

EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI LINEARI/2: PROBLEMI EVOLUTIVI

ANTONIO IANNIZZOTTO

SOMMARIO. Introduzione ai problemi evolutivi. Operatori monotoni su spazi di Hilbert. Approssimante di Yosida. Problemi evolutivi in spazi di Hilbert: esistenza e unicità nel caso continuo, Teorema di Hille-Yosida, il caso autoaggiunto, regolarità della soluzione. Equazioni paraboliche: esistenza e unicità della soluzione dell'equazione del calore con condizioni di Cauchy-Dirichlet, regolarità, risoluzione per decomposizione spettrale, principio del massimo. Equazioni iperboliche: esistenza e unicità per l'equazione delle onde con condizioni di Cauchy-Dirichlet, regolarità, risoluzione per decomposizione spettrale.

INDICE

1. EDP lineari paraboliche e iperboliche	1
2. Il teorema di Hille-Yosida	6
3. Il caso autoaggiunto	16
4. Equazione del calore	20
5. Equazione delle onde	28
Riferimenti bibliografici	32

Versione del 14 giugno 2023

Il tempo dilegua ma non sparisce. Cresce in profondità.

E. JÜNGER

1. EDP LINEARI PARABOLICHE E IPERBOLICHE

Le equazioni alle derivate parziali (EDP) del secondo ordine paraboliche e iperboliche, a differenza da quelle ellittiche studiate in [7], sono caratterizzate dalla presenza di una variabile indipendente rispetto alla quale la matrice dei coefficienti della forma quadratica del secondo ordine ha un autovalore nullo o negativo.

Richiamiamo da [7] il modello generale di EDP lineare del secondo ordine, denotando per comodità $N + 1$ ($N \geq 1$) il numero delle variabili indipendenti:

$$(1.1) \quad - \sum_{i,j=1}^{N+1} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{h=1}^{N+1} b_h(x) \frac{\partial u}{\partial x_h} + c(x)u = f(x) \text{ in } Q,$$

dove $Q \subset \mathbb{R}^{N+1}$ è un dominio e $a_{ij}, b_h, c, f : \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue, e $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ per ogni $x \in \bar{Q}$ (altrimenti riformuliamo equivalentemente (1.1) con i coefficienti $\tilde{a}_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$). Gli autovalori della matrice $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{N+1}$ (a meno di un riordinamento delle variabili e in dipendenza da $x \in \bar{Q}$) sono tutti reali e possono essere ordinati come segue:

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{N+1}.$$

Per semplicità supponiamo che essi non dipendano da $x \in Q$.

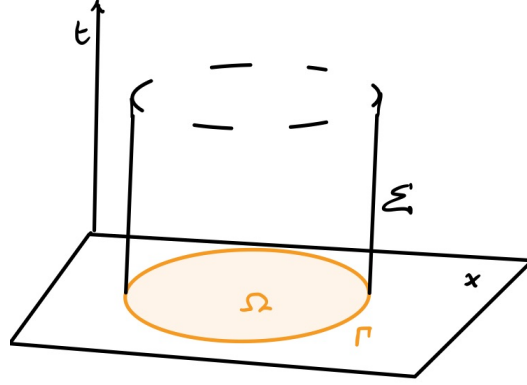


FIGURA 1.

L'equazione (1.1) è detta

- (a) *parabolica* se $\mu_N > 0 = \mu_{N+1}$;
- (b) *iperbolica* se $\mu_N > 0 > \mu_{N+1}$

(osserviamo che in entrambi i casi l'autovalore μ_{N+1} è semplice). Denotiamo allora $t = x_{N+1}$ ed 'estraiamo' questa variabile, alla quale viene attribuito il significato fisico di variabile temporale, mentre x_1, \dots, x_N rappresentano variabili spaziali: i fenomeni descritti da tali equazioni sono pertanto di tipo *evolutivo*. Per questo le EDP paraboliche e iperboliche sono usualmente ambientate in un dominio 'cilindrico' (fig. 1) $Q = \Omega \times \mathbb{R}_0^{+1}$, dove $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un aperto limitato di frontiera $\Gamma = \partial\Omega$, e si pone $\Sigma = \Gamma \times \mathbb{R}^+$, così che

$$\partial Q = (\Omega \times \{0\}) \cup \Sigma.$$

La condizione al contorno sulla soluzione di una EDP evolutiva risulta quindi articolata in una condizione iniziale su $\Omega \times \{0\}$ (Cauchy) e in una condizione su Σ (Dirichlet, Neumann).

La più semplice equazione del tipo (a) è ottenuta ponendo $a_{ii} = 1$ per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$, $a_{N+1, N+1} = 0$, $a_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$, $b_h = 0$ per ogni $1 \leq h \leq N$, $b_{N+1} = 1$, e $c = f = 0$. Si tratta dell'*equazione del calore*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \text{ in } Q,$$

che descrive l'evoluzione della temperatura di un corpo (a questa equazione è dedicata la Sezione 4). D'altra parte, la più semplice equazione del tipo (b) è ottenuta ponendo $a_{ii} = 1$ per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$, $a_{N+1, N+1} = -1$, $a_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$, $b_h = 0$ per ogni $1 \leq h \leq N + 1$, $c = f = 0$. Si tratta dell'*equazione delle onde*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \text{ in } Q,$$

che descrive la superficie di un liquido interessato da un moto ondoso (a questa equazione è dedicata la Sezione 5). In entrambe le equazioni, Δ denota il laplaciano rispetto alle variabili spaziali, ovvero per ogni $(x, t) \in Q$

$$\Delta u(x, t) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x, t).$$

Esporre di seguito la teoria dell'esistenza, dell'unicità e della stabilità della soluzione di una EDP evolutiva (oltre ad alcuni cenni di teoria della regolarità). L'approccio che seguiremo consiste nel

¹Denotiamo $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ e $\mathbb{R}_0^+ = (0, \infty)$.

ricondere le EDP dei tipi (a) e (b) a un'equazione differenziale ordinaria astratta del tipo

$$(1.2) \quad \frac{du}{dt} + A(u) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^+,$$

dove X è uno spazio di Hilbert e $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ un operatore lineare (discontinuo). Per approfondimenti rimandiamo a [1, Chapters 7, 10], ai testi [3, 4, 8, 9] sulle EDP evolutive, e a [2] per le equazioni differenziali in spazi astratti.

