponendo che esso sia soluzione della Relazione I/O. Quindi sostituendolo nella stessa relazione otteniamo:

$$E = R_2 C \cdot 0 + \frac{R_1 + R_2}{R_1} K \rightarrow K = E \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Ora possiamo sommare l'integrale generale dell'omogenea associata con l'integrale particolare dell'equazione completa ed ottenere:

$$v_c(t) = Ae^{\lambda t} + E \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

In questa espressione compare ancora la costante di integrazione  $A$  che viene determinata imponendo la conoscenza della condizione iniziale in  $t = 0^+$ , nel nostro caso nulla. Da cui:

$$0 = Ae^{\lambda 0} + E \frac{R_1}{R_1 + R_2} \rightarrow A = -E \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

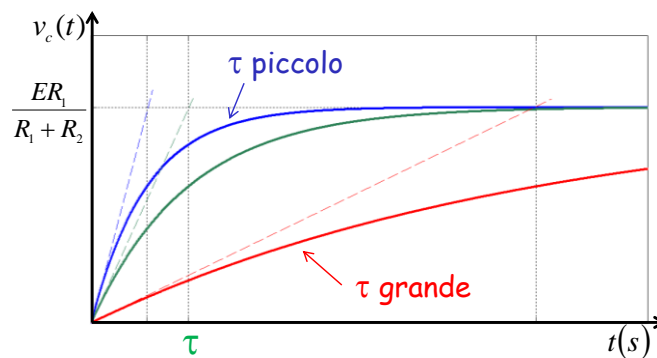
Sostituendo il valore di  $A$  così trovato nella espressione della  $v_c(t)$  si ottiene:

$$v_c(t) = \frac{ER_1}{R_1 + R_2} \left( 1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t} \right)$$

che rappresenta la risposta completa.

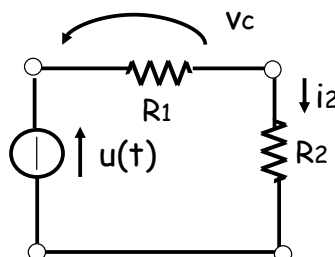
La  $v_c(t)$  ha un andamento esponenziale crescente con un valore asintotico pari a  $\frac{ER_1}{R_1 + R_2}$ .

Al variare dei parametri del circuito varia il valore della costante di tempo  $\tau$ . Tanto più  $\tau$  è piccolo tanto più la curva tende al suo valore asintotico più velocemente, come mostrato in Figura 4.



**Figura 4.** Andamento della risposta  $v_c(t)$  al variare della costante di tempo  $\tau$

Il valore negativo di  $\lambda$  assicura che il termine esponenziale tende a zero per  $t$  che cresce. Il circuito quindi raggiungerà, dopo un tempo sufficientemente lungo, una condizione di regime che dipende dall'ingresso. In questo caso, essendo l'ingresso costante, il circuito raggiungerà il regime stazionario e la tensione nel condensatore assumerà il valore di regime  $\frac{ER_1}{R_1 + R_2}$ . Infatti il condensatore, in regime stazionario, si comporta come un circuito aperto e la tensione, pari a quella nel resistore  $R_1$ , si può ricavare applicando la regola del partitore di tensione al circuito di Figura 5. Poiché la frequenza libera è reale negativa il regime viene raggiunto da tutte le variabili del circuito.



**Figura 5.** Circuito equivalente al circuito in Figura 1 in funzionamento a regime.

La  $v_c$ , oltre ad essere la variabile di uscita prescelta, è anche variabile di stato. Si può verificare che, in un circuito note le variabili di stato, è possibile ricavare tutte le altre variabili (non di stato) scrivendo altrettante relazioni algebriche tra le variabili di stato e l'ingresso. Nel caso in esame possiamo determinare le altre grandezze elettriche del circuito scrivendo le relazioni algebriche:

$$i_1(t) = \frac{v_c}{R_1}; \quad v_2(t) = u(t) - v_c(t); \quad i_2(t) = \frac{u(t) - v_c(t)}{R_2}; \quad i_c(t) = i_2(t) - i_1(t) = \frac{u(t) - v_c(t)}{R_2} - \frac{v_c}{R_1}$$

da cui:

$$i_1(t) = \frac{E}{R_1 + R_2} \left( 1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t} \right)$$

$$v_2(t) = E - \frac{ER_1}{R_1 + R_2} \left( 1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t} \right) = \frac{ER_2}{R_1 + R_2} + \frac{ER_1}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t}$$

$$i_2(t) = \frac{v_2}{R_2} = \frac{E}{R_1 + R_2} + \frac{E}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_1}{R_2} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t}$$

$$i_c(t) = i_2(t) - i_1(t) =$$

$$= \frac{E}{R_1 + R_2} + \frac{E}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_1}{R_2} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t} - \frac{E}{R_1 + R_2} + \frac{E}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t} \Rightarrow$$

$$i_c(t) = \frac{E}{R_1 + R_2} \left( \frac{R_1}{R_2} + 1 \right) e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t} = \frac{E}{R_2} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t}$$

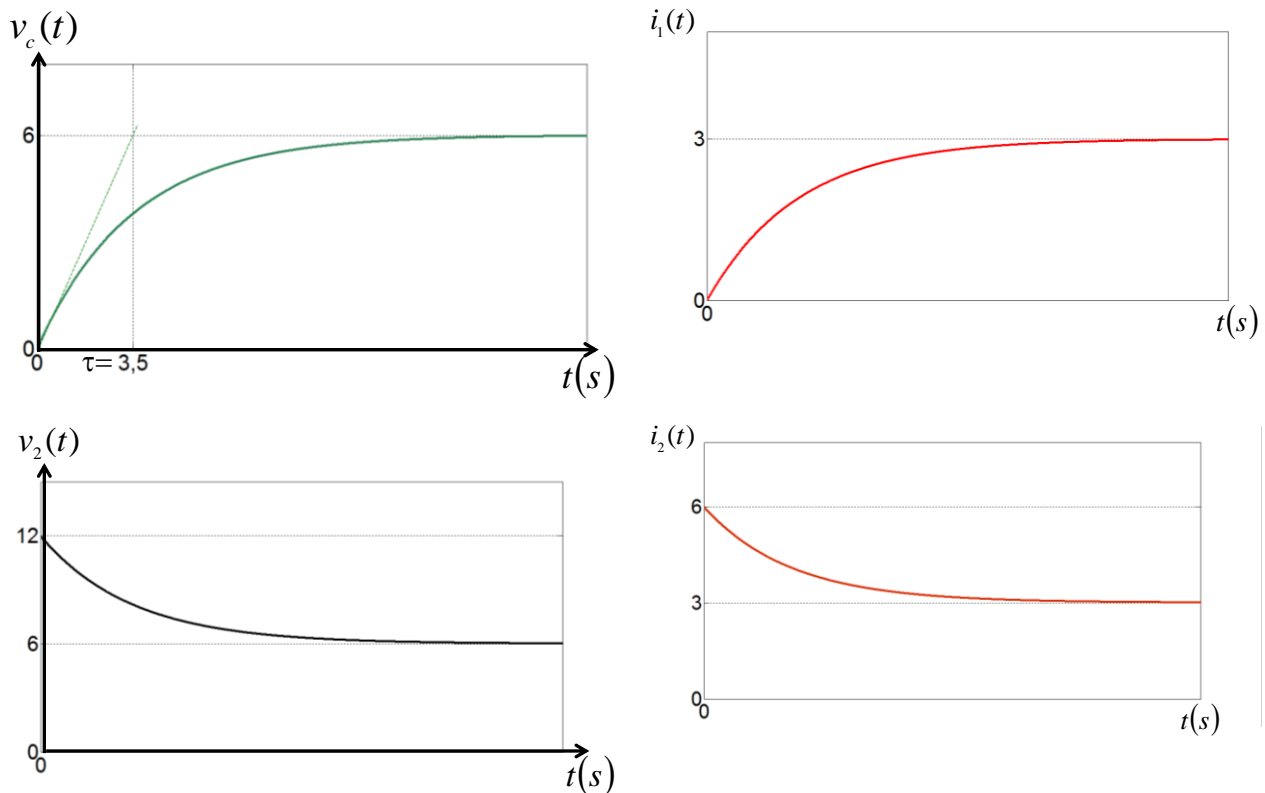
$$i_c(t) = C \frac{dv_c}{dt} = C \left[ \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} \cdot \frac{ER_1}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t} \right] = \frac{E}{R_2} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t}$$

Per definizione, la corrente nel condensatore è  $C dv_c/dt$ . Come visto dalla precedente espressione, si ritrova per  $i_c$  la stessa espressione, come volevasi dimostrare.

Si noti che, per  $t = 0$   $v_c(t) = 0$ . Non è così per  $i_c$ ,  $v_2$ , e  $i_2$  che hanno valori diversi da zero nell'istante iniziale. Nei grafici in Figura 6 sono riportati gli andamenti delle grandezze elettriche nel circuito ponendo  $E = 12 \text{ V}$ ;  $R_1 = R_2 = 2\Omega$ ;  $C = 3,5 \text{ F}$ .

$$\text{Per } t = 0 \quad v_c(t) = 0; \quad i_1(t) = 0; \quad v_2(t) = E = 12 \text{ V}; \quad i_2(t) = \frac{E}{R_2} = 6 \text{ A},$$

$$\text{per } t \rightarrow \infty \quad v_c(t) = \frac{ER_1}{R_1 + R_2} = 6 \text{ V}; \quad i_1(t) = \frac{E}{R_1 + R_2} = 3 \text{ A}; \quad v_2(t) = \frac{ER_2}{R_1 + R_2} = 6 \text{ V}; \quad i_2(t) = \frac{E}{R_1 + R_2} = 3 \text{ A}$$



**Figura 6.** Andamento delle grandezze elettriche nel circuito di Figura 1

Dal punto di vista fisico, all'istante iniziale il condensatore è scarico quindi per un solo istante si comporta come un corto circuito, ciò significa che  $R_1$  non è attraversata da corrente, ed ecco perché  $i_1(0^+) = 0$ . Successivamente il condensatore si carica e quindi durante la carica circola corrente sia nel condensatore che nel resistore  $R_1$ . Quando il condensatore si è caricato esso si comporta come un circuito aperto e tutta la corrente passa in  $R_1$  che risulta in serie con  $R_2$ . Il circuito raggiunge una condizione di regime stazionario con la corrente in  $R_1$  uguale a quella in  $R_2$ . Sebbene a regime queste due correnti siano uguali, la loro evoluzione durante il transitorio è differente. □

*Note:*

- Esiste un legame di corrispondenza tra l'ordine dell'equazione differenziale che rappresenta la relazione I/O ed il numero di componenti ai quali è associabile una variabile di stato. Nell'esempio appena visto, il circuito è del 1° ordine, la variabile di stato è la tensione ai capi del condensatore  $v_c$ , la relazione I/O è una equazione differenziale del 1° ordine; lo stato iniziale è nullo.
- Come verrà visto più avanti il legame non è sempre uno a uno. Esistono dei teoremi che ci consentono di risalire all'ordine del circuito (e quindi all'ordine dell'equazione differenziale che rappresenta la relazione I/O) nota la topologia del circuito.

### Proprietà della risposta nello stato zero

Nel circuito esaminato precedentemente, se avessimo applicato un ingresso doppio avremmo ottenuto, per tutte le grandezze elettriche esaminate, valori doppi. Questo risultato discende, come altri, dalle proprietà della risposta nello stato zero dei circuiti lineari e tempo invarianti.

#### Linearità

Supponendo di avere una rete nello stato zero (vedi Figura 7), se ad un generico ingresso  $u_1(t)$  corrisponde una uscita  $y_1(t)$  e se, riportando il circuito nello stato zero, ad un ingresso  $u_2(t)$  diverso da  $u_1(t)$  corrisponde un'uscita  $y_2(t)$  diversa da  $y_1(t)$  allora, se ad un ingresso  $u(t)$  combinazione lineare dei due ingressi  $u(t) = \alpha \cdot u_1(t) + \beta \cdot u_2(t)$  corrisponde una uscita che è combinazione lineare dei due ingressi con i medesimi coefficienti moltiplicativi:  $y(t) = \alpha \cdot y_1(t) + \beta \cdot y_2(t)$ , e se vale questa proprietà qualunque variabile di uscita si consideri, si

dice che la rete è lineare e la risposta nello stato zero è lineare rispetto all'ingresso. Lo stato zero è una specificazione indispensabile.

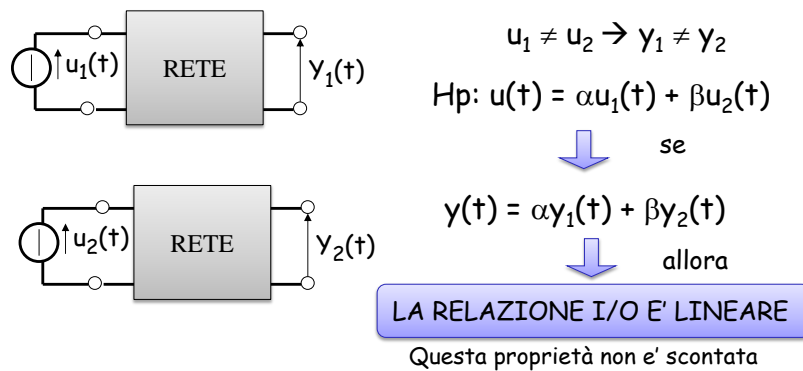


Figura 7. Proprietà di linearità

### Tempo-Invarianza

Per la stessa rete, se ad un ingresso  $u(t)$  corrisponde una uscita  $y(t)$  e se applichiamo lo stesso ingresso traslato temporalmente di un intervallo  $T$  e otteniamo una uscita che è la stessa  $y(t)$  ma traslata dello stesso intervallo  $T$  allora si dice che la rete è tempo invariante. In Figura 8 è mostrato un esempio di quanto sopra specificato.

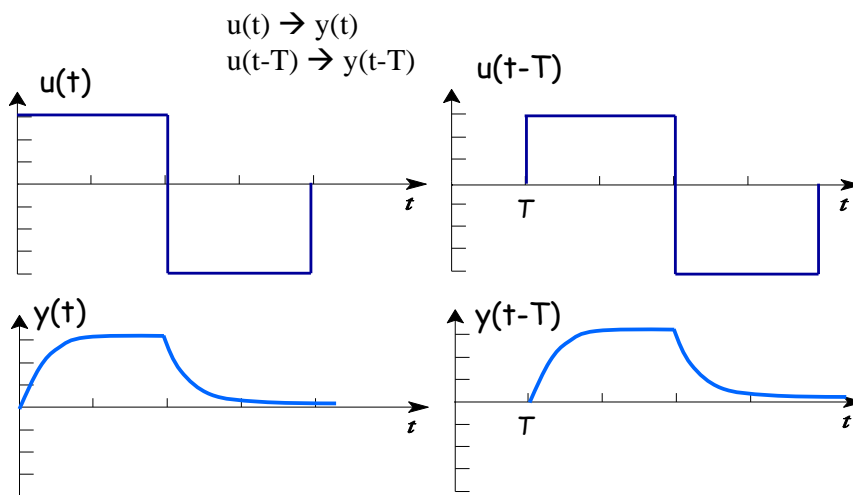


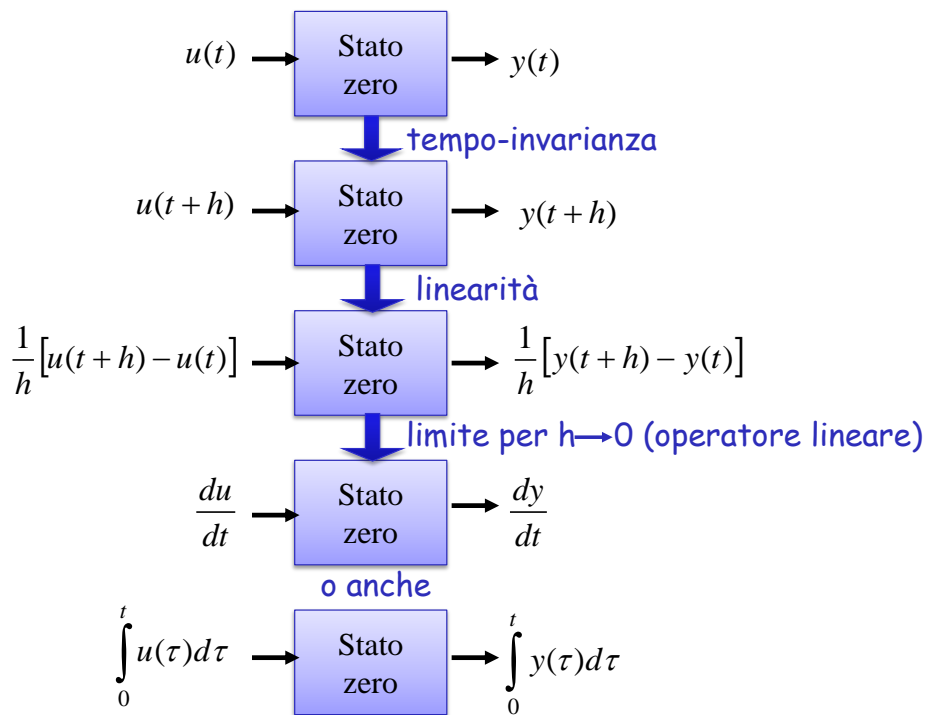
Figura 8. Proprietà di tempo-invarianza

Resistori, induttori, capacitori, mutue, sono componenti tempo-invarianti. Ci sono casi in cui la tempo-varianza è voluta, ad esempio un interruttore ideale (o tasto) si comporta da circuito aperto quando è aperto e da corto circuito quando è chiuso. Esso è l'unico componente tempo-variante preso in considerazione nel corso.

Dalle proprietà di linearità e tempo-invarianza discendono altre importanti proprietà. Si prenda in considerazione una rete lineare e tempo invariante, come in Figura 9, all'ingresso  $u(t)$  corrisponda un'uscita  $y(t)$ , allora, per la proprietà di tempo invarianza all'ingresso  $u(t+h)$  corrisponde un'uscita  $y(t+h)$ . Per la proprietà di linearità, ad una combinazione dei precedenti ingressi:  $\frac{1}{h}[u(t+h) - u(t)]$  corrisponderà la stessa combinazione delle precedenti uscite  $\frac{1}{h}[y(t+h) - y(t)]$ . Si calcoli il limite per  $h$  che tende a zero di entrambe l'ingresso e l'uscita. Poiché l'operatore limite è lineare, questo non altera le proprietà. Dal significato di questo limite vuol dire che, se applichiamo in ingresso la derivata di  $u(t)$  avremmo in uscita la derivata di  $y(t)$ . Analogamente, se applichiamo in ingresso l'integrale di  $u(t)$  avremmo in uscita l'integrale di  $y(t)$ .

Si vedrà che queste proprietà sono molto utili per determinare la risposta di un circuito nello stato zero a segnali lineari a tratti come onde quadre o a dente di sega.

E' importante che lo stato iniziale sia nullo altrimenti ci sarebbero delle costanti di integrazione che non renderebbero leciti questi passaggi.



**Figura 9.** Proprietà di una rete lineare tempo-invariante nello stato zero

## Equazioni differenziali ordinarie

Prima di vedere come le proprietà appena descritte possono essere utilizzate per l'analisi circuitale, generalizziamo quanto visto nell'esempio, ad un circuito di ordine  $n$  qualunque.

Per poter ricavare una qualunque risposta  $y(t)$  ad un assegnato ingresso  $u(t)$  dobbiamo fare delle ipotesi sullo stesso ingresso.

Condizioni per  $u(t)$ :

- esso deve essere identicamente nullo per  $t < t_0$  dove  $t_0$  è un istante di tempo al finito;
- in ogni istante deve assumere valori reali;
- in ogni istante deve essere specificato in modo non ambiguo.

Assunte queste condizioni, per un circuito di ordine  $n$  qualunque la scrittura delle equazioni del circuito (topologiche e dei componenti) e la soluzione di queste in funzione della variabile di uscita  $y(t)$  prescelta porterà alla determinazione della relazione I/O che sarà una equazione differenziale ordinaria di ordine  $n$ , pari all'ordine del circuito:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u \quad n \geq m$$

In questa relazione l'uscita compare insieme alle sue  $n$  derivate mentre l'ingresso compare insieme alle sue  $m$  derivate con  $n \geq m$ . I coefficienti  $a_i$  e  $b_j$  sono costanti e reali. La relazione I/O è quindi una equazione lineare, di ordine  $n$  in cui i coefficienti sono costanti e reali.

Di seguito sono riportate alcune regole operative per ricavare la soluzione di equazioni differenziali di questo tipo. Una famiglia di funzioni dipendente da un certo numero  $k$  di parametri si dice soluzione generale se contiene tutte le soluzioni dell'equazione differenziale. Chiamiamo integrale particolare di una equazione differenziale un singolo elemento scelto nella soluzione generale. In altri termini un integrale particolare è una soluzione dell'equazione che non dipende dai parametri. I vincoli che ci permettono di individuare un integrale particolare nella famiglia delle soluzioni si dicono condizioni iniziali se sono date in termini di un solo valore della variabile indipendente.

La soluzione può essere ottenuta sommando all'integrale generale dell'omogenea associata  $y_{oa}(t)$  un integrale particolare dell'equazione completa  $y_p(t)$ :

$$y(t) = y_{oa}(t) + y_p(t) \quad \text{per } t > t_0$$

### *Soluzione dell'omogenea associata*

L'omogenea associata si ottiene uguagliando a zero il primo membro dell'equazione completa. Per ricavare la soluzione dell'omogenea associata dobbiamo trovare le radici dell'equazione caratteristica:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

che è ottenuta costruendo un polinomio di grado  $n$  con i coefficienti dei termini di uguale ordine.

Trovate le radici dell'equazione caratteristica, la soluzione dell'omogenea associata si ottiene, per **radici reali e distinte**  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , come:

$$y_{oa}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}$$

dove  $C_1, \dots, C_n$  sono le costanti di integrazione da determinare, dopo aver sommato l'integrale particolare, applicando le  $n$  condizioni iniziali (si vedrà più avanti come determinare le condizioni iniziali). Le condizioni iniziali sono i valori della  $y$  e delle sue  $n - 1$  derivate calcolate nell'istante iniziale  $t_0^+$ .

L'integrale dell'omogenea associata assume forme differenti a seconda delle radici dell'equazione caratteristica. In particolare, come detto, se le  $n$  radici sono tutte reali e distinte l'integrale assume la forma già vista.

Se delle  $n$  radici,  $K$  sono reali coincidenti, i corrispondenti termini nell'integrale dell'omogenea associata sono:

$$y_{oa}(t) = e^{\lambda_k t} (C_1 + C_2 t + \dots + C_k t^{K-1})$$

Se sono presenti  $M$  coppie uguali di radici complesse coniugate  $a \pm jb$  i corrispondenti termini sono:

$$y_{oa}(t) = e^{at}[(A_1 + A_2t + \dots + A_M t^{M-1}) \cos(bt) + (B_1 + B_2t + \dots + B_M t^{M-1}) \sin(bt)]$$

Per una coppia di radici complesse coniugate il corrispondente termine sarà:

$$y_{oa}(t) = e^{at}[A \cos(bt) + B \sin(bt)]$$

Infine per una coppia di radice immaginarie pure  $\pm j b$  il corrispondente termine sarà:

$$y_{oa}(t) = [A \cos(bt) + B \sin(bt)]$$

### *Soluzione dell'integrale particolare*

In generale la ricerca dell'integrale particolare può non essere di facile approccio; ciò risulta, tuttavia, relativamente semplice per le classi più comuni di funzioni  $u(t)$ , comprendenti i segnali di alimentazione più frequenti nei problemi circuitali. In particolare:

- ingresso costante:  $u(t) = H = \text{costante} \Rightarrow y_p(t) = K = \text{costante}$ ;
- ingresso lineare:  $u(t) = A + Bt \Rightarrow y_p(t) = C + Dt$ ;
- ingresso esponenziale:  $u(t) = Ae^{\sigma t} \Rightarrow y_p(t) = Be^{\sigma t}$ ;
- ingresso sinusoidale:  $u(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \Rightarrow y_p(t) = C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)$ ;
- ingresso polinomiale:  $u(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0 \Rightarrow y_p(t) = b_n t^n + \dots + b_1 t + b_0$ ;
- ingresso cisoidale:  $u(t) = Ae^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow y_p(t) = Be^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta)$

Esamineremo nel seguito questi segnali dettagliatamente.

Nota l'andamento dell'integrale particolare si determinano i coefficienti imponendo che esso soddisfi la relazione I/O, cioè sostituendolo nella relazione I/O e imponendo l'uguaglianza dei coefficienti dei termini di uguale grado o i termini seno e coseno.

Una volta determinato l'integrale particolare lo si somma all'integrale dell'omogenea associata, dove ancora sono incognite le costanti di integrazione.

$$y(t) = y_{oa}(t) + y_p(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{t\lambda_i} + y_p(t)$$

L'applicazione delle condizioni iniziali per la  $y$  e per le sue  $n - 1$  derivate consente infine di determinare le costanti di integrazione:

$$y(0^+); \left. \frac{dy}{dt} \right|_{0^+}; \left. \frac{d^2y}{dt^2} \right|_{0^+} \dots \left. \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \right|_{0^+}$$

Come si vedrà più avanti, le condizioni iniziali si possono determinare a partire dallo stato del circuito in  $t = 0^+$ . L'applicazione delle condizioni iniziali per la  $y$  e per le sue  $n - 1$  derivate consente infine di determinare le costanti di integrazione.

### *Frequenze libere*

Come già visto facendo riferimento all'esempio 1, le radici dell'equazione caratteristica prendono il nome di frequenze libere. Hanno le dimensioni dell'inverso di un tempo, e sono indipendenti dall'ingresso. Le costanti di tempo del circuito sono gli inversi delle frequenze libere. Se tutte le frequenze libere sono a parte reale negativa dopo un tempo sufficientemente lungo i termini dell'integrale dell'omogenea associata si attenuano e l'uscita del circuito segue l'ingresso.

In Figura 10 sono riportate, nel piano di Gauss, le possibili tipologie di frequenze libere.

Se  $\Re\{\lambda_i\} < 0, \forall i$  la risposta libera converge a zero dopo un certo tempo. Per  $t \rightarrow \infty$  rimane la sola risposta forzata.

- Se  $\Re\{\lambda_i\} < 0, \forall i$  la rete si dice Assolutamente Stabile;
- Se  $\exists i \ni \Re\{\lambda_i\} = 0$  la rete si dice Semplicemente stabile
- Se  $\exists i \ni \Re\{\lambda_i\} > 0$  la rete è Instabile

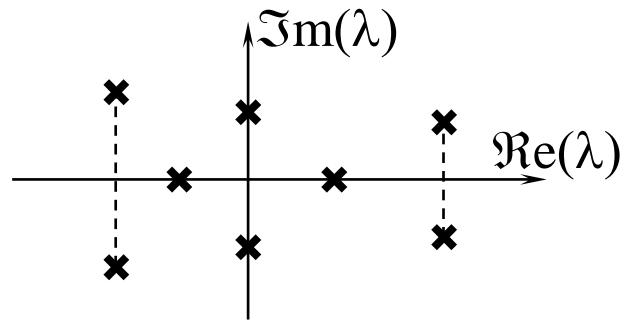


Figura 10. Varie tipologie di frequenze libere

### Esempio 2 Circuito del 2° ordine

Determinare  $v(t)$  e  $i(t)$  per  $t > 0$  per il circuito di Figura 11.

Siano:

$$e(t) = f(t) \cdot \delta_{-1}(t) \quad f(0^+) \neq 0$$

$$v(0^+) = 12; \quad i(0^+) = 0$$

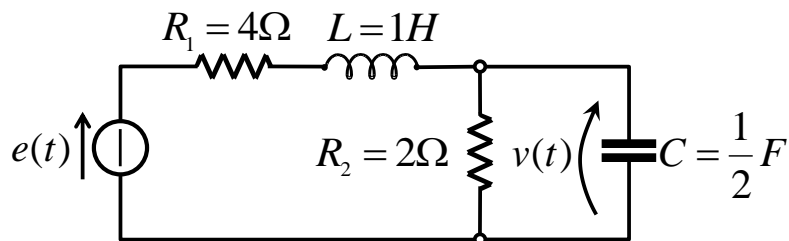


Figura 11. Circuito del secondo ordine

### Soluzione

Ricaviamo la relazione I/O per la variabile  $v(t)$ . Scrivendo le equazione del circuito sarà:

$$\begin{cases} i = \frac{v}{R_2} + C \frac{dv}{dt} & \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{1}{R_2} \frac{dv}{dt} + C \frac{d^2v}{dt^2} \\ e(t) = R_1 i + L \frac{di}{dt} + v \end{cases}$$

Sostituendo la prima nella seconda:

$$e(t) = R_1 \left[ \frac{v}{R_2} + C \frac{dv}{dt} \right] + L \left[ \frac{1}{R_2} \frac{dv}{dt} + C \frac{d^2v}{dt^2} \right] + v$$

$$e(t) = \frac{R_1}{R_2} v + \left( CR_1 + \frac{L}{R_2} \right) \frac{dv}{dt} + LC \frac{d^2v}{dt^2} + v$$

Riordinando otteniamo la relazione I/O per  $v(t)$ :

$$LC \frac{d^2v}{dt^2} + \left( CR_1 + \frac{L}{R_2} \right) \frac{dv}{dt} + \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) v = e(t)$$

Sostituendo i valori numerici:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{5}{2} \frac{dv}{dt} + 3v = e(t) \quad \rightarrow \quad \frac{d^2v}{dt^2} + 5 \frac{dv}{dt} + 6v = 2e(t)$$

L'equazione caratteristica è:

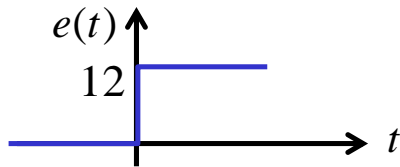
$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-5 \mp \sqrt{25 - 24}}{2} = \begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases}$$

L'omogenea associata è:

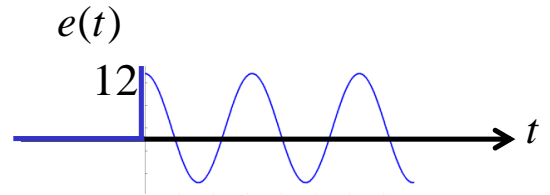
$$v_{oa}(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-2t}$$

Per trovare l'integrale particolare occorre conoscere l'ingresso. Nel seguito verranno considerati diversi casi corrispondenti a differenti ingressi.

Caso a)  $e(t) = E \cdot \delta_{-1}(t)$   $E = 12$



Caso b)  $e(t) = 12 \cos 2t \cdot \delta_{-1}(t)$



Caso a)  $e(t) = E \cdot \delta_{-1}(t)$   $E = 12$

$v_p(t) = k$

L'ingresso è costante e l'integrale particolare sarà una costante,  $k$ , che, sostituita nella relazione I/O, assume il seguente valore:

$$0 + 5 \cdot 0 + 6k = 2 \cdot 12 \Rightarrow k = 4$$

La risposta completa sarà:  $v(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-2t} + 4$

Le costanti di integrazione  $C_1$  e  $C_2$  si determinano note le condizioni iniziali  $v(0^+)$  e  $\frac{dv}{dt}|_{0^+}$

Sapendo che  $v(0^+) = 12$  ( in questo esempio è stato assegnato il valore della variabile di stato in  $t = 0^+$ , ma in generale, si supponrà noto lo stato in  $t = 0^-$ ), dalla prima delle  $\otimes$  si ottiene:

$$C \frac{dv}{dt} = -\frac{v}{R_2} + i \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{v}{R_2 C} + \frac{1}{C} i \Rightarrow \frac{dv}{dt} \Big|_{0^+} = -\frac{v(0^+)}{R_2 C} + \frac{1}{C} i(0^+) = -12$$

Applicando le condizioni iniziali alla soluzione completa si ottiene:

$$v(0^+) = 12 = C_1 + C_2 + 4 \Rightarrow C_1 + C_2 = 8$$

$$\frac{dv}{dt} = -3C_1 e^{-3t} - 2C_2 e^{-2t} \Rightarrow \frac{dv}{dt} \Big|_{0^+} = -3C_1 - 2C_2 = -12$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 8 \\ -3C_1 - 2C_2 = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2C_1 + 2C_2 = 16 \\ -3C_1 - 2C_2 = -12 \end{cases}$$

$$\underline{C_1 = 4} \qquad \Rightarrow C_1 = -4 \qquad \Rightarrow C_2 = 8 - C_1 = 8 + 4 = 12$$

$$v(t) = -4e^{-3t} + 12e^{-2t} + 4$$

L'andamento della risposta  $v(t)$  è riportato in Figura 12.

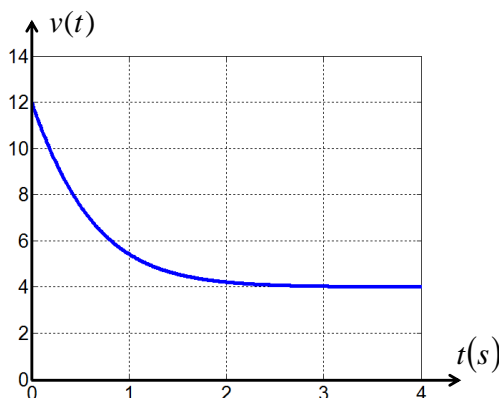


Figura 12. Andamento della risposta completa  $v(t)$  per il circuito in Figura 11 caso a).

Occorre calcolare anche la corrente  $i(t)$ . Dalla seconda delle  $\otimes$  si ottiene:

$$v = e(t) - R_1 i - L \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{de}{dt} - R_1 \frac{di}{dt} - L \frac{d^2 i}{dt^2}$$

Sostituendo nella prima delle  $\otimes$  si ottiene:

$$i = \frac{1}{R_2} \left( e(t) - R_1 i - L \frac{di}{dt} \right) + C \left( \frac{de}{dt} - R_1 \frac{di}{dt} - L \frac{d^2 i}{dt^2} \right)$$

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + \left( \frac{L}{R_2} + R_1 C \right) \frac{di}{dt} + \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) i = C \frac{de}{dt} + \frac{1}{R_2} e$$

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{5}{2} \frac{di}{dt} + 3i = \frac{1}{2} \frac{de}{dt} + \frac{1}{2} e$$

Relazione I/O:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 5 \frac{di}{dt} + 6i = \frac{de}{dt} + e$$

Equazione caratteristica:

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases}$$

$i_p(t) = H$  costante. Sostituendo nella Relazione I/O  $6H = 12 \quad \rightarrow H = 2$

$$i(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-2t} + 2$$

Le condizioni iniziali necessarie per determinare le costanti di integrazione sono  $i(0^+)$  e  $\left. \frac{di}{dt} \right|_{0^+}$

Abbiamo assunto di conoscere  $i(0^+) = 0$ . Per determinare la seconda condizione iniziale, dalla seconda delle  $\otimes$  calcolata in  $t = 0^+$  si ottiene:

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{0^+} = -\frac{1}{L} v - \frac{R_1}{L} i + \frac{1}{L} e = -v - 4i + e \Rightarrow \left. \frac{di}{dt} \right|_{0^+} = -12 - 0 + 12 = 0$$

Applichiamo le due condizioni iniziali:

$$i(0^+) = 0 = C_1 + C_2 + 2 \Rightarrow C_1 + C_2 = -2$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{0^+} = 0 = -3C_1 - 2C_2$$

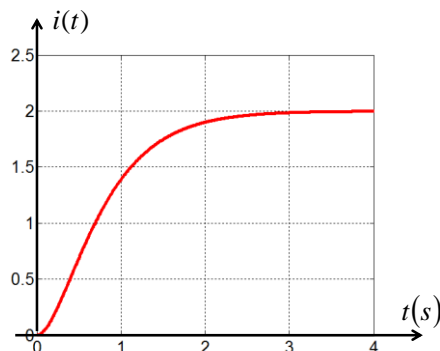
$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -2 \\ -3C_1 - 2C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2C_1 + 2C_2 = -4 \\ -3C_1 - 2C_2 = 0 \end{cases} \\ \underline{-C_1 = -4} \quad \Rightarrow C_1 = 4$$

$$C_2 = -2 - C_1 = -6$$

Sostituendo nella risposta  $i(t)$  si ottiene:

$$i(t) = 4e^{-3t} - 6e^{-2t} + 2$$

L'andamento della risposta  $v(t)$  è riportato in Figura 13.



