

EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI LINEARI/1: PROBLEMI STAZIONARI

ANTONIO IANNIZZOTTO

SOMMARIO. Equazioni alle derivate parziali del secondo ordine lineari ellittiche: condizioni di Dirichlet, Neumann, definizioni di soluzione classica, debole. Problema di Dirichlet omogeneo per un'equazione ellittica: esistenza e unicità della soluzione debole, regolarità, ritorno alla soluzione classica. Principio del massimo. Esistenza mediante il Teorema di alternativa di Fredholm. Problema agli autovalori: spettro del laplaciano, caratterizzazione degli autovalori, decomposizione spettrale. Altri casi: equazione di Poisson, problema di Dirichlet omogeneo, problema di Neumann, operatori ellittici, p -laplaciano.

INDICE

1. Soluzioni classiche e deboli	1
2. Problema di Dirichlet: esistenza e unicità	4
3. Problema di Dirichlet: regolarità	5
4. Il principio del massimo	20
5. Lo spettro del laplaciano	22
6. Altre EDP ellittiche lineari	25
7. L'operatore p -Laplaciano	29
Riferimenti bibliografici	31

Versione del 8 giugno 2023

*Di ciò che sempre non è ora vedremo i portenti,
di ciò che sempre è ora vedremo i confini.*

LAO TSE

1. SOLUZIONI CLASSICHE E DEBOLI

Un'equazione alle derivate parziali (EDP) del secondo ordine lineare è un problema del tipo

$$(1.1) \quad - \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{h=1}^N b_h(x) \frac{\partial u}{\partial x_h} + c(x)u = f(x) \text{ in } \Omega,$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N > 1$) è un dominio (cioè un insieme aperto connesso) e $a_{ij}, b_h, c, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni (di solito continue). Le equazioni del secondo ordine sono sufficienti a descrivere la maggior parte dei fenomeni fisici, biologici e sociali in quanto incorporano informazioni sullo stato del sistema (descritto dalla funzione u), sulla sua velocità (descritta dal gradiente ∇u) e sulla sua accelerazione (descritta dalla matrice hessiana $D^2 u$). Una *soluzione classica* di (1.1) è una funzione $u \in C^2(\Omega)$ t.c. per ogni $x \in \Omega$ si ha

$$- \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{h=1}^N b_h(x) \frac{\partial u}{\partial x_h}(x) + c(x)u(x) = f(x).$$

Le EDP lineari si classificano secondo il carattere della loro parte principale, ovvero dei coefficienti dei termini del secondo ordine, riuniti nella matrice $A(x) = [a_{ij}(x)]_{i,j=1}^N$. Per il Teorema di Schwarz, possiamo supporre che A sia simmetrica in Ω , ovvero che $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni $i, j = 1, \dots, N$. Altrimenti, riformuliamo equivalentemente (1.1) con i seguenti coefficienti nella parte principale:

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}.$$

Inoltre, a meno di un cambio di segno, possiamo sempre supporre che A abbia almeno un autovalore positivo:

- (a) se tutti gli autovalori di A sono positivi, (1.1) è detta *ellittica*;
- (b) se un autovalore di A è 0 e gli altri sono positivi, (1.1) è detta *parabolica*;
- (c) se un autovalore di A è negativo e gli altri sono positivi, (1.1) è detta *iperbolica*.

Ovviamente, questa classificazione non è esaustiva, tuttavia essa abbraccia le EDP lineari più importanti (ved. [5]). Inoltre, essa si estende al caso *semilineare*, ovvero quello in cui i termini dipendenti da $(x, u, \nabla u)$ non sono lineari. Dal punto di vista fisico, si osserva che le equazioni ellittiche descrivono fenomeni *stazionari* ovvero stati di equilibrio di un sistema, mentre le equazioni paraboliche e iperboliche (in cui la variabile corrispondente all'autovalore nullo o negativo viene interpretata come variabile temporale) descrivono fenomeni *evolutivi*. Qui ci limitiamo allo studio del caso (a), rimandando a [10] per i casi (b), (c). In tal caso, sappiamo dall'algebra lineare che la forma quadratica indotta dalla matrice $A(x)$ è definita positiva, ovvero esiste $\alpha > 0$ t.c. per ogni $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^N$ vale la seguente condizione di *uniforme ellitticità*¹

$$(1.2) \quad \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2.$$

Per approfondimenti sulle EDP ellittiche rimandiamo a [4, 5, 7, 11].

Per evitare complicazioni tecniche, svolgeremo la teoria nel caso più semplice (rinviando alla Sezione 6 e a [2, Chapter 9] per problemi più generali). Poniamo $a_{ij} = \delta_{ij}$, $b_h = 0$, $c = 1$, così che (1.1) si riduce alla seguente EDP:

$$-\Delta u + u = f(x) \text{ in } \Omega,$$

dove

$$\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

è l'operatore *laplaciano* (per $f = 0$ l'EDP è detta *omogenea*). Ad essa abbineremo una condizione al contorno detta *condizione di Dirichlet omogenea*, richiedendo che u si annulli sulla frontiera $\Gamma = \partial\Omega$. Consideriamo quindi il problema

$$(1.3) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma. \end{cases}$$

Definizione 1.1. Una soluzione classica di (1.3) è una funzione $u \in C^2(\bar{\Omega})$ t.c.

- (i) $-\Delta u(x) + u(x) = f(x)$ per ogni $x \in \Omega$;
- (ii) $u(x) = 0$ per ogni $x \in \Gamma$.

Come si vede dalla Definizione 1.1, il problema (1.3) può ammettere una soluzione classica solo in particolari casi (per esempio, si deve avere $f \in C(\Omega)$), inoltre il calcolo esplicito di tale soluzione è in generale complesso e dipende fortemente dalla forma dell'equazione (ved. [5]). Condurremo invece uno studio qualitativo, basato sul seguente metodo articolato in 3 passi:

¹In realtà questo richiede che $a_{ij} \in C(\bar{\Omega})$ e che $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sia limitato.

- (1) definire una nozione alternativa, *debole*, di soluzione per (1.3) (usando gli spazi di Sobolev introdotti in [9]);
- (2) dimostrare, con metodi di analisi funzionale, l'esistenza e l'unicità di tale soluzione debole (usando la teoria svolta in [8]);
- (3) studiare la regolarità della soluzione debole, riconducendola infine a una soluzione classica.

Questo metodo, che esporremo per il problema (1.3), si estende facilmente a problemi molto più generali.

Definizione 1.2. Una soluzione debole di (1.3) è una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ t.c. per ogni $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u\varphi) dx = \int_{\Omega} f\varphi dx.$$

Nella Definizione 1.2 non compaiono le derivate seconde di u (nemmeno in senso debole). Inoltre, se $u \in H_0^1(\Omega)$ e $f \in L^2(\Omega)$, allora il funzionale lineare

$$\varphi \mapsto \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u\varphi) dx - \int_{\Omega} f\varphi dx$$

è ben definito e continuo in $H_0^1(\Omega)$, dunque per densità si può riformulare la Definizione 1.2 prendendo le funzioni test in $C_c^\infty(\Omega)$ o in $C_c^1(\Omega)$ (ved. [9]).

In molti casi la Definizione 1.1 implica la Definizione 1.2:

Proposizione 1.3. Siano Ω un dominio limitato di classe C^1 , $f \in C(\bar{\Omega})$, $u \in C^2(\bar{\Omega})$ una soluzione classica di (1.3). Allora u è una soluzione debole di (1.3).

Dimostrazione. Poiché $u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ e $u = 0$ su Γ , per i risultati di [9] abbiamo $u \in H_0^1(\Omega)$. Inoltre, fissata $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, per la formula di Gauß-Green e la Definizione 1.1 (i) si ha

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u\varphi) dx &= \int_{\Omega} (-\Delta u + u)\varphi dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} \varphi d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} f\varphi dx. \end{aligned}$$

Pertanto, u è una soluzione debole di (1.3). □

Se Ω è illimitato, $u \in C^2(\bar{\Omega})$ non implica $u \in H^1(\Omega)$, quindi la Proposizione 1.3 deve essere leggermente modificata.

Esempio 1.4. Sul dominio \mathbb{R}^2 consideriamo la funzione di Gauß

$$u(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}.$$

Si vede facilmente che u è soluzione classica in \mathbb{R}^2 dell'equazione

$$-\Delta u + u = \frac{5 - 4(x^2 + y^2)}{e^{x^2+y^2}}.$$

Inoltre $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, dunque essa è anche soluzione debole della stessa equazione.

Esempio 1.5. Poniamo $\Omega = B_1(0)$ in \mathbb{R}^2 e per ogni $(x, y) \in \Omega$

$$u(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Sappiamo da [9] che $u \in H^1(\Omega)$. Inoltre $u \in C(\bar{\Omega})$ e $u = 0$ su Γ , dunque $u \in H_0^1(\Omega)$. In effetti si ricava che $u \in H^2(\Omega)$ e per q.o. $(x, y) \in \Omega$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dunque si ha q.o. in Ω

$$-\Delta u + u = \frac{1 - x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

La funzione u è soluzione debole del problema (1.3), ma non è soluzione classica in quanto non è derivabile in $(0, 0)$.

Esempio 1.6. Consideriamo l'equazione di Laplace:

$$\Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N.$$

Essa ammette infinite soluzioni, tra cui le costanti $u(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$), ma solo per $c = 0$ si ha $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Esercizio 1.7. Dimostrare che nell'equazione (1.1) si può supporre $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni $i, j \in \{1, \dots, N\}$.

Esercizio 1.8. Svolgere i calcoli dell'Esempio 1.4.

Esercizio 1.9. Provare che la funzione a secondo membro nell'equazione dell'Esempio 1.5 appartiene a $L^2(\Omega)$.

2. PROBLEMA DI DIRICHLET: ESISTENZA E UNICITÀ

In questa sezione dimostriamo che, per ogni $f \in L^2(\Omega)$, il problema (1.3) ammette un'unica soluzione debole, caratterizzata come punto di minimo globale del corrispondente *funzionale dell'energia*. Questo approccio è caratteristico dei *metodi variazionali* (ved. [3, 14]).

Teorema 2.1. *Sia $f \in L^2(\Omega)$. Allora esiste un'unica soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ di (1.3). Inoltre, posto*

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u^2) dx - \int_{\Omega} f u dx,$$

si ha

$$\Phi(u) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} \Phi(v).$$

Dimostrazione. Lo spazio di Sobolev $H_0^1(\Omega)$ con la norma

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

è uno spazio di Hilbert separabile (ved. [9]). Su di esso definiamo una forma bilineare continua, coerciva, simmetrica (il prodotto scalare) ponendo per ogni $u, v \in H_0^1(\Omega)$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) dx.$$

Inoltre, poniamo per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$

$$h(u) = \int_{\Omega} f u dx.$$

Per la caratterizzazione vista in [9], abbiamo $h \in H^{-1}(\Omega)$. Dunque, per il Teorema di Lax-Milgram (ved. [8]), esiste un'unica $u \in H_0^1(\Omega)$ t.c. per ogni $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$a(u, \varphi) = h(\varphi),$$

quindi u è soluzione debole di (1.3) (Definizione 1.2). Inoltre, u è l'unico punto di minimo globale del funzionale $\Phi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definito da

$$\Phi(v) = \frac{a(v, v)}{2} - h(v),$$

come provato in [8]. □

La condizione al contorno, fissando alcuni valori della funzione incognita, assicura l'unicità della soluzione (in questo senso, essa svolge lo stesso ruolo della condizione di Cauchy nelle equazioni differenziali ordinarie).

Osservazione 2.2. Se Ω è illimitato, occorre osservare che l'unicità della soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ non implica l'unicità della soluzione classica: infatti, il problema (1.3) potrebbe ammettere una soluzione classica $\tilde{u} \in C^2(\bar{\Omega})$ che non appartiene a $H_0^1(\Omega)$. Nella richiesta che $u \in H_0^1(\Omega)$ è implicita una 'condizione di Dirichlet asintotica' del tipo

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0.$$

Esercizio 2.3. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $m \in L^\infty(\Omega)$ una funzione positiva, $f \in L^2(\Omega)$. Dimostrare che il problema

$$\begin{cases} -\Delta u + m(x)u = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione debole.