Preliminarmente, richiamiamo alcune nozioni. Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Hilbert, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $u : I \rightarrow X$ una mappa (funzione): diremo che u è *derivabile* in $t \in I$ se esiste il limite

$$\frac{du}{dt}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}.$$

Diremo che $u \in C^1(I, X)$ se u è derivabile in ogni $t \in I$ e $\frac{du}{dt} \in C(I, X)$. Si ha inoltre la seguente formula:

$$(1.3) \quad \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 = 2 \left\langle \frac{du}{dt}(t), u(t) \right\rangle.$$

Diremo che $U : I \rightarrow X$ è una *primitiva* di u se per ogni $t \in I$ si ha

$$\frac{dU}{dt}(t) = u(t).$$

In tal caso, per ogni $a, b \in I$ poniamo

$$\int_a^b u(t) dt = U(b) - U(a).$$

La presente definizione di integrale ha tutte le proprietà fondamentali dell'integrale di Riemann, per esempio si ha per ogni $a \leq b$

$$\left\| \int_a^b u(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|u(t)\| dt.$$

Introduciamo anche una nozione di *integrabilità* in spazi di Hilbert: diremo che $u \in L^2(I, X)$ se

$$\int_I \|u(t)\|^2 dt < \infty.$$

Per ogni $F : X \rightarrow X$, $u_0 \in X$ introduciamo il *problema di Cauchy*

$$(1.4) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = F(u) & \text{in } \mathbb{R}^+ \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Una *soluzione* del problema (1.4) è una mappa $u \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$ t.c. $u(0) = u_0$ e per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ si ha

$$\frac{du}{dt}(t) = F(u(t)).$$

Il seguente risultato estende il classico teorema di esistenza e unicità per il problema di Cauchy in \mathbb{R}^N :

Teorema 1.1. (Cauchy-Lipschitz-Picard) *Siano $F : X \rightarrow X$ una funzione lipschitziana, $u_0 \in X$. Allora esiste un'unica soluzione $u \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$ di (1.4).*

Dimostrazione. Per ipotesi, esiste $L > 0$ t.c. per ogni $x, y \in X$

$$(1.5) \quad \|F(x) - F(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Riformuliamo il problema (1.4) mediante un'equazione integrale ad esso equivalente:

$$(1.6) \quad u(t) = u_0 + \int_0^t F(u(\tau)) d\tau \text{ per ogni } t \in \mathbb{R}^+.$$

Infatti, sia u una soluzione di (1.4). Allora u è una primitiva di $F(u)$, da cui per ogni $t > 0$

$$u(t) - u(0) = \int_0^t F(u(\tau)) d\tau.$$

Inoltre $u(0) = u_0$, quindi u risolve (1.6). Viceversa, sia u una soluzione di (1.6). Allora, per $t = 0$ si ha $u(0) = u_0$. Inoltre, per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ e $h > 0$ esiste $\tau_h \in [t, t+h]$ t.c.

$$\frac{u(t+h) - u(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} F(u(\tau)) d\tau = F(u(\tau_h)).$$

Passando al limite per $h \rightarrow 0$, vediamo che u risolve (1.4).

Dimostriamo ora che (1.6) ha una soluzione. Fissiamo $\alpha > L$ e poniamo

$$S = \left\{ u \in C(\mathbb{R}^+, X) : \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \frac{\|u(t)\|}{e^{\alpha t}} < \infty \right\},$$

e per ogni $u, v \in S$

$$d_S(u, v) = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \frac{\|u(t) - v(t)\|}{e^{\alpha t}}.$$

Si vede facilmente che (S, d_S) è uno spazio metrico. Proviamo inoltre che S è completo. Sia (u_n) una successione di Cauchy in S , ovvero per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $n, m \geq \nu$ si ha

$$d_S(u_n, u_m) < \varepsilon.$$

Allora, per ogni $T > 0$ si ha

$$\max_{t \in [0, T]} \|u_n(t) - u_m(t)\| < \varepsilon e^{\alpha T},$$

ovvero (u_n) è una successione di Cauchy anche in $C([0, T], X)$. Poiché $C([0, T], X)$ è uno spazio metrico completo, esiste $u \in C([0, T], X)$ t.c. $u_n \rightarrow u$. Per arbitrarietà di T , abbiamo $u_n(t) \rightarrow u(t)$ in X per ogni $t \in \mathbb{R}^+$, uniformemente su ogni intervallo compatto. Ne segue che $u \in C(\mathbb{R}^+, X)$. Infine osserviamo che esiste $C > 0$ (indipendente da n) t.c. per ogni $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}^+$ si ha

$$\frac{\|u_n(t)\|}{e^{\alpha t}} \leq C.$$

Passando al limite per $n \rightarrow \infty$ abbiamo

$$\frac{\|u(t)\|}{e^{\alpha t}} \leq C,$$

ovvero $u \in S$. Ora proviamo che $u_n \rightarrow u$ in S . Ragionando per assurdo, supponiamo che esista $\delta > 0$ t.c. (a meno di sottosuccessioni) si abbia per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$d_S(u_n, u) > \delta.$$

Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $t_n \in \mathbb{R}^+$ t.c.