**Figura 13.** Andamento della risposta completa  $i(t)$  per il circuito in Figura 11 caso a).

**Caso b)**  $e(t) = 12 \cos 2t \cdot \delta_{-1}(t)$

Le relazioni I/O per  $v(t)$  e  $i(t)$  sono quelle già determinate:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 5 \frac{dv}{dt} + 6v = 24 \cos 2t$$

L'integrale particolare sarà una sinusoide di uguale pulsazione del segnale in ingresso:

$$v_p(t) = M \cos 2t + N \sin 2t$$

$$\frac{dv_p}{dt} = -2M \sin 2t + 2N \cos 2t$$

$$\frac{dv_p^2}{dt^2} = -4M \cos 2t - 4N \sin 2t$$

Sostituendo nella relazione I/O si ottiene:

$$-4M \cos 2t - 4N \sin 2t + 5(-2M \sin 2t + 2N \cos 2t) + 6(M \cos 2t + N \sin 2t) = 24 \cos 2t$$

Da cui, eguagliando separatamente i coefficienti dei termini in coseno e seno, si ottiene:

$$\begin{cases} -4M + 10N + 6M = 24 \\ -4N - 10M + 6N = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2M + 10N = 24 \\ 10M + 2N = 0 \rightarrow N = 5M \end{cases}$$

$$2M + 50M = 24 \rightarrow M = \frac{6}{13} \quad \text{e} \quad N = \frac{30}{13}$$

$$v_p(t) = \frac{6}{13} \cos 2t + \frac{30}{13} \sin 2t = 0,4615 \cos 2t + 2,308 \sin 2t = 2,354 \cos(2t - 78,69^\circ)$$

La risposta completa è:

$$v(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-2t} + 2,354 \cos(2t - 78,69^\circ)$$

Le condizioni iniziali sono le stesse calcolate precedentemente in quanto non dipendono dall'ingresso:

$$v(0^+) = 12; \quad \left. \frac{dv}{dt} \right|_{0^+} = -12$$

$$v(0^+) = 12 = C_1 + C_2 + 0,4616 \Rightarrow C_1 + C_2 = 11,538$$

$$\frac{dv}{dt} = -3C_1 e^{-3t} - 2C_2 e^{-2t} - 2 \cdot 0,4615 \sin 2t + 2 \cdot 2,308 \cos 2t$$

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{0^+} = -3C_1 - 2C_2 + 4,616 = -12 \Rightarrow -3C_1 - 2C_2 = -16,616$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 11,538 \\ 3C_1 + 2C_2 = 16,616 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2C_1 + 2C_2 = 23,076 \\ 3C_1 + 2C_2 = 16,616 \end{cases}$$

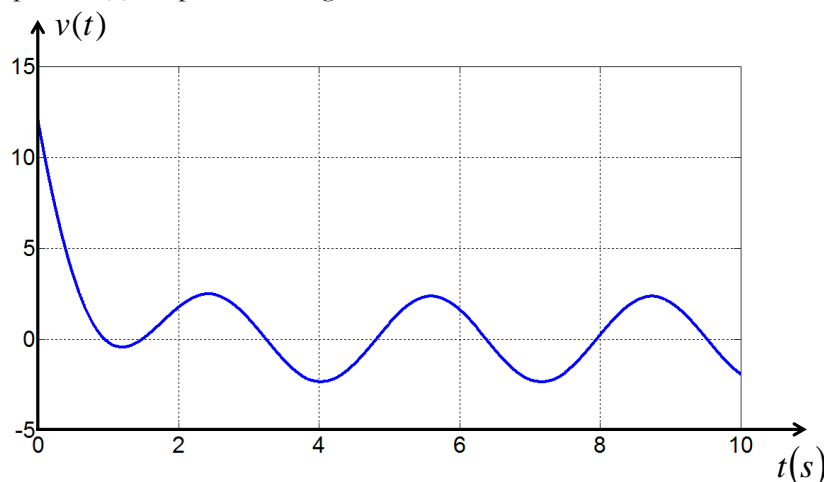
$$\underline{-C_1 = 6,46}$$

$$\Rightarrow C_1 = -6,46$$

$$C_2 = 11,538 + 6,46 = 18$$

$$v(t) = -6,46e^{-3t} + 18e^{-2t} + 2,354 \cos(2t - 78,69^\circ)$$

L'andamento della risposta  $v(t)$  è riportato in Figura 14.



**Figura 14.** Andamento della risposta completa  $v(t)$  per il circuito in Figura 11 caso b).

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 5\frac{di}{dt} + 6i = -24\sin 2t + 12\cos 2t \quad \left\{ \begin{array}{l} i_p(t) = H \cos 2t + K \sin 2t \\ \frac{di_p}{dt} = -2H \sin 2t + 2K \cos 2t \\ \frac{d^2i_p}{dt^2} = -4H \cos 2t - 4K \sin 2t \end{array} \right.$$

Sostituendo nella relazione I/O:

$$-4H \cos 2t - 4K \sin 2t + 5(-2H \sin 2t + 2K \cos 2t) + 6(H \cos 2t + K \sin 2t) = -24 \sin 2t + 12 \cos 2t$$

Da cui, eguagliando separatamente i coefficienti dei termini in coseno e seno, si ottiene:

$$\begin{cases} -4H + 10K + 6H = 12 \\ -4K - 10H + 6K = -24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2H + 10K = 12 \\ -10H + 2K = -24 \end{cases}$$

$$H = 2,5385 \quad K = 0,6923$$

$$i_p(t) = 2,5385 \cos 2t + 0,6923 \sin 2t = 2,63 \cos(2t - 15,25^\circ)$$

La risposta completa è:

$$i(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-2t} + 2,63 \cos(2t - 15,25^\circ)$$

Le condizioni iniziali sono le medesime del caso a) perché nell'istante  $0^+$   $e(t) = 12$  in entrambi i casi.

$$i(0^+) = 0$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{0^+} = 0$$

$$i(0^+) = 0 = C_1 + C_2 + 2,5385 \Rightarrow C_1 + C_2 = -2,5385$$

$$\frac{di}{dt} = -3C_1 e^{-3t} - 2C_2 e^{-2t} - 2 \cdot 2,5385 \sin 2t + 2 \cdot 0,6923 \cos 2t$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{0^+} = -3C_1 - 2C_2 + 1,3846 = 0 \Rightarrow -3C_1 - 2C_2 = -1,3846$$

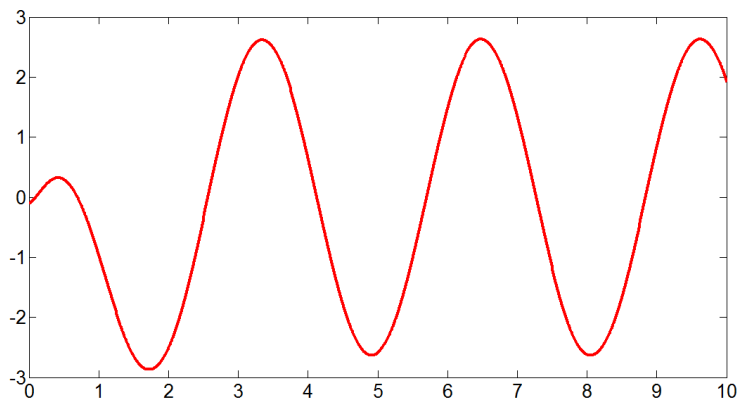
$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -2,5385 \\ 3C_1 + 2C_2 = 1,3846 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2C_1 + 2C_2 = -5,077 \\ 3C_1 + 2C_2 = 1,3846 \end{cases}$$

$$\underline{-C_1 = -6,46} \quad \Rightarrow C_1 = 6,46$$

$$C_2 = -2,54 - 6,46 = -9$$

$$i(t) = 6,462e^{-3t} - 9e^{-2t} + 2,6312 \cos(2t - 15,25^\circ)$$

L'andamento della risposta  $i(t)$  è riportato in Figura 15.



**Figura 15.** Andamento della risposta completa  $i(t)$  per il circuito in Figura 11 caso b).

□

## Segnali elettrici

Come si è già detto, non esiste un metodo generalizzabile per ricavare l'integrale particolare. In particolare, per i circuiti elettrici, è importante introdurre le funzioni singolari elementari per spiegare il comportamento di un circuito a seguito di una perturbazione generata dall'applicazione istantanea di un generatore indipendente di tensione o di corrente.

Le funzioni singolari elementari sono funzioni che presentano discontinuità o con derivate discontinue. Le funzioni elementari singolari più usate nell'analisi dei circuiti sono il gradino unitario, la rampa unitaria e l'impulso unitario.

### Gradino unitario

La funzione gradino unitario, indicata con  $\delta_{-1}(t)$  (o  $u(t)$ ), è una funzione identicamente nulla per  $t < 0$  e vale 1 per  $t > 0$ . Essa non è definita nell'istante  $t=0$  dove cambia istantaneamente valore. Dal punto di vista fisico corrisponde all'applicazione di un generatore di valore unitario all'istante  $t = 0$  ad esempio mediante la chiusura di un interruttore, come in Figura 16.

### Ingresso a Gradino Unitario $\rightarrow \delta_{-1}$

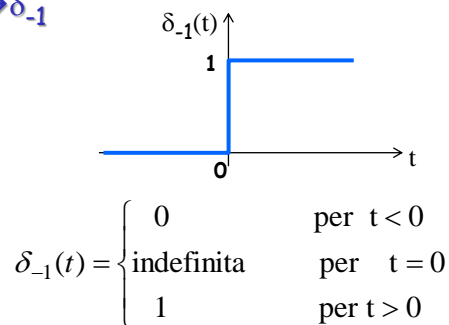
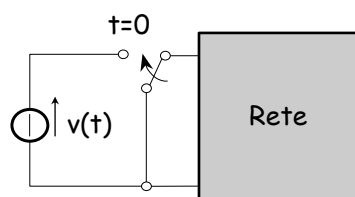


Figura 16. Funzione gradino unitario

Il tasto viene chiuso all'istante  $t = 0$ . Quindi per  $t < 0$  il circuito ha una alimentazione nulla per  $t > 0$  è alimentato da una tensione costante unitaria.

Se moltiplichiamo una funzione continua nel tempo  $v(t)$  per  $\delta_{-1}(t)$  consente di rappresentare quello che avviene in un circuito in seguito alla chiusura del tasto su un generatore di tensione di andamento  $v(t)$ . Quindi consente di considerare tale funzione identicamente nulla per  $t < 0$ .

Se il tasto è chiuso per  $t < 0$  e si apre in  $t = 0$  la funzione, indicata con  $\delta_{-1}(-t)$  o come  $u(-t)$  ed è quella riportata in Figura 17.

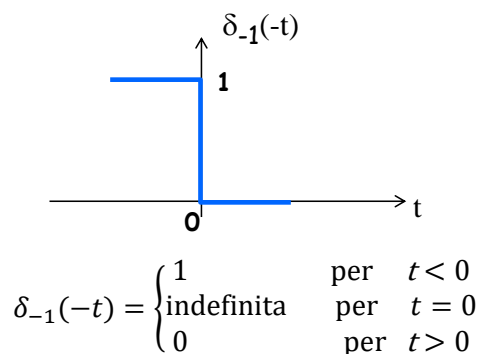
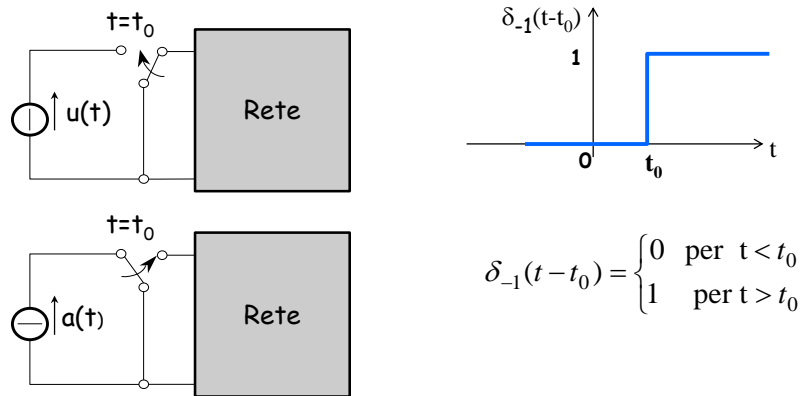


Figura 17. Funzione  $\delta_{-1}(-t)$

Se la variazione istantanea avviene all'istante  $t = t_0$  la funzione a gradino ha la forma della Figura 18. Questo equivale a chiudere il tasto all'istante  $t = t_0$  anziché all'istante  $t = 0$ .

Per non creare collegamenti fisicamente non realizzabili, i tasti che consentono di collegare al circuito un generatore di tensione o un generatore di corrente sono collegati come nella Figura 18. In alto il generatore di tensione ed in basso quello di corrente.

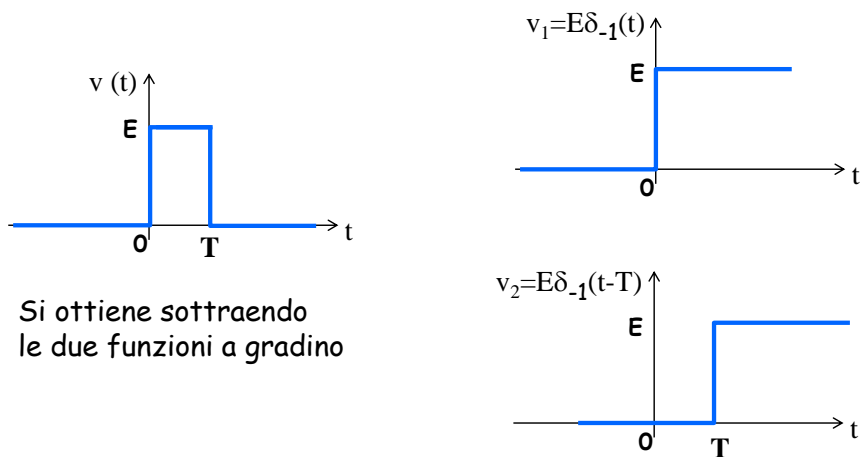


**Figura 18.** Funzione gradino unitario traslata in  $t = t_0$

### Ingresso rettangolare

Sfruttando la linearità e tempo invarianza dei circuiti presi in considerazione, possiamo anche realizzare un ingresso rettangolare come quello in Figura 19 chiudendo il tasto sul generatore all'istante zero e riaprendolo all'istante  $T$ . Matematicamente questo equivale a fare la sottrazione, istante per istante, tra un gradino di ampiezza  $E$  ed un gradino di uguale ampiezza traslato di  $T$ . L'uscita relativa all'ingresso rettangolare si otterrà sottraendo l'uscita relativa ai due ingressi a gradino nella medesima Figura 19.

### Ingresso rettangolare



**Figura 19.** Realizzazione di un ingresso rettangolare

### Esempio 1 (Continua)

Riprendiamo il circuito in Figura 1 e supponiamo di alimentarlo con un segnale rettangolare come quello in Figura 19. Abbiamo già calcolato la risposta  $v_{c1}(t)$  ad un ingresso costituito da un gradino nell'origine e di ampiezza  $E$  come quello in Figura 19 in alto a destra:

$$v_{c1}(t) = \frac{ER_1}{R_1 + R_2} \left( 1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t} \right) \delta_{-1}(t) \quad \text{per } u_1(t) = E\delta_{-1}(t)$$

Il suo grafico è riportato in Figura 20 (sinistra).

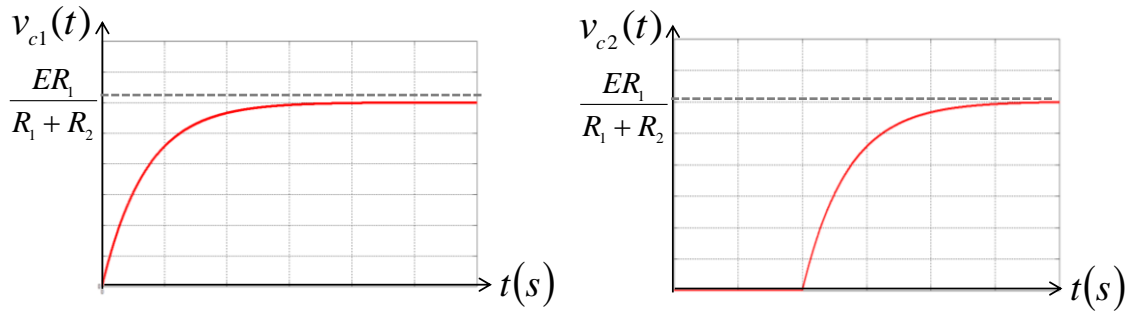
Per la proprietà di tempo-invarianza, la risposta ad un segnale costituito da un gradino traslato di  $T$  e di ampiezza  $E$ , come quello in Figura 19 in basso a destra, sarà pari alla risposta  $v_{c1}(t - T)$ , cioè la risposta  $v_{c1}(t)$  traslata di  $T$ :

$$v_{c2}(t) = \frac{ER_1}{R_1 + R_2} \left( 1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} (t-T)} \right) \delta_{-1}(t - T) \quad \text{per } u_2(t) = E\delta_{-1}(t - T)$$

Il cui grafico è riportato in Figura 20 (destra).

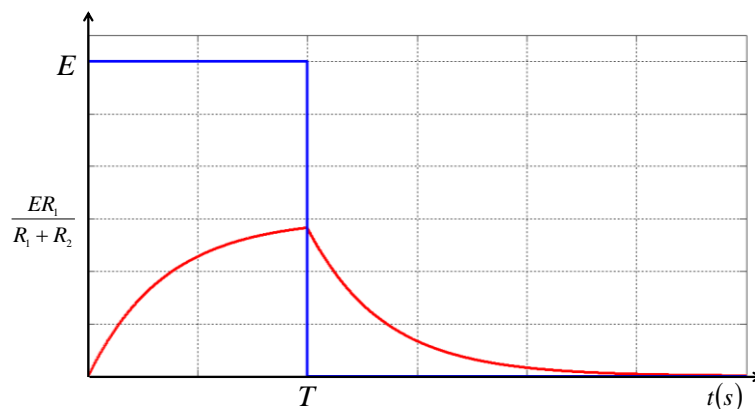
Per la proprietà di linearità, la risposta al segnale rettangolare di Figura 19 a sinistra, sarà la differenza delle due risposte:

$$v_c(t) = v_{c1}(t) - v_{c2}(t) = \frac{ER_1}{R_1 + R_2} \left[ \left(1 - e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t}\right) \delta_{-1}(t) - \left(1 - e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}(t-T)}\right) \delta_{-1}(t-T) \right]$$



**Figura 20.** Risposte ai segnali  $u_1(t) = E\delta_{-1}(t)$  (sinistra) e  $u_2(t) = E\delta_{-1}(t - T)$  (destra).

Il grafico della risposta  $v_c(t) = v_{c1} - v_{c2}$  è riportato in Figura 21.



**Figura 21.** Grafici della  $u(t)$  (in blu) e della  $v_c(t)$  (in rosso).

□

### Impulso unitario

La derivata della funzione gradino unitario è la funzione impulso unitario  $\delta_0(t)$  o  $\delta(t)$  o, più precisamente, distribuzione impulsiva unitaria di Dirac. Essa vale zero ovunque tranne in  $t = 0$  dove è indefinita:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} \delta_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ \text{indefinita} & \text{per } t = 0 \\ 0 & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

Essa può essere definita anche attraverso la seguente proprietà matematica:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^T \delta(\tau) d\tau = 0 & \text{per } T < 0 \\ \int_{-\infty}^T \delta(\tau) d\tau = 1 & \text{per } T > 0 \end{cases}$$

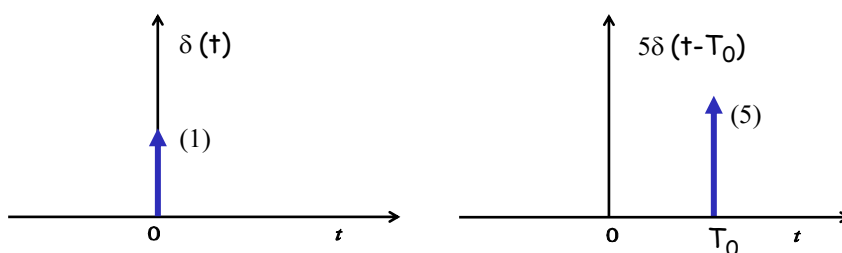
Deve essere pensata come una funzione di area unitaria, durata nulla, ampiezza infinita nel punto in cui esiste. La funzione impulsiva non può essere realizzata ma solo approssimata.

Inoltre, per ogni funzione continua  $f(t)$  si ha che:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^T \delta(\tau) \cdot f(\tau) d\tau = 0 & \text{per } T < 0 \\ \int_{-\infty}^T \delta(\tau) \cdot f(\tau) d\tau = f(0) & \text{per } T > 0 \end{cases}$$

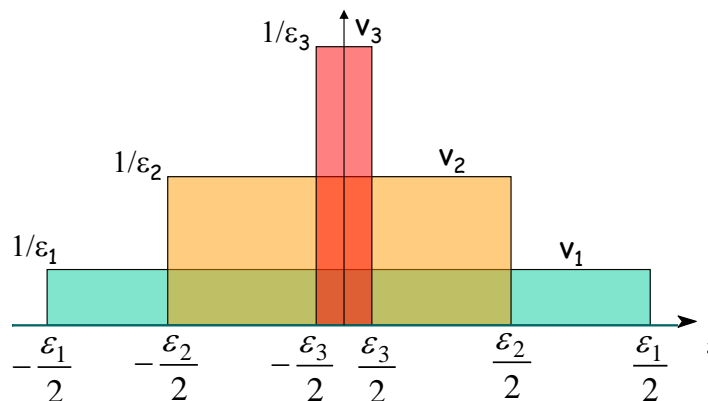
Questo significa che, integrando il prodotto di una qualsiasi funzione continua per la funzione impulso, si ottiene il valore della funzione nel punto in cui è presente l'impulso, cioè in questo caso  $f(0)$ .

Per rappresentare un impulso si utilizza una freccia, come nella Figura 22. A destra è rappresentato un impulso unitario nell'origine, mentre a sinistra un impulso di intensità (cioè area) pari a 5 traslato in  $T_0$ .



**Figura 22.** Rappresentazione di un impulso di area 1 nell'origine (sinistra) e di un impulso di area 5 in  $T_0$  (destra).

Questo segnale può anche essere immaginato come un segnale ad onda rettangolare di durata molto breve (infinitesima) ampiezza molto grande (infinita), ma di area unitaria. Se immaginiamo una serie di funzioni rettangolari di durata via via decrescente  $\epsilon_i$  e ampiezza via via crescente a parità di area unitaria, il limite per  $n$  di questa serie di funzioni è proprio l'impulso di Dirac (Figura 23).



$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t) = \delta(t)$$

**Figura 23.** Serie di funzioni rettangolari.

Compensazione (o identificazione) degli impulsi:

- Se è assegnata un'eguaglianza  $\varphi(t) = \psi(t)$  e  $\psi(t)$  presenta, in  $t = t_0$ , un impulso di ordine non negativo  $A \cdot \delta^k(t - t_0)$ , l'uguaglianza con  $\varphi(t)$  può essere verificata solo se, in  $t = t_0$ , anche  $\varphi(t)$  presenta un impulso dello stesso ordine e con uguale costante moltiplicativa.
- Se l'ordine massimo di derivazione che compare a secondo membro della relazione I/O ( $m$ ) è maggiore dell'ordine massimo al primo membro ( $n$ ), allora l'uscita è più impulsiva dell'ingresso.

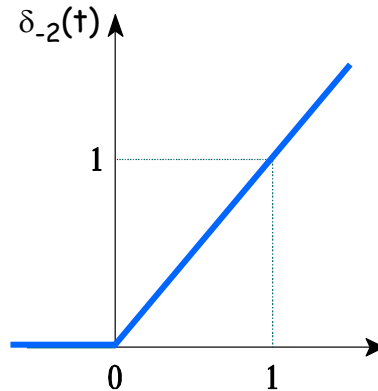
- L'ordine più elevato d'impulso nella risposta è uguale all'ordine più elevato d'impulso all'ingresso aumentato di  $(m - n)$ .

*Ingresso a rampa*

Integrando la funzione gradino unitario si ottiene la funzione rampa unitaria, indicata con  $\delta_{-2}(t)$ , che si scrive anche come:

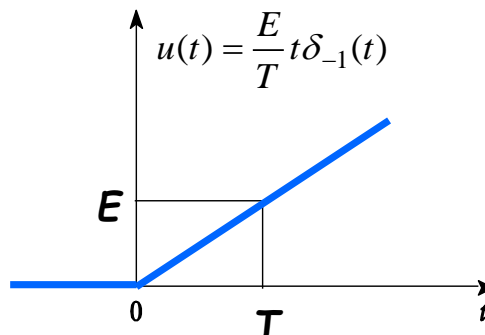
$$\delta_{-2}(t) = \int_{-\infty}^t \delta_{-1}(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ \int_0^t 1 \cdot d\tau & \text{per } t > 0 \end{cases} = t\delta_{-1}(t)$$

In Figura 24 è riportato l'andamento della funzione rampa unitaria.



**Figura 24.** Rampa unitaria

La rampa unitaria è identicamente nulla per  $t < 0$  e ha una pendenza unitaria per  $t > 0$ . Se si vuole realizzare una rampa di pendenza diversa basterà moltiplicare la rampa unitaria per il coefficiente angolare della retta che si vuole realizzare. In Figura 25 è riportata una rampa di coefficiente angolare  $E/T$ .



**Figura 25.** Rampa di pendenza  $E/T$

Riassumendo il gradino unitario è l'integrale dell'impulso, la rampa è l'integrale del gradino.

Utilizzando le proprietà della risposta nello stato zero, nota la risposta relativa ad un ingresso a gradino si può quindi calcolare la risposta ad un ingresso a rampa integrando opportunamente la precedente risposta.

### **Esempio 1** (Continua)

Verifichiamo quanto appena detto facendo riferimento al circuito dell'esempio 1 già analizzato in precedenza. Abbiamo trovato a suo tempo che, se la tensione di alimentazione è un segnale a gradino nell'origine di ampiezza  $E$ , la risposta

$$v_c(t) = \frac{ER_1}{R_1 + R_2} \left( 1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t} \right) \delta_{-1}(t) \quad \text{per } u_1(t) = E\delta_{-1}(t)$$

Per ottenere la risposta al gradino unitario è sufficiente dividere  $v_c(t)$  per  $E$  ottenendo una risposta

$$v'_c(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left( 1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t} \right) \delta_{-1}(t) \quad \text{per } u(t) = 1\delta_{-1}(t)$$

Se vogliamo calcolare la risposta  $v_c$  del circuito ad una rampa unitaria è sufficiente, come detto, integrare la risposta  $v'_c(t)$  al gradino unitario, da cui:

$$\text{Se } u(t) = \delta_{-2}(t) \Rightarrow v'_c(t) = \int_{-\infty}^t \frac{R_1}{R_1 + R_2} (1 - e^{\lambda\tau}) \delta_{-1}(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ \int_0^t \frac{R_1}{R_1 + R_2} (1 - e^{\lambda\tau}) d\tau & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{per } t > 0 \quad v'_c(t) &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} \int_0^t (1 - e^{\lambda\tau}) d\tau = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left[ \tau - \frac{1}{\lambda} e^{\lambda\tau} \right]_0^t = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left[ t - \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} + \frac{1}{\lambda} \right] \\ &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left[ t + \frac{1}{\lambda} (1 - e^{\lambda t}) \right] \end{aligned}$$

$$\text{Se } u(t) = \frac{E}{T} t \delta_{-1}(t) \Rightarrow v'_c(t) = \frac{E}{T} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left[ t + \frac{1}{\lambda} (1 - e^{\lambda t}) \right] \delta_{-1}(t)$$

Verifichiamolo:

Per verificare questo risultato partiamo di nuovo dalla relazione I/O già ottenuta:

$$u(t) = R_2 C \frac{dv_c}{dt} + \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) v_c$$

e integriamola. La frequenza libera rimane invariata:

$$v_c(t) = A e^{\lambda t} + v_{cp}$$

Calcoliamo l'integrale particolare. Se l'ingresso è lineare l'integrale particolare sarà una retta:

$$v_{cp} = M t + N$$

Deriviamola e sostituiamo nella relazione I/O:

$$\frac{dv_{cp}}{dt} = M \quad \rightarrow \quad R_2 C M + \frac{R_1 + R_2}{R_1} (M t + N) = \frac{E}{T} t$$

Uguagliando i coefficienti dei termini di pari grado otteniamo il seguente sistema che, risolto fornisce i valori dei coefficienti  $M$  ed  $N$ :

$$\begin{cases} R_2 C M + \frac{R_1 + R_2}{R_1} N = 0 \\ \frac{R_1 + R_2}{R_1} M = \frac{E}{T} \end{cases} \Rightarrow M = \frac{E}{T} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$-R_2 C M \frac{R_1}{R_1 + R_2} = N \Rightarrow N = -\frac{R_1 R_2 C E}{R_1 + R_2} \frac{R_1}{T R_1 + R_2} = \frac{E}{\lambda T} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Da cui, sostituendo nella risposta:

$$v_c(t) = A e^{\lambda t} + \frac{E}{T} \frac{R_1}{R_1 + R_2} t + \frac{E}{\lambda T} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Per ricavare la costante di integrazione  $A$  applichiamo la condizione iniziale

$$\text{per } t = 0^+ : v_c(0^+) = 0$$

da cui:

$$0 = A + \frac{E}{\lambda T} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \Rightarrow A = -\frac{E}{\lambda T} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Sostituendo la costante di integrazione  $A$  nella risposta, si ottiene:

$$v_c(t) = \frac{E}{T} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left[ t + \frac{1}{\lambda} (1 - e^{\lambda t}) \right] \delta_{-1}(t)$$

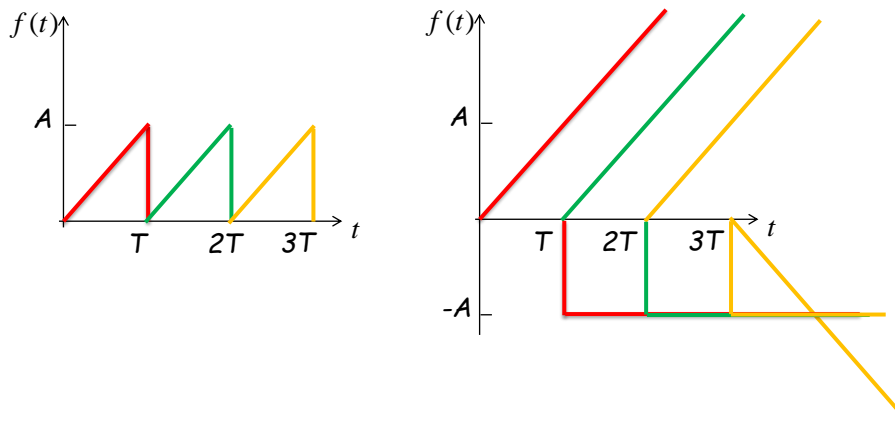
che è proprio quella già trovata semplicemente integrando la risposta al gradino.

□

E' interessante notare che, nota la risposta del circuito al gradino e ricavata per integrazione la risposta alla rampa, possiamo ricavare la risposta a qualunque ingresso lineare a tratti. Infatti, un qualunque ingresso lineare a tratti può essere rappresentato come una combinazione lineare di gradini e di rampe.

Per esempio, la funzione  $f(t)$ , rappresentata in Figura 26 a sinistra, cioè una sequenza di denti di sega, può essere ottenuta combinando linearmente gradini e rampe come nella Figura 26 a destra. La rappresentazione analitica è:

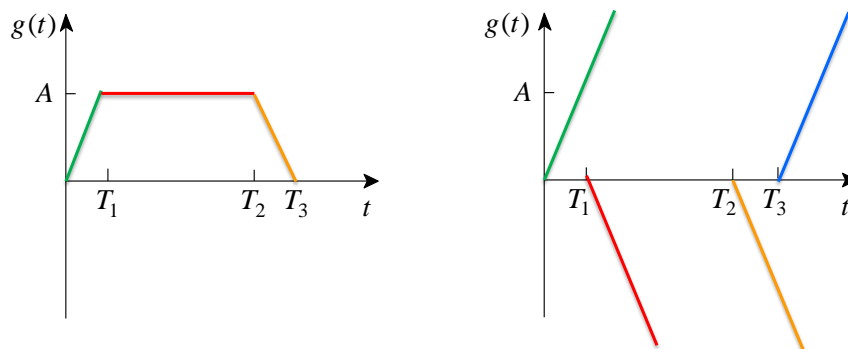
$$f(t) = \frac{A}{T}t\delta_{-1}(t) - A\delta_{-1}(t - T) - A\delta_{-1}(t - 2T) - A\delta_{-1}(t - 3T) - \frac{A}{T}(t - 3T)\delta_{-1}(t - 3T)$$



**Figura 26.** Segnale a dente di sega (sinistra) e sua decomposizione in termini di gradini e rampe (destra).

Come ulteriore esempio consideriamo la funzione  $g(t)$  rappresentata in Figura 27. Si tratta di un segnale lineare a tratti che può essere ottenuto ancora combinando linearmente rampe come nella Figura 27 a destra. La rappresentazione analitica è:

$$g(t) = \frac{A}{T_1}t\delta_{-1}(t) - \frac{A}{T_1}(t - T_1)\delta_{-1}(t - T_1) - \frac{A}{T_3 - T_2}(t - T_2)\delta_{-1}(t - T_2) + \frac{A}{T_3 - T_2}(t - T_3)\delta_{-1}(t - T_3)$$



**Figura 27.** Segnale lineare a tratti (sinistra) e sua decomposizione in termini di gradini e rampe (destra).

Generalizzando, qualunque funzione lineare a tratti può essere decomposta in gradini e rampe e si può scrivere in forma generale come:

$$u(t) = \sum_i G_i \cdot \delta_{-1}(t - t_i) + \sum_j R_j \cdot \delta_{-2}(t - t_j)$$

Per la linearità e tempo invarianza della relazione I/O la risposta all'ingresso  $u(t)$  può essere ottenuta come somma delle risposte a ciascuno dei termini delle sommatorie a secondo membro. Allora se  $h(t)$  e' la risposta all'impulso e  $k(t)$  ed  $e(t)$  sono rispettivamente la risposta al gradino e la risposta alla rampa:

$$k(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau)d\tau; \quad e(t) = \int_{-\infty}^t k(\tau)d\tau$$

L'uscita  $y(t)$  all'ingresso  $u(t)$  sarà:

$$y(t) = \sum_i G_i \cdot k(t - t_i) + \sum_j R_j \cdot e(t - t_j)$$

### Ingresso Cisoidale

Oltre ai segnali precedentemente discussi, è utile introdurre un ulteriore segnale, molto diffuso nei circuiti, il segnale cisoidale. Si tratta di un segnale generalizzato della forma:

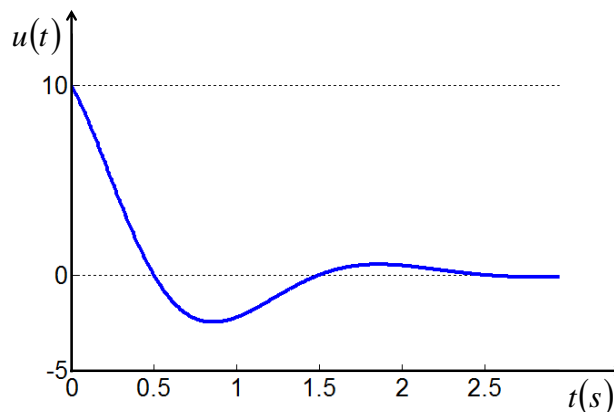
$$u(t) = U e^{\sigma t} \cos(\omega t + \varphi) \delta_{-1}(t) \quad U > 0$$

Dove  $U > 0$  è l'ampiezza massima della cisoide,  $\sigma$  è lo smorzamento,  $\omega$  è la pulsazione e  $\varphi$  lo sfasamento iniziale. Si tratta di un segnale che, a seconda del valore dei parametri, può assumere diverse forme:

- a)  $\sigma = 0; \omega = 0 \Rightarrow u(t) = U \cos \varphi \delta_{-1}(t)$  Gradino
- b)  $\sigma = 0; \omega \neq 0 \Rightarrow u(t) = U \cos(\omega t + \varphi) \delta_{-1}(t)$  Sinusoide
- c)  $\sigma < 0; \omega = 0 \Rightarrow u(t) = U e^{\sigma t} \cos \varphi \delta_{-1}(t)$  Esponenziale decrescente
- d)  $\sigma < 0; \omega \neq 0 \Rightarrow u(t) = U e^{\sigma t} \cos(\omega t + \varphi) \delta_{-1}(t)$  Oscillatorio smorzato

Il caso di  $\sigma > 0$  non viene incluso in quanto i segnali di interesse devono essere limitati.