Esercizio 2.4. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio limitato, $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^N$ una matrice simmetrica formata da funzioni $a_{ij} \in C(\bar{\Omega})$ verificanti (1.2), $f \in L^2(\Omega)$. Dimostrare che esiste unica la soluzione debole di

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + u = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma. \end{cases}$$

3. PROBLEMA DI DIRICHLET: REGOLARITÀ

In questa sezione *assumiamo* l'esistenza di una soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ di (1.3) (garantita dal Teorema 2.1) e proviamo che, sotto ipotesi più restrittive su Ω e su f , essa guadagna una maggiore regolarità, fino a qualificarsi come soluzione classica. In generale, per ogni $m \in \mathbb{N}$ vale la seguente implicazione:

$$f \in H^m(\Omega), \Omega \in C^{m+2} \implies u \in H^{m+2}(\Omega)^2.$$

La teoria della regolarità qui esposta è basata sul *metodo delle traslazioni di Nirenberg*. Per ogni $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $x \in \mathbb{R}^N$ poniamo

$$T_h u(x) = u(x+h), \quad D_h u(x) = \frac{T_h u(x) - u(x)}{|h|}.$$

Si ha in particolare $T_h, D_h \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^N))$. Per ogni $u, v \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ si ha inoltre

$$(3.1) \quad \int_{\mathbb{R}^N} u D_h v \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} D_{-h} u v \, dx.$$

Infatti, usando il cambiamento di variabili $y = x - h$ si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{|h|} \, dx &= \frac{1}{|h|} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u(y-h) v(y) \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} u(x) v(x) \, dx \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x-h) - u(x)}{|h|} v(x) \, dx. \end{aligned}$$

²Usiamo la convenzione $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Gli operatori di traslazione *commutano* con le derivate deboli, ovvero per ogni $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ si ha $T_h u, D_h u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ con

$$\nabla(T_h u) = T_h(\nabla u), \quad \nabla(D_h u) = D_h(\nabla u).$$

Inoltre, se $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, si ha per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} D_{te_i} u = \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ in } L^2(\mathbb{R}^N).$$

Mediante le traslazioni, possiamo caratterizzare $H^1(\mathbb{R}^N)$ come sottospazio di $L^2(\mathbb{R}^N)$:

Lemma 3.1. *Sia $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (i) $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$;
- (ii) esiste $C > 0$ t.c. per ogni $h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ si ha $\|D_h u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C$.

Dimostrazione. Proviamo che (i) implica (ii). Supponiamo dapprima che $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Fissati $x \in \mathbb{R}^N$, $h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, poniamo per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$g(t) = u(x + th),$$

così che $g \in C^1(\mathbb{R})$ con $g'(t) = \nabla u(x + th) \cdot h$. Si ha

$$\begin{aligned} |u(x + h) - u(x)| &= \left| \int_0^1 g'(t) dt \right| \\ &\leq |h| \int_0^1 |\nabla u(x + th)| dt. \end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza precedente, la disuguaglianza di Jensen [2, p. 120], e il Teorema di Fubini otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} D_h u(x)^2 dx &= \frac{1}{|h|^2} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|h|^2} dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 |\nabla u(x + th)|^2 dt dx \\ &= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x + th)|^2 dx dt \\ &= \int_0^1 \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 dt = \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2. \end{aligned}$$

Sia ora $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Per i teoremi di densità visti in [9], esiste una successione (u_n) in $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ t.c. $u_n \rightarrow u$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} D_h u_n^2 dx \leq \|\nabla u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2.$$

Passando al limite per $n \rightarrow \infty$, ricaviamo $\|D_h u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$, ovvero (ii) vale con $C = \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$.

Proviamo ora che (ii) implica (i). Fissiamo $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $i \in \{1, \dots, N\}$, $t > 0$, e poniamo $h = te_i$. Da (ii), (3.1) e dalla Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz segue

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} u D_h \varphi dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} D_{-h} u \varphi dx \right| \\ &\leq \|D_{-h} u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Passando al limite per $t \rightarrow 0$, si ha

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \right| \leq C \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Per la caratterizzazione di $H^1(\mathbb{R}^N)$ vista in [9], si ha $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ (i). \square

Osservazione 3.2. Dalla dimostrazione del Lemma 3.1 vediamo che si può porre $C = \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$.

Diamo ora inizio alla teoria della regolarità per il problema (1.3), cominciando dal caso $\Omega = \mathbb{R}^N$ (ricordiamo che $H^1(\mathbb{R}^N) = H_0^1(\mathbb{R}^N)$, ved. [9]). In questo caso, ovviamente, la regolarità della frontiera non è da considerarsi:

Teorema 3.3. Siano $m \in \mathbb{N}$, $f \in H^m(\mathbb{R}^N)$, $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ soluzione debole di

$$-\Delta u + u = f(x) \text{ in } \mathbb{R}^N.$$

Allora $u \in H^{m+2}(\mathbb{R}^N)$, inoltre esiste $C > 0$ (indipendente da f) t.c.

$$\|u\|_{H^{m+2}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|f\|_{H^m(\mathbb{R}^N)}.$$

Dimostrazione. Si ha per ogni $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$

$$(3.2) \quad \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u \varphi) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f \varphi dx.$$

Ponendo $\varphi = u$ in (3.2) otteniamo

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 &= \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \\ &\leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \end{aligned}$$

da cui $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$. Per stimare le derivate di ordine superiore procediamo per induzione su $m \in \mathbb{N}$:

- (a) Per $m = 0$, supponiamo $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e dimostriamo che $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$. Fissato $h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, scegliamo $\varphi = D_{-h}(D_h u) \in H^1(\mathbb{R}^N)$ in (3.2):

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla D_{-h}(D_h u) + u D_{-h}(D_h u)) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f D_{-h}(D_h u) dx.$$

Applicando (3.1) al primo membro abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla D_{-h}(D_h u) + u D_{-h}(D_h u)) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla D_h u|^2 + |D_h u|^2) dx \\ &= \|D_h u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2. \end{aligned}$$

D'altra parte, per il Lemma 3.1 (ved. anche l'Osservazione 3.6) si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} f D_{-h}(D_h u) dx &\leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|D_{-h}(D_h u)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|\nabla D_h u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|D_h u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Concatenando queste relazioni e semplificando $\|D_h u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$, otteniamo

$$\|D_h u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Fissato $i \in \{1, \dots, N\}$, si ha in particolare

$$\left\| D_h \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Per il Lemma 3.1 abbiamo $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ con

$$\left\| \nabla \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Ne segue $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$, e inoltre

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^2(\mathbb{R}^N)} &= \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \sum_{j,k=1}^N \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \end{aligned}$$

con $C > 0$ dipendente solo da N^3 .

(b) Per $m > 0$, supponiamo la tesi vera per $(m-1)$ e dimostriamola per m . Sia dunque $f \in H^m(\mathbb{R}^N)$. Per il caso (a) abbiamo almeno $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$. Fissiamo $i \in \{1, \dots, N\}$ e poniamo

$$v = \frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Proviamo che v è soluzione debole dell'equazione

$$(3.3) \quad -\Delta v + v = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \text{ in } \mathbb{R}^N.$$

Infatti, per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, scegliamo $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ come funzione test in (3.2):

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u \cdot \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx.$$

Per definizione di derivata debole (ved. [9])

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u \cdot \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) dx = - \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v \cdot \nabla \varphi + v \varphi) dx,$$

e similmente

$$\int_{\mathbb{R}^N} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi dx.$$

Concatenando e cambiando segno, abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v \cdot \nabla \varphi + v \varphi) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi dx,$$

ovvero (3.3) (in forma debole). Poiché $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in H^{m-1}(\mathbb{R}^N)$, dall'ipotesi induttiva segue $v \in H^{m+1}(\mathbb{R}^N)$, con la stima

$$\|v\|_{H^{m+1}(\mathbb{R}^N)} \leq C \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{H^{m-1}(\mathbb{R}^N)}.$$

Dunque $u \in H^{m+2}(\mathbb{R}^N)$, e richiamando tutte le diseguaglianze precedenti abbiamo

$$\|u\|_{H^{m+2}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|f\|_{H^m(\mathbb{R}^N)}.$$

Per induzione, la tesi è provata per ogni $m \in \mathbb{N}$. □

³In questa sezione, $C > 0$ denoterà diverse costanti, tutte dipendenti solo dal dominio e indipendenti dal termine noto delle varie equazioni.

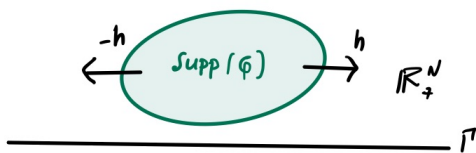


FIGURA 1.

Consideriamo ora il semispazio illimitato

$$\mathbb{R}_+^N = \{(x', x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\},$$

con frontiera

$$\Gamma = \{(x', 0) : x' \in \mathbb{R}^{N-1}\}.$$

Come vedremo, in questo caso occorre distinguere fra la derivazione (in senso debole) rispetto alle variabili x_1, \dots, x_{N-1} parallele a Γ e quella rispetto a x_N ortogonale a Γ . Osserviamo che, fissato un vettore $h = (h_1, \dots, h_{N-1}, 0) \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ (parallelo a Γ), per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^N)$ si ha $\text{supp}(\varphi) \pm h \subset \mathbb{R}_+^N$ (fig. 1), da cui $D_h \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^N)$. Riportiamo il seguente lemma tecnico, analogo al Lemma 3.1:

Lemma 3.4. *Siano $u \in H_0^1(\mathbb{R}_+^N)$, $h = (h_1, \dots, h_{N-1}, 0) \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Allora $D_h u \in H_0^1(\mathbb{R}_+^N)$ e*

$$\|D_h u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)}.$$

Studiamo ora la regolarità delle soluzioni deboli di (1.3) con $\Omega = \mathbb{R}_+^N$:

Teorema 3.5. *Siano $m \in \mathbb{N}$, $f \in H^m(\mathbb{R}_+^N)$, $u \in H_0^1(\mathbb{R}_+^N)$ soluzione debole di*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(x) & \text{in } \mathbb{R}_+^N \\ u = 0 & \text{su } \Gamma. \end{cases}$$

Allora $u \in H^{m+2}(\mathbb{R}_+^N)$, inoltre esiste $C > 0$ (indipendente da f) t.c.

$$\|u\|_{H^{m+2}(\mathbb{R}_+^N)} \leq C \|f\|_{H^m(\mathbb{R}_+^N)}.$$

Dimostrazione. Per ogni $\varphi \in H_0^1(\mathbb{R}_+^N)$ si ha

$$(3.4) \quad \int_{\mathbb{R}_+^N} (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u \varphi) dx = \int_{\mathbb{R}_+^N} f \varphi dx,$$

da cui come nel caso precedente ricaviamo

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^N)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)}.$$

Denotiamo $\{e_1, \dots, e_N\}$ la base canonica di \mathbb{R}^N , e procediamo per induzione su $m \in \mathbb{N}$:

- (a) Per $m = 0$, supponiamo $f \in L^2(\mathbb{R}_+^N)$ e dimostriamo che $u \in H^2(\mathbb{R}_+^N)$. Fissiamo $h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ parallelo a Γ . Per il Lemma 3.4 abbiamo $D_{-h}(D_h u) \in H_0^1(\mathbb{R}_+^N)$, dunque poniamo $\varphi = D_{-h}(D_h u)$ in (3.4):

$$\int_{\mathbb{R}_+^N} (\nabla u \cdot \nabla (D_{-h}(D_h u)) + u D_{-h}(D_h u)) dx = \int_{\mathbb{R}_+^N} f D_{-h}(D_h u) dx.$$