$$\|u_n(t_n) - u(t_n)\| > \delta e^{\alpha t_n}.$$

Per la condizione di Cauchy, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $n > m \geq \nu$

$$d_S(u_n, u_m) < \frac{\delta}{2}.$$

D'altra parte, fissiamo m . Poiché $u_n \rightarrow u$ uniformemente in $[0, t_m]$, per ogni $n > m$ abbastanza grande si ha

$$\max_{t \in [0, t_m]} \|u_n(t) - u(t)\| < \frac{\delta}{2}.$$

Dalle relazioni precedenti abbiamo

$$\begin{aligned} \delta e^{\alpha t_m} &< \|u_m(t_m) - u(t_m)\| \\ &\leq \|u_m(t_m) - u_n(t_m)\| + \|u_n(t_m) - u(t_m)\| \\ &\leq \frac{\delta}{2} e^{\alpha t_m} + \frac{\delta}{2} \leq \delta e^{\alpha t_m}, \end{aligned}$$

assurdo. Dunque $u_n \rightarrow u$ in S , e concludiamo che (S, d_S) è uno spazio metrico completo. Definiamo ora una funzione $\Phi : S \rightarrow S$. Poniamo per ogni $u \in S$, $t \in \mathbb{R}^+$

$$\Phi(u)(t) = u_0 + \int_0^t F(u(\tau)) d\tau.$$

Proviamo innanzitutto che $\Phi(u) \in S$. Chiaramente si ha $\Phi(u) \in C(\mathbb{R}^+, X)$. Inoltre, per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ abbiamo per (1.5)

$$\begin{aligned} \|F(u(t))\| &\leq \|F(u(0))\| + L\|u(t) - u(0)\| \\ &\leq \|F(u_0)\| + L(\|u_0\| + \|u(t)\|) \leq C + L\|u(t)\|, \end{aligned}$$

con $C > 0$ indipendente da t . Pertanto abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\|\Phi(u)(t)\|}{e^{\alpha t}} &\leq \frac{\|u_0\|}{e^{\alpha t}} + \int_0^t \frac{\|F(u(\tau))\|}{e^{\alpha \tau}} d\tau \\ &\leq \frac{\|u_0\|}{e^{\alpha t}} + \int_0^t \frac{C + L\|u(\tau)\|}{e^{\alpha \tau}} d\tau \\ &\leq \frac{\|u_0\|}{e^{\alpha t}} + \frac{Ct}{e^{\alpha t}} + C \int_0^t e^{\alpha(\tau-t)} d\tau \\ &= \frac{\|u_0\|}{e^{\alpha t}} + \frac{Ct}{e^{\alpha t}} + C \left[\frac{e^{\alpha(\tau-t)}}{\alpha} \right]_0^t \\ &= \frac{\|u_0\|}{e^{\alpha t}} + \frac{Ct}{e^{\alpha t}} + C \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \leq C. \end{aligned}$$

Usando ancora (1.5), per ogni $u, v \in S$ abbiamo

$$\begin{aligned} d_S(\Phi(u), \Phi(v)) &= \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \frac{\|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|}{e^{\alpha t}} \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \int_0^t \frac{\|F(u(\tau)) - F(v(\tau))\|}{e^{\alpha \tau}} d\tau \\ &\leq L \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \int_0^t \frac{\|u(\tau) - v(\tau)\|}{e^{\alpha \tau}} d\tau \\ &\leq L d_S(u, v) \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \int_0^t e^{\alpha(\tau-t)} d\tau \\ &= L d_S(u, v) \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} = \frac{L}{\alpha} d_S(u, v), \end{aligned}$$

con $L/\alpha < 1$. Dunque $\Phi : S \rightarrow S$ è una contrazione. Per il Teorema di Banach-Caccioppoli [1, Theorem 5.7] esiste un'unica $u \in S$ t.c. $u = \Phi(u)$, ovvero per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$u(t) = u_0 + \int_0^t F(u(\tau)) d\tau.$$

Così abbiamo provato che $u \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$ risolve (1.6), o equivalentemente (1.4).

Rimane da dimostrare l'unicità della soluzione: siano $u, v \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$ soluzioni di (1.4). Fissiamo $\delta \in (0, 1/L)$, allora per ogni $t \in [0, \delta]$ si ha

$$\begin{aligned} \left\| \frac{du}{dt}(t) - \frac{dv}{dt}(t) \right\| &= \|F(u(t)) - F(v(t))\| \\ &\leq L\|u(t) - v(t)\|. \end{aligned}$$

D'altra parte si ha

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\| &\leq \int_0^t \left\| \frac{du}{d\tau}(\tau) - \frac{dv}{d\tau}(\tau) \right\| d\tau \\ &\leq \delta \max_{\tau \in [0, \delta]} \left\| \frac{du}{d\tau}(\tau) - \frac{dv}{d\tau}(\tau) \right\|. \end{aligned}$$

Congiungendo le relazioni precedenti abbiamo

$$\max_{t \in [0, \delta]} \|u(t) - v(t)\| \leq L\delta \max_{t \in [0, \delta]} \|u(t) - v(t)\|.$$

Poiché $L\delta < 1$, ne segue che $u(t) = v(t)$ per ogni $t \in [0, \delta]$. A questo punto applichiamo un metodo iterativo. Poniamo $u_1 = u(\delta)$, quindi esaminiamo il problema

$$(1.7) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = F(u) & \text{in } [\delta, \infty) \\ u(\delta) = u_1. \end{cases}$$

Come nel caso precedente si dimostra che (1.7) ha una soluzione unica $u \in C^1([\delta, 2\delta], X)$. Procedendo in questo modo, vediamo che la soluzione di (1.4) è unica in \mathbb{R}^+ . \square

Osservazione 1.2. Dalla dimostrazione del Teorema 1.1 si vede che la soluzione di (1.4) è unica *in generale*, non solo fra le funzioni $u \in S$.

Tuttavia, non possiamo applicare direttamente il Teorema 1.1 all'equazione (1.2), in quanto l'operatore A che ci interessa (il laplaciano) non è continuo. Dobbiamo pertanto approssimare (1.2) mediante una famiglia di problemi coinvolgenti operatori continui.

Esercizio 1.3. Dimostrare la formula (1.3).

Esercizio 1.4. Dimostrare che (S, d_S) è uno spazio metrico.