In Figura 28 è mostrato un esempio di segnale cisoidale ( $U = 10, \omega = \pi, \sigma = -1,5$ ). La risposta di un circuito ad segnale oscillatorio smorzato sarà una cisoide di pari smorzamento e pari pulsazione.



**Figura 28.** Esempio di segnale cisoidale ( $U = 10, \omega = \pi, \sigma = -1,5$ )

### Segnali periodici

Un'altra importante categoria di segnali, molto diffusa in ambito circuitale, è costituita dai segnali periodici. Per analizzare un circuito con ingressi periodici si può fare sempre ricorso allo sviluppo in serie di Fourier. Come è noto, un segnale periodico può essere rappresentato come una somma di infiniti termini di pulsazione via via più elevata e ampiezza via via più bassa. La Forma reale della serie di Fourier di un generico segnale periodico è:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

con:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Si ha una prima componente continua (a pulsazione nulla) e infinite armoniche a pulsazione  $\omega$  e multipli di  $\omega$ . Man mano che cresce l'ordine dell'armonica decresce l'ampiezza della stessa consentendo di troncare lo sviluppo ad un termine prescelto in funzione della precisione con cui vogliamo approssimare la funzione di origine.

Esiste anche la Forma complessa dello serie di Fourier. Essa si ricava dall'applicazione della formula di Eulero alla precedente forma

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}); \quad \sin x = \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx})$$

portando alla seguente espressione:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}$$

con:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

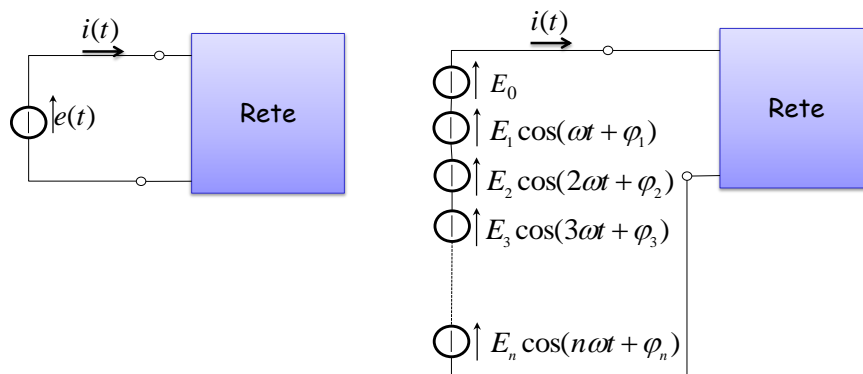
$$c_0 = \frac{a_0}{2}; \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) = c_n^* \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Il vantaggio di sviluppare il segnale periodico in serie di Fourier risiede nel fatto che, sempre sfruttando le proprietà della risposta nello stato zero, una volta determinate la risposta alla componente continua e alla componente sinusoidale di prima armonica, le altre possono essere ricavate facilmente scalando i coefficienti delle componenti armoniche e le relative pulsazioni.

Se il circuito è alimentato, ad esempio, con un generatore di tensione periodico di pulsazione  $\omega$ , come nella Figura 29 a sinistra, si può approssimare il segnale periodico con  $n$  termini dello sviluppo in serie di Fourier, con  $n$  grande abbastanza. Il circuito da analizzare è quello riportato nella Figura 29 a destra che approssima la tensione  $e(t)$  con una serie di generatori di tensione sinusoidali di pulsazione via via crescente. Si noti che la componente continua può essere considerata come un generatore sinusoidale di pulsazione nulla.

Se il generatore periodico fosse di corrente anziché di tensione, dovremmo mettere in parallelo i generatori sinusoidali.

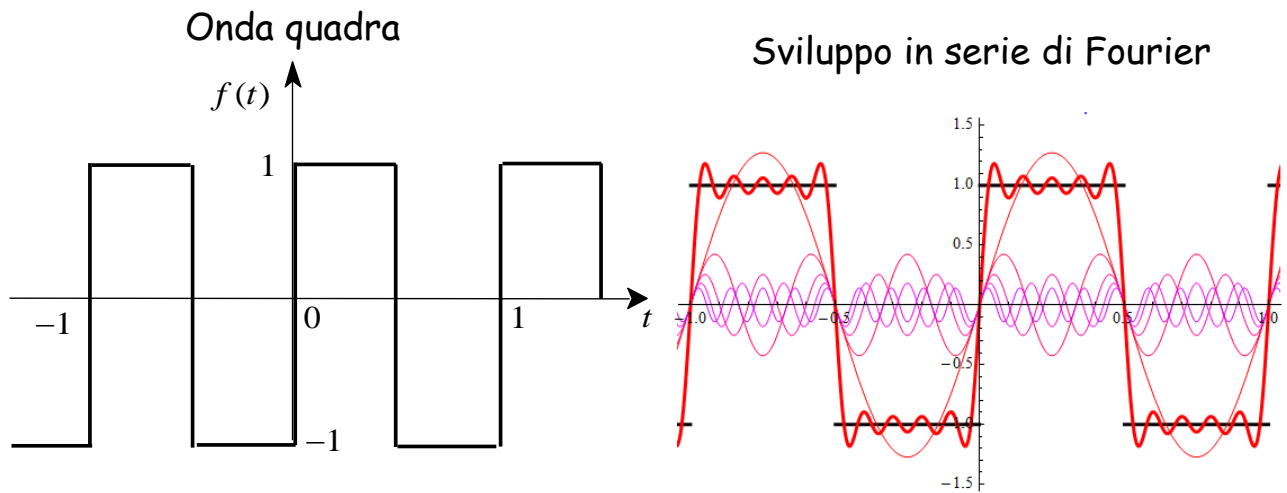


**Figura 29.** Rete lineare eccitata con un generatore di tensione periodica (sinistra) e stessa rete lineare eccitata con una serie di generatori di tensione sinusoidali (destra): approssimazione del circuito di sinistra

In Figura 30 è riportato lo sviluppo in serie di Fourier di segnale periodico ad onda quadra (a sinistra). Si noti che si tratta di un segnale dispari ed a valor medio nullo, quindi sono assenti la componente continua e sono nulli tutti i coefficienti dei termini in coseno. Lo sviluppo in serie di Fourier è il seguente:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2i+1)} \sin(2i+1)\omega t$$

Nella Figura 30, a destra, è riportato il segnale originario, in grigio, una serie di componenti armoniche, in fucsia, e il segnale risultante, in rosso. Man mano che si aggiungono armoniche il segnale approssima sempre meglio l'onda quadra di partenza.



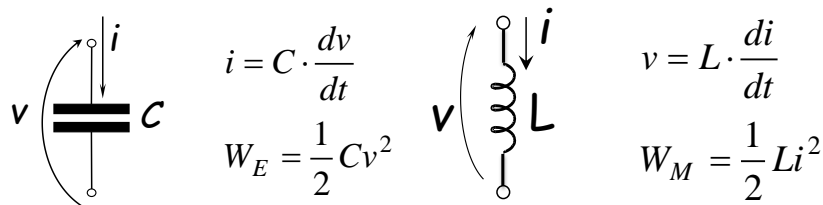
**Figura 30.** Segnale ad onda quadra (sinistra) e il suo sviluppo in serie di Fourier

## Calcolo delle condizioni iniziali

Fin qui abbiamo ipotizzato di conoscere le condizioni iniziali per la variabile di uscita  $y$  all'istante  $t = 0^+$ , cioè:

$$y(0^+); \left. \frac{dy}{dt} \right|_{0^+}; \left. \frac{d^2y}{dt^2} \right|_{0^+} \dots \left. \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \right|_{0^+}$$

In realtà ciò che possiamo ipotizzare noto, o che possiamo facilmente calcolare, è lo stato del circuito nell'istante  $t = 0^-$ . Lo stato del circuito, in un certo istante, è rappresentato dal valore assunto dalle sue variabili di stato in quell'istante. Le variabili di stato sono, come precedentemente detto, le tensioni ai morsetti dei condensatori e le correnti che attraversano gli induttori. Infatti, dalla conoscenza della tensione ai capi del condensatore è possibile conoscere l'energia elettrica immagazzinata nel componente. Analogamente, dalla conoscenza della corrente dell'induttore è possibile risalire alla energia magnetica immagazzinata. In Figura 31 sono riportati i componenti con memoria condensatore e induttore, a cui sono associate le variabili descrittive, le equazioni caratteristiche e le formule per la determinazione delle energie elettrica e magnetica immagazzinate.



Il diagramma mostra due componenti: a sinistra un condensatore con tensione  $v$  e corrente  $i$ , con equazione  $i = C \cdot \frac{dv}{dt}$  e formula dell'energia  $W_E = \frac{1}{2} C v^2$ ; a destra un induttore con tensione  $v$  e corrente  $i$ , con equazione  $v = L \cdot \frac{di}{dt}$  e formula dell'energia  $W_M = \frac{1}{2} L i^2$ .

**Figura 31.** Equazioni dei componenti con memoria condensatore e induttore.

Infatti, questi componenti presentano un legame differenziale fra le variabili descrittive. Questo determina una sorta di memoria del componente della sua passata evoluzione, memoria che è rappresentata appunto dall'energia immagazzinata nell'istante di osservazione.

In un circuito di ordine  $n$ , saranno  $n$  le variabili di stato effettive. Occorre distinguere i circuiti che non presentano condizioni patologiche da quelli che presentano. Le condizioni patologiche, che esamineremo più avanti, sono delle particolari topologie che presentano maglie di soli generatori di tensione e condensatori, oppure co-cicli di soli generatori di corrente e induttori. In assenza di condizioni patologiche, l'ordine del circuito, e quindi il numero di variabili di stato, coincide con il numero di componenti con memoria, cioè con il totale numero di condensatori e induttori presenti. In presenza di condizioni patologiche non c'è invece una corrispondenza uno ad uno fra questi due numeri.

In generale, quindi, per un circuito di ordine  $n$ , possiamo introdurre il così detto vettore di stato che contiene le  $n$  variabili di stato:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

Lo stato in  $t = 0^-$  è:

$$\underline{x}(0^-) = \begin{bmatrix} x_1(0^-) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(0^-) \end{bmatrix}$$

Noto il vettore di stato è possibile determinare tutte le altre grandezze elettriche come combinazioni lineari di variabili di stato e di ingressi, come abbiamo già mostrato nel precedente Esempio 1:

$$y(t) = \underline{C}^T \cdot \underline{x} + D \cdot u$$

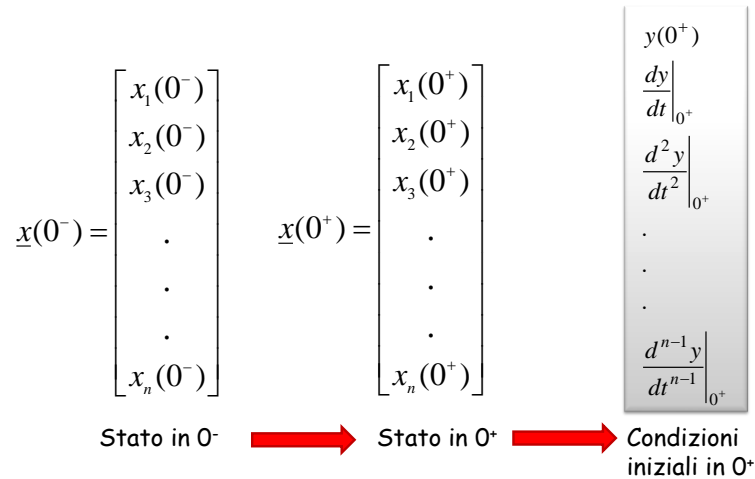
Dimostreremo che, a partire dalla conoscenza dello stato in  $t = 0^-$ , cioè un istante prima che il circuito venga perturbato, è possibile risalire allo stato nell'istante  $t = 0^+$  e da questo alle condizioni iniziali per la variabile di uscita desiderata.

Generalizzando, l'analisi della risposta completa di un circuito di ordine  $n$  procede determinando la relazione I/O tra una uscita desiderata  $y(t)$  e l'ingresso  $u(t)$ :

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u \quad n \geq m$$

Per integrare questa relazione differenziale ordinaria è necessario conoscere, oltre all'ingresso, anche le condizioni iniziali per  $y$  e le sue  $n - 1$  derivate nell'istante  $0^+$ , se  $t = 0$  è l'istante in cui viene alimentato il circuito o esso subisce una qualunque perturbazione.

Queste condizioni iniziali possono essere determinate, a partire dalla conoscenza dello stato in  $0^-$ , passando attraverso la determinazione dello stato in  $0^+$  ed infine, da quest'ultimo alla determinazione delle condizioni iniziali desiderate, seguendo il diagramma di flusso riportato in Figura 32.



**Figura 32.** Diagramma di flusso per la determinazione delle condizioni iniziali in  $t = 0^+$  a partire dalla conoscenza dello stato in  $t = 0^-$

**Teorema.** Quando la rete non contiene condizioni patologiche (cioè percorsi chiusi (maglie) di soli generatori di tensione e condensatori, o co-cicli di soli generatori di corrente e induttori), allora le variabili di stato sono meno discontinue dell'ingresso.

**Conseguenza.** Questo vuole dire che se si applica un ingresso che ha nell'istante iniziale una discontinuità al più di prima specie, le variabili di stato si conservano, cioè non cambiano tra  $0^-$  e  $0^+$ , salvo per i casi in cui si abbiano condizioni patologiche.

In assenza di condizioni patologiche, quindi, le variabili di stato possono presentare discontinuità di prima specie solo in corrispondenza di eventuali impulsi presenti nel circuito grazie alla presenza di generatori impulsivi.

### Equazioni di stato

A partire dalle equazioni del circuito (equazioni topologiche e dei componenti), in assenza di condizioni patologiche, è possibile ricavare le equazioni di stato (cioè delle equazioni che contengono solo variabili di stato e ingressi) nella forma canonica:

$$\frac{d}{dt}\underline{x} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{B} \cdot u$$

o, anche:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{B} \cdot u$$

dove,  $\underline{x}$  è il vettore di stato, di dimensione  $n \times 1$ ;  $\underline{A}$  è una matrice  $n \times n$ ;  $\underline{B}$  è un vettore di dimensione  $n \times 1$ .

Come già visto, tutte le altre variabili elettriche possono essere espresse algebricamente in funzione delle variabili di stato e dell'ingresso. Quindi:

$$y(t) = \underline{C}^T \cdot \underline{x} + D \cdot u$$

dove,  $y$  è la variabile di uscita prescelta;  $\underline{C}$  è un vettore di dimensione  $n \times 1$ ;  $D$  è uno scalare

Dalla conoscenza delle equazioni di stato e della relazione algebrica che lega l'uscita alle variabili di stato, noto lo stato in  $t = 0^-$ ,  $\underline{x}(0^-)$ , è possibile determinare le  $n$  condizioni iniziali per la variabile  $y$ .

Calcolo dello stato in  $0^+$  noto lo stato in  $0^-$

Infatti, dalla conoscenza delle equazioni di stato e dello stato per  $t = 0^-$ , è possibile ricavare lo stato in  $t = 0^+$ . Si procede integrando le equazioni di stato tra  $t = 0^-$  e  $t = 0^+$ :

$$\int_{0^-}^{0^+} \dot{\underline{x}}(t) dt = \underline{A} \int_{0^-}^{0^+} \underline{x}(t) dt + \underline{B} \int_{0^-}^{0^+} u(t) dt \Rightarrow \underline{x}(0^+) - \underline{x}(0^-) = \underline{A} \int_{0^-}^{0^+} \underline{x}(t) dt + \underline{B} \int_{0^-}^{0^+} u(t) dt$$

In assenza di condizioni patologiche si possono contemplare due casi:

Caso a) L'ingresso non è impulsivo, allora, poiché dal Teorema le variabili di stato sono meno discontinue dell'ingresso, esse saranno continue. Il loro integrale è nullo. Inoltre anche l'integrale di  $u(t)$  è nullo fra  $0^-$  e  $0^+$ . Sarebbe diverso da zero solo se in zero fosse presente un impulso. Allora lo stato si conserva:

$$\underline{x}(0^+) - \underline{x}(0^-) = \underline{A} \int_{0^-}^{0^+} \underline{x}(t) dt + \underline{B} \int_{0^-}^{0^+} u(t) dt \rightarrow \begin{matrix} \int_{0^-}^{0^+} \underline{x}(t) dt = 0 \\ \int_{0^-}^{0^+} u(t) dt = 0 \end{matrix} \Rightarrow \underline{x}(0^+) = \underline{x}(0^-)$$

**Teorema** di Continuità dello stato nei circuiti non degeneri (in assenza di condizioni patologiche): *In un circuito dinamico non degenero, se gli ingressi non contengono impulsi le variabili di stato sono funzioni continue di  $t$  (anche in presenza di discontinuità degli ingressi).*

Dimostrazione

La proprietà si può dimostrare per assurdo. Lo stato e gli ingressi sono legati dall'equazione:

$$\frac{d}{dt} \underline{x} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{B} \cdot u$$

Se lo stato fosse discontinuo  $x(t)$  dovrebbe contenere delle discontinuità a gradino e quindi  $\frac{d}{dt} \underline{x}$  dovrebbe contenere impulsi di Dirac. Per bilanciare questi impulsi, a primo membro anche  $u(t)$  dovrebbe contenere degli impulsi di Dirac, che viola l'ipotesi di partenza. Si deve, inoltre, escludere la possibilità che, per bilanciare gli impulsi a primo membro, sia  $x(t)$  a contenere impulsi di Dirac. Infatti, in questo caso  $dx/dt$  conterrebbe impulsi di ordine 1, quindi anche  $x(t)$  dovrebbe contenere impulsi di ordine 1, di conseguenza  $dx/dt$  conterrebbe anche impulsi di ordine 2, e così via ..

Quindi, se  $u(t)$  contiene al più gradini (ma non impulsi)  $x(t)$  è continuo.

Caso b) Nel secondo caso, supponiamo che l'ingresso sia un impulso di area  $E$ . Ancora una volta l'integrale delle variabili di stato è nullo, perché esse avranno al più una discontinuità di prima specie (come visto precedentemente). L'integrale dell'ingresso tra  $0^-$  e  $0^+$  è invece pari all'area dell'impulso, quindi  $E$ .

$$\underline{x}(0^+) - \underline{x}(0^-) = \underline{A} \int_{0^-}^{0^+} \underline{x}(t) dt + \underline{B} \int_{0^-}^{0^+} u(t) dt \rightarrow \begin{matrix} \int_{0^-}^{0^+} \underline{x}(t) dt = 0 \\ \int_{0^-}^{0^+} u(t) dt = E \end{matrix} \Rightarrow \underline{x}(0^+) = \underline{x}(0^-) + \underline{B} \cdot E$$

Stiamo escludendo la presenza di condizioni patologiche che verranno trattate più avanti.

Nota che, se  $u(t)$  contiene impulsi, le variabili di stato non sono necessariamente discontinue (è possibile che nel calcolo di  $\underline{B} \cdot u$  i termini impulsivi si annullino). Inoltre, se  $u(t)$  è discontinuo, le derivate delle variabili di stato possono essere discontinue.

Quindi, se  $u(t)$  contiene al più gradini (ma non impulsi)  $x(t)$  è continuo. La risposta  $y(t)$  non può contenere impulsi, ma può essere discontinua in presenza di discontinuità degli ingressi.

*Calcolo delle condizioni iniziali per  $y$ , noto lo stato in  $0^+$*

Vediamo ora come calcolare le condizioni iniziali per la variabile di uscita  $y$ , noto lo stato in  $0^+$ . Calcoliamo l'uscita nell'istante  $0^+$  usando la sua espressione algebrica in funzione delle variabili di stato:

$$y = \underline{C}^T \underline{x} + Du \rightarrow y(0^+) = \underline{C}^T \underline{x}(0^+) + Du(0^+)$$

Trovando, quindi, la prima condizione iniziale. Infatti, lo stato in  $0^+$  è stato precedentemente calcolato, così come è noto il valore di  $u(0^+)$ .

Deriviamo poi l'espressione  $y = \underline{C}^T \underline{x} + Du$  e, utilizzando la forma canonica delle equazioni di stato, sostituendo otteniamo:

$$\frac{dy}{dt} = \underline{C}^T \frac{d\underline{x}}{dt} + D \frac{du}{dt} = \underline{C}^T \underline{A} \underline{x} + \underline{C}^T \underline{B} u + D \frac{du}{dt} \rightarrow \left. \frac{dy}{dt} \right|_{0^+} = \underline{C}^T \underline{A} \underline{x}(0^+) + \underline{C}^T \underline{B} u(0^+) + D \left. \frac{du}{dt} \right|_{0^+}$$

Tutti i termini che vi compaiono sono noti, essendo per ipotesi l'ingresso derivabile e noto.

Per calcolare la seconda condizione iniziale

$$\left. \frac{d^2 y}{dt^2} \right|_{0^+}$$

si procede calcolando la derivata seconda, sostituendo l'espressione delle variabili di stato e calcolando in  $0^+$  e così via sino alla derivata di ordine  $n - 1$ .

Vedremo più avanti come trattare i circuiti in presenza di condizioni patologiche. In generale nelle situazioni patologiche non vale il teorema e le variabili di stato possono essere discontinue quanto l'ingresso.

### Metodo di risoluzione

Riassumendo quanto detto, per integrare la relazione I/O si procede come di seguito.

- 1) Per ipotesi sono noti:

Stato in  $0^-$ :  $\underline{x}(0^-)$

Ingresso:  $u(t) = f(t) \cdot \delta_{-1}(t)$

- 2) Dalla scrittura delle equazioni del circuito si ricavano:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \underline{x} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} u & \text{Equazioni di stato} \\ y = \underline{C}^T \underline{x} + Du & \text{Equazione di uscita} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y &= \\ = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u & \text{ Relazione I/O} \end{aligned}$$

- 3) Si integrano le equazioni di stato tra  $0^-$  e  $0^+$  e si trova lo stato in  $0^+$ ,  $\underline{x}(0^+)$

- 4) Si calcolano le condizioni iniziali per la variabile di uscita  $y(t)$ ,  $y(0^+)$ ;  $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{0^+}$ ;  $\left. \frac{d^2 y}{dt^2} \right|_{0^+}$ ;  $\dots$ ;  $\left. \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \right|_{0^+}$ :

$$\begin{aligned} y(0^+) &= \underline{C}^T \cdot \underline{x}(0^+) + Du(0^+); \left. \frac{dy}{dt} \right|_{0^+} = \left[ \underline{C}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{C}^T \cdot \underline{B} \cdot u + D \frac{du}{dt} \right]_{0^+}; \\ \left. \frac{d^2 y}{dt^2} \right|_{0^+} &= \left[ \underline{C}^T \cdot \underline{A} \cdot \frac{d\underline{x}}{dt} + \underline{C}^T \cdot \underline{B} \cdot \frac{du}{dt} + D \frac{d^2 u}{dt^2} \right]_{0^+} = \\ &= \underline{C}^T \cdot \underline{A} [\underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{B} \cdot u]_{0^+} + \left[ \underline{C}^T \cdot \underline{B} \cdot \frac{du}{dt} + D \frac{d^2 u}{dt^2} \right]_{0^+}; \dots \text{etc.} \end{aligned}$$

- 5) Si procede all'integrazione della relazione I/O:

$$y(t) = y_{oa} + y_p \quad t > 0$$

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \rightarrow \lambda_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i t} + y_p(t)$$

Le  $n$  costanti di integrazione  $A_i$  si determinano applicando le  $n$  condizioni iniziali

La forma della  $y_p(t)$  dipende dall'ingresso  $u(t)$ . La  $y_p(t)$  deve soddisfare identicamente l'equazione differenziale per  $t > 0$  e per un determinato ingresso  $u(t)$ .

### Esempio 3 Circuito del 2° ordine

Riferendoci ad un circuito del secondo ordine come quello di Figura 33, ricaviamo la corrente  $i_R$  seguendo la procedura appena descritta.

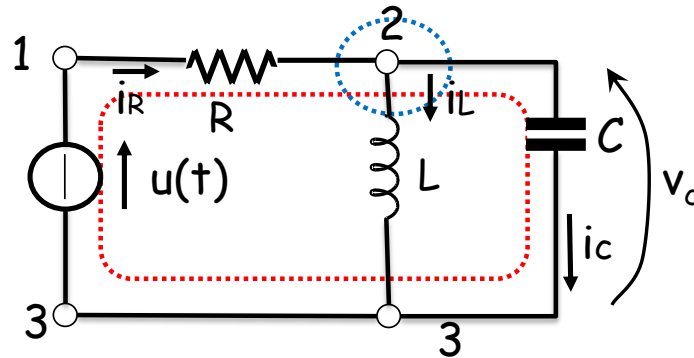


Figura 33. Circuito del 2° ordine

### Soluzione

Si noti che  $i_R$  non è variabile di stato. Le variabili di stato sono, infatti,  $v_C$  ed  $i_L$ . Il vettore di stato è:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}$$

Non sono presenti condizioni patologiche, quindi le variabili di stato sono meno discontinue dell'ingresso.

Alla maglia indicata in rosso si ha:

$$\begin{cases} u = R i_R + v_C \\ i_R = C \frac{dv_C}{dt} + i_L \\ v_C = L \frac{di_L}{dt} \end{cases} \quad \text{equazioni del circuito}$$

Sostituendo la terza equazione nella prima e derivo la terza equazione e la sostituisco nella seconda:

$$\begin{cases} u = R i_R + L \frac{di_L}{dt} \\ i_R = CL \frac{d^2 i_L}{dt^2} + i_L \end{cases} \rightarrow \text{dalla prima } \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} [u - R i_R] \rightarrow \frac{du}{dt} = R \frac{di_R}{dt} + L \frac{d^2 i_L}{dt^2} \rightarrow L \frac{d^2 i_L}{dt^2} = \frac{du}{dt} - R \frac{di_R}{dt}$$

Sostituendo nella seconda:

$$i_R = C \left[ \frac{du}{dt} - R \frac{di_R}{dt} \right] + i_L$$

e derivando:

$$\frac{di_R}{dt} = C \left[ \frac{d^2 u}{dt^2} - R \frac{d^2 i_R}{dt^2} \right] + \frac{di_L}{dt}$$

$$\frac{di_R}{dt} = C \frac{d^2 u}{dt^2} - RC \frac{d^2 i_R}{dt^2} + \frac{1}{L} u - \frac{R}{L} i_R$$

Riordinando otteniamo la relazione I/O:

$$RC \frac{d^2 i_R}{dt^2} + \frac{di_R}{dt} + \frac{R}{L} i_R = C \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{L} u \quad n = m$$

Come dovevamo aspettarci si tratta di una equazione differenziale ordinaria del 2° ordine i cui coefficienti sono funzione dei parametri circuitali. La presenza delle derivate dell'ingresso si verifica spesso quando l'uscita non è una variabile di stato.

Integriamo la relazione I/O. L'equazione caratteristica è:

$$RC\lambda^2 + \lambda + \frac{R}{L} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \mp \sqrt{1 - 4\frac{R^2C}{L}}}{2RC} = \frac{-1 \mp \sqrt{\Delta}}{2RC}$$

se  $\Delta > 0$   $\lambda_{1,2}$  reali

se  $\Delta < 0$   $\lambda_{1,2}$  complesse coniugate

$$\Delta < 0 \Rightarrow R > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{se } R \rightarrow \infty \text{ il circuito diventa un oscillatore}$$

Ricaviamo le equazioni di stato, partendo dalle equazioni del circuito:

$$\begin{cases} u = Ri_R + v_c \\ i_R = C \frac{dv_c}{dt} + i_L \\ v_c = L \frac{di_L}{dt} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_R = -\frac{1}{R}v_c + \frac{1}{R}u \\ -\frac{1}{R}v_c + \frac{1}{R}u = C \frac{dv_c}{dt} + i_L \\ v_c = L \frac{di_L}{dt} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{dv_c}{dt} = -\frac{1}{RC}v_c - \frac{1}{C}i_L + \frac{1}{RC}u \\ \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}v_c \end{cases} \quad \text{Equazioni di stato}$$

In forma matriciale:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix} u \rightarrow \frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

Facciamo l'ipotesi che  $\Delta > 0$ . Le frequenze libere saranno una coppia di radici complesse coniugate:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\sigma + j\omega_0 \\ \lambda_2 &= -\sigma - j\omega_0 \end{aligned} \quad \text{con} \quad \sigma = \frac{1}{2RC} \quad \text{e} \quad \omega_0 = \frac{1}{2RC} \sqrt{4\frac{R^2C}{L} - 1}$$

Ipotizziamo che l'ingresso sia un gradino di ampiezza  $E$ :

$$u(t) = E\delta_{-1}(t) \quad \text{Gradino}$$

e che lo stato sia nullo in  $t = 0^-$ :

$$\begin{cases} v_c(0^-) = 0 \\ i_L(0^-) = 0 \end{cases}$$

Poiché non sono presenti condizioni patologiche le variabili di stato sono meno discontinue dell'ingresso, e poiché l'ingresso ha una discontinuità a gradino nell'origine, le variabili di stato saranno meno discontinue e quindi saranno continue all'istante zero, ne consegue che lo stato si conserva tra  $0^-$  e  $0^+$ :

$$\begin{cases} v_c(0^+) = v_c(0^-) = 0 \\ i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \end{cases}$$

Abbiamo trovato lo stato in  $0^+$  noto lo stato in  $0^-$  e noto l'ingresso.

Troviamo ora l'integrale particolare. Poiché l'ingresso è costante per  $t > 0$ , esso sarà costante. Chiamiamo  $K$  questa costante e sostituiamola nella relazione I/O ottenendo:

$$i_{Rp}(t) = K \rightarrow \frac{R}{L}K = \frac{1}{L}E \rightarrow K = \frac{E}{R}$$

L'uscita sarà la somma dell'integrale generale dell'omogenea associata e dell'integrale particolare dell'equazione completa, quindi:

$$i_R(t) = e^{-\sigma t} [A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t] + \frac{E}{R}$$

Per determinare le costanti di integrazione  $A_1$  ed  $A_2$  dobbiamo ricavare le condizioni iniziali per la variabile di uscita. L'uscita può essere espressa algebricamente in funzione delle variabili di stato e dell'ingresso. Nel caso in esame, dalla equazione alla maglia rossa:

$$u = Ri_R + v_c \Rightarrow i_R = -\frac{1}{R}v_c + \frac{1}{R}u \Rightarrow$$

Calcolando l'espressione in  $t = 0^+$ :

$$i_R(0^+) = -\frac{1}{R}v_c(0^+) + \frac{1}{R}u(0^+) = \frac{E}{R}$$

L'uscita  $i_R$  presenta una discontinuità di prima specie passando da  $0^-$  a  $0^+$ . Quindi, mentre in presenza di un ingresso a gradino le variabili di stato si sono conservate tra  $0^-$  e  $0^+$ , lo stesso non è accaduto per  $i_R$ , che non è variabile di stato.

Deriviamo l'espressione della  $i_R(t)$  e calcoliamola per  $t = 0^+$ :

$$\begin{aligned} \frac{di_R}{dt} &= -\frac{1}{R} \frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{R} \frac{du}{dt} \Rightarrow \\ \frac{di_R}{dt} &= -\frac{1}{R} \left[ -\frac{1}{RC} v_c - \frac{1}{C} i_L + \frac{1}{RC} u \right] + \frac{1}{R} \frac{du}{dt} \\ \frac{di_R}{dt} \Big|_{0^+} &= -\frac{1}{R} \left[ -\frac{1}{RC} v_c(0^+) - \frac{1}{C} i_L(0^+) + \frac{1}{RC} u(0^+) \right] + \frac{1}{R} \frac{du}{dt} \Big|_{0^+} \Rightarrow \\ \frac{di_R}{dt} \Big|_{0^+} &= -\frac{E}{R^2 C} \Rightarrow \end{aligned}$$

Le condizioni iniziali sono:

$$\begin{cases} i_R(0^+) = \frac{E}{R} \\ \frac{di_R}{dt} \Big|_{0^+} = -\frac{E}{R^2 C} \end{cases}$$

Applichiamo le condizioni iniziali:

$$i_R(t) = e^{-\sigma t} [A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t] + \frac{E}{R}$$

$$i_R(0^+) = \frac{E}{R} = A_1 + \frac{E}{R} \Rightarrow A_1 = 0$$

$$\frac{di_R}{dt} = -\sigma e^{-\sigma t} [A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t] + e^{-\sigma t} [-A_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + A_2 \omega_0 \cos \omega_0 t]$$

$$\frac{di_R}{dt} \Big|_{0^+} = -\frac{E}{R^2 C} = A_2 \omega_0 \Rightarrow A_2 = -\frac{E}{\omega_0 R^2 C}$$

da cui:

$$i_R(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{\omega_0 R^2 C} e^{-\sigma t} \sin \omega_0 t$$

La Figura 34 riporta l'andamento qualitativo della risposta  $i_R(t)$ :

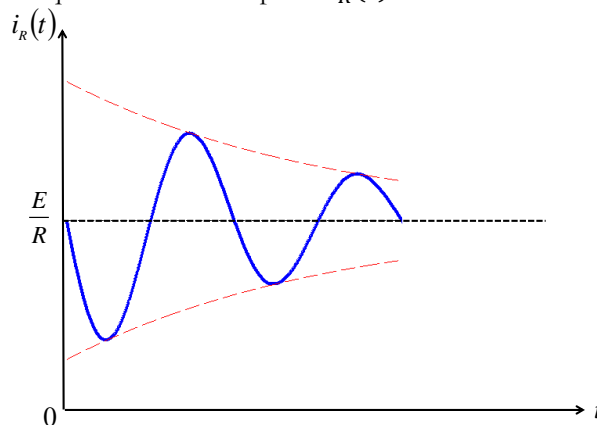


Figura 34. Andamento della variabile  $i_R(t)$  nel circuito di Figura 33

□

#### Esempio 4 Circuito con stato non nullo in $t = 0^-$

Dato il circuito in Figura 35 calcolare  $i_L(t)$  per  $t > 0$ . Per  $t < 0$  il tasto è chiuso e il circuito è a regime. In  $t = 0$  il tasto si apre.