Identifichiamo ciascuna funzione con la sua estensione a \mathbb{R}^N , nulla in \mathbb{R}_-^N . Allora, per (3.1) abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^N} (\nabla u \cdot \nabla(D_{-h}(D_h u)) + u D_{-h}(D_h u)) dx &= \int_{\mathbb{R}_+^N} (|\nabla(D_h u)|^2 + |D_h u|^2) dx \\ &= \|D_h u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^N)}^2, \end{aligned}$$

mentre dal Lemma 3.1 segue

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^N} f D_{-h}(D_h u) dx &\leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)} \|D_{-h}(D_h u)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)} \|D_h u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^N)}. \end{aligned}$$

Concatenando queste relazioni e semplificando, abbiamo

$$(3.5) \quad \|D_h u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^N)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)}.$$

Fissiamo $i \in \{1, \dots, N-1\}$, $j \in \{1, \dots, N\}$. Posto $h = te_i$ ($t > 0$), per (3.1) e (3.5), si ha per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^N)$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}_+^N} u D_{-h} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}_+^N} D_h \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \varphi dx \right| \\ &\leq \|D_h u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^N)} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)}. \end{aligned}$$

Passando al limite per $t \rightarrow 0^+$, si ha

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}_+^N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}_+^N} u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} dx \right| \\ &\leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)}, \end{aligned}$$

esiste la derivata debole $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\mathbb{R}_+^N)$ con

$$(3.6) \quad \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)}.$$

Infine, consideriamo il caso $i = j = N$. Da (3.4) si ha per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^N)$

$$-\sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}_+^N} u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} dx + \int_{\mathbb{R}_+^N} u \varphi dx = \int_{\mathbb{R}_+^N} f \varphi dx.$$

Sfruttando (3.6) e ricordando che $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^N)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)}$, si ha

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}_+^N} u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_N^2} dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}_+^N} (f - u) \varphi dx + \sum_{i=1}^{N-1} \int_{\mathbb{R}_+^N} u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} dx \right| \\ &\leq (\|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)}) \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)} + \sum_{i=1}^{N-1} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)} \\ &\leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)}. \end{aligned}$$

Pertanto (3.6) vale anche per $i = j = N$. Concludiamo che $u \in H^2(\mathbb{R}_+^N)$ con

$$\|u\|_{H^2(\mathbb{R}_+^N)} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)},$$

con $C > 0$ indipendente da f .

(b) Per $m > 0$, supponiamo la tesi vera fino all'ordine $m - 1$. Assumiamo quindi $f \in H^m(\mathbb{R}_+^N)$. Si ha in particolare $f \in H^{m-1}(\mathbb{R}_+^N)$, da cui per l'ipotesi induttiva segue $u \in H^{m+1}(\mathbb{R}_+^N)$ con

$$\|u\|_{H^{m+1}(\mathbb{R}_+^N)} \leq C \|f\|_{H^{m-1}(\mathbb{R}_+^N)}.$$

Per ottenere la tesi, dimostreremo che le derivate seconde di u appartengono a $H^m(\mathbb{R}_+^N)$, con opportune stime delle norme.

Fissiamo dapprima $i \in \{1, \dots, N - 1\}$ e poniamo

$$v = \frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\mathbb{R}_+^N).$$

Proviamo che v è soluzione debole del problema

$$(3.7) \quad \begin{cases} -\Delta v + v = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) & \text{in } \mathbb{R}_+^N \\ v = 0 & \text{su } \Gamma. \end{cases}$$

Infatti, per ogni $t > 0$, dal Lemma 3.4 (con $h = te_i$ parallelo a Γ) segue $D_{te_i}u \in H_0^1(\mathbb{R}_+^N)$ e

$$\|D_{te_i}u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^N)} \leq \|u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^N)}.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$v_n = D_{\frac{e_i}{n}}u \in H_0^1(\mathbb{R}_+^N).$$

La successione (v_n) è limitata in $H_0^1(\mathbb{R}_+^N)$. Per riflessività esiste una sotto-successione convergente a una funzione $\tilde{v} \in H_0^1(\mathbb{R}_+^N)$. D'altra parte, abbiamo q.o. in \mathbb{R}_+^N

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{te_i}u = v,$$

da cui $v = \tilde{v} \in H_0^1(\mathbb{R}_+^N)$. Fissiamo ora $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e scegliamo $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ come funzione test in (3.4):

$$\int_{\mathbb{R}_+^N} \left(\nabla u \cdot \nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) dx = \int_{\mathbb{R}_+^N} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx.$$

Abbiamo d'altra parte

$$\int_{\mathbb{R}_+^N} \left(\nabla v \cdot \nabla \varphi + v \varphi \right) dx = - \int_{\mathbb{R}_+^N} \left(\nabla u \cdot \nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}_+^N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi dx = - \int_{\mathbb{R}_+^N} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx,$$

da cui

$$\int_{\mathbb{R}_+^N} \left(\nabla v \cdot \nabla \varphi + v \varphi \right) dx = \int_{\mathbb{R}_+^N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi dx.$$

Per ipotesi si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \in H^{m-1}(\mathbb{R}_+^N),$$

da cui segue $v \in H^{m+1}(\mathbb{R}_+^N)$ con

$$\|v\|_{H^{m+1}(\mathbb{R}_+^N)} \leq C \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{H^{m-1}(\mathbb{R}_+^N)} \leq C \|f\|_{H^m(\mathbb{R}_+^N)}.$$

In particolare, dai passaggi svolti fin qui abbiamo per ogni $i \in \{1, \dots, N - 1\}$, $j \in \{1, \dots, N\}$

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{H^m(\mathbb{R}_+^N)} \leq C \|f\|_{H^m(\mathbb{R}_+^N)}.$$

Rimane da esaminare la derivata $\frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}$. Da (3.4), ricordando che $u \in H^2(\mathbb{R}_+^N)$, segue per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^N)$

$$-\sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}_+^N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}_+^N} u \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}_+^N} f \varphi \, dx,$$

ovvero si ha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2} = -\sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + u - f \in H^m(\mathbb{R}_+^N).$$

Applicando le stime precedenti abbiamo

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2} \right\|_{H^m(\mathbb{R}_+^N)} \leq C \|f\|_{H^m(\mathbb{R}_+^N)}.$$

Concludiamo che $u \in H^{m+2}(\mathbb{R}_+^N)$ con

$$\|u\|_{H^{m+2}(\mathbb{R}_+^N)} \leq C \|f\|_{H^m(\mathbb{R}_+^N)},$$

con $C > 0$ indipendente da f .

Per induzione, la tesi è provata per ogni $m \in \mathbb{N}$. □

Consideriamo infine un dominio Ω regolare, con frontiera limitata Γ . La difficoltà di questo caso è dovuta al fatto che non conosciamo la forma di Γ : la affronteremo 'rettificando' Γ , ovvero riconducendo mediante opportune trasformazioni il problema in esame a casi più semplici, nei quali potremo avvalerci dei risultati precedenti.

Premettiamo due risultati tecnici. Il primo è una versione del Lemma 3.4 per il semi-cubo:

Lemma 3.6. *Siano $w \in H_0^1(Q_+)$, $h = (h_1, \dots, h_{N-1}, 0) \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ t.c. $\text{supp}(w) \pm h \subset Q_+$. Allora $D_h w \in H_0^1(Q_+)$ e*

$$\|D_h w\|_{L^2(Q_+)} \leq \|\nabla w\|_{L^2(Q_+)}.$$

Il secondo risultato preliminare è un lemma di regolarità per un'equazione ellittica generale su un semi-cubo:

Lemma 3.7. *Siano $a_{jl} \in C^1(\overline{Q}_+)$, $\alpha > 0$, $g \in L^2(Q_+)$ t.c. $a_{jl} = a_{lj}$ per ogni $j, l \in \{1, \dots, N\}$ e per ogni $y \in Q_+$, $\xi \in \mathbb{R}^N$*

$$\sum_{j,l=1}^N a_{jl}(y) \xi_j \xi_l \geq \alpha |\xi|^2.$$

Sia inoltre $w \in H_0^1(Q_+)$ una soluzione debole di

$$\begin{cases} -\sum_{j,l=1}^N \frac{\partial}{\partial y_l} \left(a_{jl}(y) \frac{\partial w}{\partial y_j} \right) = g(y) & \text{in } Q_+ \\ w = 0 & \text{su } \partial Q_+, \end{cases}$$

t.c. $\text{supp}(w) \pm h \subset \overline{Q}_+$ per ogni $h = (h_1, \dots, h_{N-1}, 0) \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ abbastanza piccolo. Allora $w \in H^2(Q_+)$ ed esiste $C > 0$ indipendente da g t.c.

$$\|w\|_{H^2(Q_+)} \leq C \|g\|_{L^2(Q_+)}.$$

Dimostrazione. Per ogni $\psi \in H_0^1(Q_+)$ si ha

$$(3.8) \quad \sum_{j,l=1}^N \int_{Q_+} a_{jl} \frac{\partial w}{\partial y_j} \frac{\partial \psi}{\partial y_l} \, dy = \int_{Q_+} g \psi \, dy.$$

Scegliamo $\psi = w$ in (3.8) e applichiamo la condizione di uniforme ellitticit  e la diseguglianza di Poincar  (ved. [9]):

$$\begin{aligned} \alpha \|\nabla w\|_{L^2(Q_+)}^2 &\leq \sum_{j,l=1}^N \int_{Q_+} a_{jl} \frac{\partial w}{\partial y_j} \frac{\partial w}{\partial y_l} dy \\ &= \int_{Q_+} g w dy \\ &\leq \|g\|_{L^2(Q_+)} \|w\|_{L^2(Q_+)} \leq C \|g\|_{L^2(Q_+)} \|\nabla w\|_{L^2(Q_+)}. \end{aligned}$$

Semplificando e usando di nuovo la diseguglianza di Poincar  otteniamo

$$\|w\|_{H^1(Q_+)} \leq C \|g\|_{L^2(Q_+)}.$$

Stimiamo ora le derivate seconde di w , distinguendo due casi:

- (a) Siano $j \in \{1, \dots, N-1\}$, $l \in \{1, \dots, N\}$. Per ogni $t > 0$ abbastanza piccolo poniamo $h = te_j$, allora per il Lemma 3.6 abbiamo $D_{-h}(D_h w) \in H_0^1(Q_+)$. Usiamo questa funzione come test in (3.8):

$$\sum_{j,l=1}^N \int_{Q_+} a_{jl} \frac{\partial w}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_l} D_{-h}(D_h w) dy = \int_{Q_+} g D_{-h}(D_h w) dy.$$

Operiamo sul primo membro, applicando la formula per il rapporto incrementale di un prodotto:

$$\begin{aligned} \sum_{j,l=1}^N \int_{Q_+} a_{jl} \frac{\partial w}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_l} D_{-h}(D_h w) dy &= \sum_{j,l=1}^N \int_{Q_+} D_h \left(a_{jl} \frac{\partial w}{\partial y_j} \right) \frac{\partial}{\partial y_l} (D_h w) dy \\ &= \sum_{j,l=1}^N \int_{Q_+} \left(T_h a_{jl} \frac{\partial}{\partial y_j} (D_h w) + D_h a_{jl} \frac{\partial w}{\partial y_j} \right) \frac{\partial}{\partial y_l} (D_h w) dy \\ &\geq \alpha \int_{Q_+} |\nabla(D_h w)|^2 dy - C \int_{Q_+} |\nabla w| |\nabla(D_h w)| dy \\ &\geq \alpha \|\nabla(D_h w)\|_{L^2(Q_+)}^2 - C \|\nabla w\|_{L^2(Q_+)} \|\nabla(D_h w)\|_{L^2(Q_+)}. \end{aligned}$$

Operando invece sul secondo membro e applicando il Lemma 3.6, otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{Q_+} g D_{-h}(D_h w) dx &\leq \|g\|_{L^2(Q_+)} \|D_{-h}(D_h w)\|_{L^2(Q_+)} \\ &\leq \|g\|_{L^2(Q_+)} \|\nabla(D_h w)\|_{L^2(Q_+)}. \end{aligned}$$