2. IL TEOREMA DI HILLE-YOSIDA

In questa sezione studiamo un problema di Cauchy astratto in uno spazio di Hilbert X^2 :

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} + A(u) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

dove $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ è un operatore lineare (non necessariamente continuo) e $u_0 \in X$ è il dato iniziale. La definizione di soluzione di (2.1) è analoga a quella introdotta per il problema (1.4)

In generale, il problema (2.1) non ha soluzione (si pensi, per esempio, al caso in cui $u_0 \notin D(A)$). Per studiarlo, occorre assumere che A sia 'approssimabile' mediante operatori lineari continui. Tale approssimazione è possibile sotto opportune ipotesi di monotonia, e per $u_0 \in D(A)$.

Definizione 2.1. Un operatore lineare $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ è detto

(i) *monotono* se $\langle A(x), x \rangle \geq 0$ per ogni $x \in D(A)$;

²Adotteremo sistematicamente l'identificazione $X = X^*$, conseguenza del Teorema di rappresentazione di Riesz (ved. [5]). Inoltre, denoteremo $\|\cdot\|$ le norme di X, X^* e $\mathcal{L}(X)$.

(ii) *massimale monotono* se A è monotono e $\text{im}(I + A) = X$ ³.

Consideriamo la seguente equazione funzionale in X , con termine noto $y \in X$ e un parametro $\lambda > 0$:

$$(2.2) \quad x + \lambda A(x) = y.$$

Se A è massimale monotono, per $\lambda = 1$ e $y \in X$ qualunque l'equazione (2.2) ammette almeno una soluzione $x \in D(A)$. In effetti, tale soluzione esiste ed è unica per qualunque $\lambda > 0$.

Inoltre, ogni operatore massimale monotono è densamente definito e chiuso (ved. [5]):

Lemma 2.2. *Sia A massimale monotono. Allora:*

- (i) *per ogni $\lambda > 0$, $I + \lambda A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ è biunivoco, $(I + \lambda A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ con $\|(I + \lambda A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$;*
- (ii) *$\overline{D(A)} = X$;*
- (iii) *$\text{gr}(A) \subset X \times X$ è chiuso.*

Dimostrazione. Proviamo (i). Poniamo dapprima $\lambda = 1$. Per ogni $y \in X$, l'equazione (??) ha almeno una soluzione (Definizione 2.1 (ii)). Proviamo che tale soluzione è unica. Infatti, se $x_1, x_2 \in D(A)$ sono soluzioni di (2.2), allora si ha per la Definizione 2.1

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (x_1 - x_2) + A(x_1 - x_2), x_1 - x_2 \rangle \\ &\geq \|x_1 - x_2\|^2, \end{aligned}$$

da cui $x_1 = x_2$. Pertanto, l'operatore lineare $J_1 = (I + A)^{-1}$ è ben definito in X . Inoltre, $J_1 \in \mathcal{L}(X)$ con $\|J_1\| \leq 1$. Infatti, per ogni $y \in X$, posto $x = J_1(y)$, per la Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$\begin{aligned} \|y\| \|x\| &\geq \langle y, x \rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle A(x), x \rangle \geq \|x\|^2, \end{aligned}$$

da cui $\|J_1(y)\| \leq \|y\|$. Fissiamo ora $\lambda > \frac{1}{2}$, $y \in X$, e consideriamo l'equazione (2.2). Poniamo per ogni $x \in X$

$$S(x) = J_1\left(\frac{1}{\lambda}y + \frac{\lambda - 1}{\lambda}x\right).$$

Per ogni $x_1, x_2 \in X$ si ha

$$\begin{aligned} \|S(x_1) - S(x_2)\| &\leq \left\| \left(\frac{1}{\lambda}y + \frac{1 - \lambda}{\lambda}x_1\right) - \left(\frac{1}{\lambda}y + \frac{1 - \lambda}{\lambda}x_2\right) \right\| \\ &\leq \left| \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right| \|x_1 - x_2\|. \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\left| \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right| < 1,$$

dunque $S : X \rightarrow X$ è una contrazione. Per il Teorema di Banach-Caccioppoli [1, Theorem 5.7], esiste un unico $x \in X$ t.c. $S(x) = x$, ovvero

$$x + A(x) = \frac{1}{\lambda}y + \frac{\lambda - 1}{\lambda}x.$$

Ne segue che x è l'unica soluzione di (2.2), ovvero l'operatore $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ è ben definito. Come sopra si prova che $J_\lambda \in \mathcal{L}(X)$ con $\|J_\lambda\| \leq 1$. Così continuando, per ogni $n \in \mathbb{N}$ dimostriamo (i) per ogni $\lambda > \frac{1}{2^n}$, e quindi per ogni $\lambda > 0$.

³Denotiamo con $I \in \mathcal{L}(X)$ l'identità.

Proviamo (ii). Sia $y \in D(A)^\perp$. Come visto sopra, esiste un'unica soluzione $x \in D(A)$ di (??), da cui

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle A(x), x \rangle \geq \|x\|^2. \end{aligned}$$

Ne segue $x = 0$, che a sua volta implica $y = 0$. Pertanto $D(A)$ è denso in X .

Proviamo infine (iii). Sia (x_n) una successione in $D(A)$ t.c. $x_n \rightarrow x$, $A(x_n) \rightarrow y$ in X . Allora $x_n + A(x_n) \rightarrow x + y$, da cui per continuità di $(I + A)^{-1}$

$$\begin{aligned} x &= \lim_n x_n \\ &= \lim_n (I + A)^{-1}(x_n + A(x_n)) = (I + A)^{-1}(x + y). \end{aligned}$$

Ne segue che $x \in D(A)$ e $A(x) = y$, ovvero $(x, y) \in \text{gr}(A)$. □

Formalizziamo la seguente definizione, già introdotta nella dimostrazione del Lemma 2.2:

Definizione 2.3. *Siano A massimale monotono, $\lambda > 0$:*

(i) *il risolvente di A è l'operatore*

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1} \in \mathcal{L}(X);$$

(ii) *l'approssimante (di Yosida) di A è l'operatore*

$$A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda) \in \mathcal{L}(X).$$