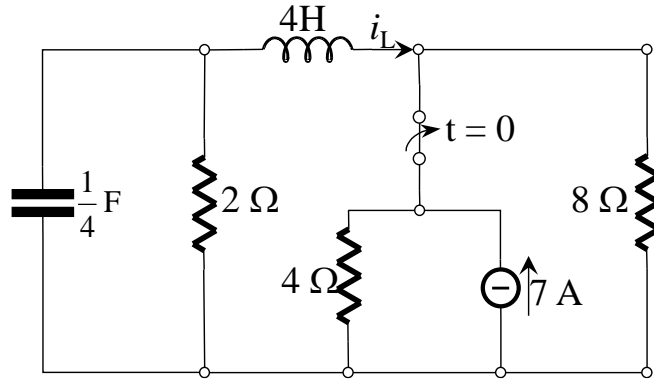


Figura 35. Circuito del 2° ordine

### Soluzione

Per  $t < 0$  il circuito è in regime stazionario perché è alimentato da un generatore di corrente costante. Per studiare il circuito in regime stazionario facciamo riferimento alla Figura 36, dove l'induttore è stato cortocircuitato ed il condensatore è stato sostituito da un circuito aperto. Lo studio del circuito per  $t < 0$  ci consente di ricavare lo stato del circuito in  $t = 0^-$ , cioè la tensione ai capi del condensatore e la corrente nell'induttore in  $t = 0^-$ .

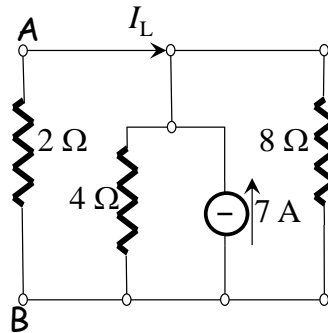


Figura 36. Circuito di Figura 35 per  $t < 0$

Per calcolare il vettore di stato in  $t = 0^-$ , possiamo applicare la regola del partitore resistivo di corrente:

$$I_L = -7 \cdot \frac{1/2}{1/2 + 1/4 + 1/8} = -4 \Rightarrow i_L(0^-) = -4$$

$$V_{AB} = -2 \cdot I_L = 8 \Rightarrow v_C(0^-) = 8$$

Stato in  $t = 0^-$

$$\begin{cases} v_C(0^-) = 8 \\ i_L(0^-) = -4 \end{cases}$$

Per  $t > 0$  il tasto è aperto ed il circuito da analizzare è quello di Figura 37:

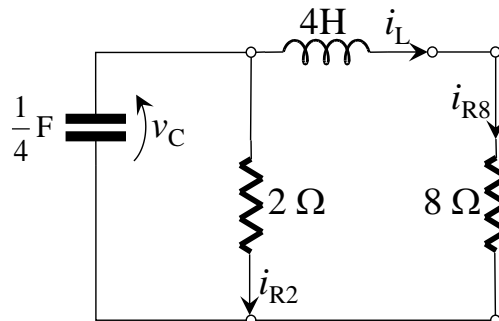


Figura 37. Circuito di Figura 35 per  $t > 0$

Scriviamo le equazioni del circuito

$$\begin{cases} v_C = 4 \frac{di_L}{dt} + 8i_L \\ \frac{1}{4} \cdot \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{2} + i_L = 0 \end{cases}$$

Sono anche equazioni di stato.  
Dalla prima delle ☼:

$$v_c = 4 \frac{di_L}{dt} + 8i_L \quad \frac{dv_c}{dt} = 4 \frac{d^2i_L}{dt^2} + 8 \frac{di_L}{dt}$$

Sostituendo nella seconda:

$$\frac{1}{4} \cdot \left( 4 \frac{d^2i_L}{dt^2} + 8 \frac{di_L}{dt} \right) + \frac{1}{2} \left( 4 \frac{di_L}{dt} + 8i_L \right) + i_L = 0$$

Da cui la relazione I/O per  $i_L$ :

$$\frac{d^2i_L}{dt^2} + 4 \frac{di_L}{dt} + 5i_L = 0$$

Troviamo le condizioni iniziali a partire dalla conoscenza dello stato in  $0^-$

$$\begin{cases} v_c(0^-) = 8 \\ i_L(0^-) = -4 \end{cases}$$

Poiché nel circuito non sono presenti condizioni patologiche e non sono presenti ingressi impulsivi, lo stato si conserva tra  $0^-$  e  $0^+$ :

$$\begin{cases} v_c(0^+) = 8 \\ i_L(0^+) = -4 \end{cases}$$

calcolando la prima delle ☼ per  $t = 0^+$ :

$$v_c(0^+) = 4 \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{0^+} + 8i_L(0^+) \rightarrow \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{0^+} = 10$$

La relazione I/O è già omogenea, quindi procediamo ad integrarla:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = -2 \mp \sqrt{4-5} = -2 \mp j$$

$$i_L(t) = e^{-2t}(A \cos t + B \sin t)$$

Applichiamo le condizioni iniziali per  $t = 0^+$

$$i'_L(0^+) = A + 4 = 0$$

$$\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{0^+} = -2e^{-2t}(A \cos t + B \sin t) + e^{-2t}(-A \sin t + B \cos t)$$

$$\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{0^+} = -2A + B = 10$$

Da cui:

$$\begin{cases} A = -4 \\ B = +2 \end{cases}$$

$$i_L(t) = e^{-2t}(-4 \cos t + 2 \sin t)$$

□

### Esempio 5 Circuito in regime sinusoidale per $t < 0$

Per  $t < 0$  il circuito di Figura 38 è a regime. In  $t = 0$  il tasto commuta. Determinare l'andamento di  $v_0(t)$  e tracciarne il grafico.

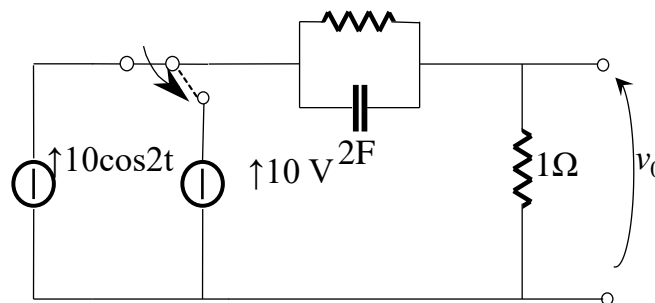


Figura 38. Circuito del 1° ordine

### Soluzione

Per  $t < 0$  il circuito è in regime sinusoidale. Per ricavare lo stato in  $t = 0^-$ , si studia il circuito di Figura 39 col metodo dei fasori.

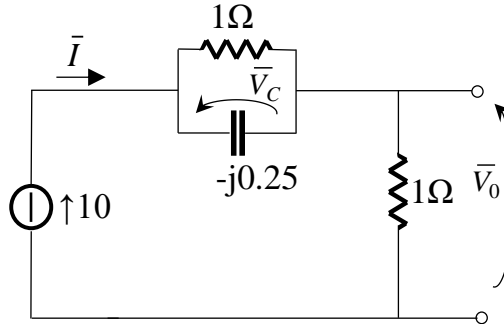


Figura 39. Circuito di Figura 38 per  $t < 0$

$$\bar{I} = \frac{10}{1 + \frac{-j0.25}{1 - j0.25}} = 9.22 \angle 12,53^\circ = 9 + j2$$

$$\bar{V}_C = \bar{I} \cdot \frac{-j0.25}{1 - j0.25} = 2.236 \angle -63,43^\circ = 1 - j2$$

$$v_C(t) = 2.236 \cos(2t - 63,43^\circ) \Rightarrow v_C(0^-) = 1V$$

$v_C(0^-) = 1V$  è lo stato del circuito per  $t = 0^-$

$$\bar{V}_0 = 1 \cdot \bar{I} = 9.22 \angle 12,53^\circ \Rightarrow v_0(t) = 9.22 \cos(2t + 12,53^\circ) \Rightarrow v_0(0^-) = 9V$$

Per  $t > 0$  tasto commuta, si produce un transitorio esaurito il quale il circuito, se stabile, raggiungerà una nuova condizione di regime. Il circuito da analizzare è quello di Figura 40.

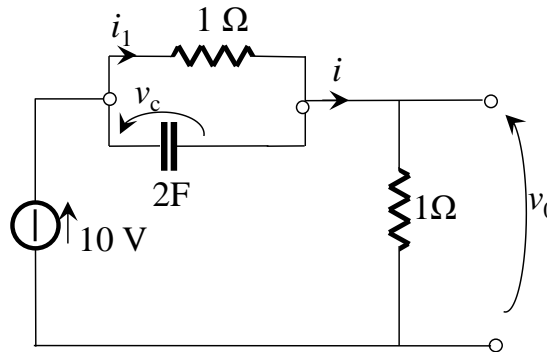


Figura 40. Circuito di Figura 38 per  $t > 0$

Le equazioni del circuito sono:

$$\begin{cases} 10 = v_C + v_0 \rightarrow v_C = 10 - v_0 \rightarrow \frac{dv_C}{dt} = -\frac{dv_0}{dt} \\ 2 \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{1} = \frac{v_0}{1} \rightarrow -2 \frac{dv_0}{dt} + 10 - v_0 = v_0 \rightarrow \frac{dv_0}{dt} + v_0 = 5 \end{cases}$$

La relazione I/O è:

$$\begin{aligned} \frac{dv_0}{dt} + v_0 &= 5 \\ \lambda + 1 &= 0 \Rightarrow \lambda = -1 \\ v_{0p}(t) &= K = 5 \\ v_0(t) &= Ae^{-t} + 5 \end{aligned}$$

Per determinare la costante di integrazione, calcoliamo la condizione iniziale  $v_0(0^+)$  a partire dallo stato del circuito in  $t = 0^-$ . La rete non contiene condizioni patologiche, inoltre non sono presenti ingressi impulsivi, quindi lo stato si conserverà tra  $0^-$  e  $0^+$ :

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 1V$$

Dalla prima delle equazioni del circuito, calcolata in  $0^+$  si ottiene:

$$\begin{aligned} 10 = v_C + v_0 &\rightarrow v_0(0^+) = 10 - v_C(0^+) = 10 - 1 = 9V \\ v_0(0^+) = 9 &= A + 5 \rightarrow A = 4 \end{aligned}$$

da cui:

$$v_0(t) = 4e^{-t} + 5$$

il cui grafico è riportato in Figura 41.

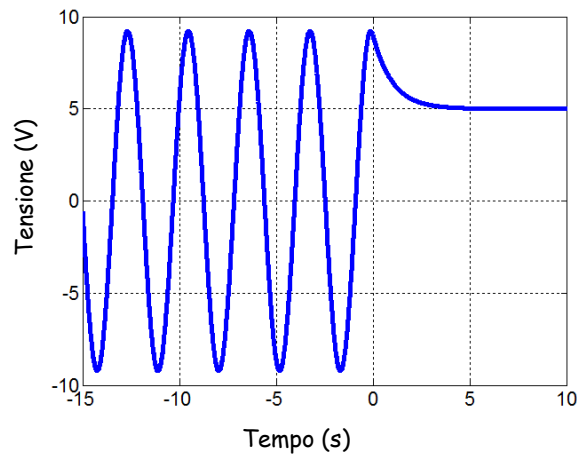


Figura 41. Grafico della  $v_0(t)$

□

**Esempio 6** Circuito con ingresso a dente di sega

Calcolare la tensione  $v(t)$  nella rete in Figura 42 nell'intervallo  $0 < t < 1\mu s$  e tracciarne il grafico. Si suppone che il generatore di tensione abbia la forma d'onda indicata in figura. Lo stato in  $0^-$  è nullo.

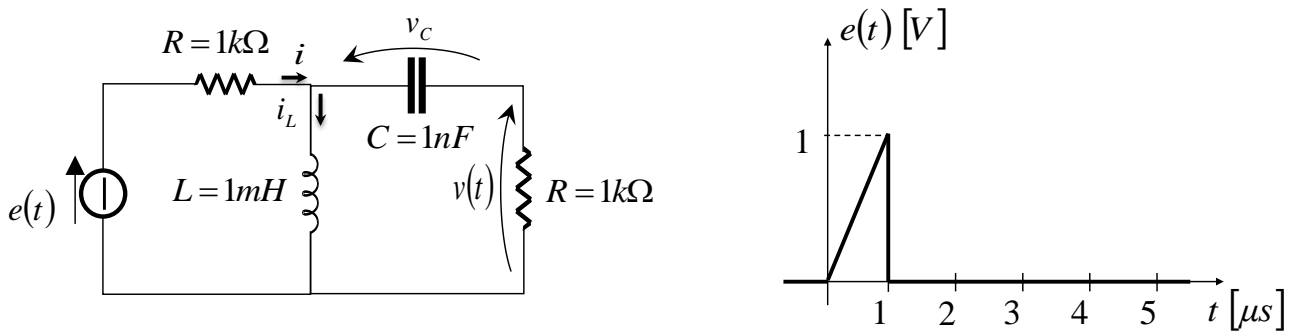


Figura 42. Circuito con ingresso a dente di sega

**Soluzione**

per  $t = 0^-$   $v_C(0^-) = 0$  e  $i_L(0^-) = 0$

per  $t = 0^+$   $v_C(0^+) = 0$  e  $i_L(0^+) = 0$

Le equazioni del circuito sono:

$$\begin{cases} e = Ri + L \frac{di_L}{dt} \\ i = i_L + C \frac{dv_C}{dt} \\ L \frac{di_L}{dt} = v_C + RC \frac{dv_C}{dt} \end{cases}$$

con

$$v = RC \frac{dv_C}{dt}$$

$$\begin{cases} e = R \left( i_L + C \frac{dv_C}{dt} \right) + v_C + v \quad \odot \\ L \frac{di_L}{dt} = v_C + v \\ v = RC \frac{dv_C}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} e = Ri_L + 2v + v_c \rightarrow \frac{de}{dt} = R \frac{di_L}{dt} + 2 \frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC} v \rightarrow \frac{d^2 e}{dt^2} = R \frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2 \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} \\ L \frac{di_L}{dt} = v_c + v \rightarrow \frac{d^2 i_L}{dt^2} = \frac{1}{L} \left( \frac{v}{RC} + \frac{dv}{dt} \right) \\ v = RC \frac{dv_c}{dt} \end{cases}$$

Da cui

$$\frac{d^2 e}{dt^2} = R \frac{1}{L} \left( \frac{v}{RC} + \frac{dv}{dt} \right) + 2 \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} \rightarrow 2 \frac{d^2 v}{dt^2} + \left( \frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right) \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = \frac{d^2 e}{dt^2}$$

Sostituendo i valori numerici, la relazione I/O è:

$$2 \frac{d^2 v}{dt^2} + 2 \cdot 10^6 \frac{dv}{dt} + 10^{12} v = \frac{d^2 e}{dt^2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \cdot 10^6 \mp \sqrt{10^{12} - 2 \cdot 10^{12}}}{2} = \frac{-1 \mp j}{2} \cdot 10^6$$

$$\text{Per } 0 < t < 1\mu\text{s} \quad e(t) = \frac{t}{10^{-6}} \quad \frac{de}{dt} = 10^6 \quad \frac{d^2 e}{dt^2} = 0$$

$$v(t) = e^{-\frac{t}{2} \cdot 10^6} \left( A \cos \frac{10^6}{2} t + B \sin \frac{10^6}{2} t \right)$$

Per calcolare le condizioni iniziali  $v(0^+)$  e  $\left. \frac{dv}{dt} \right|_{0^+}$  ricavo la equazioni di stato nella forma:

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + Bu \quad \text{con} \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u = e(t)$$

e la relazione algebrica che lega la  $v$  alle variabili di stato:

$$y = \underline{C}^T \underline{x} + Du \quad \text{con} \quad y(t) = v(t)$$

Dalla equazione alla maglia esterna

$$e - R \left( i_L + C \frac{dv_c}{dt} \right) - v_c - RC \frac{dv_c}{dt} = 0$$

Si ricava l'equazione di stato:

$$\frac{dv_c}{dt} = -\frac{v_c}{2RC} - \frac{1}{2C} i_L + \frac{e}{2RC}$$

Da cui

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{0^+} = 0$$

Dall'equazione alla maglia destra:

$$L \frac{di_L}{dt} = v_c + v \rightarrow v = L \frac{di_L}{dt} - v_c$$

$$i_c = \frac{v}{R} = \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} - \frac{1}{R} v_c \quad \text{equazione del resistore}$$

$$i = -\frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + \frac{e}{R} \quad \text{equazione dell'altro resistore}$$

Dall'equazione del co-ciclo:

$$i = i_L + i_c \Rightarrow \frac{e}{R} - \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} = i_L + \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} - \frac{1}{R} v_c$$

Da cui, l'equazione di stato per  $i_L$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{2L} v_c - \frac{R}{2L} i_L + \frac{1}{2L} e$$

calcolandola in  $t = 0^+$

$$\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{0^+} = 0$$

Dalla  $\odot$  si ha:

$$e = Ri_L + v_c + 2v \Rightarrow v = -\frac{1}{2} v_c - \frac{R}{2} i_L + \frac{e}{2}$$

Che corrisponde alla:

$$(y = \underline{C}^T \underline{x} + Du)$$

Calcolata in  $t = 0^+$

$$v(0^+) = 0$$

Derivandola:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{dv_C}{dt} - \frac{R}{2} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{2} \frac{de}{dt} \rightarrow \left. \frac{dv}{dt} \right|_{0^+} = \left. \frac{1}{2} \frac{de}{dt} \right|_{0^+} \rightarrow \left. \frac{dv}{dt} \right|_{0^+} = \frac{1}{2} \cdot 10^6$$

Applichiamo le condizioni iniziali alla  $v(t) = e^{-\frac{t}{2} \cdot 10^6} \left( A \cos \frac{10^6}{2} t + B \sin \frac{10^6}{2} t \right)$ :

$$v(0^+) = A = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{t}{2} \cdot 10^6 \cdot e^{-\frac{t}{2} \cdot 10^6} \left( A \cos \frac{10^6}{2} t + B \sin \frac{10^6}{2} t \right) + e^{-\frac{t}{2} \cdot 10^6} \left( -\frac{A}{2} \cdot 10^6 \sin \frac{10^6}{2} t + \frac{B}{2} \cdot 10^6 \cos \frac{10^6}{2} t \right)$$

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{0^+} = \frac{1}{2} \cdot 10^6 = \frac{B}{2} \cdot 10^6 \Rightarrow B = 1$$

Per  $0 < t < 1 \mu s$

$$v(t) = e^{-\frac{t}{2} \cdot 10^6} \sin \frac{10^6}{2} t$$

$$\text{per } t = 1 \mu s \quad v(t) = e^{-0.5} \sin(0.5 \text{ rad}) = 0.29$$

In Figura 43 è riportato il grafico della  $v(t)$  nell'intervallo richiesto

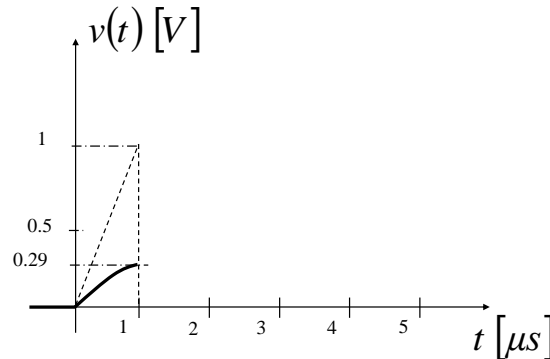


Figura 43. Grafico della  $v(t)$  nell'intervallo  $0 < t < 1 \mu s$

□

### Risposta di un circuito ad un ingresso impulsivo

L'analisi di un circuito in presenza di un generatore impulsivo si conduce, nel dominio del tempo, allo stesso modo di quanto fatto in precedenza. Si noti che, essendo le variabili di stato meno discontinue dell'ingresso (in assenza di condizioni patologiche), le variabili di stato possono essere discontinue nell'origine. Infatti, dalla conoscenza delle equazioni di stato e dello stato per  $t = 0^-$ , è possibile ricavare lo stato in  $t = 0^+$  integrando le equazioni di stato tra  $t = 0^-$  e  $t = 0^+$ . In assenza di condizioni patologiche e supponendo che l'ingresso sia un impulso di area  $E$ , l'integrale delle variabili di stato è nullo, perché esse avranno al più una discontinuità di prima specie. L'integrale dell'ingresso tra  $0^-$  e  $0^+$  è invece pari all'area dell'impulso, quindi  $E$ .

$$\underline{x}(0^+) - \underline{x}(0^-) = \underline{A} \int_{0^-}^{0^+} \underline{x}(t) dt + \underline{B} \int_{0^-}^{0^+} u(t) dt \rightarrow \begin{matrix} \int_{0^-}^{0^+} \underline{x}(t) dt = 0 \\ \int_{0^-}^{0^+} u(t) dt = E \end{matrix} \rightarrow \underline{x}(0^+) = \underline{x}(0^-) + E$$

Inoltre, l'integrale particolare, per  $t > 0$ , sarà nullo. Infatti il segnale impulsivo esiste solo all'istante zero, ed ha area diversa da zero.

### Esempio 7 Circuito con ingresso impulsivo

Calcolare la corrente  $i_2(t)$  per  $t > 0$  nella rete in Figura 44, con  $i_6(t) = \delta(t)$ . Lo stato in  $0^-$  è nullo.

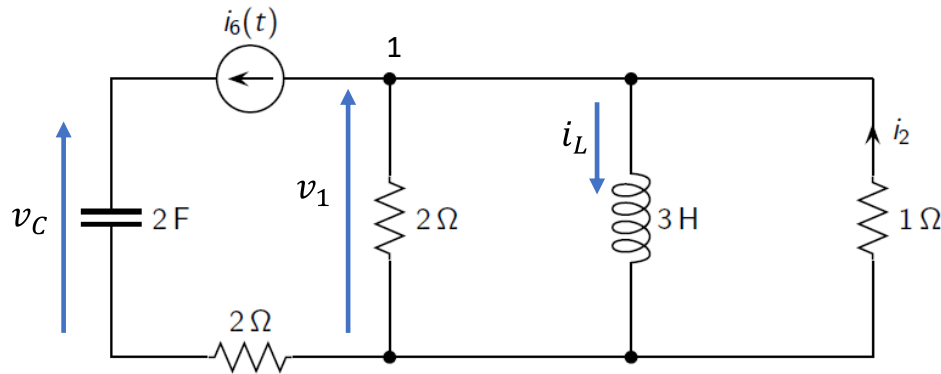


Figura 44. Circuito con ingresso impulsivo

### Soluzione

Equazione al nodo 1:

$$\delta(t) + \frac{1}{2}v_1 + i_L + v_1 = 0 \rightarrow i_2 = -v_1 = +\frac{2}{3}\delta(t) + \frac{2}{3}i_L$$

Maglia interna:

$$3 \frac{di_L}{dt} = v_1$$

Sostituendo nell'equazione al nodo si ottiene la relazione I/O per  $i_2$  che è anche Equazione di stato:

$$3 \frac{di_L}{dt} + \frac{2}{3}i_L = +\frac{2}{3}\delta(t)$$

$$3\lambda + \frac{2}{3} = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{2}{9} = 0,222$$

L'integrale particolare è nullo.

$$i_L(t) = A \cdot e^{-0,222t}$$

Integrando l'equazione di stato tra  $t = 0^-$  e  $t = 0^+$ :

$$3i_L(0^+) - 3i_L(0^-) + \frac{2}{3} \int_{0^-}^{0^+} i_L(t) dt = \frac{2}{3} \rightarrow i_L(0^+) = \frac{2}{9} = 0,222$$

$$0,222 = A$$

$$i_L(t) = 0,222 \cdot e^{-0,222t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

$$i_2(t) = +\frac{2}{3}\delta(t) + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{9} \cdot e^{-0,222t}$$

$$i_2(t) = 0,6667\delta(t) + 0,148 \cdot e^{-0,222t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

Si noti che, la presenza del generatore di corrente ha disaccoppiato la parte di sinistra del circuito (con il condensatore) dalla parte di destra. Abbiamo infatti trovato, per la  $i_L(t)$  un'equazione differenziale del primo ordine.

Inoltre, la  $i_L$ , che è variabile di stato, non si è conservata tra  $t = 0^-$  e  $t = 0^+$ , presentando una discontinuità a gradino. Questo significa che nella tensione ai suoi capi deve essere presente un impulso:

$$v_L = v_1 = -i_2 = -0,6667\delta(t) - 0,148 \cdot e^{-0,222t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

□

### Circuiti del secondo ordine

Dopo avere formulato un metodo generale per l'analisi di un circuito di qualunque ordine  $n$ , in questa sezione verranno analizzati dettagliatamente i circuiti del secondo ordine. Essi sono caratterizzati da relazione I/O del

secondo ordine e devono quindi contenere due componenti con memoria (induttori e/o condensatori) e non devono contenere condizioni patologiche (di cui si tratterà nel seguito).

Un generico circuito del secondo ordine ha uno stato definito da due variabili di stato  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ . Le equazioni di stato hanno la seguente forma:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11} \cdot x_1(t) + a_{12} \cdot x_2(t) + b_1 \cdot u(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21} \cdot x_1(t) + a_{22} \cdot x_2(t) + b_2 \cdot u(t) \end{cases}$$

La generica variabile di uscita, che non sia variabile di stato, può sempre essere espressa come combinazione lineare delle variabili di stato e dell'ingresso:

$$y = c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t) + d \cdot u(t)$$

Dalla soluzione delle precedenti equazioni si perviene alla relazione I/O per la variabile di uscita desiderata che assume la forma:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\alpha \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = F(t)$$

Dove:

$$\begin{aligned} 2\alpha &= -(a_{11} + a_{22}) \\ \omega_0^2 &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

$\alpha$  si chiama coefficiente di smorzamento e  $\omega_0$  prende il nome di pulsazione naturale.  $F(t)$  è una combinazione dell'uscita e delle sue eventuali derivate sino a secondo ordine.

Le relazioni I/O per le diverse uscite differiscono solo per i termini noti.

**Dimostrazione**

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11} \cdot x_1(t) + a_{12} \cdot x_2(t) + b_1 \cdot u(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21} \cdot x_1(t) + a_{22} \cdot x_2(t) + b_2 \cdot u(t) \end{cases}$$

Dalla prima si ricava:

$$x_2(t) = \frac{1}{a_{12}} \frac{dx_1}{dt} - \frac{a_{11}}{a_{12}} \cdot x_1(t) - \frac{b_1}{a_{12}} \cdot u(t)$$

Derivandola:

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{a_{12}} \frac{d^2x_1}{dt^2} - \frac{a_{11}}{a_{12}} \cdot \frac{dx_1}{dt} - \frac{b_1}{a_{12}} \cdot \frac{du}{dt}$$

Sostituendo nella seconda equazione di stato:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{12}} \frac{d^2x_1}{dt^2} - \frac{a_{11}}{a_{12}} \cdot \frac{dx_1}{dt} - \frac{b_1}{a_{12}} \cdot \frac{du}{dt} &= a_{21} \cdot x_1(t) + a_{22} \cdot \left( \frac{1}{a_{12}} \frac{dx_1}{dt} - \frac{a_{11}}{a_{12}} \cdot x_1(t) - \frac{b_1}{a_{12}} \cdot u(t) \right) + b_2 \cdot u(t) \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} - (a_{11} + a_{22}) \frac{dx_1}{dt} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 &= b_1 \frac{du}{dt} - (a_{22}b_1 - a_{12}b_2)u(t) \end{aligned}$$

Analogamente:

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} - (a_{11} + a_{22}) \frac{dx_2}{dt} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2 \frac{du}{dt} - (a_{11}b_2 - a_{21}b_1)u(t)$$

Da cui, essendo qualunque variabile di uscita una combinazione lineare delle variabili di stato, sarà:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - (a_{11} + a_{22}) \frac{dy}{dt} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = F(t)$$

□

Nota: Il procedimento non è applicabile se  $a_{12} = 0$  o  $a_{21} = 0$

- Se  $a_{12} = 0$  nella prima equazione di stato non compare  $x_2 \rightarrow x_1(t)$  soddisfa un'equazione differenziale del 1° ordine;
- Se  $a_{21} = 0$  nella seconda equazione di stato non compare  $x_1 \rightarrow x_2(t)$  soddisfa un'equazione differenziale del 1° ordine;

- Se il circuito è reciproco  $a_{12} = 0 \Leftrightarrow a_{21} = 0 \rightarrow$  In questo caso il circuito si riduce a due circuiti del 1° ordine disaccoppiati.

Altrimenti si può procedere all'integrazione della relazione I/O:

$$\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm \sqrt{\Delta}$$

Si distinguono tre casi a seconda del valore di  $\Delta$ :

- $\Delta > 0 \rightarrow \alpha^2 > \omega_0^2$  si ottengono due radici reali distinte ed il circuito si dice **sovrasmorzato**;
- $\Delta = 0 \rightarrow \alpha^2 = \omega_0^2$  si ottengono due radici reali coincidenti ed il circuito si dice **a smorzamento critico**;
- $\Delta < 0 \rightarrow \alpha^2 < \omega_0^2$  si ottengono due radici complesse coniugate ed il circuito si dice **sottosmorzato**.

Studiamo i tre casi.

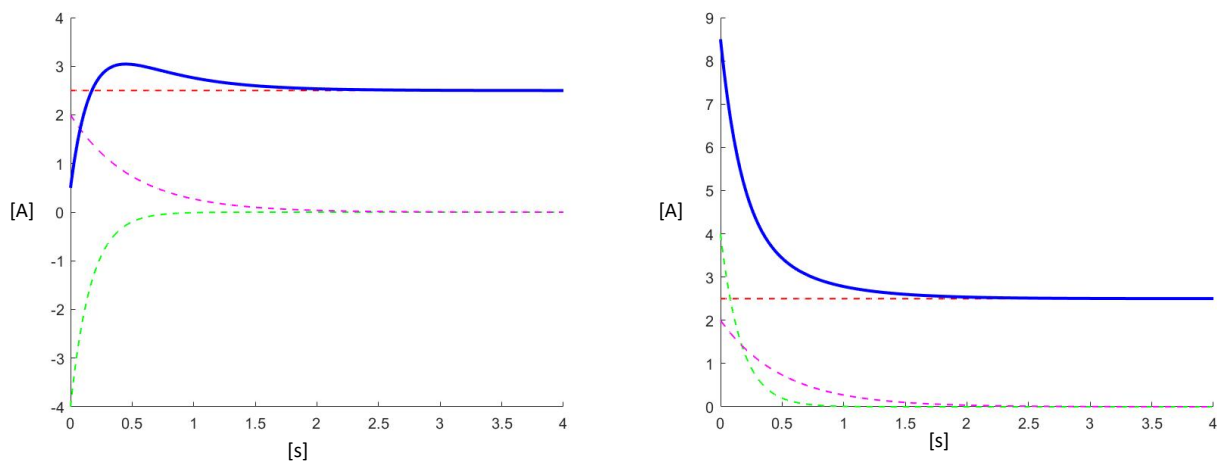
Caso a) Circuito sovrasmorzato

Se  $\alpha^2 > \omega_0^2$ , con  $\alpha > 0$ , e  $\omega_0^2 > 0$ ,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono reali e negative. Il circuito è assolutamente stabile e si dice sovrasmorzato.

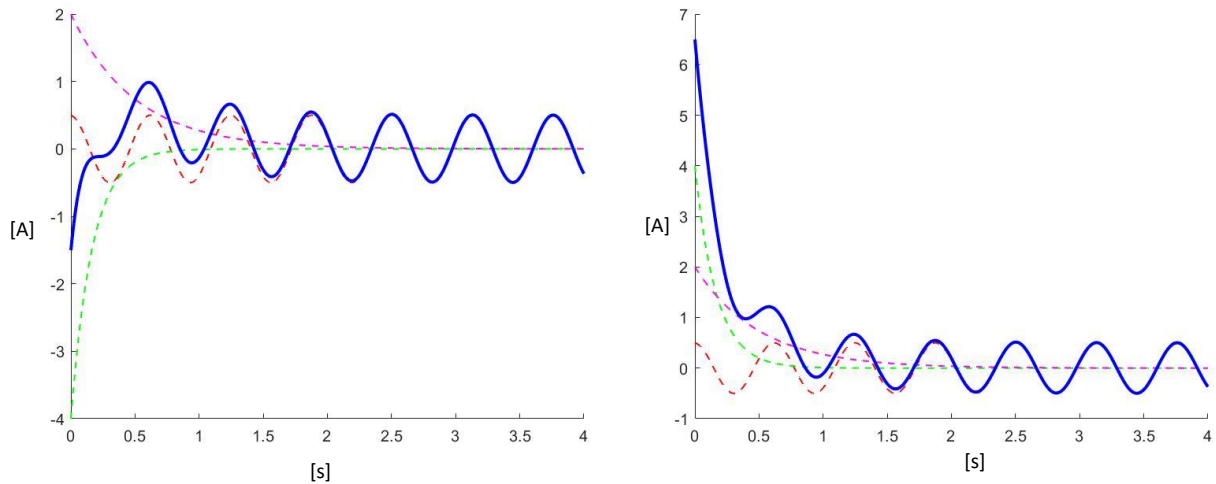
$$y(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + y_p(t)$$

Se l'ingresso è costante,  $y_p$  sarà costante. Si possono avere due andamenti della  $y(t)$  a seconda dei segni di  $A_1$  e  $A_2$ . In Figura 45 sono riportati due possibili andamenti di un circuito del secondo ordine sovrasmorzato con  $A_1$  negativo e  $A_2$  positivo (a sinistra) e con entrambi i coefficienti positivi (a destra) e ingresso costante. In verde è riportato l'andamento del termine  $A_1 e^{\lambda_1 t}$ , in magenta è riportato l'andamento di  $A_2 e^{\lambda_2 t}$ , in rosso l'andamento di  $y_p(t)$ , mentre in blu è riportato l'andamento della risposta completa  $y(t)$ .

Se l'ingresso è sinusoidale, anche  $y_p$  sarà una sinusoide di pari pulsazione. Anche in questo caso si possono avere due andamenti della  $y(t)$  a seconda dei segni di  $A_1$  e  $A_2$ . In Figura 46 sono riportati due possibili andamenti di un circuito del secondo ordine sovrasmorzato con  $A_1$  negativo e  $A_2$  positivo (a sinistra) e con entrambi i coefficienti positivi (a destra) e ingresso sinusoidale. In verde è riportato l'andamento del termine  $A_1 e^{\lambda_1 t}$ , in magenta è riportato l'andamento di  $A_2 e^{\lambda_2 t}$ , in rosso l'andamento di  $y_p(t)$ , mentre in blu è riportato l'andamento della risposta completa  $y(t)$ .