Concatenando le precedenti diseguglianze abbiamo

$$\|\nabla(D_h w)\|_{L^2(Q_+)} \leq C \|g\|_{L^2(Q_+)}.$$

Passando al limite per $t \rightarrow 0$ si ha in particolare $\frac{\partial^2 w}{\partial y_j \partial y_l} \in L^2(Q_+)$ con

$$\left\| \frac{\partial^2 w}{\partial y_j \partial y_l} \right\|_{L^2(Q_+)} \leq C \|g\|_{L^2(Q_+)}.$$

- (b) Sia ora $j = l = N$. Per la condizione di uniforme ellitticit  (con $\xi = e_N$) abbiamo per ogni $y \in Q_+$

$$a_{NN}(y) \geq \alpha.$$

Fissiamo $\psi \in C_c^\infty(Q_+)$, allora per la relazione precedente si ha $\frac{\psi}{a_{NN}} \in C_c^1(Q_+)$. Usiamo questa funzione come test in (3.8):

$$\int_{Q_+} a_{NN} \frac{\partial w}{\partial y_N} \frac{\partial}{\partial y_N} \left(\frac{\psi}{a_{NN}} \right) dy = - \sum_{(j,l) \neq (N,N)} \int_{Q_+} a_{jl} \frac{\partial w}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_l} \left(\frac{\psi}{a_{NN}} \right) dy + \int_{Q_+} g \frac{\psi}{a_{NN}} dy.$$

Anche in questo caso, operiamo sul primo membro sfruttando le stime precedenti:

$$\begin{aligned} \int_{Q_+} a_{NN} \frac{\partial w}{\partial y_N} \frac{\partial}{\partial y_N} \left(\frac{\psi}{a_{NN}} \right) dy &= \int_{Q_+} a_{NN} \frac{\partial w}{\partial y_N} \left(\frac{1}{a_{NN}} \frac{\partial \psi}{\partial y_N} - \frac{1}{a_{NN}^2} \frac{\partial a_{NN}}{\partial y_N} \psi \right) dy \\ &= \int_{Q_+} \frac{\partial w}{\partial y_N} \frac{\partial \psi}{\partial y_N} dy - \int_{Q_+} \frac{1}{a_{NN}} \frac{\partial a_{NN}}{\partial y_N} \frac{\partial w}{\partial y_N} \psi dy \\ &\geq \int_{Q_+} \frac{\partial w}{\partial y_N} \frac{\partial \psi}{\partial y_N} dy - C \|\nabla w\|_{L^2(Q_+)} \|\psi\|_{L^2(Q_+)} \\ &\geq \int_{Q_+} \frac{\partial w}{\partial y_N} \frac{\partial \psi}{\partial y_N} dy - C \|g\|_{L^2(Q_+)} \|\psi\|_{L^2(Q_+)}. \end{aligned}$$

Operando sul secondo membro e sfruttando il caso (a) abbiamo invece

$$\begin{aligned} - \sum_{(j,l) \neq (N,N)} \int_{Q_+} a_{jl} \frac{\partial w}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_l} \left(\frac{\psi}{a_{NN}} \right) dy &= \sum_{(j,l) \neq (N,N)} \int_{Q_+} a_{jl} \frac{\partial^2 w}{\partial y_j \partial y_l} \frac{\psi}{a_{NN}} dy \\ &\leq C \sum_{(j,l) \neq (N,N)} \left\| \frac{\partial^2 w}{\partial y_j \partial y_l} \right\|_{L^2(Q_+)} \|\psi\|_{L^2(Q_+)} \\ &\leq C \|g\|_{L^2(Q_+)} \|\psi\|_{L^2(Q_+)}. \end{aligned}$$

mentre ovviamente

$$\int_{Q_+} g \frac{\psi}{a_{NN}} dy \leq C \|g\|_{L^2(Q_+)} \|\psi\|_{L^2(Q_+)}.$$

Concatenando,

$$\int_{Q_+} \frac{\partial w}{\partial y_N} \frac{\partial \psi}{\partial y_N} dy \leq C \|g\|_{L^2(Q_+)} \|\psi\|_{L^2(Q_+)}.$$

Dunque si ha $\frac{\partial^2 w}{\partial y_N^2} \in L^2(Q_+)$ con

$$\left\| \frac{\partial^2 w}{\partial y_N^2} \right\|_{L^2(Q_+)} \leq C \|g\|_{L^2(Q_+)}.$$

Complessivamente, abbiamo dunque $w \in H^2(Q_+)$ con

$$\|w\|_{H^2(Q_+)} \leq C \|g\|_{L^2(Q_+)},$$

con $C > 0$ indipendente da g . □

Possiamo ora dimostrare la regolarità per un dominio regolare a frontiera limitata:

Teorema 3.8. *Siano $m \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio di classe C^{m+2} t.c. $\Gamma = \partial\Omega$ è limitata, $f \in H^m(\Omega)$, $u \in H_0^1(\Omega)$ soluzione debole di (1.3). Allora $u \in H^{m+2}(\Omega)$, inoltre esiste $C > 0$ (indipendente da f) t.c.*

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^m(\Omega)}.$$

Dimostrazione. Per semplicità ci limiteremo al caso in cui Ω è limitato e $m = 0$, ovvero $f \in L^2(\Omega)$, Γ di classe C^2 . Vogliamo dimostrare che $u \in H^2(\Omega)$, e che esiste $C > 0$ (dipendente solo da Ω) t.c.

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

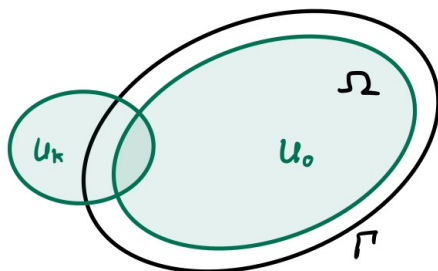


FIGURA 2.

Per ipotesi, si ha per ogni $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$(3.9) \quad \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u \varphi) dx = \int_{\Omega} f \varphi dx.$$

Ragionando come nel Teorema 3.3 ricaviamo

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Introduciamo un ricoprimento dell'insieme compatto $\bar{\Omega}$ operando come in [9] (fig. 2). Esistono $p \in \mathbb{N}$, $U_0, \dots, U_p \subset \mathbb{R}^N$ aperti limitati t.c.

$$U_0 \subset \Omega, \quad \Gamma \subset \bigcup_{k=1}^p U_k, \quad \bar{\Omega} \subset \bigcup_{k=0}^p U_k.$$

Per il Lemma di partizione dell'unità [2, Lemma 9.3] esistono $\theta_0, \dots, \theta_p \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ t.c. per ogni $k \in \{0, \dots, p\}$ si ha $\text{supp}(\theta_k) \subset U_k$, $0 \leq \theta_k(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, e per ogni $x \in \bar{\Omega}$

$$\sum_{k=0}^p \theta_k(x) = 1.$$

Per la regolarità di Γ , prendendo se necessario gli insiemi U_k più piccoli, per ogni $k \in \{1, \dots, p\}$ possiamo trovare un diffeomorfismo $H_k \in C^2(\bar{Q}, \bar{U}_k)$ t.c. $H_k^{-1} \in C^2(\bar{U}_k, \bar{Q})$ e si ha

$$H_k(Q_+) = U_k \cap \Omega, \quad H_k(Q_0) = U_k \cap \Gamma.$$

Proveremo ora che $\theta_k u \in H^2(\Omega)$ ($k = 0, \dots, p$) con le relative stime delle norme, distinguendo due casi

- (a) (stime interne) Per $k = 0$ osserviamo che $\theta_0 u \in H_0^1(U_0)$, dunque possiamo estendere tale funzione a $\tilde{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ ponendo per ogni $x \in \mathbb{R}^N$

$$\tilde{u}_0(x) = \begin{cases} \theta_0(x)u(x) & \text{se } x \in U_0 \\ 0 & \text{se } x \in U_0^c. \end{cases}$$

Poniamo anche, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\tilde{f}_0(x) = \begin{cases} \theta_0(x)f(x) - 2\nabla\theta_0(x) \cdot \nabla u(x) - \Delta\theta_0(x)u(x) & \text{se } x \in U_0 \\ 0 & \text{se } x \in U_0^c. \end{cases}$$

Per la regolarità di θ_0 e i risultati di [9] abbiamo $\tilde{f}_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ con

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= \left\| \theta_0 f - 2\nabla\theta_0 \cdot \nabla u - \Delta\theta_0 u \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\theta_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)} + 2\|\nabla\theta_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta\theta_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}) \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

dove $C > 0$ è indipendente da f . Proviamo ora che \tilde{u}_0 è soluzione debole della seguente equazione:

$$(3.10) \quad -\Delta\tilde{u}_0 + \tilde{u}_0 = \tilde{f}_0(x) \text{ in } \mathbb{R}^N.$$

Infatti, fissiamo $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Allora $\theta_0\varphi \in C_c^\infty(U_0)$, così scegliamo questa funzione come test in (3.9):

$$\int_{U_0} (\nabla u \cdot \nabla(\theta_0\varphi) + u(\theta_0\varphi)) dx = \int_{U_0} f(\theta_0\varphi) dx.$$

Usando la relazione precedente, testiamo (3.10) con φ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla\tilde{u}_0 \cdot \nabla\varphi + \tilde{u}_0\varphi) dx &= \int_{U_0} (\nabla(\theta_0 u) \cdot \nabla\varphi + (\theta_0 u)\varphi) dx \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{U_0} \left(\frac{\partial\theta_0}{\partial x_i} u + \theta_0 \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} dx + \int_{U_0} u(\theta_0\varphi) dx \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{U_0} \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(\frac{\partial\theta_0}{\partial x_i} \varphi + \theta_0 \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \right) dx + \int_{U_0} u(\theta_0\varphi) dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \int_{U_0} \frac{\partial\theta_0}{\partial x_i} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} u - \varphi \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx \\ &= \int_{U_0} f(\theta_0\varphi) dx + \sum_{i=1}^N \int_{U_0} \frac{\partial\theta_0}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (\varphi u) dx - 2 \sum_{i=1}^N \int_{U_0} \frac{\partial\theta_0}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx \\ &= \int_{U_0} f(\theta_0\varphi) dx - \sum_{i=1}^N \int_{U_0} \frac{\partial^2\theta_0}{\partial x_i^2} (\varphi u) dx - 2 \sum_{i=1}^N \int_{U_0} \frac{\partial\theta_0}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx \\ &= \int_{U_0} (\theta_0 f - 2\nabla\theta_0 \cdot \nabla u - \Delta\theta_0 u) \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}_0 \varphi dx. \end{aligned}$$

Dunque \tilde{u}_0 risolve (3.10). Per il Teorema 3.3 abbiamo $\tilde{u}_0 \in H^2(\mathbb{R}^N)$ con

$$\|\tilde{u}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\tilde{f}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Ritornando al dominio Ω , e le precedenti stime su \tilde{f}_0 , otteniamo $\theta_0 u \in H^2(\Omega)$ con

$$\|\theta_0 u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

(b) (stime alla frontiera) Per $k \in \{1, \dots, p\}$ poniamo $\Omega_k = U_k \cap \Omega$ e per ogni $x \in \Omega_k$

$$\tilde{u}_k(x) = \theta_k(x)u(x),$$

$$\tilde{f}_k(x) = \theta_k(x)(f(x) - u(x) - 2\nabla\theta_k(x) \cdot \nabla u(x) - \Delta\theta_k(x)u(x)).$$

Proviamo che \tilde{u}_k è soluzione debole del problema di Dirichlet

$$(3.11) \quad \begin{cases} -\Delta\tilde{u}_k = \tilde{f}_k(x) & \text{in } \Omega_k \\ \tilde{u}_k = 0 & \text{su } \partial\Omega_k. \end{cases}$$

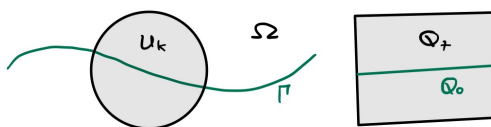


FIGURA 3.