Per $\lambda \rightarrow 0^+$, le famiglie di operatori (J_λ) , (A_λ) approssimano, rispettivamente, I e A . Esse godono inoltre di diverse altre proprietà importanti:

Lemma 2.4. *Siano A massimale monotono, $\lambda > 0$. Allora:*

- (i) $A_\lambda(x) = A(J_\lambda(x))$ per ogni $x \in X$;
- (ii) $A_\lambda(x) = J_\lambda(A(x))$ per ogni $x \in D(A)$;
- (iii) $\|A_\lambda(x)\| \leq \|A(x)\|$ per ogni $x \in D(A)$;
- (iv) $\lim_{\lambda \rightarrow 0} J_\lambda(x) = x$ per ogni $x \in X$;
- (v) $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A_\lambda(x) = A(x)$ per ogni $x \in D(A)$;
- (vi) $\langle A_\lambda(x), x \rangle \geq 0$ per ogni $x \in X$;
- (vii) $\|A_\lambda(x)\| \leq \frac{1}{\lambda}\|x\|$ per ogni $x \in X$.

Dimostrazione. Proviamo (i). Per definizione di J_λ , si ha per ogni $x \in X$

$$x = (I + \lambda A)(J_\lambda(x)) = J_\lambda(x) + \lambda A(J_\lambda(x)),$$

da cui

$$A(J_\lambda(x)) = \frac{1}{\lambda}(x - J_\lambda(x)) = A_\lambda(x).$$

Proviamo (ii). Per ogni $x \in D(A)$, da (i) si ha

$$\begin{aligned} (I + \lambda A)(A_\lambda(x)) &= A_\lambda(x) + \lambda A(A_\lambda(x)) \\ &= A(J_\lambda(x) + \lambda A_\lambda(x)) = A(x), \end{aligned}$$

da cui

$$A_\lambda(x) = J_\lambda(A(x)).$$

Proviamo (iii). Dal Lemma 2.2 (i) e da (ii), si ha per ogni $x \in D(A)$

$$\|A_\lambda(x)\| \leq \|J_\lambda\| \|A(x)\| \leq \|A(x)\|.$$

Proviamo (iv). Osserviamo dapprima che per ogni $y \in D(A)$ si ha per (iii)

$$\|y - J_\lambda(y)\| = \lambda \|A_\lambda(y)\| \leq \lambda \|A(y)\|,$$

e quest'ultimo tende a 0 per $\lambda \rightarrow 0$. Fissati $x \in X$, $\varepsilon > 0$, per il Lemma 2.2 (ii) esiste $y \in D(A)$ t.c. $\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{3}$, e per quanto sopra si ha per ogni $\lambda > 0$ abbastanza piccolo $\|y - J_\lambda(y)\| < \frac{\varepsilon}{3}$, da cui (ricordando che $\|J_\lambda\| \leq 1$)

$$\begin{aligned} \|x - J_\lambda(x)\| &\leq \|x - y\| + \|y - J_\lambda(y)\| + \|J_\lambda(y) - J_\lambda(x)\| \\ &\leq 2\|x - y\| + \|y - J_\lambda(y)\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Proviamo (v). Da (ii) segue per ogni $x \in D(A)$

$$\|A_\lambda(x) - A(x)\| = \|J_\lambda(A(x)) - A(x)\|,$$

e per (iv) questo tende a 0 per $\lambda \rightarrow 0$.

Proviamo (vi) e (vii). Per ogni $x \in X$, si ha dalla definizione di A_λ e da (i)

$$\begin{aligned} \langle A_\lambda(x), x \rangle &= \langle A_\lambda(x), x - J_\lambda(x) \rangle + \langle A_\lambda(x), J_\lambda(x) \rangle \\ &= \lambda \langle A_\lambda(x), A_\lambda(x) \rangle + \langle A(J_\lambda(x)), J_\lambda(x) \rangle \geq \lambda \|A_\lambda(x)\|^2. \end{aligned}$$

Da questa disegualianza segue subito (vi). Infine, per la Disegualianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$\|A_\lambda(x)\|^2 \leq \frac{1}{\lambda} \|A_\lambda(x)\| \|x\|,$$

da cui (vii). Così la dimostrazione è conclusa. \square

Osservazione 2.5. L'approssimazione $A_\lambda(x) \rightarrow A(x)$ del Lemma 2.4 (v) è *puntuale*. In generale non si ha $A_\lambda \rightarrow A$ in $\mathcal{L}(X)$, in quanto A non è continuo, anzi si può avere $\|A_\lambda\| \rightarrow \infty$ (ved. (vii)). Notiamo anche che gli operatori A e J_λ commutano su $D(A)$ per (i) e (ii).

Introduciamo ora un problema approssimante per (2.1), dipendente da un parametro $\lambda > 0$:

$$(2.3) \quad \begin{cases} \frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda(u_\lambda) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \\ u_\lambda(0) = u_0, \end{cases}$$

dove $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ è massimale monotono, $A_\lambda \in \mathcal{L}(X)$ è dato dalla Definizione 2.3 (ii), e il dato iniziale è $u_0 \in D(A)$. La soluzione di (2.3) è definita come nei casi precedenti. Il nostro programma si articola in quattro passi:

- (1) dimostrare che per ogni $\lambda > 0$ il problema (2.3) ha soluzione unica u_λ , soddisfacente alcune utili *stime a priori*;
- (2) dimostrare che $u_\lambda \rightarrow u$ per $\lambda \rightarrow 0$, puntualmente in \mathbb{R}^+ e uniformemente negli intervalli $[0, T]$ ($T > 0$);
- (3) dimostrare, sotto l'ipotesi aggiuntiva $u_0 \in D(A^2)$ ⁴, che si ha anche $\frac{du_\lambda}{dt} \rightarrow \frac{du}{dt}$, puntualmente in \mathbb{R}^+ e uniformemente in $[0, T]$ ($T > 0$), così che u risolve (2.1);
- (4) dimostrare infine che per ogni $u_0 \in D(A)$ il problema (2.1) ha soluzione unica.