**Figura 45.** Possibili andamenti della risposta di un circuito sovrasmorzato con ingresso costante



**Figura 46.** Possibili andamenti della risposta di un circuito sovrasmorzato con ingresso sinusoidale

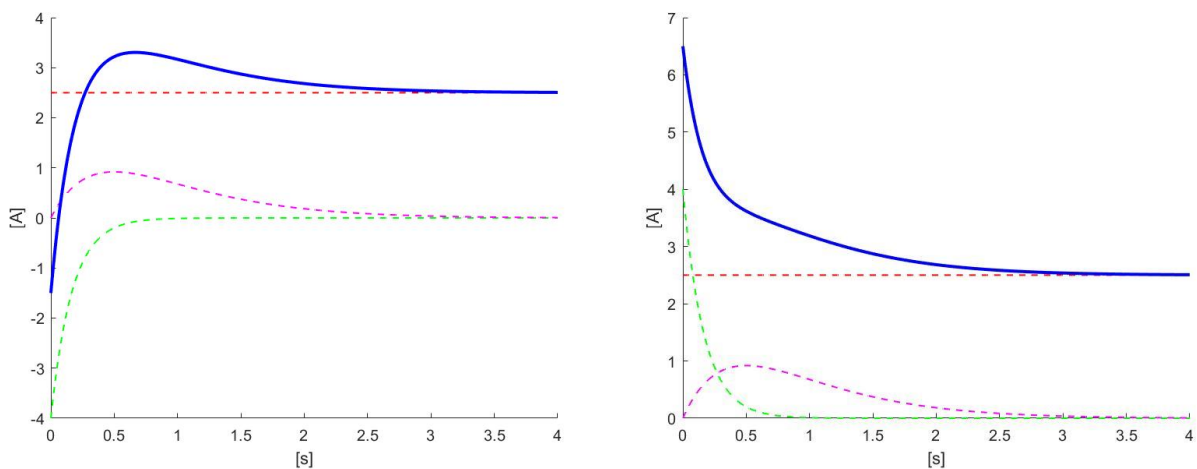
Caso b) Circuito a smorzamento critico

Se  $\alpha^2 = \omega_0^2$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$ . Se  $\alpha > 0$  il circuito è assolutamente stabile e si dice a smorzamento critico.

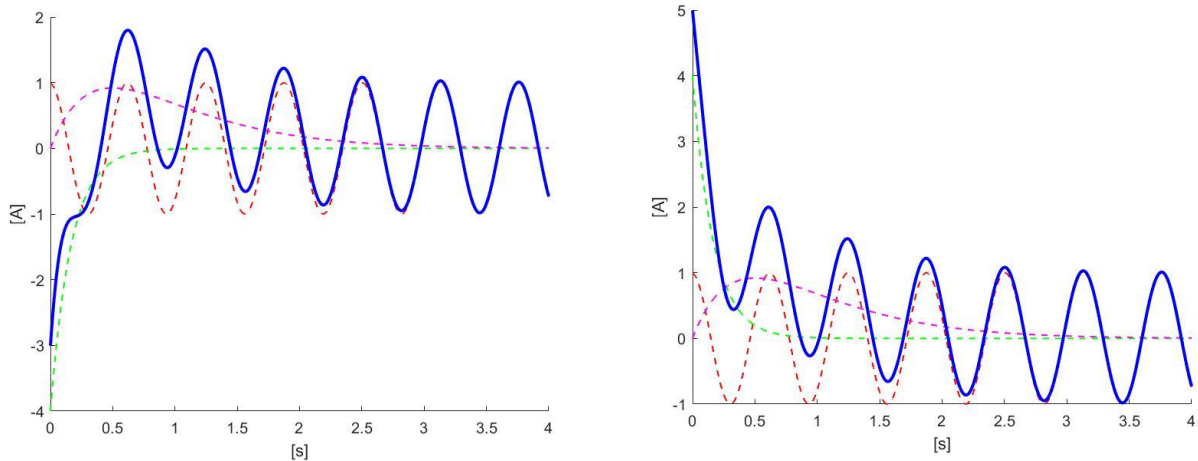
$$y(t) = e^{-\alpha t}(A_1 + A_2 t) + y_p(t)$$

Se l'ingresso è costante,  $y_p$  sarà costante. Si possono avere due andamenti della  $y(t)$  a seconda dei segni di  $A_1$  e  $A_2$ . In Figura 47 sono riportati due possibili andamenti di un circuito del secondo ordine a smorzamento critico con  $A_1$  negativo e  $A_2$  positivo (a sinistra) e con entrambi i coefficienti positivi (a destra) e ingresso costante. In verde è riportato l'andamento del termine  $A_1 e^{-\alpha t}$ , in magenta è riportato l'andamento di  $A_2 t e^{-\alpha t}$ , in rosso l'andamento di  $y_p(t)$ , mentre in blu è riportato l'andamento della risposta completa  $y(t)$ .

Se l'ingresso è sinusoidale,  $y_p$  sarà sinusoidale. Si possono avere due andamenti della  $y(t)$  a seconda dei segni di  $A_1$  e  $A_2$ . In Figura 48 sono riportati due possibili andamenti di un circuito del secondo ordine a smorzamento critico con  $A_1$  negativo e  $A_2$  positivo (a sinistra) e con entrambi i coefficienti positivi (a destra) e ingresso sinusoidale. In verde è riportato l'andamento del termine  $A_1 e^{-\alpha t}$ , in magenta è riportato l'andamento di  $A_2 t e^{-\alpha t}$ , in rosso l'andamento di  $y_p(t)$ , mentre in blu è riportato l'andamento della risposta completa  $y(t)$ .



**Figura 47.** Possibili andamenti della risposta di un circuito a smorzamento critico con ingresso costante



**Figura 48.** Possibili andamenti della risposta di un circuito a smorzamento critico con ingresso sinusoidale

Caso c) Circuito sottosmorzato

Se  $\alpha^2 < \omega_0^2$ , con  $\alpha > 0$ ,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono due radici complesse coniugate a parte reale negativa:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

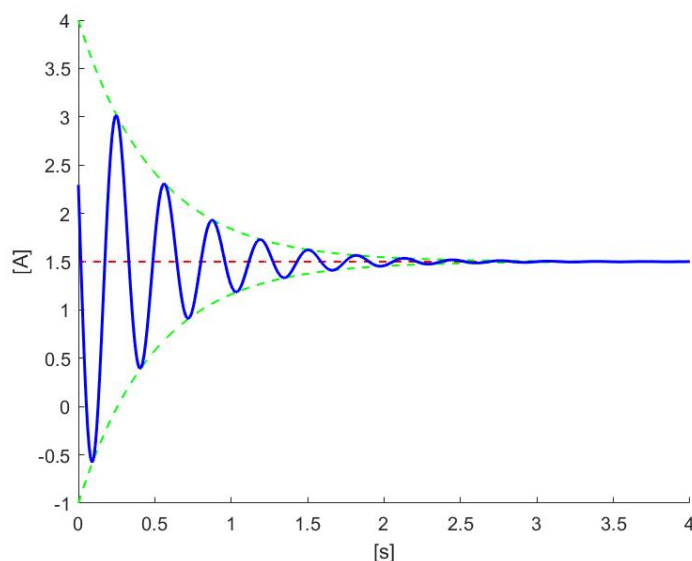
Il circuito è assolutamente stabile e si dice sottosmorzato.

Se  $\alpha > 0$  il circuito è assolutamente stabile e si dice sottosmorzato. L'integrale della relazione I/O è:

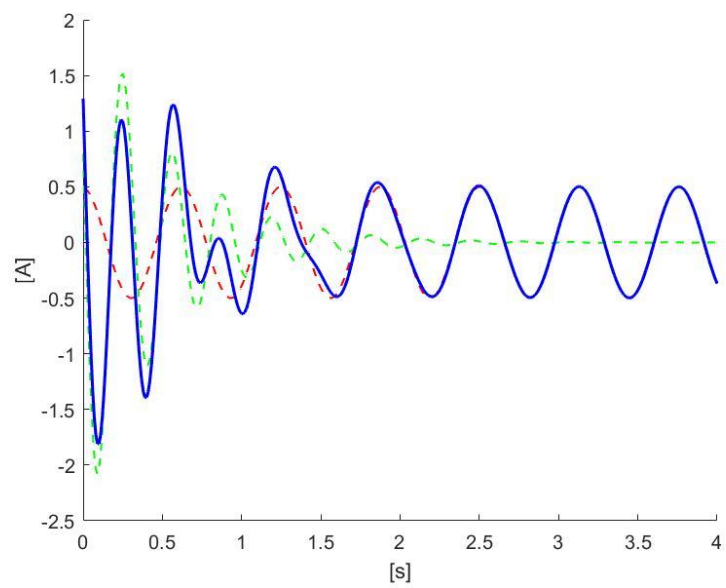
$$y(t) = A \cdot e^{-\alpha t} \cos(j\omega_d t + \varphi) + y_p(t)$$

Se l'ingresso è costante,  $y_p$  sarà costante. In Figura 49 è riportato l'andamento di un circuito del secondo ordine sottosmorzato con ingresso costante. In verde è riportato l'andamento dei termini  $\pm A e^{-\alpha t} + y_p(t)$ , in rosso l'andamento di  $y_p(t)$ , mentre in blu è riportato l'andamento della risposta completa  $y(t)$ .

Se l'ingresso è sinusoidale,  $y_p$  sarà sinusoidale. In Figura 50 è riportato un possibile andamento di un circuito del secondo ordine sottosmorzato con ingresso sinusoidale. In verde è riportato l'andamento del termine  $A \cdot e^{-\alpha t} \cos(j\omega_d t + \varphi)$ , in rosso l'andamento di  $y_p(t)$ , mentre in blu è riportato l'andamento della risposta completa  $y(t)$ .



**Figura 49.** Possibile andamento della risposta di un circuito sottosmorzato con ingresso costante

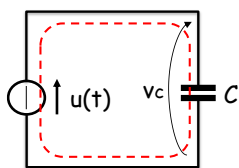


**Figura 50.** Possibile andamento della risposta di un circuito sottosmorzato con ingresso sinusoidale

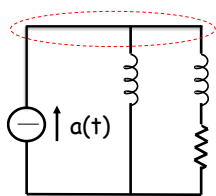
## Condizioni patologiche

Sin qui abbiamo preso in considerazione circuiti non affetti dalle così dette condizioni patologiche. Le condizioni patologiche possono essere di due tipi: maglie di soli generatori di tensione ideali e condensatori (maglie C-E), come nella Figura 51 in alto, oppure co-cicli di soli generatori ideali di corrente e induttori, come ad esempio nella Figura 51 in basso (co-cicli L-A). Si noti che queste configurazioni topologiche possono crearsi nel nostro modello a parametri concentrati in cui abbiamo considerato i modelli ideali del condensatore e dell'induttore. Nella realtà, un condensatore avrà comunque un modello dove compaiono componenti dissipativi, cioè resistori e così pure l'induttore. Quindi in circuiti reali non ci troveremo a trattare configurazioni del genere. Tuttavia, introdotto il modello ideale, dobbiamo essere in grado di analizzare anche circuiti che presentano queste configurazioni patologiche.

### MAGLIA C-E



$$\begin{aligned}
 u(t) &= E\delta_{-1}(t) \text{ GRADINO} \\
 v_c(0^-) &= 0 \\
 v_c(0^+) &= E \\
 i(t) &= C \frac{dv_c}{dt} = CE\delta(t) \\
 &\text{E' PRESENTE UN IMPULSO DI CORRENTE}
 \end{aligned}$$



### COCICLO L-A

**Figura 51.** Circuiti con condizioni patologiche: maglia C-E, in alto e co-ciclo L-A, in basso.

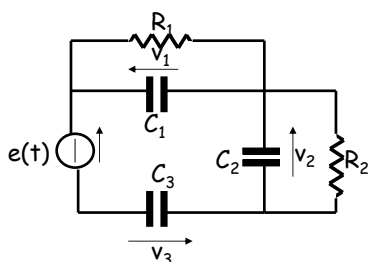
Nel caso dell'esempio in Figura 51 in alto, è presente una maglia C-E. Supponiamo di avere un ingresso a gradino. L'equazione di Kirchhoff alla maglia dice che la tensione  $v_c$  ai capi del condensatore è uguale a quella imposta dal generatore. Allora, se l'ingresso è, ad esempio, un gradino di ampiezza  $E$  la  $v_c$  avrà lo stesso andamento. Quindi il condensatore si caricherà istantaneamente. Il suo stato tra  $t = 0^-$  e  $t = 0^+$  non si conserva. Perché ciò avvenga deve essere presente una corrente impulsiva. Infatti, dall'equazione del condensatore la corrente che attraversa la maglia è:

$$i(t) = C \frac{dv_c}{dt} = CE\delta(t)$$

Si noti, inoltre, che l'ordine del circuito è inferiore di una unità al numero di componenti con memoria, quindi il circuito è di ordine zero.

Analogamente, per il circuito in basso, è presente un co-ciclo L-A, quindi il circuito non è di ordine 2 (numero di componenti con memoria) ma di ordine uno. La presenza di una condizione patologica abbassa di uno l'ordine del circuito. Per ogni condizione patologica esiste una relazione algebrica fra variabili di stato e ingresso (o ingressi), dalla quale è possibile ricavare una delle variabili di stato in funzione delle altre e dell'ingresso (noto). Il numero di variabili di stato effettive si abbassa di una unità per ciascuna condizione patologica.

### Esempio 8 Circuito con una maglia patologica C-E



**Nota: stato in  $0^-$ : nullo**  
 $e(t) = f(t) \cdot \delta_{-1}(t)$  con  $f(0^+) \neq 0$

**Figura 52.** Circuito con una maglia C-E

Prendendo in esame il circuito in Figura 52, ricavare lo stato in  $t = 0^+$  e la relazione I/O per la variabile  $v_1(t)$ . Il circuito è nello stato zero all'istante  $t = 0^-$  e supponiamo di applicare un ingresso che presenta una discontinuità di I specie nell'istante  $t = 0$ .

### Soluzione

Nel circuito è presente una maglia patologica C-E di soli generatori di tensione e condensatori. Per questa maglia è possibile scrivere una relazione algebrica che lega l'ingresso alle variabili di stato:

$$e = v_1 + v_2 + v_3$$

E' quindi possibile esprimere algebricamente una delle variabili di stato in funzione dell'ingresso e delle altre variabili di stato. Le variabili di stato effettive del circuito sono quindi inferiori di una unità rispetto al numero di componenti con stato. Nel caso in esame sono tre i componenti con stato ma solo due sono le variabili di stato effettive. Possiamo sceglierne due qualunque delle tre tensioni ai capi dei condensatori, ad esempio  $v_1$  e  $v_2$ . Note  $v_1$  e  $v_2$  la  $v_3$  è determinata algebricamente dalla equazione di Kirchhoff alla maglia C-E. Il circuito sarà del secondo ordine e non del terzo.

Le equazioni del circuito sono:

$$\begin{cases} e = v_1 + v_2 + v_3 \\ C_1 \frac{dv_1}{dt} + \frac{v_1}{R_1} = C_3 \frac{dv_3}{dt} \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2}{R_2} = C_3 \frac{dv_3}{dt} \end{cases}$$

Da cui si ricavano le due equazioni di stato:

$$\begin{cases} (C_1 + C_3) \frac{dv_1}{dt} + C_3 \frac{dv_2}{dt} + \frac{v_1}{R_1} = C_3 \frac{de}{dt} \\ C_3 \frac{dv_1}{dt} + (C_2 + C_3) \frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2}{R_2} = C_3 \frac{de}{dt} \end{cases} \quad \text{Equazioni di stato}$$

Come si nota, si perde la forma canonica vista per i circuiti senza condizioni patologiche. In generale compariranno anche le derivate degli ingressi.

Per ricavare lo stato in  $0^+$  integriamo le equazioni di stato tra  $0^-$  e  $0^+$ :

$$\begin{cases} (C_1 + C_3)v_1(0^+) + C_3v_2(0^+) = C_3e(0^+) \\ C_3v_1(0^+) + (C_2 + C_3)v_2(0^+) = C_3e(0^+) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1(0^+) = \frac{C_2C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3} e(0^+) \\ v_2(0^+) = \frac{C_1C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3} e(0^+) \end{cases}$$

Lo stato non si è conservato  $0^-$  e  $0^+$ .

Ricaviamo la relazione I/O:

$$\frac{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}{C_3(C_2 + C_3)} \frac{d^2v_1}{dt^2} + \left[ \frac{1}{R_1C_3} + \frac{1}{R_2C_3} \frac{C_1 + C_3}{C_2 + C_3} \right] \frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{R_1R_2C_3(C_2 + C_3)} v_1$$

$$= \frac{1}{R_2(C_2 + C_3)} \frac{de}{dt} + \frac{C_2}{C_2 + C_3} \frac{d^2e}{dt^2} \quad n = m$$

Essa è una equazione differenziale del 2° ordine, come volevamo dimostrare, con l'ordine di derivazione dell'ingresso uguale a quello dell'uscita  $m = n$ .

□

### Esempio 9 Circuito con un co-ciclo L-A

Si consideri il circuito in Figura 53. Il circuito è nello stato zero all'istante  $t = 0^-$ . Supponiamo di applicare un ingresso che presenta una discontinuità al più di 1° specie nell'istante  $t = 0$ :

$$a(t) = f(t) \cdot \delta_{-1}(t)$$

Determinare lo stato del circuito in  $t = 0^+$  e l'andamento delle variabili di stato per  $t > 0$  per i seguenti ingressi:

- Ingresso a gradino  $a(t) = A\delta_{-1}(t)$
- Ingresso sinusoidale  $a(t) = A \cos(\omega_0 t) \cdot \delta_{-1}(t)$
- Ingresso a rampa  $a(t) = Bt\delta_{-1}(t)$

- Ingresso triangolare:

$$a(t) = \begin{cases} Bt\delta_{-1}(t) & \text{per } t < T \\ 0 & \text{per } t > T \end{cases}$$

$$a(t) = Bt\delta_{-1}(t) - B(t-T)\delta_{-1}(t-T) - BT\delta_{-1}(t-T)$$

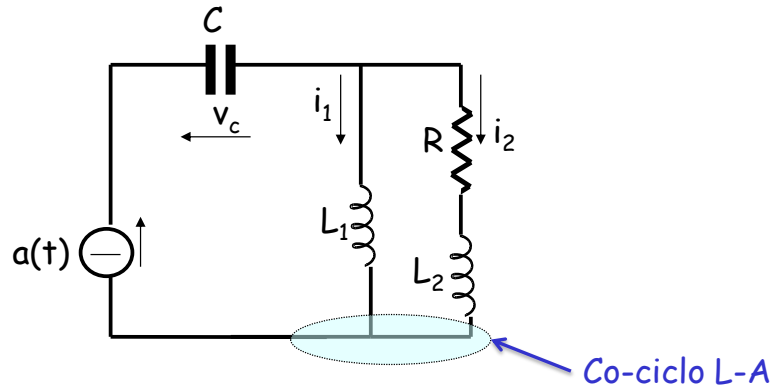


Figura 53. Circuito con un co-ciclo L-A

### Soluzione

Analizziamo il circuito in Figura 53. In esso è presente una condizione patologica, cioè un co-ciclo LA. Anche in questo caso sono tre i componenti con memoria ma le variabili di stato effettive sono due e l'ordine del circuito sarà il 2°.

Scriviamo le equazioni del circuito:

$$\begin{cases} a(t) = i_1 + i_2 \\ L_1 \frac{di_1}{dt} = Ri_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \\ a(t) = C \frac{dv_c}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{di_1}{dt} = \frac{da}{dt} - \frac{di_2}{dt} \\ L_1 \frac{di_1}{dt} = Ri_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \\ a(t) = C \frac{dv_c}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_1 \frac{da}{dt} - L_1 \frac{di_2}{dt} = Ri_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \\ a(t) = C \frac{dv_c}{dt} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \otimes \begin{cases} (L_1 + L_2) \frac{di_2}{dt} + Ri_2 = L_1 \frac{da}{dt} \\ \frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C} a(t) \end{cases}$$

Le equazioni  $\otimes$  sono sia equazioni di stato che anche relazioni I/O rispettivamente per  $i_2$  e per  $v_c$ . Quindi  $i_2$  e  $v_c$  si otterranno integrando le due relazioni I/O del 1° ordine. Infatti la configurazione topologica disaccoppia le variabili  $v_c$  e  $i_2$  tra loro. Nota  $i_2$  si ricaverà  $i_1$  dalla espressione algebrica ottenuta applicando la LKI al co-ciclo patologico.

Dalle  $\otimes$ , integrando fra  $0^-$  e  $0^+$  si ottengono le variabili di stato in  $0^+$ :

$$\begin{cases} (L_1 + L_2)i_2(0^+) = L_1 a(0^+) = L_1 f(0^+) \\ 0 = Cv_c(0^+) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_2(0^+) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} f(0^+) \\ v_c(0^+) = 0 \end{cases}$$

$$i_1(0^+) = a(0^+) - i_2(0^+) = f(0^+) \left[ 1 - \frac{L_1}{L_1 + L_2} \right] = \frac{L_2}{L_1 + L_2} f(0^+)$$

Lo stato in  $0^+$  andrà particolarizzato a seconda dell'ingresso considerato.

Caso a) Ingresso a gradino  $a(t) = A\delta_{-1}(t)$

Supponiamo che l'ingresso sia un gradino nell'origine di ampiezza  $A$ . Integrando la prima delle  $\otimes$ , si ottiene:

$$(L_1 + L_2) \frac{di_2}{dt} + Ri_2 = 0 \Rightarrow i_{2p} = 0$$

$$(L_1 + L_2)\lambda + R = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{R}{L_1 + L_2} \text{ frequenza libera}$$

$$i_2(t) = Ke^{\lambda t}$$

$$i_2(0^+) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} A = K \Rightarrow i_2(t) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} A e^{-\frac{R}{L_1 + L_2} t} \quad t > 0$$

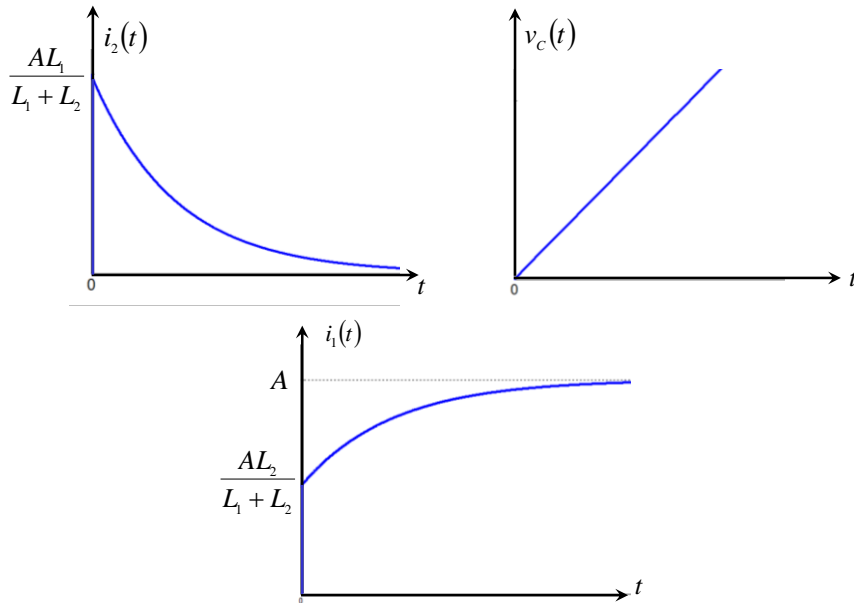
Integrando la seconda delle  $\otimes$ , si ottiene:

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int_{0^+}^t A \cdot d\tau + v_c(0^+) = \frac{A}{C} t \quad t > 0$$

Infine, dalle relazione algebrica che lega le due variabili di stato correnti:

$$i_1(t) = a(t) - i_2(t) = A \left[ 1 - \frac{L_1}{L_1 + L_2} A e^{-\frac{R}{L_1 + L_2} t} \right] \quad t > 0$$

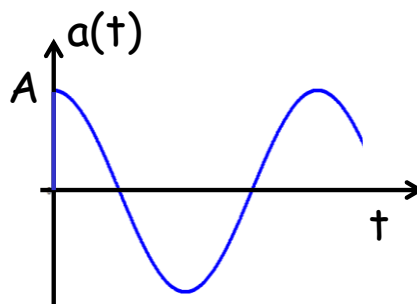
In Figura 54 sono riportati i grafici delle tre grandezze analizzate.



**Figura 54.** Grafico delle grandezze  $i_2(t)$ ,  $v_c(t)$  e  $i_1(t)$  per ingresso a gradino

Caso b) Ingresso sinusoidale  $a(t) = A \cos(\omega_0 t) \cdot \delta_{-1}(t)$

Supponiamo ora che l'ingresso sia co-sinusoidale. Anche in questo caso l'ingresso presenta una discontinuità di I specie (vedi Figura 55).



**Figura 55.** Ingresso co-sinusoidale

Integriamo la prima delle  $\otimes$ . La frequenza libera sarà:

$$\lambda = -\frac{R}{L_1 + L_2}$$

L'integrale particolare sarà:

$$i_{2p}(t) = H \cos \omega_0 t + K \sin \omega_0 t$$

da cui:

$$\frac{di_{2p}}{dt} = \omega_0 [-H \sin \omega_0 t + K \cos \omega_0 t]$$

Sostituendo nella relazione I/O:

$$(L_1 + L_2)\omega_0[-H \sin \omega_0 t + K \cos \omega_0 t] + R[H \cos \omega_0 t + K \sin \omega_0 t] = L_1 A(-\omega_0 \sin \omega_0 t)$$

Eguagliando i coefficienti dei termini in seno e coseno:

$$\begin{cases} -\omega_0(L_1 + L_2)H + RK = -\omega_0 L_1 A \\ \omega_0(L_1 + L_2)K + RH = 0 \end{cases} \Rightarrow H = \frac{-\omega_0(L_1 + L_2)K}{R}$$

$$\left[ \frac{\omega_0^2(L_1 + L_2)^2}{R} + R \right] K = -\omega_0 L_1 A \Rightarrow \begin{cases} K = \frac{-\omega_0 L_1 A R}{R^2 + \omega_0^2(L_1 + L_2)^2} \\ H = \frac{\omega_0^2 L_1 (L_1 + L_2) A}{R^2 + \omega_0^2(L_1 + L_2)^2} \end{cases}$$

da cui, l'integrale particolare è:

$$i_{2p} = \frac{\omega_0 L_1 A}{R^2 + \omega_0^2(L_1 + L_2)^2} [\omega_0(L_1 + L_2) \cos \omega_0 t - R \sin \omega_0 t]$$

Sostituito nella risposta:

$$i_2(t) = N e^{\lambda t} + i_{2p} = N e^{\lambda t} + \frac{\omega_0 L_1 A}{R^2 + \omega_0^2(L_1 + L_2)^2} [\omega_0(L_1 + L_2) \cos \omega_0 t - R \sin \omega_0 t]$$

Applichiamo la condizione iniziale per ricavare la costante di integrazione:

$$i_2(0^+) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} A = N + \frac{\omega_0 L_1 A}{R^2 + \omega_0^2(L_1 + L_2)^2} \cdot \omega_0(L_1 + L_2) \rightarrow$$

$$N = \frac{L_1}{L_1 + L_2} A - \frac{\omega_0 L_1 A}{R^2 + \omega_0^2(L_1 + L_2)^2} \cdot \omega_0(L_1 + L_2)$$

$$i_2(t) = A \cdot \left[ \frac{L_1}{L_1 + L_2} - \frac{\omega_0 L_1}{R^2 + \omega_0^2(L_1 + L_2)^2} \cdot \omega_0(L_1 + L_2) \right] e^{\lambda t}$$

$$+ A \frac{\omega_0 L_1}{R^2 + \omega_0^2(L_1 + L_2)^2} [\omega_0(L_1 + L_2) \cos \omega_0 t - R \sin \omega_0 t]$$

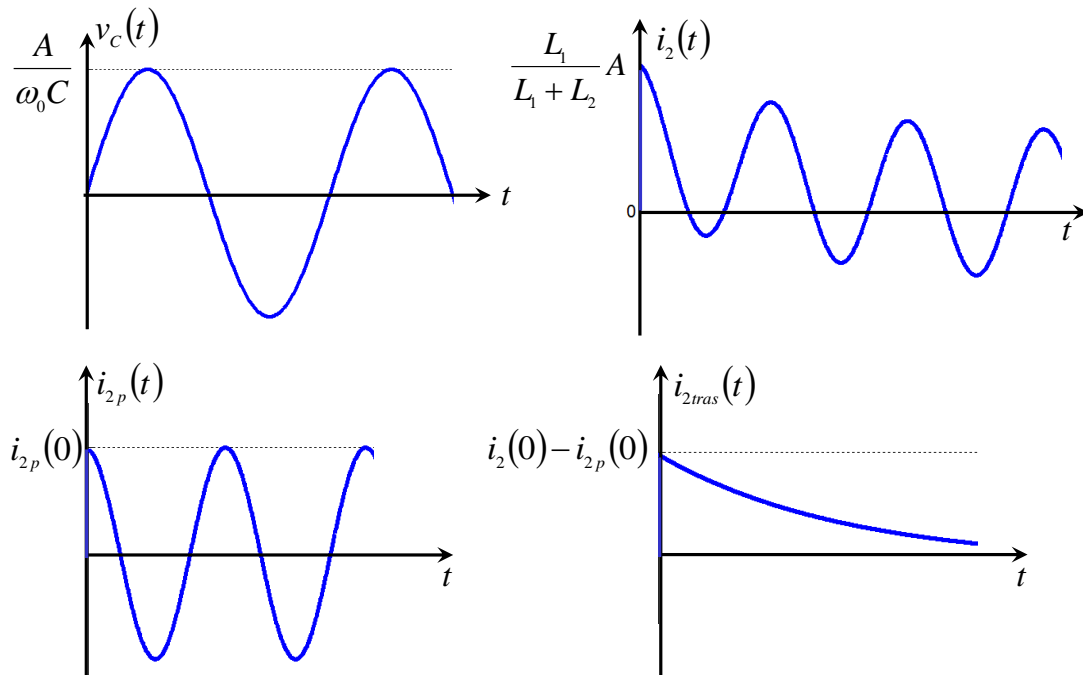
La  $i_2(t)$  è la somma di un esponenziale decrescente e di una sinusoidale.

Integriamo la seconda delle  $\otimes$ :

$$v_c(t) = v_c(0^+) + \frac{1}{C} \int_{0^+}^t A \cos(\omega_0 \tau) \cdot d\tau = \frac{1}{\omega_0 C} A \sin(\omega_0 t)$$

La  $v_c(t)$  è una sinusoidale.

In Figura 56 sono riportati i grafici delle due grandezze analizzate.



**Figura 56.** Grafico delle grandezze  $i_2(t)$  e  $v_c(t)$  per ingresso sinusoidale

Per  $t \rightarrow \infty$ ,  $i_2(t)$  coincide con  $i_{2p}(t)$ . Il circuito raggiunge il regime sinusoidale.

Caso c) Ingresso a rampa  $a(t) = Bt\delta_{-1}(t)$

Supponiamo che l'ingresso sia una rampa di coefficiente angolare  $B$ . Poiché il circuito analizzato è nello stato zero in  $t = 0^-$ , possiamo sfruttare le proprietà della risposta nello stato zero. Quindi essendo l'ingresso l'integrale del gradino unitario moltiplicato per  $B$ , anche la risposta sarà l'integrale della risposta al gradino unitario, moltiplicata per  $B$ .

Per un ingresso a gradino  $A\delta_{-1}(t)$ , abbiamo trovato precedentemente le uscite:

$$\begin{cases} i_{2g} = \frac{AL_1 e^{-\frac{R}{L_1+L_2}t}}{L_1 + L_2} \\ v_{cg} = \frac{A}{C}t \end{cases}$$

Per l'ingresso al gradino unitario  $\delta_{-1}(t)$ , le uscite saranno quelle precedenti divise per  $A$ :

$$\begin{cases} \frac{i_{2g}}{A} = \frac{L_1 e^{-\frac{R}{L_1+L_2}t}}{L_1 + L_2} \\ \frac{v_{cg}}{A} = \frac{1}{C}t \end{cases}$$

Allora per un ingresso a rampa di coefficiente angolare  $B$  sarà:

$$\begin{cases} i_{2r} = \frac{BL_1}{L_1 + L_2} \int_0^t e^{-\frac{R}{L_1+L_2}\tau} d\tau = \frac{BL_1}{L_1 + L_2} \left( -\frac{L_1 + L_2}{R} \right) [e^{-\lambda t} - 1] \\ v_{cr} = \frac{B}{C} \int_0^t \tau \cdot d\tau = \frac{1}{2} \frac{B}{C} t^2 \end{cases}$$

In Figura 57 sono riportati i grafici delle due grandezze analizzate.

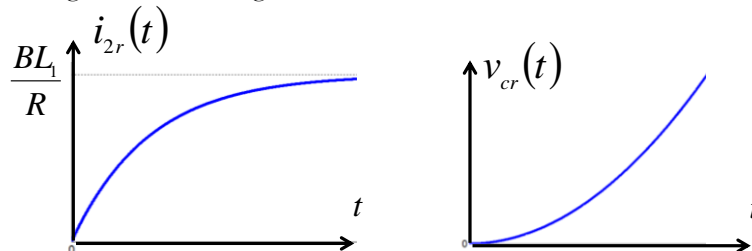


Figura 57. Grafico delle grandezze  $i_2(t)$  e  $v_c(t)$  per ingresso a rampa.

Caso d) Ingresso triangolare  $a(t) = \begin{cases} Bt\delta_{-1}(t) & \text{per } t < T \\ 0 & \text{per } t > T \end{cases}$

Supponiamo di applicare un ingresso triangolare, come quello riportato in Figura 58. Come per tutti i segnali lineari a tratti, esso può essere scomposto in gradini e rampe:

$$a(t) = Bt\delta_{-1}(t) - B(t - T)\delta_{-1}(t - T) - BT\delta_{-1}(t - T)$$

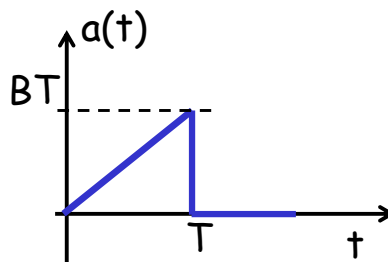


Figura 58. Ingresso triangolare

Sfruttando le proprietà della risposta nello stato zero, e avendo già calcolato le risposte all'ingresso a gradino e all'ingresso a rampa, la risposta all'ingresso triangolare può essere ottenuto dalla stessa combinazione lineare delle risposte al gradino unitario:

$$\delta_{-1}(t) \Rightarrow i_{2g} = \frac{L_1}{L_1 + L_2} e^{-\frac{R}{L_1+L_2}t} \delta_{-1}(t)$$

Ed alla rampa di coefficiente angolare unitario:

$$t\delta_{-1}(t) \Rightarrow i_{2r} = \frac{L_1}{R} \left[ 1 - e^{-\frac{R}{L_1+L_2}t} \right] \delta_{-1}(t)$$

Per la variabile  $i_2(t)$  si ottiene:

$$i_2(t) = Bi_{2r}\delta_{-1}(t) - Bi_{2r}(t - T)\delta_{-1}(t - T) - BTi_{2g}(t - T)\delta_{-1}(t - T)$$

□

### Memorizzazione dello stato iniziale

Come visto nell'esempio 8, le proprietà della risposta nello stato zero sono molto utili per analizzare circuiti alimentati da segnali riconducibili a combinazioni lineari di segnali canonici. Se il circuito non è nello stato zero queste proprietà non valgono e l'analisi di questi circuiti diventa più complessa. Si può tuttavia ricorrere ad un artificio e ricondurre il circuito nello stato zero introducendo opportune variabili fittizie che hanno valore nullo in un istante iniziale.