Infatti, per i risultati di [9] abbiamo $\tilde{u}_k \in H^1(\Omega_k)$. Inoltre esiste una successione (v_n) in $C_c^\infty(\Omega)$ t.c. $v_n \rightarrow u$ in $H^1(\Omega)$, da cui $\theta_k v_n \in C_c^\infty(\Omega_k)$ e $\theta_k v_n \rightarrow \tilde{u}_k$ in $H^1(\Omega_k)$, così che $\tilde{u}_k \in H_0^1(\Omega_k)$. D'altra parte si ha $f_k \in L^2(\Omega_k)$ con

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}_k\|_{L^2(\Omega_k)} &\leq \|\theta_k\|_{L^\infty(\Omega_k)} (\|f\|_{L^2(\Omega_k)} + \|u\|_{L^2(\Omega_k)}) + 2\|\nabla\theta_k\|_{L^\infty(\Omega_k)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_k)} + \|\Delta\theta_k\|_{L^\infty(\Omega_k)} \|u\|_{L^2(\Omega_k)} \\ &\leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

con $C > 0$ indipendente da f . Fissiamo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_k)$, allora $\theta_k \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Scegliendo questa funzione come test in (3.9) abbiamo

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(\theta_k \varphi) dx = \int_{\Omega} (f - u)(\theta_k \varphi) dx.$$

Ne segue

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_k} \nabla \tilde{u}_k \cdot \nabla \varphi dx &= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_k} \left(\frac{\partial \theta_k}{\partial x_i} u + \theta_k \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_k} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (\theta_k \varphi) dx - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_k} \frac{\partial \theta_k}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_k} \frac{\partial \theta_k}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u dx \\ &= \text{int}_{\Omega_k} (f - u)(\theta_k \varphi) dx - 2 \text{int}_{\Omega_k} \nabla \theta_k \cdot \nabla u \varphi dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_k} \frac{\partial \theta_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (\varphi u) dx \\ &= \int_{\Omega_k} (\theta_k (f - u) - 2 \nabla \theta_k \cdot \nabla u - \Delta \theta_k u) \varphi dx \\ &= \int_{\Omega_k} \tilde{f}_k \varphi dx. \end{aligned}$$

Pertanto \tilde{u}_k risolve (3.11). Ora usiamo il cambiamento di variabili $x = H_k(y)$ per 'spostare' (3.11) sul dominio Q_+ (questa tecnica è nota come *rettificazione della frontiera*, ved. fig. 3). Poniamo per ogni $y \in Q_+$

$$w(y) = \tilde{u}_k(H_k(y)).$$

Come visto in [9], si ha $w \in H^1(Q_+)$ con derivate deboli

$$\frac{\partial w}{\partial y_j}(y) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_i}(x) \frac{\partial H_{k,i}}{\partial y_j}(y) \quad (j = 1, \dots, N)^4$$

Poniamo per ogni $j, l \in \{1, \dots, N\}$ e ogni $y \in \bar{Q}_+$

$$a_{jl}(y) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial H_{k,j}^{-1}}{\partial x_i}(x) \frac{\partial H_{k,l}^{-1}}{\partial x_i}(x) |\det(J_{H_k}(y))|,$$

⁴Con $H_{k,i}$ denotiamo la i -esima componente del vettore H_k , inoltre manteniamo per brevità la notazione $x = H_k(y)$.

così che $a_{jl} \in C^1(\overline{Q}_+)$ e $a_{jl} = a_{lj}$. Osserviamo che per invertibilità di H_k si ha per ogni $x \in \overline{\Omega}_k$, $\xi \in \mathbb{R}^N$

$$\left| \sum_{j=1}^N \frac{\partial H_{k,j}^{-1}}{\partial x_i}(x) \xi_j \right| \geq c |\xi_i|,$$

con $c > 0$ indipendente da x e da ξ . Dunque abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{j,l=1}^N a_{jl}(y) \xi_j \xi_l &= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial H_{k,j}^{-1}}{\partial x_i}(x) \xi_j \right) \left(\sum_{l=1}^N \frac{\partial H_{k,l}^{-1}}{\partial x_i}(x) \xi_l \right) |\det(J_{H_k}(y))| \\ &\geq \sum_{i=1}^N c^2 \xi_i^2 |\det(J_{H_k}(y))| \geq \alpha |\xi|^2, \end{aligned}$$

con $\alpha > 0$ indipendente da y e da ξ . Ovvero, i coefficienti $(a_{jl})_{j,l=1}^N$ soddisfano la condizione di uniforme ellitticità in \overline{Q}_+ . D'altra parte, poniamo per ogni $y \in Q_+$

$$g(y) = \tilde{f}_k(H_k(y)) |\det(J_{H_k}(y))|.$$

Usando il cambiamento di variabili $x = H_k(y)$ abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{Q_+} g(y)^2 dy &\leq \int_{Q_+} \tilde{f}_k(H_k(y))^2 |\det(J_{H_k}(y))| dy \\ &= \int_{\Omega_k} \tilde{f}_k(x)^2 dx, \end{aligned}$$

così che $g \in L^2(Q_+)$ con

$$\|g\|_{L^2(Q_+)} = \|\tilde{f}_k\|_{L^2(\Omega_k)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Proviamo ora che w è soluzione debole del problema

$$(3.12) \quad \begin{cases} - \sum_{j,l=1}^N \frac{\partial}{\partial y_l} \left(a_{jl}(y) \frac{\partial w}{\partial y_j} \right) = g(y) & \text{in } Q_+ \\ w = 0 & \text{su } \partial Q_+. \end{cases}$$

Infatti, ragionando come nel caso di \tilde{u}_k vediamo che $w \in H_0^1(Q_+)$. Fissiamo $\psi \in C_c^\infty(Q_+)$, e poniamo per ogni $x \in \Omega_k$

$$\varphi(x) = \psi(H_k^{-1}(x)),$$

così che $\varphi \in C_c^1(Q_+)$. Da (3.11) abbiamo

$$\int_{\Omega_k} \nabla \tilde{u}_k \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega_k} \tilde{f}_k \varphi dx.$$

Operiamo sul primo membro dell'eguaglianza precedente col cambiamento di variabili $x = H_k(y)$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_k} \nabla \tilde{u}_k \cdot \nabla \varphi dx &= \int_{\Omega_k} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial w}{\partial y_j} \frac{\partial H_{k,j}^{-1}}{\partial x_i} \right) \left(\sum_{l=1}^N \frac{\partial \psi}{\partial y_l} \frac{\partial H_{k,l}^{-1}}{\partial x_i} \right) dx \\ &= \int_{Q_+} \sum_{j,l=1}^N \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial H_{k,j}^{-1}}{\partial x_i} \frac{\partial H_{k,l}^{-1}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial w}{\partial y_j} \frac{\partial \psi}{\partial y_l} |\det(J_{H_k}(y))| dy \\ &= \int_{Q_+} \sum_{j,l=1}^N a_{jl} \frac{\partial w}{\partial y_j} \frac{\partial \psi}{\partial y_l} dy. \end{aligned}$$

Operando analogamente sul secondo membro abbiamo

$$\int_{\Omega_k} \tilde{f}_k \varphi \, dx = \int_{Q_+} g \psi \, dy.$$

Concatenando si vede che w risolve (3.12). Inoltre, poiché $\text{supp}(\theta_k) \Subset U_k$, si ha $\text{supp}(\tilde{u}_k) \subset U_k$ (mentre tale supporto può 'toccare' Γ). Similmente, si ha $\text{supp}(w) \subset Q$, in particolare per ogni $h \in \mathbb{R}^N$ parallelo a Q_0 abbastanza piccolo si ha

$$\text{supp}(w) \pm h \subset \overline{Q}_+.$$

Per il Lemma 3.7 abbiamo $w \in H^2(Q_+)$ con

$$\|w\|_{H^2(Q_+)} \leq C \|g\|_{L^2(Q_+)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Tornando alla variabile x , abbiamo $\tilde{u}_k \in H^2(\Omega_k)$ con

$$\|\tilde{u}_k\|_{H^2(\Omega_k)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Dalle stime fin qui ottenute segue $\theta_k u \in H^2(\Omega)$ con

$$\|\theta_k u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ricordiamo che si ha in Ω

$$u = \sum_{k=0}^p \theta_k u.$$

Da (a), (b) deduciamo $u \in H^2(\Omega)$ con

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Per dimostrare i casi $m > 0$ si procede per induzione su m come nel Teorema 3.5, usando ad ogni passo un opportuno cambiamento di variabili per rettificare la frontiera (omettiamo questa parte perché eccessivamente tecnica). \square

Osservazione 3.9. Nella dimostrazione del Teorema 3.8, abbiamo delineato *en passant* il metodo per provare la regolarità del secondo ordine per le soluzioni deboli del problema di Dirichlet per una EDP ellittica generale. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio limitato di classe C^2 , $f \in L^2(\Omega)$, e $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ verificanti (1.2). Allora per ogni soluzione debole del problema

$$\begin{cases} - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma \end{cases}$$

si ha $u \in H^2(\Omega)$. Il problema precedente è detto *in forma di divergenza*, perché, posto $A(x) = [a_{ij}(x)]$ per ogni $x \in \Omega$, si ha

$$\text{div}(A(x)\nabla u) = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right).$$

Se i dati del problema (1.3) sono abbastanza regolari, si può invertire la Proposizione 1.3, completando così il programma della Sezione 1:

Teorema 3.10. *Siano $m > \frac{N}{2}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ soddisfacente una delle seguenti condizioni:*

- (i) $\Omega = \mathbb{R}^N$;
- (ii) $\Omega = \mathbb{R}_+^N$;
- (iii) Ω è un dominio di classe C^{m+2} t.c. $\Gamma = \partial\Omega$ è limitata,

e siano inoltre $f \in H^m(\Omega)$, $u \in H_0^1(\Omega)$ soluzione debole di (1.3). Allora $u \in C^2(\overline{\Omega})$ è soluzione classica di (1.3).

Dimostrazione. Consideriamo solo il caso (iii) (gli altri sono simili). Per i Teoremi di immersione di Sobolev (ved. [9] e [2, Corollaries 9.13, 9.15]) si ha $f \in C(\overline{\Omega})$. Analogamente, per il Teorema 3.8, si ha $u \in H^{m+2}(\Omega)$ da cui $u \in C^k(\overline{\Omega})$, con

$$k = \left[m + 2 - \frac{N}{2} \right] \geq 2,$$

in particolare $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Dunque, per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, dalla formulazione debole di (1.3) e dalla formula di Gauss-Green segue

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + u)\varphi \, dx = \int_{\Omega} f\varphi \, dx.$$

Poiché φ è arbitraria, per ogni $x \in \Omega$ si ha

$$-\Delta u(x) + u(x) = f(x).$$

Inoltre, $u \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, da cui segue per ogni $x \in \Gamma$

$$u(x) = 0$$

(ved. [9]). Pertanto, u verifica la Definizione 1.1. □

In particolare, se Ω è un dominio limitato di classe C^∞ e $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, allora per ogni soluzione u di (1.3) si ha $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, ovvero u è una funzione *analitica*. Questa si può vedere come una soluzione parziale al celebre 19^{mo} problema di Hilbert.

Osservazione 3.11. Un aspetto sorprendente di questa teoria è che, benché nell'equazione del problema (1.3) compaiano solo le derivate seconde *pure* della funzione incognita u , si ottiene la regolarità di *tutte* le derivate seconde di u .

Esercizio 3.12. Dimostrare che gli operatori T_h, D_h ($h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$) commutano con le derivate deboli in $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Esercizio 3.13. Dimostrare i Lemmi 3.4 e 3.6.

Esercizio 3.14. Dimostrare l'Osservazione 3.9.

Esercizio 3.15. Dimostrare il Teorema 3.10 nei casi (i), (ii).