Cominciamo dunque con un risultato di esistenza e unicità per il problema (2.3):

Proposizione 2.6. *Siano A massimale monotono, $u_0 \in D(A)$. Allora, per ogni $\lambda > 0$ il problema (2.3) ha un'unica soluzione $u_\lambda \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$. Inoltre, per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ si ha*

- (i) $\|u_\lambda(t)\| \leq \|u_0\|$;
- (ii) $\left\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right\| = \|A_\lambda(u_\lambda(t))\| \leq \|A(u_0)\|$.

⁴Ovvero $u_0, A(u_0) \in D(A)$.

Dimostrazione. Per ogni $x, y \in X$ si ha

$$\|A_\lambda(x) - A_\lambda(y)\| \leq \|A_\lambda\| \|x - y\|.$$

Dunque la funzione $F : X \rightarrow X$ definita da $F(x) = -A_\lambda(x)$ è lipschitziana. Dal Teorema 1.1 segue l'esistenza di un'unica mappa $u_\lambda \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$, soluzione di (2.3).

Proviamo (i). Per (1.3) e il Lemma 2.4 (vi), abbiamo per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u_\lambda(t)\|^2 &= 2 \left\langle \frac{du_\lambda}{dt}(t), u_\lambda(t) \right\rangle \\ &= -2 \langle A_\lambda(u_\lambda(t)), u_\lambda(t) \rangle \leq 0. \end{aligned}$$

Dunque la funzione $t \mapsto \|u_\lambda(t)\|^2$ è non-crescente, in particolare si ha per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$\|u_\lambda(t)\|^2 \leq \|u_\lambda(0)\|^2 = \|u_0\|^2,$$

da cui (i). Osserviamo che *fino a questo punto non abbiamo usato l'ipotesi* $u_0 \in D(A)$.

Proviamo infine (ii). Poniamo

$$v_\lambda = \frac{du_\lambda}{dt} \in C(\mathbb{R}^+, X), \quad v_0 = \frac{du_\lambda}{dt}(0).$$

Da (2.3) si ha per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} \frac{dv_\lambda}{dt}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{du_\lambda}{dt}(t+h) - \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right] \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A_\lambda(u_\lambda(t+h)) - A_\lambda(u_\lambda(t))}{h} \\ &= -A_\lambda \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_\lambda(t+h) - u_\lambda(t)}{h} \right] = -A_\lambda(v_\lambda(t)). \end{aligned}$$

Inoltre, chiaramente si ha $v_\lambda(0) = v_0$, ovvero v_λ è soluzione del seguente problema di Cauchy, analogo a (2.3):

$$\begin{cases} \frac{dv_\lambda}{dt} + A_\lambda(v_\lambda) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \\ v_\lambda(0) = v_0. \end{cases}$$

Come sopra, si ricava dunque $v_\lambda \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$ e per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$\|v_\lambda(t)\| \leq \|v_0\| = \|A_\lambda(u_0)\|.$$

Poiché $u_0 \in D(A)$, dal Lemma 2.4 (iii) segue $\|A_\lambda(u_0)\| \leq \|A(u_0)\|$, da cui (ii). \square

Nei prossimi risultati, vedremo come la soluzione u_λ di (2.3) approssima quella di (2.1), per $\lambda \rightarrow 0$. A tale fine, introduciamo le seguenti notazioni per la convergenza uniforme:

(a) diremo che $u_\lambda \rightarrow u$ in $C(I, X)$ per $\lambda \rightarrow 0$, se

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \max_{t \in I} \|u_\lambda(t) - u(t)\| = 0;$$

(b) diremo che $u_\lambda \rightarrow u$ in $C_{\text{loc}}(I, X)$ per $\lambda \rightarrow 0$, se per ogni $J \subset I$ compatto si ha $u_\lambda \rightarrow u$ in $C(J, X)$.

Ovviamente (a) implica (b), mentre l'implicazione inversa vale solo se I è compatto. Sotto l'ipotesi (b) si ha in particolare per ogni $t \in I$ la convergenza puntuale

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} u_\lambda(t) = u(t).$$

Dimostriamo ora la convergenza di u_λ :

Lemma 2.7. (Approssimazione di ordine 0) *Siano A massimale monotono, $u_0 \in D(A)$, u_λ la soluzione di (2.3). Allora esiste $u \in C(\mathbb{R}^+, X)$ t.c. $u_\lambda \rightarrow u$ in $C_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, X)$ per $\lambda \rightarrow 0^+$.*

Dimostrazione. Proviamo dapprima che per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ e $\lambda, \mu > 0$.

$$(2.4) \quad \frac{d}{dt} \|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2 \leq 2(\lambda + \mu) \|A(u_0)\|^2.$$

Infatti, usando (1.3), (2.3), Definizione 2.3, Lemma 2.4 (i), monotonia di A , e Proposizione 2.6 (ii), otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2 &= \left\langle \frac{du_\lambda}{dt}(t) - \frac{du_\mu}{dt}(t), u_\lambda(t) - u_\mu(t) \right\rangle \\ &= -\langle A_\lambda(u_\lambda(t)) - A_\mu(u_\mu(t)), u_\lambda(t) - u_\mu(t) \rangle \\ &= -\langle A_\lambda(u_\lambda(t)) - A_\mu(u_\mu(t)), u_\lambda(t) - J_\lambda(u_\lambda(t)) \rangle \\ &\quad - \langle A_\lambda(u_\lambda(t)) - A_\mu(u_\mu(t)), J_\lambda(u_\lambda(t)) - J_\mu(u_\mu(t)) \rangle \\ &\quad - \langle A_\lambda(u_\lambda(t)) - A_\mu(u_\mu(t)), J_\mu(u_\mu(t)) - u_\mu(t) \rangle \\ &= -\langle A_\lambda(u_\lambda(t)) - A_\mu(u_\mu(t)), \lambda A_\lambda(u_\lambda(t)) \rangle \\ &\quad - \langle A(J_\lambda(u_\lambda(t)) - J_\mu(u_\mu(t))), J_\lambda(u_\lambda(t)) - J_\mu(u_\mu(t)) \rangle \\ &\quad + \langle A_\lambda(u_\lambda(t)) - A_\mu(u_\mu(t)), \lambda A_\mu(u_\mu(t)) \rangle \\ &\leq -\langle A_\lambda(u_\lambda(t)) - A_\mu(u_\mu(t)), \lambda A_\lambda(u_\lambda(t)) - \mu A_\mu(u_\mu(t)) \rangle \\ &= -\lambda \|A_\lambda(u_\lambda(t))\|^2 + (\lambda + \mu) \|A_\lambda(u_\lambda(t))\| \|A_\mu(u_\mu(t))\| - \mu \|A_\mu(u_\mu(t))\|^2 \\ &\leq (\lambda + \mu) \|A(u_0)\|^2. \end{aligned}$$