In particolare, nel caso del condensatore, se esso presenta un valore di tensione all'istante  $0^-$  diverso da zero (pari ad esempio a  $V_0$ ), può essere rappresentato dalla equazione:

$$v_c(t) = \int_0^t \frac{1}{C} i(\tau) d\tau + \text{cost}$$

ed essendo

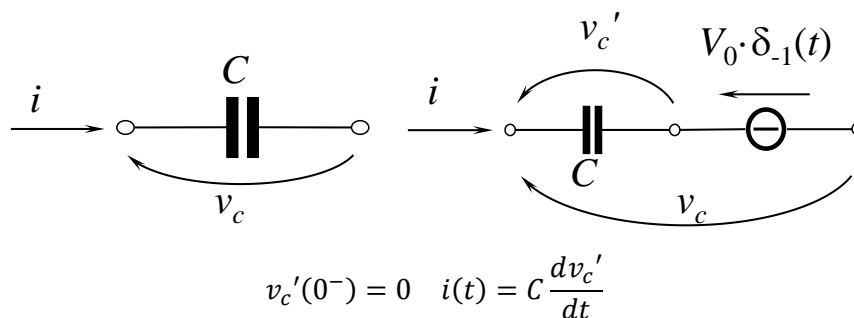
$$v_c(t) = \frac{q(t)}{C}$$

L'integrale rappresenta il rapporto fra la carica e la capacità, e cioè l'incremento di tensione a partire da  $t = 0$  e sarà:

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int_{0^-}^t i d\tau + V_0 = \frac{1}{C} \cdot q(t \geq 0^-) + V_0$$

dove  $V_0$  è la tensione del condensatore all'istante  $0^-$ .

Questa equazione corrisponde ad un equivalente circuitale di Figura 59, costituito da un condensatore scarico in serie con un generatore di tensione a gradino di ampiezza pari proprio alla tensione  $V_0$ .



**Figura 59.** Condensatore carico (a sinistra) ed equivalente con condensatore scaricato (a destra)

La variabile di stato associata a questo nuovo circuito è  $lav'_c(t)$  che gode della proprietà di essere nulla in  $0^-$ . Questa nuova variabile di stato è legata alla variabile di stato effettiva dalla relazione:

$$v_c(t) = v'_c(t) + V_0$$

Una volta determinata la tensione fittizia, si può risalire a quella effettiva sommando il valore  $V_0$ .

Quindi lo stato del condensatore può essere memorizzato mediante un generatore di tensione.

Analogamente, nel caso dell' induttore, se esso presenta un valore di corrente all'istante  $0^-$  diverso da zero, esso può essere rappresentato dall'equazione:

$$i_L(t) = \int_0^t \frac{1}{L} v(\tau) d\tau + \text{cost}$$

ed essendo

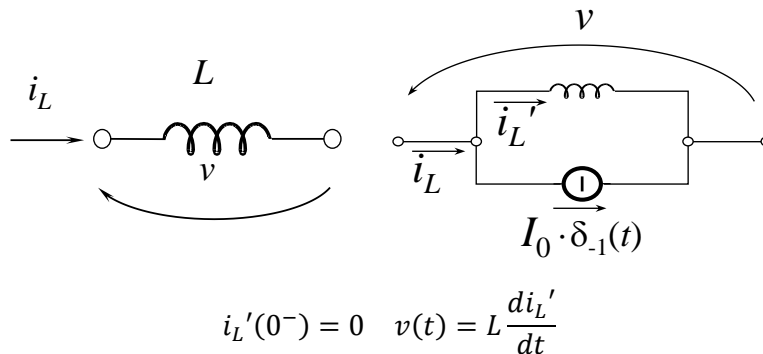
$$i_L(t) = \frac{\phi(t)}{L}$$

Sarà:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{0^-}^t v dt + I_0 = \frac{1}{L} \cdot \phi(t \geq 0^-) + I_0$$

dove  $I_0$  è la corrente dell'induttore all'istante  $0^-$ .

Questa equazione corrisponde ad un equivalente circuitale di Figura 60, costituito da un induttore scarico in parallelo con un generatore di corrente a gradino di ampiezza pari proprio alla corrente  $I_0$ .



**Figura 60.** Induttore carico (a sinistra) ed equivalente con induttore scarico (a destra)

La variabile di stato associata a questo nuovo circuito è la  $i'_L(t)$  che gode della proprietà di essere nulla in  $0^-$ . Questa nuova variabile di stato è legata alla variabile di stato effettiva dalla relazione:

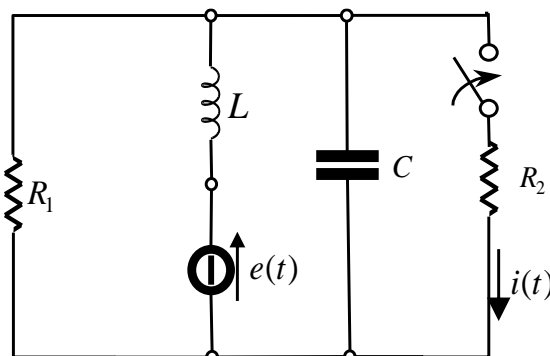
$$i_L(t) = i'_L(t) + I_0$$

Una volta determinata la corrente fittizia, si può risalire a quella effettiva sommando il valore  $I_0$ . Quindi lo stato dell'induttore può essere memorizzato mediante un generatore di corrente.

Operando in questo modo su tutti i componenti con stato è possibile risolvere il problema di analisi facendo riferimento al circuito "scaricato" utilizzando quindi le proprietà della risposta nello stato zero.

### Esempio 10 Circuito con stato iniziale non nullo

Nel circuito di Figura 61 il tasto è aperto per  $t < 0$  ed il circuito è a regime. In  $t = 0$  il tasto si chiude. Calcolare  $i(t)$  per  $t > 0$ .



**Figura 61.** Circuito del secondo ordine con stato non nullo

Sono noti:

$$e(t) = \frac{1}{2} \cdot \delta_{-1}(-t) + \delta_{-1}(t) + \delta_{-1}(t - T) \quad T = 5s;$$

$$R_1 = 3\Omega; R_2 = 1\Omega; C = 1/3F; L = 3/4H.$$

Tracciarne l'andamento qualitativo.

## Soluzione

Analizziamo il circuito per  $t < 0$ . Esso è in regime stazionario, e il tasto è aperto. L'induttore si comporta da cortocircuito. Il circuito da analizzare è il seguente di Figura 62.

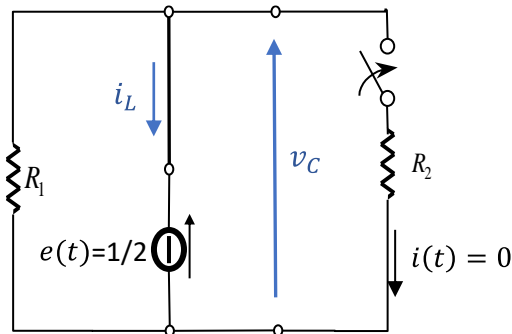


Figura 62. Circuito di Figura 61 per  $t < 0$

$$v_c(0^-) = \frac{1}{2} V$$

$$i_L(0^-) = -\frac{1}{6} A$$

Lo stato iniziale non è nullo. Se vogliamo utilizzare le proprietà della risposta nello stato zero possiamo scaricare i componenti che presentano stato. Il circuito da analizzare per  $t > 0$  è riportato in Figura 63:

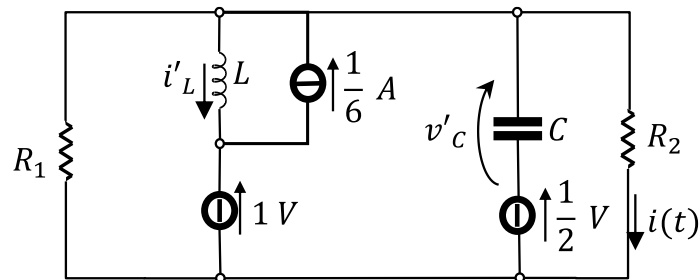


Figura 63. Circuito scaricato

$$v'_c(0^+) = 0$$

$$i'_L(0^+) = 0$$

$$i(t) = \frac{v'_c + \frac{1}{2}}{R_2} = v'_c + \frac{1}{2}$$

Scriviamo le equazioni del circuito (sono anche equazioni di stato):

$$\begin{cases} 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{di'_L}{dt} = v'_c + \frac{1}{2} \\ \frac{v'_c + \frac{1}{2}}{3} + i'_L - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \frac{dv'_c}{dt} + v'_c + \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{4} \cdot \frac{di'_L}{dt} = v'_c - \frac{1}{2} \rightarrow \frac{di'_L}{dt} = \frac{4}{3} \cdot v'_c - \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{dv'_c}{dt} + \frac{4}{3} \cdot v'_c + \frac{1}{2} + i'_L = 0 \rightarrow \frac{dv'_c}{dt} = -4v'_c - 3i'_L - \frac{3}{2} \end{cases}$$

Da cui, le equazioni di stato in forma canonica sono:

$$\begin{cases} \frac{dv'_c}{dt} = -4v'_c - 3i'_L - \frac{3}{2} \\ \frac{di'_L}{dt} = \frac{4}{3} \cdot v'_c - \frac{2}{3} \end{cases}$$

Ricaviamo dalla prima delle equazioni di stato:

$$i'_L = -\frac{1}{3} \frac{dv'_c}{dt} - \frac{4}{3} v'_c - \frac{1}{2} \rightarrow \frac{di'_L}{dt} = -\frac{1}{3} \frac{d^2 v'_c}{dt^2} - \frac{4}{3} \frac{dv'_c}{dt}$$

Sostituendo nella seconda:

$$\frac{1}{3} \frac{d^2 v'_c}{dt^2} - \frac{4}{3} \frac{dv'_c}{dt} + \frac{4}{3} v'_c - \frac{2}{3} = 0$$

$$\frac{d^2 v'_c}{dt^2} + 4 \frac{dv'_c}{dt} + 4v'_c = 2$$

L'integrale particolare sarà una costante di valore pari ad  $\frac{1}{2}$

Calcolo dell'omogenea associata:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

$\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-4} = -2$  radici reali negative e coincidenti. Il circuito è assolutamente stabile

$$v'_c(t) = e^{-2t}(A + Bt) + \frac{1}{2}$$

Calcoliamo le condizioni iniziali:

$$v'_c(0^+) = 0$$

Dalla prima delle equazioni di stato calcolata in  $0^+$

$$\left. \frac{dv'_c}{dt} \right|_{0^+} = -\frac{3}{2}$$

Applichiamole:

$$v'_c(0^+) = 0 = (A) + \frac{1}{2} \rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{dv'_c}{dt} = -2e^{-2t}(A + Bt) + e^{-2t}(B)$$

$$\left. \frac{dv'_c}{dt} \right|_{0^+} = -\frac{3}{2} = -2 \cdot A + B \rightarrow B = -1 - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$v'_c(t) = e^{-2t} \left( -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}t \right) + \frac{1}{2}$$

Da cui, la risposta al gradino unitario è:

$$i_{gr}(t) = \left[ 1 - \frac{1}{2} e^{-2t}(1 + 5t) \right] \delta_{-1}(t)$$

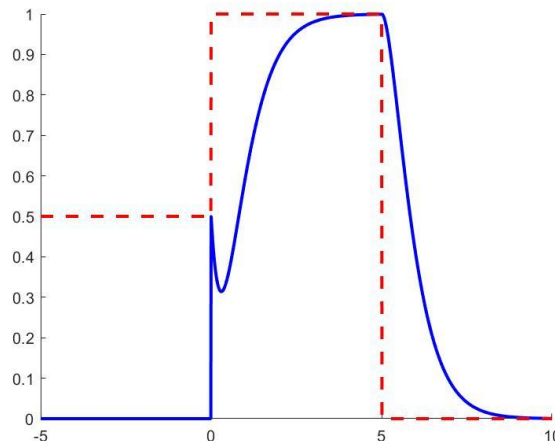
Per  $t > 0$  la risposta all'ingresso

$$e(t) = \delta_{-1}(t) + \delta_{-1}(t - T) \quad \text{con } T = 5s$$

sarà:

$$i(t) = \left[ 1 - \frac{1}{2} e^{-2t}(1 + 5t) \right] \delta_{-1}(t) - \left[ 1 - \frac{1}{2} e^{-2(t-5)}(1 - 5(t+5)) \right] \delta_{-1}(t - 5)$$

L'andamento completo della risposta  $i(t)$  è riportato in Figura 64:



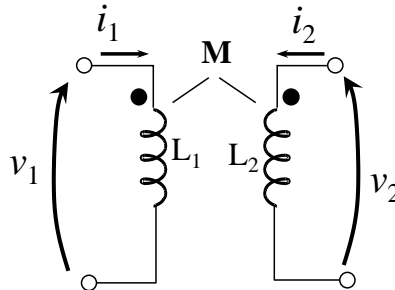
**Figura 64.** Andamento della  $i(t)$  (blu) e dell'ingresso  $e(t)$  (rosso) nel circuito di Figura 61.

□

### Mutua induttanza

Tra i componenti che presentano stato vi sono anche le mutue induttanze. Queste possono avere stato non nullo in all'istante  $0^-$  si può presentare l'esigenza di "scaricare" questo componente, così come fatto per l'induttore ed il capacitore.

Supponiamo, quindi, di avere una mutua induttanza come in Figura 65, e che questa non sia nello stato zero.



**Figura 65.** Rappresentazione circuitale di una mutua induttanza

Le variabili di stato associate alla mutua sono le due correnti  $i_1$  ed  $i_2$ . Le equazioni del componente sono:

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases} \Rightarrow$$

Esse possono essere anche scritte nella forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Invertendo il sistema si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{di_1}{dt} = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} v_1 - \frac{M}{L_1 L_2 - M^2} v_2 \\ \frac{di_2}{dt} = -\frac{M}{L_1 L_2 - M^2} v_1 + \frac{L_1}{L_1 L_2 - M^2} v_2 \end{cases}$$

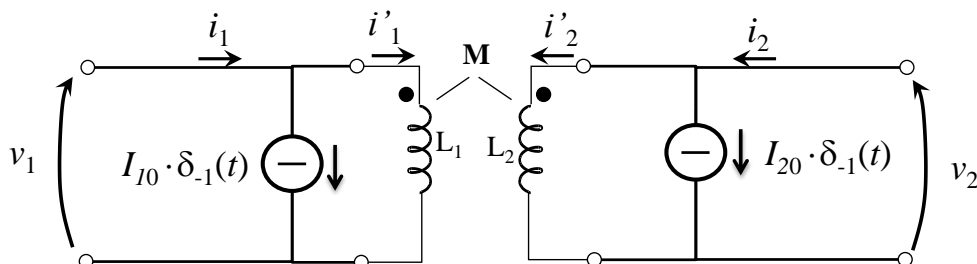
In  $t = 0^-$  lo stato sia:

$$i_1(0^-) = I_{10}; \quad i_2(0^-) = I_{20}$$

Le equazioni della mutua carica assumono quindi la forma:

$$\begin{cases} i_1(t) = \left[ I_{10} + \int_{0^-}^t \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} v_1(t) dt - \int_{0^-}^t \frac{M}{L_1 L_2 - M^2} v_2(t) dt \right] \delta_{-1}(t) \\ i_2(t) = \left[ I_{20} - \int_{0^-}^t \frac{M}{L_1 L_2 - M^2} v_1(t) dt + \int_{0^-}^t \frac{L_1}{L_1 L_2 - M^2} v_2(t) dt \right] \delta_{-1}(t) \end{cases}$$

Anche in questo caso possiamo ricavare un equivalente circuitale della mutua carica introducendo delle variabili scaricate, come riportato in Figura 66:

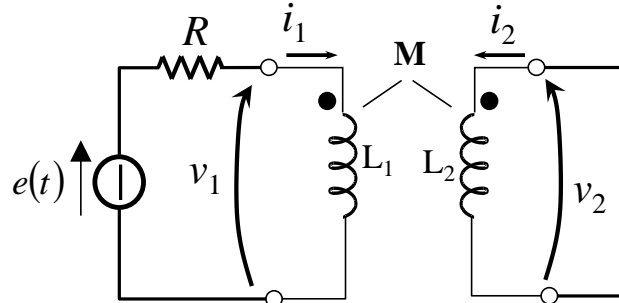


**Figura 66.** Equivalente circuitale di una mutua induttanza con stato iniziale diverso da zero

$$i_1(t) = i'_1(t) + I_{10} \quad i_2(t) = i'_2(t) + I_{20}$$

**Esempio 11** Circuito con mutua induttanza con stato iniziale non nullo

Determinare  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  per  $t > 0$  nel circuito di Figura 67.



**Figura 67.** Circuito contenente una mutua induttanza

Caso 1)

Ipotesi:

- stato nullo in  $t = 0^-$
- $e(t) = E\delta_{-1}(t)$

Il vettore di stato è:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Il circuito è del secondo ordine.

Le equazioni del circuito sono:

$$\begin{cases} e(t) = Ri_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{di_2}{dt} = -\frac{M}{L_2} \frac{di_1}{dt} \end{cases} \Rightarrow \left( \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} \right) \frac{di_1}{dt} + Ri_1 = e(t)$$

$$\lambda = -\frac{RL_2}{L_1 L_2 - M^2} \quad \text{reale negativo infatti} \quad \Delta = L_1 L_2 - M^2 > 0$$

$$i_1(t) = Ae^{\lambda t} + i_{1p} i_{1p} = k(\text{costante}) \Rightarrow Rk = E \Rightarrow k = \frac{E}{R}$$

Non ci sono condizioni patologiche e l'ingresso ha una discontinuità di 1ª specie, quindi lo stato si conserva tra  $t = 0^-$  e  $t = 0^+$

$$i_1(0^+) = i_1(0^-) = 0$$

$$0 = A + \frac{E}{R} \Rightarrow A = -\frac{E}{R}$$

$$i_1(t) = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{RL_2}{\Delta} t} \right) \delta_{-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{di_2}{dt} = -\frac{M}{L_2} \frac{di_1}{dt} &\Rightarrow \int_{0^-}^t \frac{di_2}{dt} dt = -\frac{M}{L_2} \int_{0^-}^t \frac{di_1}{dt} dt \Rightarrow i_2(t) - i_2(0^-) = -\frac{M}{L_2} [i_1(t) - i_1(0^-)] \Rightarrow i_2(t) \\ &= -\frac{M}{L_2} i_1(t) \end{aligned}$$

$$i_2(t) = -\frac{ME}{L_2 R} \left( 1 - e^{-\frac{RL_2}{\Delta} t} \right) \delta_{-1}$$

Nelle Figure 68 e 69 sono riportati i grafici delle due grandezze:

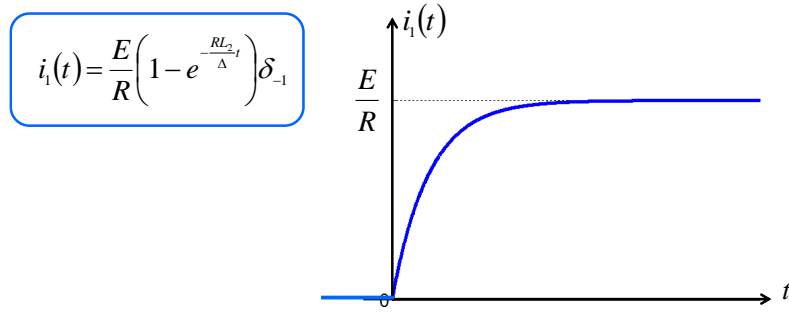


Figura 68. Grafico di  $i_1(t)$

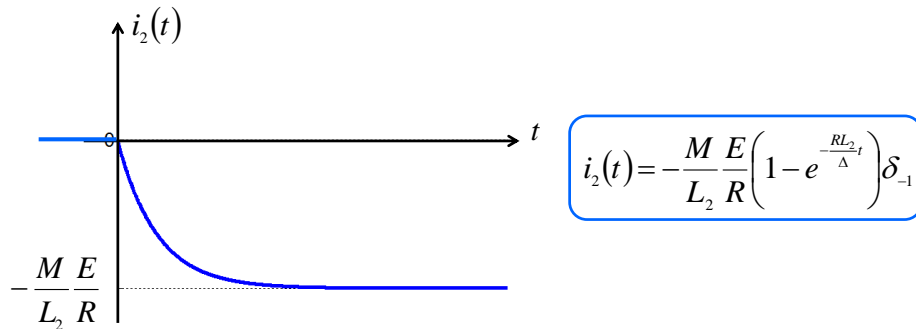


Figura 69. Grafico di  $i_2(t)$

Calcoliamo le tensioni:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} \frac{di_1}{dt}$$

$$v_1 = \frac{\Delta}{L_2} \cdot \left( \frac{RL_2}{\Delta} \cdot \frac{E}{R} e^{-\frac{RL_2 t}{\Delta}} \right) \delta_{-1} = \left( E \cdot e^{-\frac{RL_2 t}{\Delta}} \right) \delta_{-1}$$

$$v_2(t) = 0$$

In Figura 70 è tracciato il grafico della  $v_1(t)$

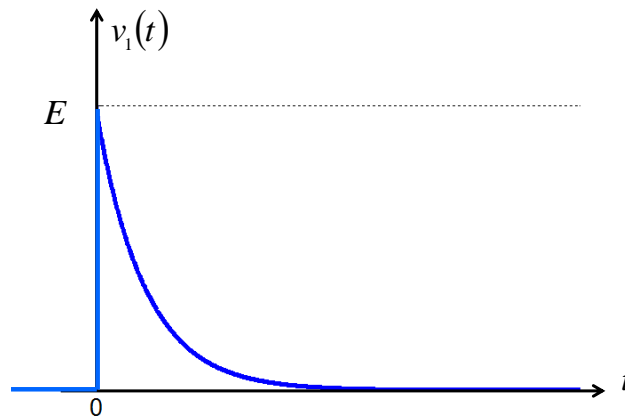
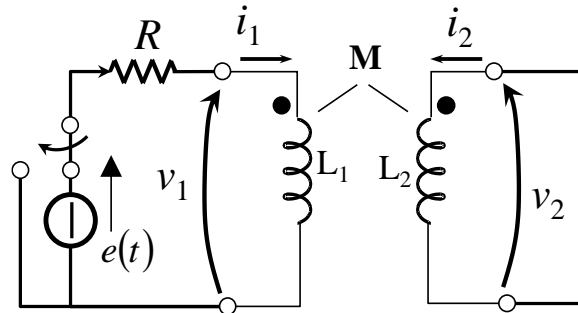


Figura 70. Grafico di  $v_1(t)$

Caso 2)

Supponiamo ora che per  $t = t_0$  il generatore di tensione venga cortocircuitato. Questo equivale a considerare il seguente circuito di Figura 71.

$t = t_0$  è una nuova origine dei tempi. Supponiamo che l'istante  $t_0$  sia sufficientemente distante da  $t = 0$  da dare al circuito di partenza il tempo di raggiungere il regime.



**Figura 71.** Circuito con mutua induttanza e tasto in commutazione

Per  $t < t_0$  il circuito è a regime. Il generatore di tensione fornisce una tensione costante pari ad  $E$ . Quindi il circuito è in regime stazionario. Le variabili di stato saranno:

$$i_1(t) = \frac{E}{R} = I_{10}$$

$$i_2(t) = -\frac{ME}{L_2 R} = I_{20}$$

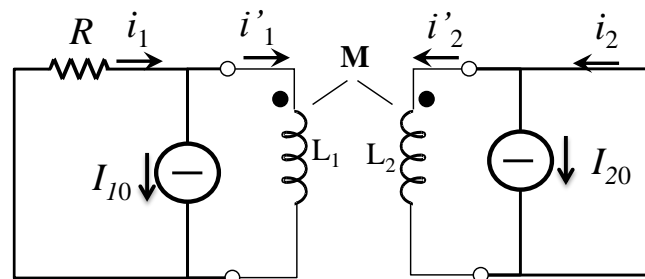
Da cui, lo stato in  $t = t_0^-$  sarà:

$$\underline{x}(t = t_0^-) = \begin{bmatrix} i_1(t_0^-) \\ i_2(t_0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{10} \\ I_{20} \end{bmatrix}$$

Per  $t > t_0$  dobbiamo studiare l'evoluzione del circuito a partire da uno stato non nullo. Scarichiamo il circuito introducendo le variabili di stato fittizie scariche:

$$i'_1(t_0^-) = 0 \quad i'_2(t_0^-) = 0$$

Il circuito scaricato è quello di Figura 72.



**Figura 72.** Circuito scaricato

Ci siamo riportati ad un circuito nello stato zero. Le frequenze libere del circuito sono le stesse. Una frequenza libera è  $\lambda=0$ , cioè c'è un termine  $ke^{0t}$ . Le equazioni del circuito sono:

$$\begin{cases} 0 = R(i'_1 + I_{10}) + L_1 \frac{di'_1}{dt} + M \frac{di'_2}{dt} \\ M \frac{di'_1}{dt} + L_2 \frac{di'_2}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_1 \frac{di'_1}{dt} - \frac{M^2}{L_2} \frac{di'_1}{dt} + Ri'_1 = -RI_{10} \\ \frac{di'_2}{dt} = -\frac{M}{L_2} \frac{di'_1}{dt} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left( \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} \right) \frac{di'_1}{dt} + Ri'_1 = -RI_{10}$$

$$\lambda = -\frac{RL_2}{\Delta} \quad \text{con} \quad \Delta = L_1 L_2 - M^2 > 0$$

$$i'_1(t) = Ae^{\lambda t} + i'_{1p} \quad i'_{1p} = k \quad \Rightarrow k = -I_{10}$$

$$i'_1(t) = Ae^{\lambda t} - I_{10}$$

In  $t = t_0^+$  lo stato si conserva:

$$i'_1(t_0^+) = i'_1(t_0^-) = 0$$

Applichiamo la condizione iniziale:

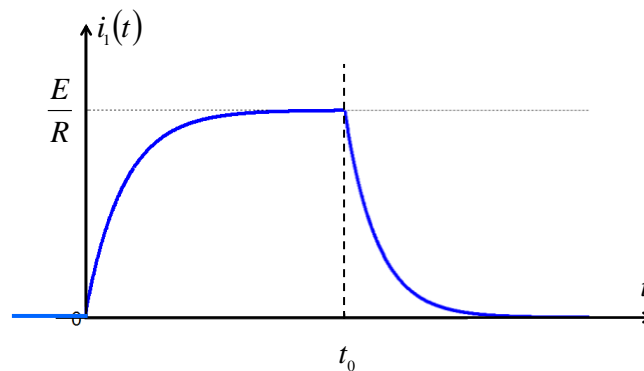
$$0 = A - I_{10} \Rightarrow A = I_{10} = \frac{E}{R}$$

$$i'_1(t) = -\frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{RL_2}{\Delta}(t)} \right)$$

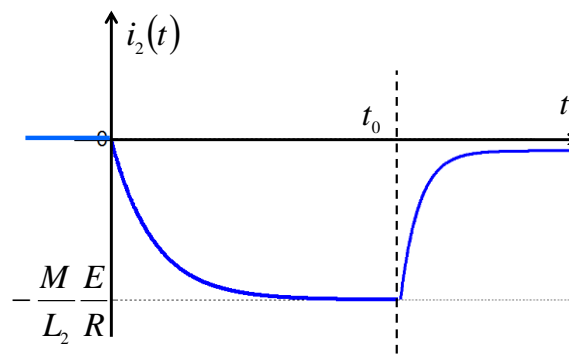
$$i_1(t) = i'_1(t) + I_{10} = -\frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{RL_2}{\Delta}(t)} \right) + \frac{E}{R} = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{RL_2}{\Delta}(t-t_0)} \quad \text{per } t > t_0$$

$$i_2(t) = i'_2(t) + I_{20} = \frac{ME}{L_2 R} \left( 1 - e^{-\frac{RL_2}{\Delta}(t)} \right) - \frac{ME}{L_2 R} = -\frac{ME}{L_2 R} \cdot e^{-\frac{RL_2}{\Delta}(t)} \quad \text{per } t > t_0$$

I grafici delle due correnti sono riportati nelle Figure 73 e 74:



**Figura 73.** Grafico di  $i_1(t)$  per il circuito in Figura 71



**Figura 74.** Grafico di  $i_2(t)$  per il circuito in Figura 71

Calcoliamo le tensioni:

$$v_1(t) = -Ri_1(t) = -E \cdot e^{-\frac{RL_2}{\Delta}(t)}$$

$$v_1 = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} \frac{di'_1}{dt} = \frac{\Delta}{L_2} \cdot \left( -\frac{RL_2}{\Delta} \cdot \frac{E}{R} e^{-\frac{RL_2}{\Delta}(t)} \right) = -E \cdot e^{-\frac{RL_2}{\Delta}(t)} \quad \text{per } t > t_0$$

$$v_2(t) = 0$$

In Figura 75 è tracciato il grafico della  $v_1(t)$

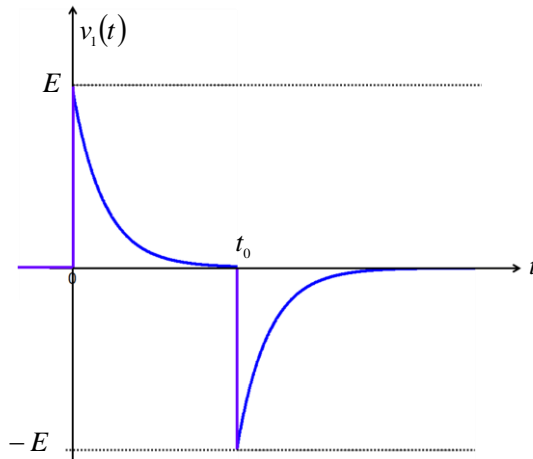


Figura 75. Grafico di  $v_1(t)$  per il circuito in Figura 71

Caso 3)

Supponiamo invece che, nel circuito di Figura 71 il tasto venga commutato nella posizione di aperto nell'istante  $t = t_0$ . Questo equivale a considerare il seguente circuito di Figura 76.

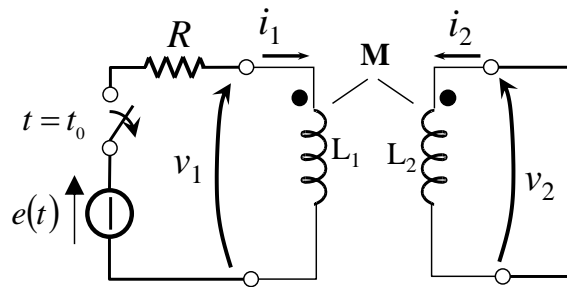


Figura 76. Circuito con mutua induttanza. All'istante  $t = t_0$  il tasto si apre.

Lo stato in  $t = t_0^-$  è ancora:

$$i_1(t_{0-}) = \frac{E}{R} = I_{10}$$

$$i_2(t_{0-}) = -\frac{M E}{L_2 R} = I_{20}$$

In questo caso la resistenza non è attraversata da corrente. Il circuito scaricato è quello riportato nella seguente Figura 77.

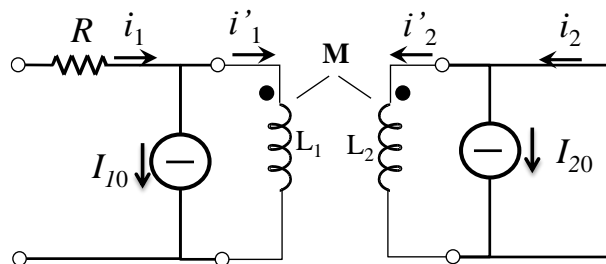


Figura 77. Circuito di Figura 76 scaricato

$$i'_1(0^-) = 0 \quad i'_2(0^-) = 0$$

Le equazioni del circuito sono:

$$i_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad i'_1 + I_{10} = 0$$

$$M \frac{di'_1}{dt} + L_2 \frac{di'_2}{dt} = 0$$

$$i'_1 = -I_{10} \quad i_1(t) = 0 \quad \text{per } t > t_0$$

La corrente  $i'_1$  è imposta dal generatore e non è più una variabile di stato.

$$\frac{di'_2}{dt} = -\frac{M}{L_2} \frac{di'_1}{dt} \Rightarrow i'_2 = -\frac{M}{L_2} i'_1 \Rightarrow i'_2 = \frac{M}{L_2} I_{10}$$

$$i_2(t) = i'_2(t) + I_{20} = \frac{M E}{L_2 R} - \frac{M E}{L_2 R} = 0 \quad \text{per } t > t_0$$

I grafici delle due correnti sono riportati nelle Figure 78 e 79:

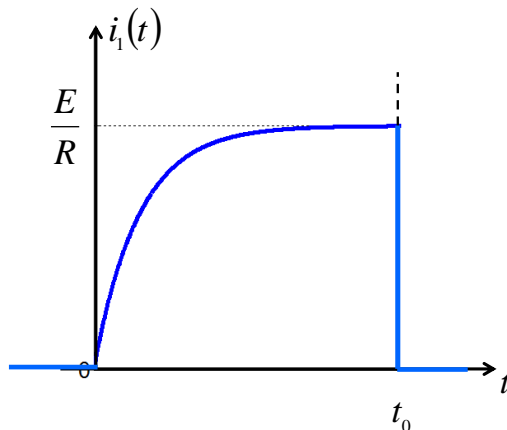


Figura 78. Grafico di  $i_1(t)$  per il circuito in Figura 76

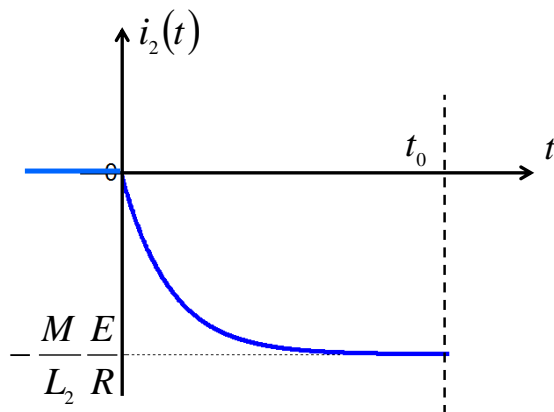


Figura 79. Grafico di  $i_2(t)$  per il circuito in Figura 76

La tensione  $v_1(t)$  (il cui grafico è tracciato in Figura 80) sarà:

$$v_1(t) = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} \frac{di'_1}{dt} = \frac{\Delta}{L_2} \cdot \frac{d}{dt} [-I_{10} \delta_{-1}(t - t_0)] = -\frac{\Delta E}{L_2 R} \cdot \delta(t - t_0)$$

La corrente scende drasticamente a zero e questo equivale ad un impulso di tensione in  $t = t_0$

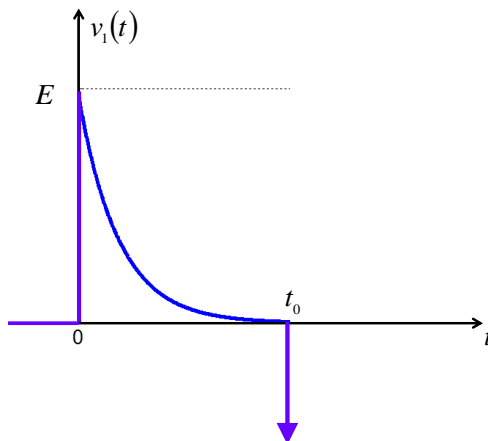


Figura 80. Grafico di  $v_1(t)$  per il circuito in Figura 76

□

## Esempi aggiuntivi

### Esempio 12

Il circuito di Figura 81 è a regime per  $t < 0$ . Determinare  $i(t)$  per  $t > 0$ . Siano:  
 $e(t) = E = 10V$ ;  $R_1 = 2\Omega$ ;  $R_2 = 2\Omega$ ;  $R_3 = 3\Omega$ ;  $L = 1H$

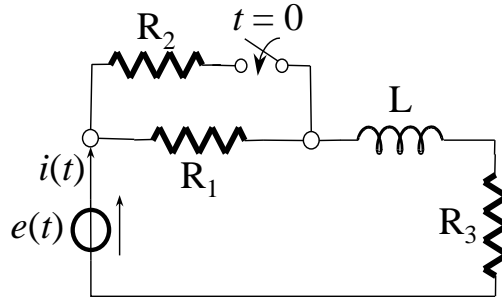


Figura 81. Circuito del 1° ordine

### Soluzione

Per  $t < 0$  il circuito è a regime e l'induttore si comporta come un corto-circuito. Il circuito risultante è quello di Figura 82.