4. IL PRINCIPIO DEL MASSIMO

Le soluzioni di EDP ellittiche si possono 'controllare' mediante i loro valori sulla frontiera e i dati dell'equazione, in quanto esse soddisfano una proprietà generale detta *principio del massimo*. La forma elementare di questa proprietà è riferita alle funzioni *armoniche*: se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ soddisfa per ogni $x \in \Omega$

$$\Delta u(x) = 0,$$

allora si ha

$$\inf_{\Omega} u = \inf_{\Gamma} u, \quad \sup_{\Omega} u = \sup_{\Gamma} u.$$

Dimostriamo il principio del massimo per le soluzioni continue del problema di Dirichlet non omogeneo (6.2):

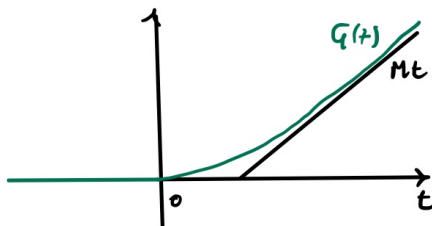


FIGURA 4.

Teorema 4.1. *Siano Ω un dominio regolare limitato, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ soluzione debole di (6.2). Allora per ogni $x \in \Omega$*

$$\min \left\{ \inf_{\Gamma} g, \inf_{\Omega} f \right\} \leq u(x) \leq \max \left\{ \sup_{\Gamma} g, \sup_{\Omega} f \right\}^5$$

Dimostrazione. Proviamo la stima dall'alto. Sia $G \in C^1(\mathbb{R})$ t.c. $G(t) = 0$ per ogni $t \leq 0$, e $0 < G'(t) \leq M$ per ogni $t > 0$ ($M > 0$). In particolare si ha $G(t)t > 0$ per ogni $t > 0$ (fig. 4). Poniamo

$$K = \max \left\{ \sup_{\Gamma} g, \sup_{\Omega} f \right\}.$$

Evitando casi banali, possiamo supporre $K < \infty$. Poniamo per ogni $x \in \overline{\Omega}$

$$v(x) = G(u(x) - K),$$

così che $v \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ (ved. [9]). In particolare, per ogni $x \in \Gamma$ si ha $u(x) \leq K$ da cui

$$v(x) = G(u(x) - K) = 0,$$

pertanto $v \in H_0^1(\Omega)$ (ved. [9]). Poiché u è soluzione debole di (6.2), usando come funzione test v si ha

$$\int_{\Omega} (G'(u - K)|\nabla u|^2 + G(u - K)u) dx = \int_{\Omega} fG(u - K) dx,$$

da cui

$$\int_{\Omega} (G'(u - K)|\nabla u|^2 + G(u - K)(u - K)) dx = \int_{\Omega} (f - K)G(u - K) dx \leq 0.$$

Dalla definizione di K e di G abbiamo per q.o. $x \in \Omega$

$$G'(u(x) - K)|\nabla u(x)|^2 \geq 0, \quad (f(x) - K)G(u(x) - K) \leq 0.$$

Pertanto, dalla relazione sopra ricaviamo

$$\int_{\Omega} G(u - K)(u - K) dx \leq 0,$$

e poiché l'integranda è non-negativa ne segue $u(x) \leq K$ per ogni $x \in \Omega$.

La stima dal basso si prova analogamente. □

Se $g = 0$, dal Teorema 4.1 si ricava:

Corollario 4.2. *Siano Ω un dominio regolare limitato, $f \in L^\infty(\Omega)$, $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ soluzione debole di (1.3). Allora:*

- (i) $\|u\|_\infty \leq \|f\|_\infty$;
- (ii) se $f(x) \geq 0$ per q.o. $x \in \Omega$, $u(x) \geq 0$ per q.o. $x \in \Omega$;
- (iii) se $f(x) \leq 0$ per q.o. $x \in \Omega$, $u(x) \leq 0$ per q.o. $x \in \Omega$.

⁵Gli estremi di f sono *essenziali*, ovvero determinati a meno di un insieme di misura nulla.

Le relazioni precedenti sono chiamate *stime a priori* della soluzione u , in quanto permettono di confinare i valori della soluzione in un intervallo che dipende solo dai dati del problema. Osserviamo che valgono risultati analoghi per EDP molto più generali, anche non lineari. Inoltre si dimostra anche un principio del massimo *forte*: per esempio, nel Corollario 4.2 (ii) si ha $u = 0$ q.o. in Ω oppure $u > 0$ q.o. in Ω (ved. [5]).

Esercizio 4.3. Dimostrare il Corollario 4.2.

5. LO SPETTRO DEL LAPLACIANO

Questa sezione è dedicata allo studio del problema

$$(5.1) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma, \end{cases}$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un dominio regolare limitato, $\Gamma = \partial\Omega$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ è un parametro. Una soluzione debole di (5.1) è una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ t.c. per ogni $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \lambda \int_{\Omega} u \varphi \, dx.$$

Chiaramente, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ il problema (5.1) ammette la soluzione banale $u = 0$. Siamo dunque interessati ai valori di λ per i quali esistono soluzioni non banali:

Definizione 5.1. *Un autovalore dell'operatore $-\Delta$ in $H_0^1(\Omega)$ è un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. (5.1) ammette almeno una soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, detta autofunzione associata a λ . L'insieme degli autovalori di $-\Delta$ è detto spettro e denotato $\sigma(\Omega)$ ⁶.*

Per ogni $\lambda \in \sigma(\Omega)$, l'insieme delle autofunzioni associate a λ è un sottospazio chiuso di $H_0^1(\Omega)$, detto *autospazio* e denotato $E(\lambda)$. Se adottiamo su $H_0^1(\Omega)$ il prodotto scalare 'ridotto' (grazie alla Diseguaglianza di Poincaré, ved. [9]), autofunzioni associate ad autovalori diversi sono ortogonali sia in $H_0^1(\Omega)$ che in $L^2(\Omega)$:

Lemma 5.2. *Siano Ω un dominio regolare limitato, $\lambda, \mu \in \sigma(\Omega)$, $\lambda \neq \mu$, $u \in E(\lambda)$, $v \in E(\mu)$. Allora*

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} uv \, dx = 0.$$

Dimostrazione. Poiché u è soluzione debole di (5.1), scegliendo v come funzione test si ha

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_{\Omega} uv \, dx.$$

Similmente, si ha

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \mu \int_{\Omega} uv \, dx,$$

da cui

$$(\lambda - \mu) \int_{\Omega} uv \, dx = 0.$$

Poiché $\lambda \neq \mu$, ne segue $u \perp v$ in $L^2(\Omega)$. Inoltre, dalle relazioni precedenti $u \perp v$ in $H_0^1(\Omega)$. □

Applichiamo allo studio di (5.1) la teoria sullo spettro di un operatore compatto introdotta in [8] (con una 'prospettiva inversa'):

Teorema 5.3. *Sia Ω un dominio regolare limitato. Allora esistono due successioni (λ_n) in $(0, \infty)$, (e_n) in $H_0^1(\Omega)$ t.c.*

⁶Questa definizione di *spettro* differisce lievemente da quella vista in [8].

- (i) $\lambda_n \rightarrow \infty$;
- (ii) per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ si ha $e_n \in E(\lambda_n)$;
- (iii) $\sigma(\Omega) = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$;
- (iv) (e_n) è una base ortonormale di $L^2(\Omega)$.

Dimostrazione. Sappiamo dal Teorema 6.1 che per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste unica $u \in H_0^1(\Omega)$ t.c. per ogni $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$(5.2) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx.$$

Poniamo $T(f) = u$, definendo così un operatore lineare iniettivo $T \in L(L^2(\Omega))$ (*operatore risolvente*). Proviamo che $T \in \mathcal{K}(L^2(\Omega))$. Infatti, per ogni $f \in L^2(\Omega)$, posto $u = T(f)$, ponendo $\varphi = u$ in (5.2) abbiamo (per la disuguaglianza di Poincaré)

$$\|\nabla u\|_2^2 \leq \|f\|_2 \|u\|_2 \leq C \|f\|_2 \|\nabla u\|_2.$$

Dunque $T \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega))$. Ricordando da [9] che $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ con immersione compatta, abbiamo $T \in \mathcal{K}(L^2(\Omega))$.

Proviamo infine che T è autoaggiunto: infatti, per ogni $f, g \in L^2(\Omega)$, posto $u = T(f)$, $v = T(g)$, da (5.2) si ha

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u g \, dx &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\ &= \int_{\Omega} f v \, dx, \end{aligned}$$

ovvero T è simmetrico. Poiché T è compatto, abbiamo $T = T^*$. Per i risultati visti in [8] esiste una base ortonormale (e_n) di $L^2(\Omega)$ formata da autovettori di T , ovvero per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ esiste $\mu_n \in \mathbb{R}$ t.c.

$$T(e_n) = \mu_n e_n.$$

Ovvero, per ogni $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ si ha

$$\int_{\Omega} \nabla(\mu_n e_n) \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} e_n \varphi \, dx.$$

Ponendo $\varphi = \mu_n e_n$ abbiamo

$$\begin{aligned} \mu_n &= \mu_n \|e_n\|_2^2 \\ &= \int_{\Omega} |\nabla(\mu_n e_n)|^2 \, dx \geq 0. \end{aligned}$$

Inoltre dall'iniettività di T si ha $\mu_n > 0$. Proviamo ora che la successione (μ_n) ha infiniti termini distinti, ragionando per assurdo: supponiamo (a meno di riordinamenti) che (μ_n) abbia solo i termini distinti $(\mu_n)_{n=1}^m$. Per ogni $n \in \{1, \dots, m\}$ l'autospazio di T associato a μ_n si può rappresentare come

$$\ker(\mu_n I - T).$$

Esso ha dimensione finita per il Teorema di alternativa di Fredholm [8]. Dunque, per decomposizione ortogonale abbiamo

$$\dim(L^2(\Omega)) = \sum_{n=1}^m \dim(\ker(\mu_n I - T)) < \infty,$$

assurdo. Dunque (μ_n) ha infiniti termini distinti. Sempre per i risultati di [8], ne segue che $\mu_n \rightarrow 0^+$.

Poniamo ora per ogni $n \in \mathbb{N}_0$

$$\lambda_n = \frac{1}{\mu_n} > 0.$$

Da $\mu_n \rightarrow 0^+$ segue $\lambda_n \rightarrow \infty$ (i). Inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ si ha

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla e_n \cdot \nabla \varphi \, dx &= \lambda_n \int_{\Omega} \nabla(\mu_n e_n) \cdot \nabla \varphi \, dx \\ &= \lambda_n \int_{\Omega} e_n \varphi \, dx, \end{aligned}$$

quindi $\lambda_n \in \sigma(\Omega)$ con autofunzione associata e_n (ii). Viceversa, per ogni $\lambda \in \sigma(\Omega)$ si vede facilmente che $\frac{1}{\lambda}$ è un autovalore di T , dunque esiste $n \in \mathbb{N}_0$ t.c. $\lambda = \lambda_n$ (iii). E chiaramente (iv) è già acquisita. \square

Osservazione 5.4. Per il Teorema 6.1, per $\lambda = 0$ il problema (5.1) ha solo la soluzione banale $u = 0$, tuttavia in alcuni contesti conviene porre $0 = \lambda_0 \in \sigma(\Omega)$. Osserviamo anche che, per il Lemma 5.2, la successione (e_n) è anche una base ortogonale di $H_0^1(\Omega)$ (a meno di sotto-successioni).