Integrando (2.4) su $[0, t]$ abbiamo

$$\begin{aligned} \|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2 &= \int_0^t \frac{d}{d\tau} \|u_\lambda(\tau) - u_\mu(\tau)\|^2 d\tau \\ &\leq \int_0^t 2(\lambda + \mu) \|A(u_0)\|^2 d\tau = 2(\lambda + \mu) \|A(u_0)\|^2 t, \end{aligned}$$

da cui

$$\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\| \leq \|A(u_0)\| \sqrt{2(\lambda + \mu)t}.$$

Ora fissiamo $T > 0$ e proviamo che (u_λ) soddisfa la condizione di Cauchy (uniforme) in $C([0, T], X)$ per $\lambda \rightarrow 0^+$. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\nu > 0$ t.c. per ogni $\lambda, \mu \in (0, \nu)$ e ogni $t \in [0, T]$ si ha

$$\|A(u_0)\| \sqrt{2(\lambda + \mu)t} < \varepsilon,$$

da cui per la disuguaglianza precedente

$$\max_{t \in [0, T]} \|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\| < \varepsilon.$$

Ricordiamo che $C([0, T], X)$ è uno spazio completo, dunque esiste $u \in C([0, T], X)$ t.c. $u_\lambda \rightarrow u$ in $C([0, T], X)$ per $\lambda \rightarrow 0^+$. Osserviamo infine che per ogni $J \subset \mathbb{R}^+$ compatto esiste $T > 0$ t.c. $J \subseteq [0, T]$, da cui $u_\lambda \rightarrow u$ in $C_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, X)$ ⁵. \square

Proseguiamo dimostrando che u è derivabile, risolve (2.1), e $\frac{du_\lambda}{dt}$ approssima $\frac{du}{dt}$. Questo passo richiede, provvisoriamente, l'ipotesi aggiuntiva che $u_0 \in D(A^2)$:

Lemma 2.8. (Approssimazione di ordine 1) *Siano A massimale monotono, $u_0 \in D(A^2)$, u_λ la soluzione di (2.3), u come nel Lemma 2.7. Allora $u \in C^1(\mathbb{R}^+, X) \cap C(\mathbb{R}^+, D(A))$ è soluzione di (2.1) e si ha*

$$\frac{du_\lambda}{dt} \rightarrow \frac{du}{dt}$$

in $C_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, X)$ per $\lambda \rightarrow 0^+$. Inoltre per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

⁵Nel seguito ometteremo questa osservazione.

- (i) $\|u(t)\| \leq \|u_0\|$;
- (ii) $\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| = \|A(u(t))\| \leq \|A(u_0)\|$.

Dimostrazione. Come nella Proposizione 2.6, poniamo

$$v_\lambda = \frac{du_\lambda}{dt}, \quad v_0 = \frac{du_\lambda}{dt}(0),$$

e osserviamo che v_λ risolve

$$(2.5) \quad \begin{cases} \frac{dv_\lambda}{dt} + A_\lambda(v_\lambda) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \\ v_\lambda(0) = v_0. \end{cases}$$

Per il Lemma 2.4 (ii) si ha

$$v_0 = -A_\lambda(u_0) = -J_\lambda(A(u_0)) \in D(A).$$

Dunque possiamo applicare la Proposizione 2.6 (ii) al problema (2.5). Sfruttando anche il Lemma 2.4 (i) e l'ipotesi $u_0 \in D(A^2)$, otteniamo per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} \|A_\lambda(v_\lambda(t))\| &\leq \|A(v_0)\| \\ &\leq \|A^2(J_\lambda(u_0))\| \\ &= \|J_\lambda(A^2(u_0))\| \leq \|A^2(u_0)\|. \end{aligned}$$

Ragionando come nel Lemma 2.7, abbiamo per ogni $t \in \mathbb{R}^+$, $\lambda, \mu > 0$

$$\|v_\lambda(t) - v_\mu(t)\| \leq \|A^2(u_0)\| \sqrt{2(\lambda + \mu)t}.$$

Fissiamo ora $T > 0$. Dalla disuguaglianza precedente segue che (v_λ) soddisfa la condizione di Cauchy in $C([0, T], X)$ per $\lambda \rightarrow 0^+$. Dunque esiste $v \in C([0, T], X)$ t.c. $v_\lambda \rightarrow v$ in $C([0, T], X)$ per $\lambda \rightarrow 0^+$. Pertanto abbiamo $u \in C^1([0, T], X)$ e per ogni $t \in [0, T]$

$$\frac{du}{dt}(t) = v(t).$$

Per unicit  del limite, si vede infine che $u \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$ e che per $\lambda \rightarrow 0^+$ abbiamo in $C_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, X)$

$$\frac{du_\lambda}{dt} \rightarrow \frac{du}{dt}.$$

Proviamo ora che per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$(2.6) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} J_\lambda(u_\lambda(t)) = u(t).$$