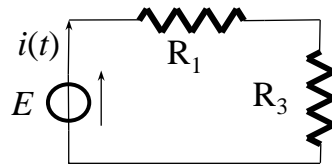


Figura 82. Circuito di Figura 81 per  $t < 0$

$$i(t) = I_0 = \frac{E}{R_1 + R_3} = \frac{10}{5} = 2 \text{ A} \quad i_L(0^-) = I_0$$

Per  $t > 0$  il tasto si chiude e perturba il regime raggiunto. Lo stato iniziale è diverso da zero. Il circuito scarica è quello di Figura 83.

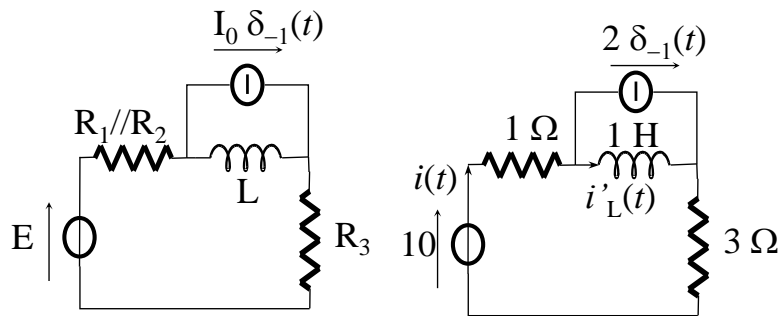


Figura 83. Circuito di Figura 81 scaricato. A destra dopo aver sostituito i valori numerici dei parametri circuitali

$$i(t) = i'_L(t) + 2$$

$$i(0^+) = i'_L(0^+) + 2$$

$$i(0^+) = 2$$

$$10 = 4 \cdot i(t) + 1 \cdot \frac{d[i(t) - 2]}{dt} \Rightarrow 10 = 4 \cdot i(t) + \frac{di}{dt}$$

$$\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = -4$$

$$i(t) = A \cdot e^{-4t} + I_p$$

$$i_p = K \Rightarrow 10 = 4 \cdot K \Rightarrow i_p = 10/4$$

$$i(t) = A \cdot e^{-4t} + 10/4$$

$$i(0^+) = 2 = A + 10/4 \Rightarrow A = -1/2$$

$$i(t) = -0,5 \cdot e^{-4t} + 2,5$$

### Esempio 13

Nel circuito di Figura 84, per  $t = 0^-$ , la tensione del condensatore è  $v(0^-) = 3V$ , determinare  $v_0(t)$  per  $t > 0$ .

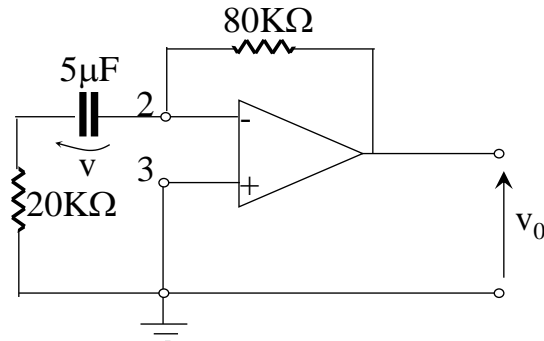


Figura 84. Circuito con amplificatore operazionale

### Soluzione

Scaricando il condensatore, il circuito diventa quello riportato in Figura 85.

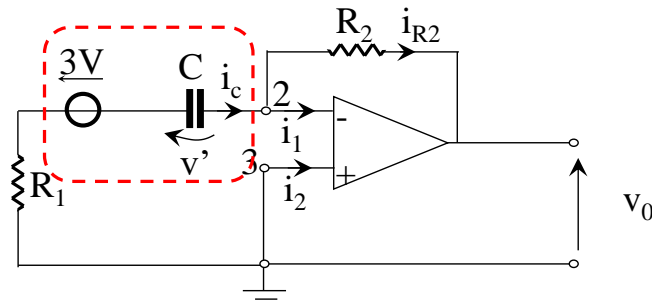


Figura 85. Circuito di Figura 84 scaricato

$$v_2 = v_3$$

$$i_1 = 0; \quad i_2 = 0 \Rightarrow i_{R2} = i_c$$

$$i_c = C \frac{dv'}{dt}$$

$$v_0 + R_2 i_{R2} = 0$$

$$v' + 3 + R_1 C \frac{dv'}{dt} = 0$$

$$v_0 + R_2 i_{R2} = 0 \Rightarrow v_0 + R_2 C \frac{dv'}{dt} = 0 \Rightarrow v_0 = -R_2 C \frac{dv'}{dt} \Rightarrow \frac{dv'}{dt} = -\frac{1}{R_2 C} v_0$$

$$v' + 3 + R_1 C \frac{dv'}{dt} = 0 \Rightarrow v' + 3 + R_1 C \left( -\frac{1}{R_2 C} v_0 \right) = 0 \Rightarrow v' + 3 - \frac{R_1}{R_2} v_0 = 0 \quad (*)$$

Derivando:

$$\frac{dv'}{dt} + 0 - \frac{R_1}{R_2} \frac{dv_0}{dt} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{R_2 C} v_0 - \frac{R_1}{R_2} \frac{dv_0}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dv_0}{dt} + \frac{1}{R_2 C} \cdot \frac{R_2}{R_1} v_0 = 0$$

$$\frac{dv_0}{dt} + \frac{1}{R_1 C} v_0 = 0 \quad \text{relazione I/O}$$

Dalla (\*)

$$v_0 = +\frac{R_2}{R_1} (v' + 3) \Rightarrow v_0(0^+) = +3 \frac{R_2}{R_1} = +12$$

$$\lambda = -\frac{1}{R_1 C} = -10$$

$$v_0(t) = A e^{\lambda t} \Rightarrow v_0(0^+) = +3 \frac{R_2}{R_1} = A$$

$$v_0(t) = +3 \frac{R_2}{R_1} e^{-\frac{1}{R_1 C} t} = +12 e^{-10t} \delta_{-1}(t)$$

Nella Figura 86 è riportato l'andamento della  $v_0(t)$  per  $t > 0$

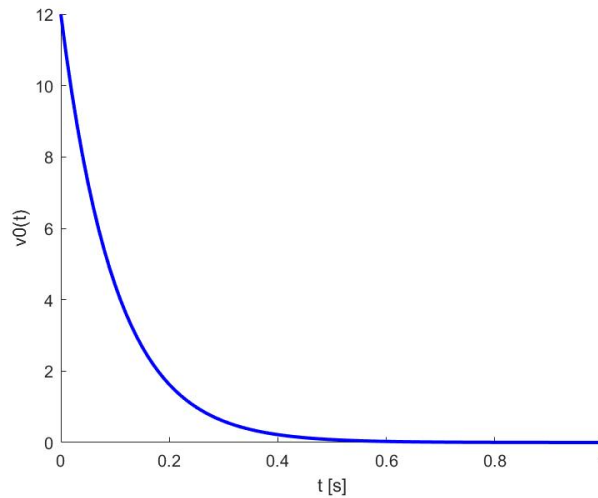


Figura 86. Grafico della  $v_0(t)$

□

#### Esempio 14

Si consideri il circuito in Figura 87. L'interruttore rimane chiuso per molto tempo, quindi in  $t = 0$  si apre. Determinare: lo stato del circuito in  $0^+$ ; le frequenze libere, spiegandone il significato; la relazione ingresso-uscita, considerando come uscita la tensione  $v(t)$ ; la tensione  $v(t)$  per  $t > 0$  e tracciarne il grafico.

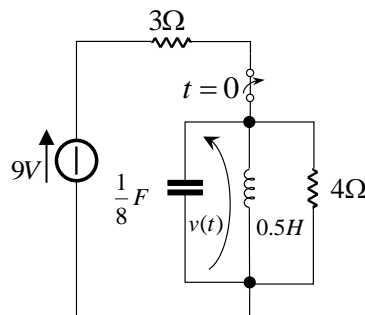


Figura 87. Circuito del secondo ordine

#### Soluzione

Per  $t < 0$  il circuito è in regime stazionario. Il circuito diventa quello di Figura 88.

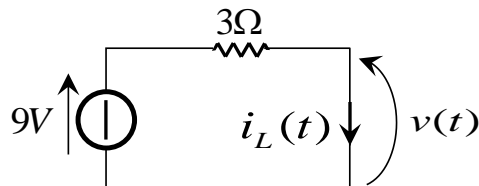


Figura 88. Circuito di Figura 87 per  $t < 0$

$$v(0^-) = 0$$

$$i_L(0^-) = 3A$$

Per  $t > 0$  il tasto si apre ed il circuito diventa quello di Figura 89.

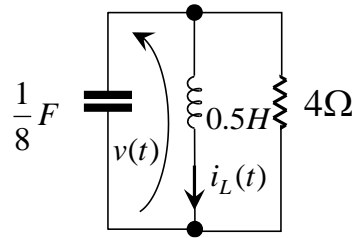


Figura 89. Circuito di Figura 87 per  $t > 0$

Non ci sono condizioni patologiche e non sono presenti ingressi impulsivi quindi lo stato in  $t = 0^+$  è

$$v(0^+) = 0$$

$$i_L(0^+) = 3A$$

Scriviamo le equazioni del circuito

$$\begin{cases} \frac{1}{8} \frac{dv}{dt} + i_L + \frac{v}{4} = 0 \\ v = \frac{1}{2} \frac{di_L}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dv}{dt} = -2v - 8i_L \\ \frac{di_L}{dt} = 2v \end{cases}$$

Derivando la prima e sostituendo la seconda otteniamo la relazione I/O:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2 \frac{dv}{dt} + 16v = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 16 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{15}$$

$$v(t) = e^{-t}(A \cos \sqrt{15} t + B \sin \sqrt{15} t)$$

Per il calcolo di  $A$  e  $B$  applichiamo le condizioni iniziali:

$$v(0^+) = 0 = A$$

$$\frac{dv}{dt} = -e^{-t}(A \cos \sqrt{15} t + B \sin \sqrt{15} t) + e^{-t}(-\sqrt{15}A \sin \sqrt{15} t + \sqrt{15}B \cos \sqrt{15} t)$$

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{0^+} = -2v(0^+) - 8i_L(0^+) = -24 = \sqrt{15}B \rightarrow B = -\frac{24}{\sqrt{15}}$$

$$v(t) = -\frac{24}{\sqrt{15}} e^{-t} \sin \sqrt{15} t = -6,2 e^{-t} \sin(3,87t)$$

Nella Figura 90 è riportato l'andamento della  $v(t)$  per  $t > 0$

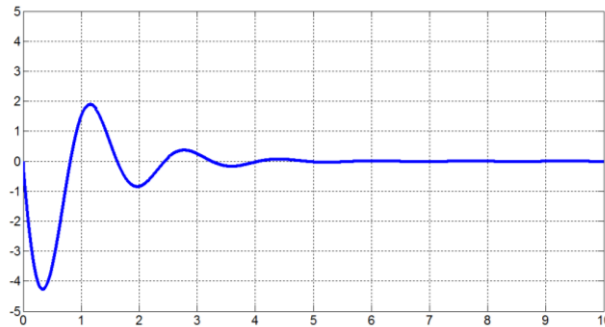


Figura 90. Grafico della  $v(t)$

□

### Esempio 15

Si consideri il circuito in Figura 91. L'induttore è scarico per  $t < 0$ . Determinare:

la corrente nell'induttore per  $0 < t < t_0$

la corrente nell'induttore per  $t_0 < t < 2t_0$

la corrente nell'induttore per  $t > 2t_0$ .

Dati:  $E = 12 V, R = 1k\Omega, L = 1H, t_0 = 3ms$

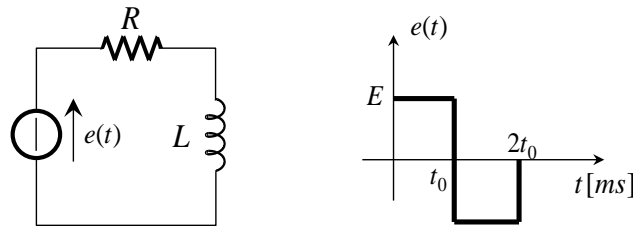


Figura 91. Circuito con ingresso lineare a tratti

### Soluzione

Per  $t < 0$  il circuito è scarico:  $i(0^-) = 0$   $e(t) = E\delta_{-1}(t) - 2E\delta_{-1}(t - t_0) + E\delta_{-1}(t - 2t_0)$

Per  $0 < t < t_0$

$$e(t) = E\delta_{-1}(t)$$

$$e(t) = L \frac{di}{dt} + Ri \Rightarrow \frac{di}{dt} + 1000i = 12$$

$$\lambda + 1000 = 0 \Rightarrow \lambda = -10^3$$

$$i_p = K \Rightarrow 1000K = 12 \Rightarrow K = 12 \cdot 10^{-3} = 12mA$$

$$i(t) = A \cdot e^{-10^3 t} + 12 \cdot 10^{-3}$$

Per  $t = 0^+$   $i(0^+) = i(0^-) = 0$

$$0 = A + 12 \cdot 10^{-3} \Rightarrow A = -12 \cdot 10^{-3}$$

$$i(t) = -12 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-10^3 t} + 12 \cdot 10^{-3} = 12(1 - e^{-10^3 t})\delta_{-1}(t) mA$$

Per  $t_0 < t < 2t_0$

$$e(t) = -12\delta_{-1}(t - t_0)$$

$$i(t_0^+) = i(t_0^-) = I_{t_0} = 11,4mA$$

Scaricando l'induttore avremo il circuito in Figura 92

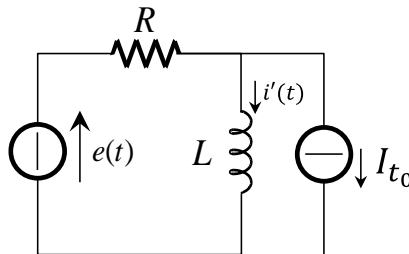


Figura 92. Circuito di Figura 91 scaricato ( $t_0 < t < 2t_0$ )

$$L \frac{di'}{dt} + R(i' + 11,40 \cdot 10^{-3}) = e(t)$$

$$\frac{di'}{dt} + 1000i' = -23,40$$

$$\lambda + 1000 = 0 \Rightarrow \lambda = -10^3$$

$$i_p = K \Rightarrow 1000K = -23,40 \Rightarrow K = -23,40 \cdot 10^{-3}$$

$$i'(t) = A \cdot e^{-10^3(t-t_0)} - 23,40 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{Per } t = t_0 \Rightarrow 0 = A - 23,40 \cdot 10^{-3} \Rightarrow A = +23,40 \cdot 10^{-3}$$

$$i'(t) = 23,4 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-10^3(t-t_0)} - 23,4 \cdot 10^{-3}$$

$$i(t) = i'(t) + 11,4 \cdot 10^{-3}$$

$$i(t) = [23,4 \cdot e^{-10^3(t-t_0)} - 12]\delta_{-1}(t - t_0) mA$$

Per  $t > 2t_0$

$$i(2t_0^+) = i(2t_0^-) = I_{2t_0} = -10,835mA$$

Scaricando l'induttore avremo il circuito in Figura 93

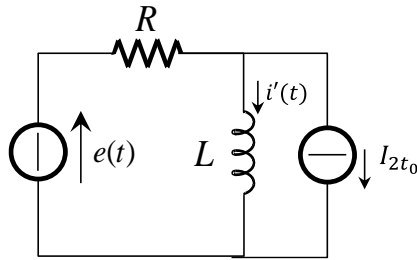


Figura 93. Circuito di Figura 91 scaricato ( $t > 2t_0$ )

$$e(t) = 0$$

$$L \frac{di'}{dt} + R(i' - 10,835 \cdot 10^{-3}) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{di'}{dt} + 10^3 i' = 10,835$$

$$\lambda + 1000 = 0 \Rightarrow \lambda = -10^3$$

$$i_p = K \Rightarrow 1000K = 10,835 \Rightarrow K = 10,835 \cdot 10^{-3}$$

$$i'(t) = A \cdot e^{-10^3(t-2t_0)} + 10,835 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{Per } t = 2t_0 \Rightarrow 0 = A + 10,835 \cdot 10^{-3} \Rightarrow A = -10,835 \cdot 10^{-3}$$

$$i'(t) = -10,835 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-10^3(t-2t_0)} + 10,835 \cdot 10^{-3}$$

$$i(t) = i'(t) - 10,835 \cdot 10^{-3} \Rightarrow$$

$$i(t) = [-10,835 \cdot e^{-10^3(t-2t_0)}] \delta_{-1}(t - 2t_0) \text{ mA}$$

Nella Figura 94 è riportato l'andamento della  $i(t)$  per  $t > 0$

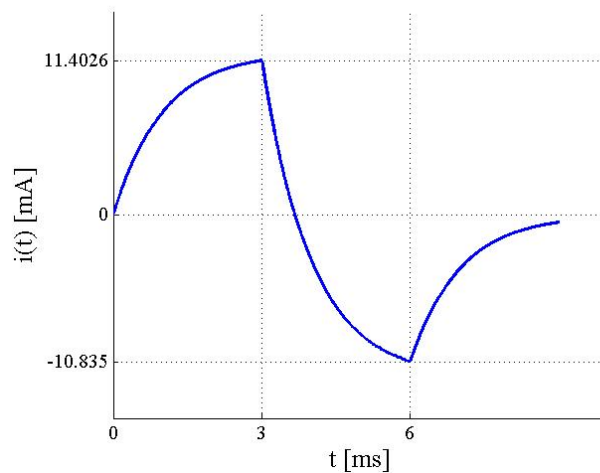


Figura 94. Grafico della  $i(t)$

□

### Esempio 16

Si consideri il circuito in Figura 95. Determinare  $v_0(t)$  per  $t > 0$  sapendo che:

$$v_1(0^+) = 2V \text{ e } v_2(0^+) = 0$$

$$\text{Dati: } R = 100k\Omega, C = 1\mu F$$

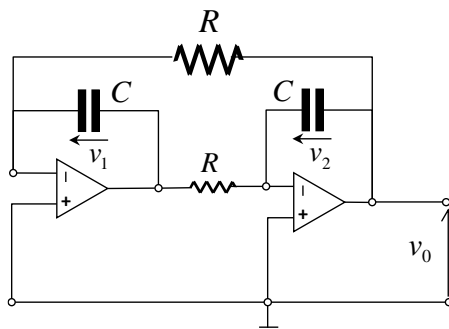


Figura 95. Circuito con amplificatori operazionali

### Soluzione

Il circuito non è nello stato zero in  $t = 0^-$ . In Figura 96 è riportato il circuito scaricato.

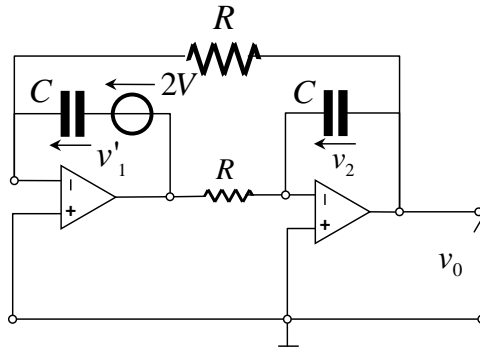


Figura 96. Circuito di Figura 95 scaricato

$$\begin{cases} v'_1 + 2 + RC \frac{dv_2}{dt} + v_2 = -v_0 \\ v_0 = RC \frac{dv'_1}{dt} \Rightarrow \frac{dv'_1}{dt} = \frac{v_0}{RC} \\ v_0 = -v_2 \Rightarrow \frac{dv_2}{dt} = -\frac{dv_0}{dt} \end{cases}$$

Da cui:

$$\begin{aligned} v'_1 + 2 - RC \frac{dv_0}{dt} - v_0 = -v_0 &\Rightarrow RC \frac{dv_0}{dt} = 2 + v'_1 \Rightarrow RC \frac{d^2v_0}{dt^2} = \frac{dv'_1}{dt} \Rightarrow RC \frac{d^2v_0}{dt^2} = \frac{v_0}{RC} \\ \Rightarrow RC \frac{d^2v_0}{dt^2} - \frac{v_0}{RC} = 0 &RC = 100 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-6} = 0.1 \quad 0.1 \frac{d^2v_0}{dt^2} - 10v_0 = 0 \\ \Rightarrow \frac{d^2v_0}{dt^2} - 100v_0 = 0 &\quad \lambda^2 - 100 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 10 \end{aligned}$$

$$v_0(t) = A_1 e^{10t} + A_2 e^{-10t}$$

$$v_0(0^+) = -v_2(0^+) = 0$$

$$0 = A_1 + A_2 \Rightarrow A_1 = -A_2$$

$$\text{dalla: } RC \frac{dv_0}{dt} = 2 + v'_1 \Rightarrow 0.1 \frac{dv_0}{dt} = 2 + v'_1(0^+) \Rightarrow \left. \frac{dv_0}{dt} \right|_{0^+} = 20$$

$$\frac{dv_0}{dt} = A_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\text{in } 0^+ \quad 20 = 10A_1 - 10A_2 \Rightarrow A_1 - A_2 = 2 \Rightarrow -2A_2 = 2 \Rightarrow A_2 = -1 \quad A_1 = 1$$

$$v_0(t) = e^{10t} - e^{-10t}$$

Si noti che circuito è instabile.

□

### Esempio 17

Per  $t < 0$  il circuito in Figura 97 è a regime. Determinare la potenza erogata dal generatore  $A_2$  per  $t > 0$ . Dati:

$E = 20V$ ;  $A_1 = 10A$ ;  $A_2 = 15A$ ;  $L_1 = 1mH$ ;  $L_2 = 2mH$ ;  $R_1 = 20\Omega$ ;  $R_2 = 18\Omega$ ;  $R_3 = 24\Omega$ ;  $R_4 = 10\Omega$

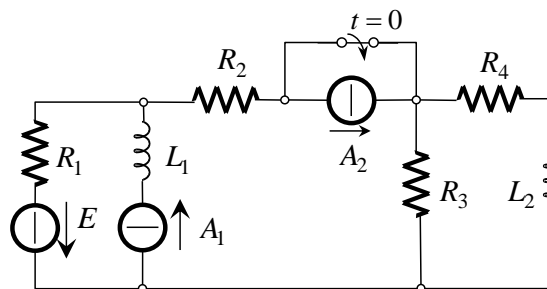


Figura 97. Circuito con stato iniziale non nullo.

### Soluzione

Per  $t < 0$  il circuito in Figura 97 è in regime stazionario. Gli induttori si comportano come dei cortocircuiti. In Figura 98 è riportato il circuito da analizzare per  $t < 0$ .

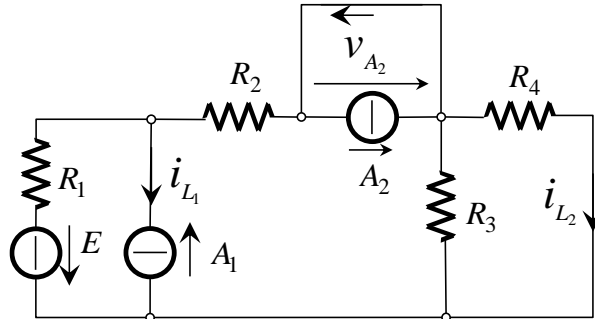


Figura 98. Circuito di Figura 97 per  $t < 0$ .

$$i_{L_1}(0^-) = -10; \quad i_{L_2}(0^-) = 0; \quad v_{A_2}(0^-) = 0$$

La potenza generata da  $A_2$  è:

$$p_2(t) = v_{A_2} \cdot A_2$$

Occorre, quindi, determinare l'andamento di  $v_{A_2}(t)$ .

Lo stato si conserva tra  $t = 0^-$  e  $t = 0^+$ . Scaricando i componenti con stato diverso da zero si ottiene il circuito di Figura 99.

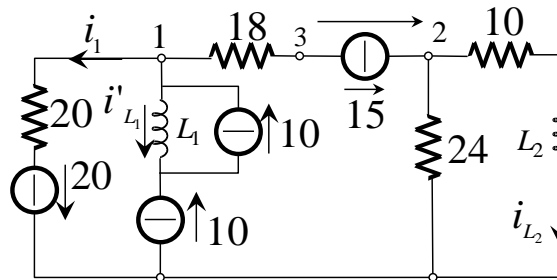


Figura 99. Circuito di Figura 97 per  $t > 0$ .

Nodo 2:

$$15 = \frac{v_2}{24} + i_{L_2} \quad v_2 = 10i_{L_2} + 2 \frac{di_{L_2}}{dt}$$

$$15 = \frac{v_2}{24} + i_{L_2} \Rightarrow i_{L_2} = 15 - \frac{v_2}{24} \Rightarrow \frac{di_{L_2}}{dt} = -\frac{1}{24} \frac{dv_2}{dt}$$

$$v_2 = 10 \cdot i_{L_2} + 2 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{di_{L_2}}{dt}$$

$$v_2 = 10 \cdot \left(15 - \frac{v_2}{24}\right) + 2 \cdot 10^{-3} \cdot \left(-\frac{1}{24} \frac{dv_2}{dt}\right) \rightarrow 0,0833 \cdot 10^{-3} \frac{dv_2}{dt} + 1,4167v_2 = 150$$

$$\lambda = -17 \cdot 10^{-3}$$

$$1,4167K = 150 \Rightarrow K = 105,88$$

$$v_2(t) = A \cdot e^{-17 \cdot 10^{-3}t} + 105,88 \quad v_2(0^+) = 360 \rightarrow 360 = A + 105,88 \Rightarrow A = 254,12$$

$$v_2(t) = 254,12e^{-17 \cdot 10^{-3}t} + 105,88$$

Nodo 1:

$$10 - 15 - i_1 = 0 \Rightarrow i_1 = -5$$

$$v_1 = 20i_1 - 20 = -120$$

$$v_1 - 270 - v_{A_2} - v_2 = 0 \Rightarrow v_{A_2} = -120 - 270 - 105,88 - 254,12e^{-17 \cdot 10^{-3}t}$$

$$v_{A_2} = -495,88 - 254,12e^{-17 \cdot 10^{-3}t}$$

$$p_2(t) = -15 \cdot v_{A_2} = 7438,2 + 3811,8e^{-17 \cdot 10^{-3}t} \text{ W}$$

Si noti che il generatore  $A_2$  ha disaccoppiato il circuito a sinistra da quello a destra.

□

### Esempio 18

Nel circuito di Figura 100, con il condensatore scarico, il tasto viene portato in posizione 1. Determinare:

- il valore di  $R_1$  per cui la potenza massima erogata dal generatore sia  $0,1W$ ;
- il tempo necessario affinché il condensatore raggiunga il 90% della tensione di regime. In questa condizione il tasto viene portato nella posizione 2.
- il valore di  $R_2$  per cui la tensione scende al 50% del suo valore iniziale in  $0,1ms$ ;
- la potenza massima dissipata dal resistore  $R_2$  nella fase di scarica.

Sono dati:  $E = 12V$ ;  $C = 1\mu F$

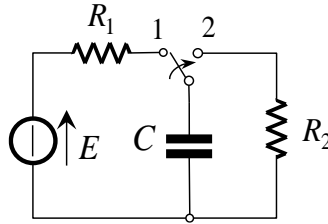


Figura 100. Circuito con stato iniziale non nullo.

### Soluzione

In questo esempio, sono incogniti i valori delle due resistenze. Lo stato è nullo, cioè è nulla la tensione nel condensatore all'istante  $t = 0^-$

Per  $t > 0$  lo stato si conserva.

Scrivendo l'equazione alla maglia di sinistra si ha:

$$E = R_1 C \frac{dv_c}{dt} + v_c \quad \lambda = -\frac{1}{R_1 C}; \quad v_{cp} = E \quad v_c(t) = A e^{-\frac{1}{R_1 C} t} + E$$

$$v_c(0^+) = 0 \Rightarrow 0 = A + E \Rightarrow A = -E$$

$$v_c(t) = E \left( 1 - e^{-\frac{1}{R_1 C} t} \right)$$

La potenza erogata dal generatore è:

$$p_g(t) = E \cdot C \frac{dv_c}{dt} = EC \frac{d}{dt} \left[ E \left( 1 - e^{-\frac{1}{R_1 C} t} \right) \right] = EC \left[ -E \left( -\frac{1}{R_1 C} \right) e^{-\frac{1}{R_1 C} t} \right] = \frac{E^2}{R_1} e^{-\frac{1}{R_1 C} t}$$

Essendo un esponenziale decrescente il suo valore massimo si ha all'istante  $t = 0^+$ :

$$p_{g-max} = \frac{E^2}{R_1} \rightarrow \frac{E^2}{R_1} = 0,1 \rightarrow R_1 = \frac{E^2}{0,1} = \frac{144}{0,1} = 1440 \Omega$$

La costante di tempo è:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = R_1 C = 1440 \cdot 10^{-6} = 1,44ms$$

Per determinare l'istante di tempo  $t^*$  in cui la tensione raggiunge il valore 0,9 del valore di regime (E) sarà:

$$v_c(t^*) = 0,9E = E \left( 1 - e^{-\frac{1}{R_1 C} t^*} \right) \Rightarrow 0,1 = e^{-\frac{1}{R_1 C} t^*} \Rightarrow -\frac{1}{R_1 C} t^* = \ln 0,1 = -2,3026$$

$$t^* = 2,3026 \cdot R_1 C = 2,3026 \cdot 1440 \cdot 10^{-6} = 3,3157ms$$

All'istante  $t^*$  il tasto si sposta nella posizione 2. Il circuito da analizzare diventa quello di Figura 101.

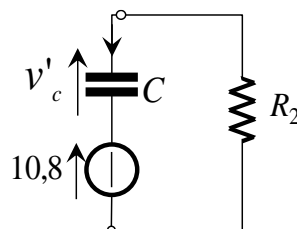


Figura 101. Circuito con stato iniziale non nullo.

$$v_c(t^{*-}) = 0,9E = 10,8V$$

Per  $t > t^*$

$$v'_c(t^{*+}) = 0$$

$$v'_c + 10,8 + R_2C \frac{dv'_c}{dt} = 0 \Rightarrow R_2C \frac{dv'_c}{dt} + v'_c = -10,8 \quad \lambda = -\frac{1}{R_2C}; v'_{cp} = -10,8$$

$$v'_c(t) = Ae^{-\frac{1}{R_2C}t} - 10,8 \quad A = 10,8 \Rightarrow v'_c(t) = 10,8e^{-\frac{1}{R_2C}t} - 10,8$$

$$v_c = v'_c + 10,8 \Rightarrow v_c = 10,8e^{-\frac{1}{R_2C}t} = V_0e^{-\frac{1}{R_2C}t}$$

Per definire  $R_2$  si deve imporre che:

$$0,5V_0 = V_0e^{-\frac{1}{R_2C}t_0} \quad \text{con } t_0 = 0,1ms$$

$$0,5 = e^{-\frac{1}{R_2C}t_0} \Rightarrow -\frac{1}{R_2C}t_0 = \ln 0,5 = -0,6931 \Rightarrow R_2 = \frac{t_0}{0,6931 \cdot C} = \frac{0,1 \cdot 10^{-3}}{0,6931 \cdot 10^{-6}} = 144,28\Omega$$

Per calcolare la potenza massima dissipata dal resistore  $R_2$ :

$$p_{R_2}(t) = R_2 \cdot \left(C \frac{dv_c}{dt}\right)^2 = R_2C^2 \frac{d}{dt} \left[V_0e^{-\frac{1}{R_2C}t}\right]^2 = R_2C^2 \frac{1}{R_2C} \left(\frac{1}{R_2C}\right)^2 V_0^2 e^{-\frac{2}{R_2C}t} = \frac{V_0^2}{R_2} e^{-\frac{2}{R_2C}t}$$

Essendo un esponenziale decrescente il valore massimo è:

$$p_{R_2-max} = \frac{V_0^2}{R_2} = \frac{10,8^2}{144,28} = 0,81 W$$

□

### Esempio 19

Il circuito di Figura 102 è a regime per  $t < 0$ . All'istante  $t = 0$  l'interruttore si chiude. Determinare:

a) l'energia immagazzinata nel circuito all'istante  $t^* = 0,2ms$ ;

b) la corrente  $i(t)$  erogata dal generatore  $E_2$ .

Dati:  $E_1 = 8 V$ ;  $E_2 = 12 V$ ;  $A = 15 A$ ;  $C = 100 \mu F$ ;  $R_1 = 5 \Omega$ ;  $R_2 = 3 \Omega$ ;  $R_3 = 6 \Omega$ ;  $R_4 = 2 \Omega$

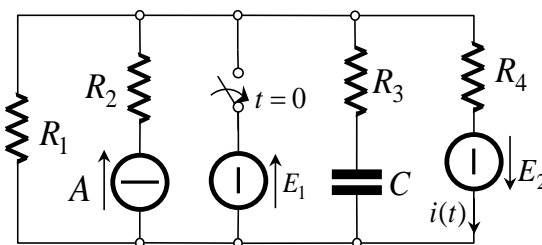


Figura 102. Circuito con tasto in commutazione.

### Soluzione

Il circuito da analizzare per  $t < 0$  è riportato in Figura 103.

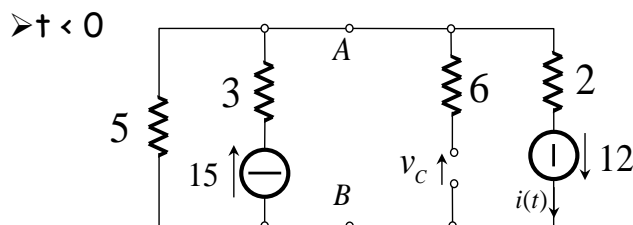


Figura 103. Circuito di Figura 102 per  $t < 0$

$$V_{AB} = \frac{-12}{\frac{1}{5} + \frac{1}{2}} + 15 = 12,86V = v_c(0^-)$$

$$i(0^-) = \frac{V_{AB} + 12}{2} = 12,43A$$

Il circuito da analizzare per  $t > 0$  è riportato in Figura 104.

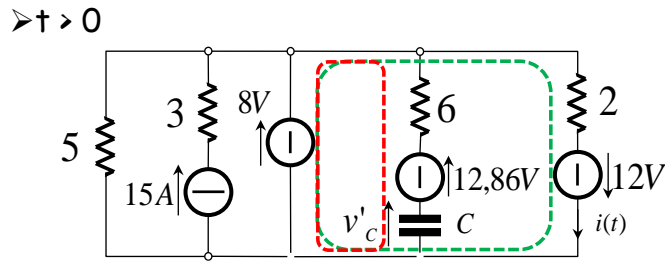


Figura 104. Circuito di Figura 102 per  $t > 0$

Il generatore di tensione da 8V disaccoppia le due parti di circuito a destra e a sinistra del generatore.