Il calcolo degli autovalori del problema (5.1) può essere effettuato attraverso le *formule di Courant-Fischer* (ved. [5]). In questa sede, è importante osservare che il primo autovalore di (5.1) coincide con il *quoziente di Rayleigh*

$$(5.3) \quad \lambda_1 = \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2} > 0.$$

Per ogni $n \geq 2$, definiamo il sottospazio di dimensione finita

$$L_{n-1} = \text{span}(e_1, \dots, e_{n-1}).$$

Si ha allora

$$\lambda_n = \inf_{u \in L_{n-1}^\perp \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2} > 0.$$

Si vede facilmente che la Diseguaglianza di Poincaré si può riformulare come segue: per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\|u\|_2 \leq \lambda_1^{-\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_2.$$

L'autovalore λ_1 è *semplice*, ovvero si ha

$$\dim(E(\lambda_1)) = 1,$$

inoltre $E(\lambda_1)$ si può generare mediante un'autofunzione $e_1 \in H_0^1(\Omega)$ t.c. $\|e_1\|_2 = 1$ e $e_1 > 0$ q.o. in Ω . Ragionando come in [8], si vede che per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\Omega} u e_n \, dx \right) e_n$$

(nel senso della convergenza in $L^2(\Omega)$). Pertanto si può dedurre la seguente formula di *decomposizione spettrale* per l'operatore laplaciano:

$$-\Delta u = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\Omega} u e_n \, dx \right) \lambda_n e_n.$$

Se Ω è di classe C^∞ , si può applicare al problema (5.1) una teoria della regolarità simile a quella esposta nella Sezione 3, con un argomento di tipo *bootstrap*: per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, da $e_n \in L^2(\Omega)$ segue $e_n \in H^2(\Omega)$, il che a sua volta implica $e_n \in H^4(\Omega)$, e così via... in conclusione $e_n \in C^\infty(\Omega)$.

Osservazione 5.5. Ovviamente, esiste una teoria analoga per lo spettro di $-\Delta$ in $H^1(\Omega)$, ovvero per il problema di Neumann

$$(5.4) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \Gamma. \end{cases}$$

In questo caso, però, $\lambda_0 = 0$ è un autovalore in senso proprio (le autofunzioni associate sono costanti in Ω).

Lo spettro del laplaciano verrà usato ancora in [10].

Esercizio 5.6. Enunciare un risultato analogo al Teorema 5.3 per il problema (5.4).

Esercizio 5.7. Nel Teorema 5.3 abbiamo provato che l'operatore risolvete di (6.2) è compatto. Stabilire se $-\Delta$, considerato come operatore lineare da $H_0^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$, è compatto.

6. ALTRE EDP ELLITTICHE LINEARI

In questa sezione prendiamo in esame problemi ai valori al contorno diversi da (1.3), svolgendo per essi la teoria dell'esistenza e unicità della soluzione debole. La teoria della regolarità è simile a quella esposta nella Sezione 3, pertanto la omettiamo. Per semplicità supporremo sempre $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio limitato con frontiera $\Gamma = \partial\Omega$ di classe C^1 . Inoltre, non indicheremo la definizione di *soluzione classica* per i problemi seguenti, che è analoga alla Definizione 1.1.

Consideriamo l'equazione di Poisson con condizione di Dirichlet omogenea:

$$(6.1) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma, \end{cases}$$

con $f \in L^2(\Omega)$. Una soluzione debole di (6.1) è una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ t.c. per ogni $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx.$$

Questo problema si tratta analogamente a (1.3):

Teorema 6.1. *Siano Ω un dominio regolare limitato, $f \in L^2(\Omega)$. Allora esiste un'unica soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ di (6.1). Inoltre, u è un punto di minimo globale in $H_0^1(\Omega)$ per il funzionale definito da*

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\Omega} f u \, dx.$$

Dimostrazione. Sullo spazio $H_0^1(\Omega)$ adottiamo la norma equivalente $\|u\| = \|\nabla u\|_2$ ⁷ (Diseguaglianza di Poincaré, ved. [9]), quindi procediamo come nel Teorema 2.1. \square

Consideriamo ora un problema di Dirichlet non omogeneo:

$$(6.2) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = g(x) & \text{su } \Gamma, \end{cases}$$

con $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Poniamo

$$K_g = \{u + g : u \in H_0^1(\Omega)\}.$$

Una soluzione debole di (6.2) è una funzione $u \in K_g$ t.c. per ogni $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u \varphi) \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx.$$

⁷Torniamo a indicare con $\|\cdot\|_2$ la norma di $L^2(\Omega)$.

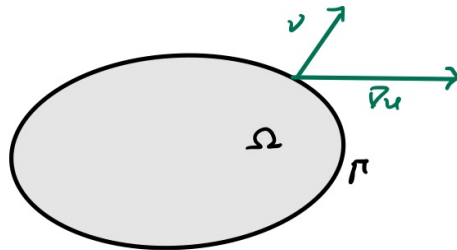


FIGURA 5.

Si vede facilmente, usando la formula di Gauß-Green, che ogni soluzione classica di (6.2) è una soluzione debole.

Teorema 6.2. *Siano Ω un dominio regolare limitato, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Allora esiste un'unica soluzione debole $u \in K_g$ di (6.2). Inoltre, u è un punto di minimo globale in K_g per il funzionale definito da*

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u^2) dx - \int_{\Omega} f u dx.$$

Dimostrazione. L'insieme $K_g \subset H^1(\Omega)$ è chiuso e convesso. Poniamo per ogni $u, v \in H^1(\Omega)$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) dx,$$

così che $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ è una forma bilineare continua, coerciva e simmetrica. D'altra parte, il funzionale lineare

$$v \mapsto \int_{\Omega} f v dx$$

è continuo in $H^1(\Omega)$. Per il Teorema di Stampacchia (ved. [8]) esiste un'unica soluzione $u \in K_g$ che soddisfa per ogni $v \in K_g$

$$(6.3) \quad \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla(v - u) + u(v - u)) dx \geq \int_{\Omega} f(v - u) dx.$$

Fissata $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, scegliamo $v = u \pm \varphi \in K$ come funzioni test in (6.3) e vediamo che u è soluzione debole di (6.2). Viceversa, ogni soluzione debole di (6.2) risolve (6.3), il che prova l'unicità di u . Infine, sempre per il Teorema di Stampacchia (ricordando che a è simmetrica) abbiamo

$$\Phi(u) = \min_{v \in K_g} \Phi(v),$$

il che conclude la dimostrazione. □

Osservazione 6.3. Chiaramente il problema (6.2) (così come la sua soluzione) non cambia se sostituiamo la funzione g con un'altra funzione $\tilde{g} \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ t.c. $\tilde{g}(x) = g(x)$ per ogni $x \in \Gamma$. Tuttavia, abbiamo richiesto che il dato di frontiera fosse definito anche in Ω , perché in generale una funzione continua su Γ non ammette un'estensione in $H^1(\Omega)$. Per studiare (6.2) con $g \in L^2(\Gamma)$ (non necessariamente continua) occorre applicare la *teoria delle tracce* (ved. [2, p. 315]).

Consideriamo ora un *problema di Neumann omogeneo*:

$$(6.4) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = f(x) & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \Gamma, \end{cases}$$

con $f \in L^2(\Omega)$. Qui $\nu \in \mathbb{R}^N$ denota il versore normale esterno a Γ (fig. 5) e poniamo per ogni $x \in \Gamma$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \nabla u(x) \cdot \nu.$$

Una soluzione debole di (6.4) è una funzione $u \in H^1(\Omega)$ t.c. per ogni $\varphi \in H^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u\varphi) dx = \int_{\Omega} f\varphi dx.$$

Ancora per la formula di Gauß-Green, ogni soluzione classica di (6.4) è una soluzione debole.

Teorema 6.4. *Siano Ω un dominio regolare limitato, $f \in L^2(\Omega)$. Allora esiste un'unica soluzione debole $u \in H^1(\Omega)$ di (6.4). Inoltre, u è un punto di minimo globale in $H^1(\Omega)$ per il funzionale definito da*

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u^2) dx - \int_{\Omega} fu dx.$$

Dimostrazione. Si procede come nel Teorema 2.1, sullo spazio $H^1(\Omega)$. □

Consideriamo infine un'equazione lineare ellittica generale (in forma di divergenza), con condizione al contorno di Dirichlet:

$$(6.5) \quad \begin{cases} - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{h=1}^N b_h(x) \frac{\partial u}{\partial x_h} + c(x)u = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma, \end{cases}$$

con $A = (a_{ij})_{i,j=1}^N$ matrice simmetrica di componenti $a_{ij} \in C^2(\overline{\Omega})$ ($i, j = 1, \dots, N$) soddisfacenti la condizione (1.2) di uniforme ellitticità, e gli altri dati: $b_h \in C(\overline{\Omega})$ ($h = 1, \dots, N$), $c \in C(\overline{\Omega})$ e $f \in L^2(\Omega)$. Una soluzione debole di (6.5) è una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ t.c. per ogni $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \sum_{h=1}^N b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} \varphi + cu\varphi \right] dx = \int_{\Omega} f\varphi dx.$$

Come al solito, ogni soluzione classica di (6.5) è una soluzione debole. La presenza delle derivate prime di u rende il problema (6.5) non-variazionale (ovvero, la forma bilineare ad esso associata in $H_0^1(\Omega)$ non è simmetrica né coerciva), pertanto non è possibile applicare ad esso il Teorema di Lax-Milgram. L'esistenza di soluzioni deboli va dimostrata in questo caso con un approccio diverso (ved. [1]):

Teorema 6.5. *Siano Ω , A , b , c come sopra. Allora una sola delle seguenti condizioni è verificata:*

- (i) *per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste un'unica soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ di (6.5);*
- (ii) *esistono $d \in \mathbb{N}_0$, $Y \subset L^2(\Omega)$ sottospazio di dimensione d t.c. per $f = 0$ le soluzioni deboli di (6.5) formano un sottospazio di $H_0^1(\Omega)$ di dimensione d , e per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste una soluzione debole di (6.5) se e solo se*

$$\int_{\Omega} fv dx = 0 \text{ per ogni } v \in Y.$$

Dimostrazione. Poniamo per ogni $u, v \in H_0^1(\Omega)$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{h=1}^N b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} v + cuv \right] dx.$$

Allora $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ è una forma bilineare continua (non coerciva né simmetrica). Per ogni $\lambda > 0$ definiamo una nuova forma bilineare continua a_λ ponendo

$$a_\lambda(u, v) = a(u, v) + \lambda \int_{\Omega} uv \, dx.$$

Proviamo che, per $\lambda > 0$ abbastanza grande, a_λ è coerciva. Infatti, per (1.2) e le ipotesi su b, c , esistono $\beta, \gamma > 0$ t.c. per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$

$$a(u, u) \geq \alpha \|\nabla u\|_2^2 - \beta \|\nabla u\|_2 \|u\|_2 - \gamma \|u\|_2^2.$$

Applicando la diseguaglianza di Young (ved. [9]), abbiamo per ogni $\lambda, \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} a_\lambda(u, u) &\geq \alpha \|\nabla u\|_2^2 - \beta \|\nabla u\|_2 \|u\|_2 + (\lambda - \gamma) \|u\|_2^2 \\ &\geq \alpha \|\nabla u\|_2^2 - \beta \left(\frac{\varepsilon \|\nabla u\|_2^2}{2} + \frac{\|u\|_2^2}{2\varepsilon} \right) + (\lambda - \gamma) \|u\|_2^2 \\ &= \left(\alpha - \frac{\beta\varepsilon}{2} \right) \|\nabla u\|_2^2 + \left(\lambda - \frac{\beta}{2\varepsilon} - \gamma \right) \|u\|_2^2 \end{aligned}$$

Scegliamo allora

$$\varepsilon < \frac{2\alpha}{\beta}, \quad \lambda > \frac{\beta}{2\varepsilon} + \gamma,$$

così che esiste una costante $c_\lambda > 0$ t.c. per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$

$$a_\lambda(u, u) \geq c_\lambda \|u\|_2^2.$$

Inoltre, per i risultati di [9] abbiamo $f \in H^{-1}(\Omega)$. Per il Teorema di Lax-Milgram (ved. [8]), per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste un'unica $u \in H_0^1(\Omega)$ t.c. per ogni $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$a_\lambda(u, \varphi) = \int_{\Omega} f\varphi \, dx.$$

Ponendo $T(f) = u$, definiamo un operatore lineare $T \in L(L^2(\Omega))$. Per ogni $f \in L^2(\Omega)$, posto $u = T(f)$ si ha

$$\begin{aligned} c_\lambda \|u\|_2^2 &\leq a_\lambda(u, u) \\ &= \int_{\Omega} fu \, dx \leq \|u\|_2 \|f\|_2, \end{aligned}$$

da cui $\|u\|_2 \leq C \|f\|_2$ (con $C > 0$ indipendente da f). Dunque T è continuo da $L^2(\Omega)$ in $H_0^1(\Omega)$. Ricordando che l'immersione $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ è compatta (ved. [9]), abbiamo $T \in \mathcal{K}(L^2(\Omega))$. Chiaramente, $u \in H_0^1(\Omega)$ è soluzione debole di (6.5) se e solo se

$$u = T(f + \lambda u).$$

Ponendo $v = f + \lambda u$, riformuliamo il problema (6.5) mediante l'equivalente equazione funzionale in $L^2(\Omega)$

$$(6.6) \quad v - \lambda T(v) = f.$$

All'equazione (6.6) applichiamo il Teorema di alternativa di Fredholm (ved. [8]). Poniamo dapprima

$$Y = \ker(I - \lambda T^*) = \text{im}(I - \lambda T)^\perp,$$

sottospazio di $L^2(\Omega)$ di dimensione finita $d \in \mathbb{N}$. Distinguiamo due casi:

- (a) Se $d = 0$, l'operatore $I - \lambda T^*$ è biunivoco, quindi anche $I - \lambda T$ è biunivoco, ovvero per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste un'unica soluzione $v \in L^2(\Omega)$ di (6.6). Posto $u = \frac{1}{\lambda}(v - f)$, si ha $u \in H_0^1(\Omega)$ (per costruzione dell'operatore T) e questa è l'unica soluzione di (6.5), dunque vale (i).

- (b) Se $d > 0$, allora anche il sottospazio $\ker(I - \lambda T)$, formato dalle soluzioni di (6.6) per $f = 0$, ha dimensione d , ovvero esistono d soluzioni linearmente indipendenti di (6.5) per $f = 0$. Inoltre, fissato $f \in L^2(\Omega)$, (6.6) ha soluzione se e solo se $f \in Y^\perp$. Come in (a), la conclusione si riformula per il problema (6.5), provando (ii).

In conclusione, una sola delle condizioni (i), (ii) è verificata. \square

Esempio 6.6. Consideriamo il seguente problema di Dirichlet, con $\lambda_1 > 0$ definito da (5.3) e $f \in L^2(\Omega)$:

$$(6.7) \quad \begin{cases} -\Delta u - \lambda_1 u = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma. \end{cases}$$

Esso si può vedere come una perturbazione del problema agli autovalori (??). Denotando ancora con $T \in \mathcal{K}(L^2(\Omega))$ l'operatore risolvete usato nella dimostrazione del Teorema 6.5, il problema (6.7) risulta equivalente all'equazione funzionale

$$u = T(\lambda_1 u + f).$$

Ragionando come sopra, vediamo che tale equazione ammette una soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ se e solo se

$$f \in \ker(I - \lambda_1 T^*)^\perp.$$

D'altra parte T è autoaggiunto, quindi si ha

$$\ker(I - \lambda_1 T^*) = \ker(I - \lambda_1 T) = E(\lambda_1).$$

Pertanto, per le considerazioni svolte nella Sezione 5, esiste una soluzione di (6.7) se e solo se

$$\int_{\Omega} f e_1 dx = 0.$$

Ricordando che $e_1 > 0$ in Ω , la condizione precedente implica che f cambia segno in Ω .

Osservazione 6.7. Se $b_h = 0$ ($h = 1, \dots, N$), $c \geq 0$, il problema (6.5) diventa variazionale, con funzionale dell'energia associato

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu^2 \right] dx - \int_{\Omega} f u dx.$$

Esercizio 6.8. Svolgere la teoria della regolarità per i problemi (6.1), (6.4).

Esercizio 6.9. Dimostrare il principio del massimo per il problema (6.4).

7. L'OPERATORE p -LAPLACIANO

Concludiamo questa introduzione alle EDP ellittiche con un breve cenno alle equazioni ellittiche *non lineari*. Ci occuperemo di un caso molto semplice, rinviando a [5, 12] per un'esposizione completa. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio regolare limitato con $\Gamma = \partial\Omega$, $p > 1$, $u \in C^2(\Omega)$. Definiamo un operatore differenziale del secondo ordine non lineare detto *p -laplaciano*, ponendo per ogni $x \in \Omega$

$$\Delta_p u(x) = \operatorname{div}(|\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x)),$$

con la convenzione che $\Delta_p u(x) = 0$ se $\nabla u(x) = 0$ (ovviamente per $p = 2$ si ha $\Delta_2 = \Delta$). Consideriamo la seguente estensione non lineare dell'equazione di Poisson con condizioni di Dirichlet:

$$(7.1) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma, \end{cases}$$

con $f \in L^{p'}(\Omega)$. La definizione di soluzione classica per il problema (7.1) è intuitiva, e dalla formula di Gauß-Green ricaviamo la seguente:

Definizione 7.1. *Una soluzione debole di (7.1) è una funzione $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ t.c. per ogni $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$*

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx.$$

Per quanto riguarda l'esistenza e l'unicità della soluzione, per il problema (7.1) vale un risultato formalmente analogo a quello relativo a (6.1):

Teorema 7.2. *Siano Ω un dominio regolare limitato, $f \in L^{p'}(\Omega)$. Allora esiste un'unica soluzione debole $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ di (7.1). Inoltre, u è un punto di minimo globale in $W_0^{1,p}(\Omega)$ per il funzionale definito da*

$$\Phi(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx - \int_{\Omega} f u \, dx.$$

Dimostrazione. Sullo spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$ adottiamo la norma $\|u\| = \|\nabla u\|_p$, equivalente a quella usuale grazie alla Diseguaglianza di Poincaré (ved. [9]). Da $f \in L^{p'}(\Omega)$ e dalla caratterizzazione del duale $W^{-1,p'}(\Omega)$ (ved. ancora [9]) segue che $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, ossia il funzionale lineare

$$u \mapsto \int_{\Omega} f u \, dx$$

è continuo in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Dunque, $\Phi : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ è continuo. Inoltre, Φ è convesso. Infatti, la funzione $\xi \rightarrow |\xi|^p$ è convessa in \mathbb{R}^N , quindi per ogni $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\tau \in [0, 1]$ si ha

$$\begin{aligned} \Phi((1-\tau)u + \tau v) &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} |(1-\tau)\nabla u + \tau\nabla v|^p \, dx - \int_{\Omega} f((1-\tau)u + \tau v) \, dx \\ &\leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} ((1-\tau)|\nabla u|^p + \tau|\nabla v|^p) \, dx - \int_{\Omega} f((1-\tau)u + \tau v) \, dx \\ &= (1-\tau)\Phi(u) + \tau\Phi(v). \end{aligned}$$

Infine, Φ è coercivo. Infatti, per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si ha la diseuguaglianza di Hölder e l'immersione $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$

$$\begin{aligned} \Phi(u) &\geq \frac{\|u\|^p}{p} - \|f\|_{p'} \|u\|_p \\ &\geq \frac{\|u\|^p}{p} - C\|u\|, \end{aligned}$$

con $C > 0$ indipendente da u . Pertanto

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \Phi(u) = \infty.$$

Poiché $W_0^{1,p}(\Omega)$ è riflessivo, per [2, Corollary 3.23] (ved. anche [8]) esiste $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ t.c.

$$(7.2) \quad \Phi(u) = \min_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} \Phi(v).$$

Proviamo che u risolve (7.1). Per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $t > 0$, da (7.2) segue $\Phi(u + t\varphi) \geq \Phi(u)$, ovvero

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \int_{\Omega} \frac{|\nabla(u + t\varphi)|^p - |\nabla u|^p}{t} \, dx &\geq \int_{\Omega} f \frac{(u + t\varphi) - u}{t} \, dx \\ &= \int_{\Omega} f \varphi \, dx. \end{aligned}$$

Osserviamo che q.o. in Ω

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|\nabla(u + t\varphi)|^p - |\nabla u|^p}{t} = p|\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi.$$

Inoltre, per ogni $t > 0$ esiste $\tau \in [0, t]$ t.c.

$$\left| \frac{|\nabla(u + t\varphi)|^p - |\nabla u|^p}{t} \right| \leq p|\nabla(u + \tau\varphi)|^{p-1} |\nabla \varphi|,$$

e quest'ultima funzione appartiene a $L^1(\Omega)$. Dunque, passando al limite per $t \rightarrow 0^+$, abbiamo

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \geq \int_{\Omega} f \varphi \, dx.$$

Sostituendo φ con $-\varphi$, otteniamo la disuguaglianza opposta. Per densità (ved. [9]), la relazione precedente vale per ogni $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Per la Definizione 7.1, u è soluzione debole di (7.1).

Infine, proviamo che u è unica. Siano $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ soluzioni di (7.1). Allora, usando $u-v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ come funzione test, otteniamo

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v) \cdot (\nabla u - \nabla v) \, dx = 0.$$

Ricordiamo da [12, p. 28] le seguenti disuguaglianze, valide per ogni $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ e $c > 0$ indipendente da ξ, η :

$$(|\xi|^{p-2} \xi - |\eta|^{p-2} \eta) \cdot (\xi - \eta) \geq \begin{cases} c|\xi - \eta|^p & \text{se } p \geq 2 \\ c(|\xi| + |\eta|)^{p-2} |\xi - \eta|^2 & \text{se } p < 2. \end{cases}$$

Consideriamo il caso $p \geq 2$. Dalla disuguaglianza precedente si ricava

$$\int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^p \, dx \leq 0,$$

quindi $u = v$ (come elementi di $W_0^{1,p}(\Omega)$). Il caso $p < 2$ si tratta analogamente. \square

Osservazione 7.3. La teoria della regolarità per il p -laplaciano non è di semplice comprensione: in generale, anche se Ω è di classe C^∞ e $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, non è detto che la soluzione u di (7.1) sia classica, mentre si può dimostrare che $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ per un opportuno $\alpha \in (0, 1)$ (ved. [7]).

Esercizio 7.4. Dimostrare l'unicità della soluzione debole per il problema (7.1), nel caso $p < 2$.

Esercizio 7.5. Dimostrare il principio del massimo per il problema (7.1).

Esercizio 7.6. Dimostrare che il funzionale Φ introdotto nel Teorema 7.2 è strettamente convesso, quindi dedurre l'unicità della soluzione di (7.1).

Esercizio 7.7. Dimostrare che per ogni $f \in L^{p'}(\Omega)$ esiste unica la soluzione debole del problema di Neumann

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2} u = f(x) & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \Gamma. \end{cases}$$

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] A. AMBROSETTI, G. PRODI, A primer of nonlinear analysis, Cambridge (1993)
- [2] H. BREZIS, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer (2011)
- [3] B. DACOROGNA, Direct methods in the calculus of variations, Springer (2008)
- [4] F. DEMENGEL, G. DEMENGEL, Functional spaces for the theory of elliptic partial differential equations, Springer (2012)
- [5] L.C. EVANS, Partial differential equations, American Mathematical Society (1998)

- [6] D.G. DE FIGUEIREDO, Positive solutions of semilinear elliptic problems, in 'Differential Equations (São Paulo, 1981)', Springer (1982)
- [7] D. GILBARG, N.S. TRUDINGER, Elliptic partial differential equations of the second order, Springer (1983).
- [8] A. IANNIZZOTTO, Spazi di Hilbert e operatori lineari
- [9] A. IANNIZZOTTO, Spazi di Sobolev
- [10] A. IANNIZZOTTO, Equazioni alle derivate parziali lineari/2: Problemi evolutivi
- [11] F. JOHN, Partial differential equations, Springer (1982)
- [12] D. MOTREANU, V.V. MOTREANU, N.S. PAPAGEORGIOU, Topological and variational methods with applications to nonlinear boundary value problems, Springer (2014)
- [13] P. PUCCI, J. SERRIN, The maximum principle, Birkhäuser (2007)
- [14] M. STRUWE, Variational methods, Springer (2008)

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI
VIA OSPEDALE 72, 09124 CAGLIARI, ITALY
Email address: `antonio.iannizzotto@unica.it`