**Maglia 1**  $8 = 6C \frac{dv'_c}{dt} + v'_c + 12,86$

$$6C \frac{dv'_c}{dt} + v'_c = -4,86 \quad 6C\lambda + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{6C} = -1,7 \cdot 10^3 \quad v'_{cp} = K = -4,86$$

$$v'_c(t) = Ae^{-1,7 \cdot 10^3 t} - 4,86$$

in  $t = 0^+$   $v'_c(0^+) = 0 \Rightarrow 0 = A - 4,86 \Rightarrow A = 4,86 \quad v'_c(t) = 4,86e^{-1,7 \cdot 10^3 t} - 4,86$

$$v_c(t) = v'_c(t) + 12,86 = 4,86e^{-1,7 \cdot 10^3 t} + 8$$

**Maglia 2**

$$8 = -12 + 2i(t) \Rightarrow i(t) = 10 \text{ A}$$

in  $t^* = 0,2 \text{ ms}$

$$v_c(t^*) = 4,86e^{-1,7 \cdot 10^3 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3}} + 8 = 4,86e^{-0,34} + 8 = 11,46 \text{ V}$$

$$W_c = \frac{1}{2} C v_c^2(t = 0,2 \text{ ms}) = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 10^{-6} \cdot 11,46^2 = 6,566 \text{ mJ}$$

□

**Esempio 20**

Il circuito di Figura 105 è a regime per  $t < 0$ . Determinare  $v_L(t)$  per  $t > 0$ . Calcolare l'energia immagazzinata nel condensatore all'istante  $t^* = 2t_c$  con  $t_c$  costante di tempo del condensatore. Dati:

$E = 10 \text{ V}$ ;  $A_1 = 7 \text{ A}$ ;  $A_2 = 12 \text{ A}$ ;  $L = 5 \text{ mH}$ ;  $C = 3 \mu\text{F}$ ;  $R_1 = 3 \Omega$ ;  $R_2 = 7 \Omega$ ;  $R_3 = 4 \Omega$ ;  $R_4 = 6 \Omega$ ;  $R_5 = 8 \Omega$

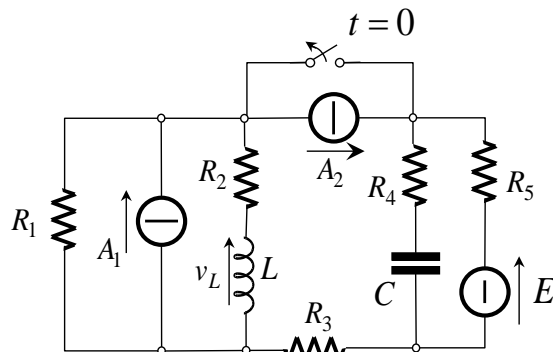


Figura 105. Circuito con tasto in commutazione.

**Soluzione**

Il circuito da analizzare per  $t < 0$  è riportato in Figura 106.

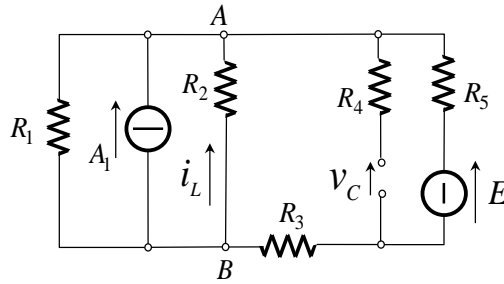


Figura 106. Circuito di Figura 105 per  $t < 0$

$$V_{AB} = \frac{A_1 + \frac{E}{R_3 + R_5}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + R_5}} = 14V$$

$$I_L = \frac{V_{AB}}{R_2} = 2A \Rightarrow i_L(0^-) = 2A$$

$$I_{R_5} = \frac{V_{AB} - E}{R_3 + R_5} = \frac{1}{3}A \quad V_C = E + R_5 \cdot I_{R_5} = 12,667V \Rightarrow v_c(0^-) = 12,667V$$

Per  $t > 0$  la presenza del generatore di corrente  $A_2$  disaccoppia le due parti di circuito a sinistra e a destra (Figura 107).

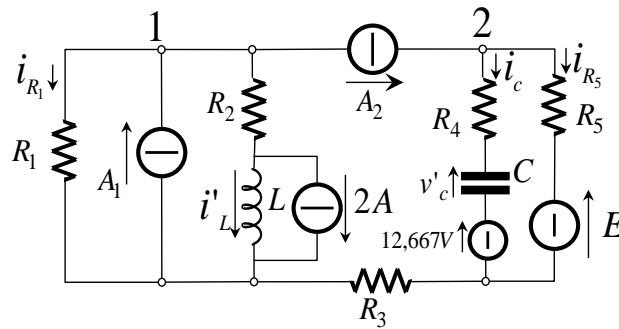


Figura 107. Circuito di Figura 105 per  $t > 0$

Le relazioni I/O saranno quindi del I ordine.

$$\begin{cases} A_2 = C \frac{dv'_c}{dt} + i_{R_5} \Rightarrow i_{R_5} = 12 - C \frac{dv'_c}{dt} & \text{(nodo 2)} \\ R_4 C \frac{dv'_c}{dt} + v'_c + 12,667 = 8i_{R_5} + E & \text{(maglia destra)} \end{cases}$$

$$R_4 C \frac{dv'_c}{dt} + v'_c + 12,667 = 8 \left( 12 - C \frac{dv'_c}{dt} \right) + 10$$

$$R_4 C \frac{dv'_c}{dt} + 8C \frac{dv'_c}{dt} + v'_c = 96 + 10 - 12,667 \Rightarrow 42 \cdot 10^{-6} \frac{dv'_c}{dt} + v'_c = 93,33$$

$$42 \cdot 10^{-6} \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -0,024 \cdot 10^6 \Rightarrow t_c = \frac{1}{\lambda} = 42 \mu s \quad v'_c(t) = A e^{-0,024 \cdot 10^6 t} + 93,33$$

$$v'_c(0^+) = v'_c(0^-) = 0 \Rightarrow 0 = A + 93,33 \Rightarrow A = -93,33 \quad v'_c(t) = 93,33 \left( 1 - e^{-0,24 \cdot 10^6 t} \right) \delta_{-1}(t)$$

$$v_c(t) = v'_c(t) + 12,667 = (106 - 93,33e^{-0,024 \cdot 10^6 t}) \delta_{-1}(t)$$

$$\text{per } t^* = 2 \cdot t_c = 2 \cdot 42 \mu s \quad v_c(t^*) = 106 - 93,33e^{-0,024 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 42 \cdot 10^{-6}}$$

$$= 93,37V$$

$$W_c = \frac{1}{2} C v_c(t^*)^2 = 13,1mJ$$

Calcoliamo la  $v_L$ :

$$\begin{cases} A_1 - i'_L - 2 - i_{R1} - 12 = 0 \Rightarrow i_{R1} = A_1 - i'_L - 14 \\ R_1 i_{R1} = R_2 (i'_L + 2) + v_L \\ v_L = L \frac{di'_L}{dt} \Rightarrow \frac{di'_L}{dt} = \frac{1}{L} v_L \end{cases}$$

$$R_1(A_1 - i'_L - 14) = R_2 i'_L + 2R_2 + v_L$$

$$10i'_L + v_L = -35 \quad (*)$$

$$0 = 10 \frac{di'_L}{dt} + \frac{dv_L}{dt} \Rightarrow \frac{10}{L} v_L + \frac{dv_L}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dv_L}{dt} + 2 \cdot 10^3 v_L = 0 \quad \lambda + 2 \cdot 10^3 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \cdot 10^3$$

$$v_L(t) = Ae^{-2 \cdot 10^3 t}$$

$$\text{dalla } (*) \Rightarrow v_L(0^+) + 10i'_L(0^+) = -35 \Rightarrow v_L(0^+) = -35 \rightarrow -35 = A \Rightarrow v_L(t) = -35e^{-2 \cdot 10^3 t} \delta_{-1}(t)$$

□

### Esempio 21

Il circuito di Figura 108 ha stato nullo in  $t = 0^-$ . Determinare:

- le equazioni di stato;
- se il circuito è stabile;
- se il circuito è sovra-smorzato, sotto-smorzato o a smorzamento critico;
- la risposta  $v_0(t)$  al gradino;
- Tracciare l'andamento di  $v_0(t)$ .

Utilizzare l'analisi nel dominio del tempo.

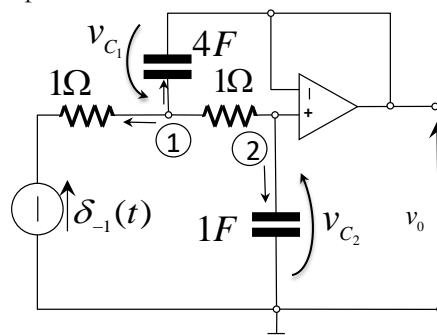


Figura 108. Circuito con amplificatore operazionale.

### Soluzione

$$v_0 = v_{C_2}$$

$$\begin{cases} \frac{v_1 - \delta_{-1}}{1} + 4 \frac{dv_{C_1}}{dt} + \frac{v_1 - v_{C_2}}{1} = 0 \rightarrow 2v_1 - \delta_{-1} + 4 \frac{dv_{C_1}}{dt} - v_{C_2} = 0 \\ \frac{dv_{C_2}}{dt} = \frac{v_1 - v_{C_2}}{1} \rightarrow v_1 = \frac{dv_{C_2}}{dt} + v_{C_2} \\ v_1 = v_{C_1} + v_{C_2} \end{cases}$$

$$\frac{dv_{C2}}{dt} + v_{C2} = v_{C1} + v_{C2} \rightarrow \frac{dv_{C2}}{dt} = v_{C1}$$

$$2(v_{C1} + v_{C2}) - \delta_{-1} + 4 \frac{dv_{C1}}{dt} - v_{C2} = 0 \rightarrow 4 \frac{dv_{C1}}{dt} = -2v_{C1} - v_{C2} + \delta_{-1}$$

Da cui le equazioni di stato sono:

$$\begin{cases} \frac{dv_{C1}}{dt} = -\frac{1}{2}v_{C1} - \frac{1}{4}v_{C2} + \frac{1}{4}\delta_{-1} \\ \frac{dv_{C2}}{dt} = v_{C1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{dv_{C1}}{dt} = \frac{d^2v_{C2}}{dt^2} \\ \frac{d^2v_{C2}}{dt^2} = -\frac{1}{2}\frac{dv_{C2}}{dt} - \frac{1}{4}v_{C2} + \frac{1}{4}\delta_{-1} \end{cases}$$

La relazione I/O per la  $v_{C2}$  è:

$$\frac{d^2v_{C2}}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{dv_{C2}}{dt} + \frac{1}{4}v_{C2} = \frac{1}{4}\delta_{-1}$$

$$\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4} = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1}{4} \mp j \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{1}{4}} = -\frac{1}{4} \mp j \frac{\sqrt{3}}{4} \rightarrow \text{circuito stabile}$$

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad \alpha = \frac{1}{4}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha < \omega_0 \quad \text{circuito sotto-smorzato}$$

$$v_{cp} = K \rightarrow K = 1$$

$$v_{C2}(t) = e^{-t/4} \left( A \cos \frac{\sqrt{3}}{4}t + B \sin \frac{\sqrt{3}}{4}t \right) + 1$$

Lo stato fra  $t = 0^-$  e  $t = 0^+$  si conserva perché non ci sono condizioni patologiche e l'ingresso è a gradino.

$$v_{C1}(0^+) = 0 \rightarrow \left. \frac{dv_{C2}}{dt} \right|_{0^+} = v_{C1}(0^+) = 0$$

$$v_{C2}(0^+) = 0 = A + 1 \rightarrow A = -1$$

$$\frac{dv_{C2}}{dt} = -\frac{1}{4}e^{-t/4} \left( A \cos \frac{\sqrt{3}}{4}t + B \sin \frac{\sqrt{3}}{4}t \right) + e^{-t/4} \left( -\frac{\sqrt{3}}{4}A \sin \frac{\sqrt{3}}{4}t + \frac{\sqrt{3}}{4}B \cos \frac{\sqrt{3}}{4}t \right)$$

$$0 = -\frac{1}{4}A + \frac{\sqrt{3}}{4}B \rightarrow B = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$v_0(t) = v_{C2}(t) = \left[ 1 - e^{-t/4} \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{4}t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{4}t \right) \right] \delta_{-1}(t)$$

In Figura 109 è riportato l'andamento della  $v_0(t)$

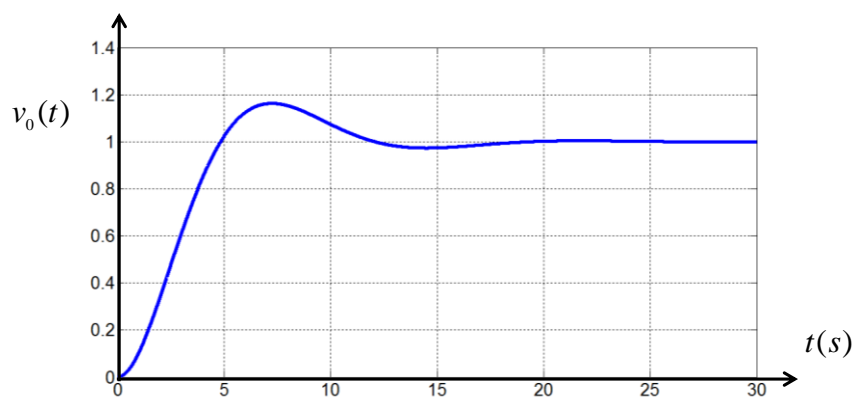


Figura 109. Andamento della  $v_0(t)$

□

### Esempio 22

Nel circuito di Figura 110, determinare  $v_0(t)$  per  $t > 0$  con condizioni iniziali nulle.

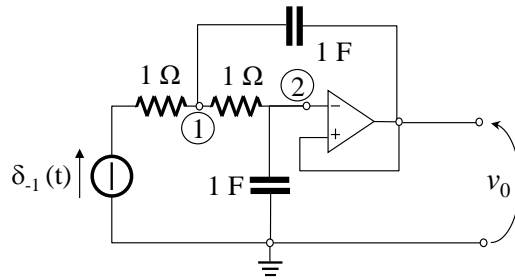


Figura 110. Circuito con amplificatore operazionale.

### Soluzione

Stato iniziale:

$$v_2 = v_0(0^-) = 0 \quad (v_1 - v_0)_{0^-} = 0 \rightarrow v_1(0^-) = 0$$

$$\begin{cases} \text{(nodo 1)} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{1-v_1}{1} = \frac{v_1-v_0}{1} + \frac{dv_1}{dt} - \frac{dv_0}{dt} \\ \frac{v_1-v_0}{1} = \frac{dv_0}{dt} \Rightarrow v_1 = \frac{dv_0}{dt} + v_0 \end{array} \right. \Rightarrow 1 - \frac{dv_0}{dt} - v_0 = \frac{dv_0}{dt} + v_0 - v_0 + \frac{d^2v_0}{dt^2} + \frac{dv_0}{dt} - \frac{dv_0}{dt} \\ \text{(nodo 2)} & \end{cases}$$

$$\frac{d^2v_0}{dt^2} + 2\frac{dv_0}{dt} + v_0 = 1 \quad \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad (\lambda + 1)^2 = 0 \quad \lambda_{1,2} = -1 \quad \text{radici reali coincidenti}$$

$$v_{0_{oa}}(t) = e^{-t}(A + Bt)$$

$$v_{0_p}(t) = k = 1$$

$$v_0(t) = v_{0_{oa}}(t) + v_{0_p}(t) = e^{-t}(A + Bt) + 1$$

$$0 = A + 1 \Rightarrow A = -1$$

dalla \* si ha:  $\left. \frac{dv_0}{dt} \right|_{0^+} = v_1(0^+) - v_0(0^+) = 0$

$$\frac{dv_0}{dt} = -e^{-t}(A + Bt) + e^{-t}(B) \Rightarrow \left. \frac{dv_0}{dt} \right|_{0^+} = 0 = -A + B = 1 + B \Rightarrow B = -1$$

$$v_0(t) = e^{-t}(-1 - t) + 1 = [1 - e^{-t} - te^{-t}]\delta_{-1}(t)$$

□

### Esempio 23

Per  $t < 0$  il circuito di Figura 111 è a regime. In  $t = 0$  il tasto si apre. Determinare la corrente  $i_L(t)$  per  $t > 0$ .

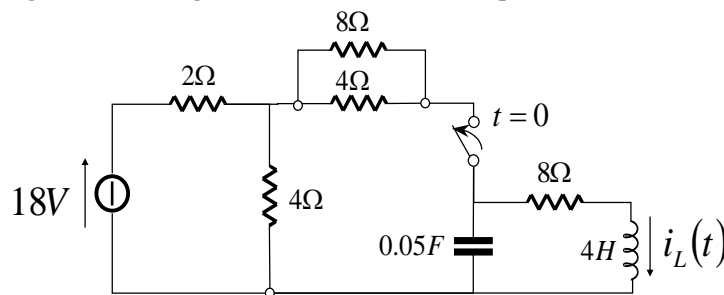


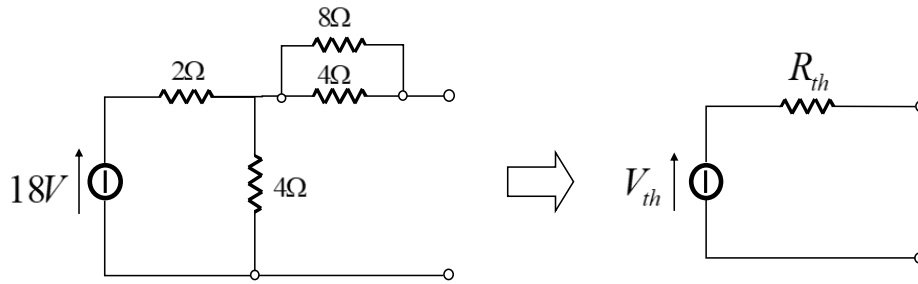
Figura 111. Circuito con tasto in commutazione.

### Soluzione

Semplifichiamo il circuito applicando il teorema di Thevenin al bipolo a sinistra dell'interruttore (Figura 112):

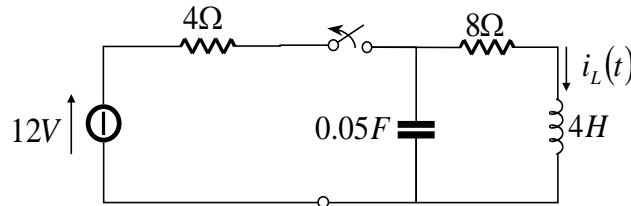
$$R_{th} = \frac{2 \cdot 4}{2 + 4} + \frac{4 \cdot 8}{4 + 8} = 4\Omega$$

$$V_{th} = 18 \cdot \frac{4}{2 + 4} = 12V$$



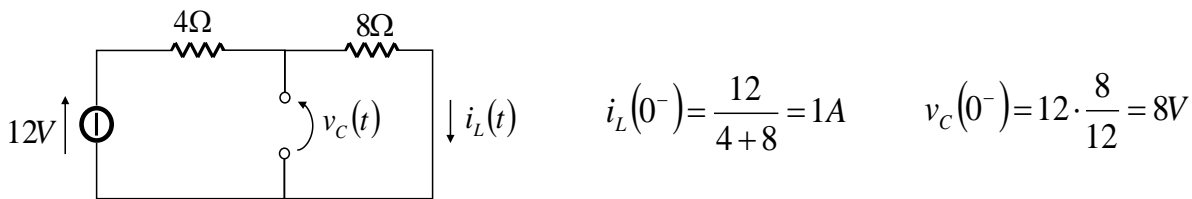
**Figura 112.** Equivalente di Thevenin del circuito a destra dell'interruttore

Il circuito risultante è quello di Figura 113.



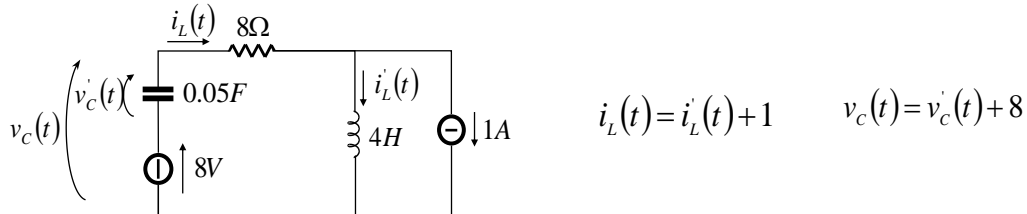
**Figura 113.** Circuito di Figura 111 semplificato

Per  $t < 0$  il circuito è a regime, quindi il condensatore diventa un circuito aperto e l'induttore un corto-circuito. Il circuito risultante è quello di Figura 114.



**Figura 114.** Circuito di Figura 111 per  $t < 0$

Per  $t > 0$  l'interruttore si apre ed il circuito da analizzare diventa quello di Figura 115.



**Figura 115.** Circuito di Figura 111 per  $t > 0$

$$\text{Eq.ne condensatore} \Rightarrow i_L = 0.05 \frac{dv'_C}{dt} \quad \text{Eq.ne induttore} \Rightarrow v_L = 4 \frac{di'_L}{dt}$$

$$8 = v'_C + 8i_L + v_L \Rightarrow 8 = v'_C + 8(i'_L + 1) + 4 \frac{di'_L}{dt} \quad \text{Derivando si ottiene} \quad 0 = \frac{dv'_C}{dt} + 8 \frac{di'_L}{dt} + 4 \frac{d^2i'_L}{dt^2}$$

$$\text{Dall'eq.ne del condensatore si ha} \quad \frac{dv'_C}{dt} = \frac{i_L}{0.05} = \frac{i'_L + 1}{0.05}$$

$$\frac{i'_L + 1}{0.05} + 8 \frac{di'_L}{dt} + 4 \frac{d^2i'_L}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2i'_L}{dt^2} + 2 \frac{di'_L}{dt} + 5i'_L = -5 \quad \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm 2j$$

$$5k = -5 \Rightarrow k = -1$$

$$i'_L(t) = e^{-t} (A_1 \cos 2t + A_2 \sin 2t) - 1$$

Condizioni iniziali:  $i_L(0^-) = 0$        $i_L'(0^-) = A_1 - 1 = 0 \Rightarrow A_1 = 1$

$$\frac{di_L}{dt} = 2 - \frac{v_C}{4} - 2(i_L + 1) \Rightarrow \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{0^-} = 2 - 2 = 0$$

$$\frac{di_L}{dt} = -e^{-t}(A_1 \cos 2t + A_2 \sin 2t) + e^{-t}(-2A_1 \sin 2t + 2A_2 \cos 2t) \quad \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{0^-} = -1 + 2A_2 = 0 \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2}$$

$$i_L(t) = e^{-t} \left( \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) - 1$$

$$i_L(t) = i_L'(t) + 1 = e^{-t} \left( \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t \right)$$

□

### Esempio 24

Nell'istante  $t = 0$  il tasto viene aperto. Per  $t < 0$  il circuito di Figura 116 è a regime. Per  $t > 0$  il circuito di destra ha una costante di tempo  $t = 120 \text{ ms}$  e dissipa complessivamente un'energia  $W = 20 \text{ mJ}$ .

Determinare la totale energia elettrostatica immagazzinata e la potenza complessivamente dissipata dal circuito quando l'interruttore è chiuso. Dati:  $R_1 = 50 \text{ k}\Omega$ ;  $R_2 = 50 \text{ k}\Omega$ ;  $R_3 = 40 \text{ k}\Omega$ ;  $C_1 = 2 \mu\text{F}$ ;  $C_2 = 4 \mu\text{F}$

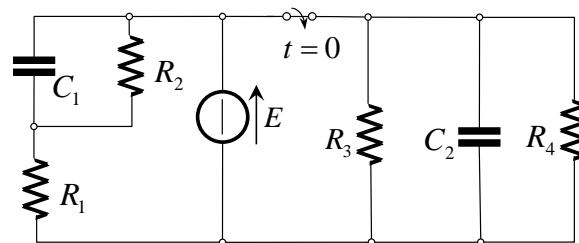
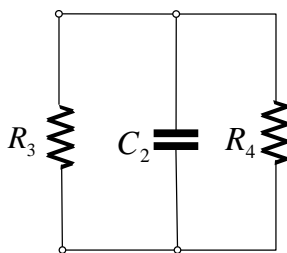


Figura 116. Circuito con tasto in commutazione.

### Soluzione

Sappiamo che, a tasto aperto, la costante di tempo del circuito di destra è  $t = 120 \text{ ms}$  e l'energia dissipata è  $W = 20 \text{ mJ}$ . Il circuito di destra, a tasto aperto, è riportato in Figura 117.



$$C_2 \frac{dv_{C2}}{dt} + \frac{v_{C2}}{R_3 // R_4} = 0 \Rightarrow C_2 \frac{dv_{C2}}{dt} + \frac{R_3 + R_4}{R_3 R_4} v_{C2} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{R_3 + R_4}{R_3 \cdot R_4 \cdot C_2}$$

$$\tau = \frac{R_3 R_4 C_2}{R_3 + R_4} \Rightarrow R_3 \tau + R_4 \tau = R_3 R_4 C_2$$

$$R_4 = \frac{R_3 \tau}{R_3 C_2 - \tau} \quad R_4 = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 120 \cdot 10^{-3}}{40 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-6} - 120 \cdot 10^{-3}} = 120 \cdot 10^3 \Omega$$

Figura 117. Circuito a destra del tasto

L'energia dissipata nei due resistori non può che essere quella immagazzinata (per  $t < 0$ ) nel condensatore  $C_2$ . Per  $t < 0$  il condensatore  $C_2$  a regime ha una tensione  $v_{C20} = E$ , quindi:

$$\frac{1}{2} C_2 v_{C20}^2 = \frac{1}{2} C_2 E^2 = 120 \cdot 10^{-3} \text{ J} \Rightarrow E^2 = \frac{2 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-6}} = 10000 \Rightarrow E = 100 \text{ V}$$

Per  $t > 0$  il circuito da analizzare è quello di Figura 118

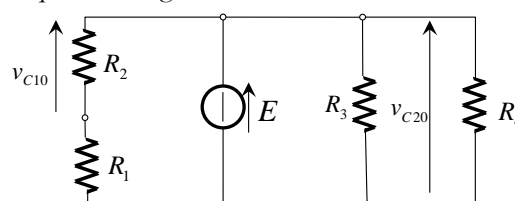


Figura 118. Circuito per  $t > 0$

$$v_{C10} = v_{C1}(0^-) = \frac{E}{2} = 50V \quad v_{C20} = v_{C2}(0^-) = E = 100V$$

L'energia immagazzinata è:

$$W_e = \frac{1}{2}C_1v_{C10}^2 + \frac{1}{2}C_2v_{C20}^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot (50)^2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot (100)^2 = 22,5mJ$$

La Potenza dissipata è:

$$P = \frac{E^2}{R_{eq}} \quad \text{con} \quad R_{eq} = (50 + 50)//40//120 \text{ k}\Omega = 23,08k\Omega \quad \text{da cui} \quad P = \frac{100^2}{23,08 \cdot 10^3} = 0,433W$$

□

### Esempio 25

Dato il circuito in Figura 119, determinare il valore della corrente  $i_x$  per  $t > 0$ .

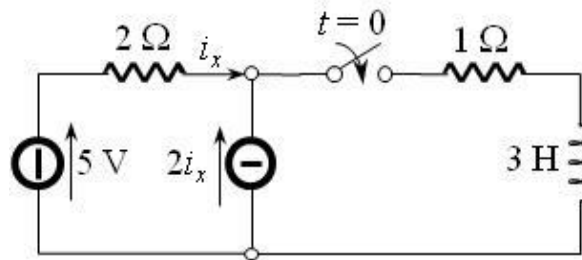


Figura 119. Circuito con tasto in commutazione.

### Soluzione

Non occorre studiare il circuito per  $t < 0$ . L'induttore è sicuramente scarico in  $t = 0^-$  per via dell'interruttore aperto.

Per  $t > 0$  il circuito da analizzare è quello di Figura 120.

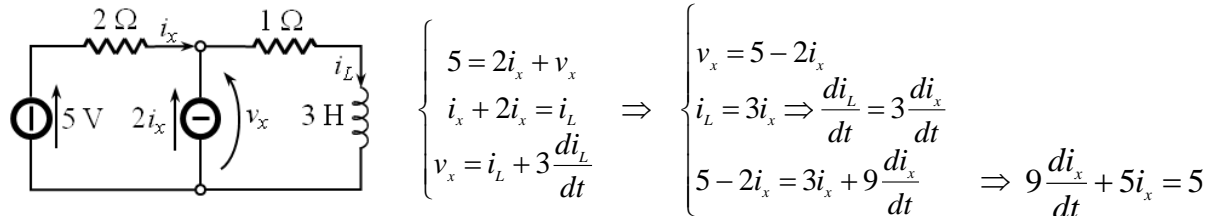


Figura 120. Circuito con tasto chiuso

Condizione iniziale  $i_x(0^+)$ :

Nota  $i_L(0^-) = 0$  non ci sono condizioni patologiche, quindi  $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$

Dalla  $i_L = 3i_x \rightarrow i_x(0^+) = 1/3 i_L(0^+) = 0$

Equazione caratteristica:  $9\lambda + 5 = 0 \quad \lambda = -\frac{5}{9}$

$$i_x(t) = A \cdot e^{-\frac{5}{9}t} + i_{xp} \quad i_{xp} = K \quad 5K = 5 \rightarrow K = 1$$

$$i_x(t) = A \cdot e^{-\frac{5}{9}t} + 1$$

In  $t = 0^+$ :  $0 = A + 1 \rightarrow A = -1$

$$i_x(t) = 1 - e^{-\frac{5}{9}t}$$

□

### Esempio 26

Dato il circuito in Figura 121, determinare:

- l'equazione di stato
- la costante di tempo  $\tau$  illustrandone il significato e la frequenza libera  $\lambda$
- la tensione  $v(t)$  per  $t > 0$  e tracciarne un grafico qualitativo
- l'energia immagazzinata dal condensatore nell'istante  $t = \tau$ .

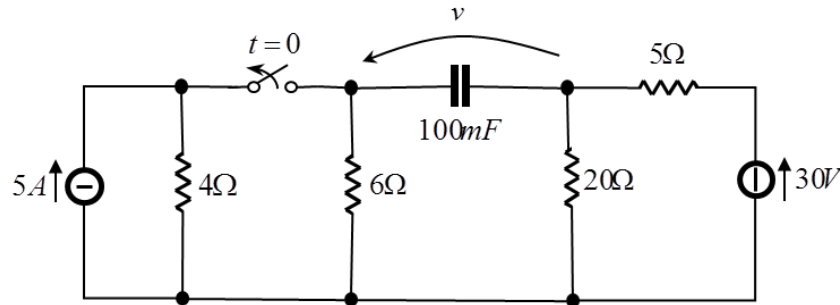
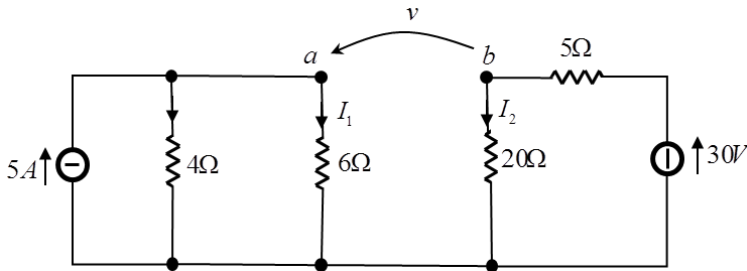


Figura 121. Circuito con tasto in commutazione.

### Soluzione

Per  $t < 0$  il circuito da analizzare è quello di Figura 122.



$$I_1 = 5 \cdot \frac{4}{4+6} = 2A$$

$$I_2 = \frac{30}{20} \cdot \frac{20}{20+5} = 1.2A$$

$$V_{ab} = V_a - V_b = 6I_1 - 20I_2 = -12V$$

Figura 122. Circuito per  $t < 0$ .

Per  $t > 0$  il circuito da analizzare è quello di Figura 123.

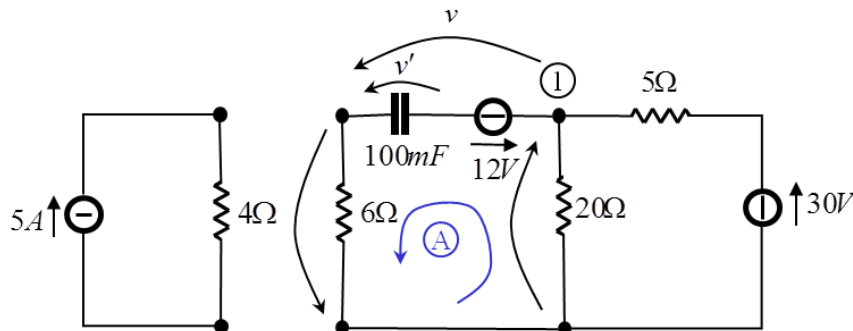


Figura 123. Circuito per  $t > 0$ .

$$v'(0^+) = v'(0^-) = 0$$

#### •Nodo 1

$$0.1 \frac{dv'}{dt} - \frac{v_1}{20} + \frac{30-v_1}{5} = 0$$

#### •Maglia A

$$v' + 6 \cdot 0.1 \frac{dv'}{dt} + v_1 = 12$$

$$v_1 = 12 - v' - 0.6 \frac{dv'}{dt}$$

$$v_1 = 12 - v' - 0.6 \frac{dv'}{dt} \Rightarrow 0.1 \frac{dv'}{dt} - 0.25v_1 + 6 = 0$$

$$0.1 \frac{dv'}{dt} - 0.25 \cdot \left[ 12 - v' - 0.6 \frac{dv'}{dt} \right] + 6 = 0 \Rightarrow 0.25 \frac{dv'}{dt} + 0.25v' = -3$$

$$\frac{dv'}{dt} + v' = -12 \Rightarrow \lambda = -1 \quad \text{costante di tempo} \rightarrow \tau = -\frac{1}{\lambda} = 1s$$

$$v'_p = -12 \Rightarrow v' = Ae^{-t} - 12 \quad v'(0^+) = A - 12 = 0 \rightarrow A = 12$$

$$v' = -12(1 - e^{-t}) \Rightarrow v(t) = v' - 12 = -24 + 12e^{-t}$$

$$v(\tau) = v(1) = -24 + 12e^{-1} = -19.59V$$

$$W(\tau) = \frac{1}{2} C [v(\tau)]^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.1 \cdot [-19.59]^2 = 0.22J$$

$$v(t) = -24 + 12e^{-t}$$

In Figura 124 è riportato il grafico della  $v(t)$

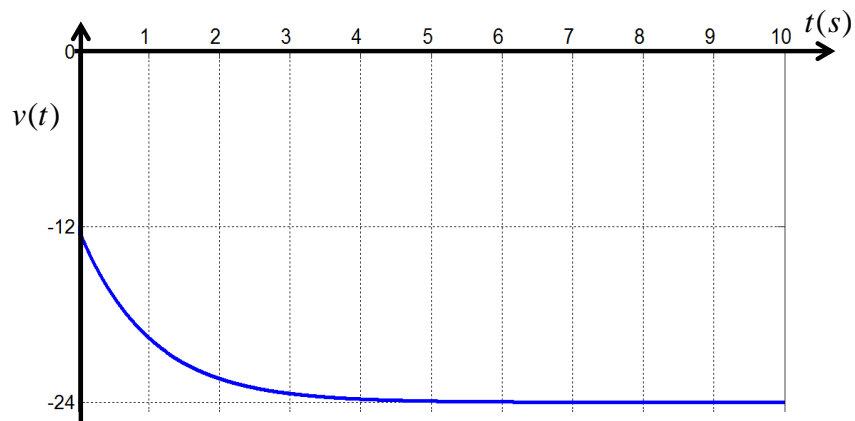


Figura 124. Grafico della  $v(t)$  per  $t > 0$ .

□