Infatti, per il Lemma 2.4 (i) si ha per ogni $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \|J_\lambda(u_\lambda(t)) - u(t)\| &\leq \|J_\lambda(u_\lambda(t)) - J_\lambda(u(t))\| + \|J_\lambda(u(t)) - u(t)\| \\ &\leq \|u_\lambda(t) - u(t)\| + \|J_\lambda(u(t)) - u(t)\|, \end{aligned}$$

e quest'ultimo tende a 0 per $\lambda \rightarrow 0^+$ (Lemma 2.7, Lemma 2.4 (iv)), da cui (2.6). Per il Lemma 2.4 (i) si ha per ogni $t \in \mathbb{R}^+$, $\lambda > 0$

$$(J_\lambda(u_\lambda(t)), A_\lambda(u_\lambda(t))) = (J_\lambda(u_\lambda(t)), A(J_\lambda(u_\lambda(t)))) \in \text{gr}(A).$$

D'altra parte, per (2.5), (2.3) e la convergenza puntuale abbiamo

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (J_\lambda(u_\lambda(t)), A_\lambda(u_\lambda(t))) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(J_\lambda(u_\lambda(t)), -\frac{du_\lambda}{dt}(t) \right) = \left(u(t), -\frac{du}{dt}(t) \right).$$

Poiché $\text{gr}(A)$ è chiuso (Lemma 2.2 (iii)), si ha $u(t) \in D(A)$ e

$$-\frac{du}{dt}(t) = A(u(t)).$$

Inoltre, dal Lemma 2.7 abbiamo ovviamente $u(0) = u_0$. Dunque $u \in C(\mathbb{R}^+, D(A))$ ed è soluzione di (2.1).

Proviamo infine le stime a priori. Per la Proposizione 2.6 (i) abbiamo per ogni $t \in \mathbb{R}^+$, $\lambda > 0$

$$\|u_\lambda(t)\| \leq \|u_0\|.$$

Passando al limite per $\lambda \rightarrow 0^+$ otteniamo (i). Similmente, per la Proposizione 2.6 (ii) abbiamo per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$\left\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right\| \leq \|A(u_0)\|.$$

passando al limite per $\lambda \rightarrow 0^+$, e ricordando che u risolve (2.1), otteniamo (ii). Così la dimostrazione è conclusa. \square

Infine, rimuoviamo l'ipotesi tecnica $u_0 \in D(A^2)$ e dimostriamo l'unicità della soluzione di (2.1), completando così il risultato principale:

Teorema 2.9. (Hille-Yosida) *Siano A massimale monotono, $u_0 \in D(A)$. Allora esiste un'unica soluzione $u \in C^1(\mathbb{R}^+, X) \cap C(\mathbb{R}^+, D(A))$ di (2.1), inoltre si ha per ogni $t \in \mathbb{R}^+$*

- (i) $\|u(t)\| \leq \|u_0\|$;
- (ii) $\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| = \|A(u(t))\| \leq \|A(u_0)\|$.

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ usiamo il parametro $\lambda = \frac{1}{n} > 0$ e definiamo

$$\tilde{u}_n = J_{\frac{1}{n}}(u_0) \in D(A).$$

In effetti si ha

$$A(\tilde{u}_n) = n(u_0 - \tilde{u}_n) \in D(A),$$

da cui $\tilde{u}_n \in D(A^2)$. Possiamo allora applicare il Lemma 2.8, che assicura l'esistenza di una soluzione $u_n \in C^1(\mathbb{R}^+, X) \cap C(\mathbb{R}^+, D(A))$ del problema

$$(2.7) \quad \begin{cases} \frac{du_n}{dt} + A(u_n) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \\ u_n(0) = \tilde{u}_n. \end{cases}$$

Inoltre, u_n soddisfa le seguenti stime per ogni $t \in \mathbb{R}^+$:

$$(2.8) \quad \|u_n(t)\| \leq \|\tilde{u}_n\|, \quad \left\| \frac{du_n}{dt}(t) \right\| = \|A(u_n(t))\| \leq \|A(\tilde{u}_n)\|.$$

Per costruzione e per il Lemma 2.4 (i) (iv) (v) si ha

$$\begin{aligned} \lim_n \tilde{u}_n &= \lim_n J_{\frac{1}{n}}(u_0) = u_0, \\ \lim_n A(\tilde{u}_n) &= \lim_n A_{\frac{1}{n}}(u_0) = A(u_0). \end{aligned}$$

In particolare, le successioni (\tilde{u}_n) , $(A(\tilde{u}_n))$ soddisfano la condizione di Cauchy in X : fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $n, m \geq \nu$ si ha

$$\|\tilde{u}_n - \tilde{u}_m\|, \|A(\tilde{u}_n) - A(\tilde{u}_m)\| < \varepsilon.$$

Consideriamo le funzioni u_n, u_m . Per linearità del problema (2.7), si ha

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u_n - u_m) + A(u_n - u_m) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \\ (u_n - u_m)(0) = \tilde{u}_n - \tilde{u}_m. \end{cases}$$

Procedendo come nel Lemma 2.8 vediamo che per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$\|u_n(t) - u_m(t)\| \leq \|\tilde{u}_n - \tilde{u}_m\|, \left\| \frac{du_n}{dt}(t) - \frac{du_m}{dt}(t) \right\| \leq \|A(\tilde{u}_n - \tilde{u}_m)\|.$$

Per ogni $T > 0$, dalle relazioni precedenti segue che per ogni $t \in [0, T]$

$$\|\tilde{u}_n(t) - \tilde{u}_m(t)\|, \left\| \frac{du_n}{dt}(t) - \frac{du_m}{dt}(t) \right\| < \varepsilon,$$

ovvero (u_n) , $(\frac{du_n}{dt})$ sono successioni di Cauchy in $C([0, T], X)$. Pertanto esistono $u, v \in C([0, T], X)$ t.c. uniformemente in $[0, T]$

$$\lim_n u_n(t) = u(t), \lim_n \frac{du_n}{dt}(t) = v(t).$$

Come visto nel Lemma 2.8, si ha allora $u \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$ e

$$\frac{du}{dt} = v.$$

Ricordando che A è chiuso (Lemma 2.2 (iii)), possiamo passare al limite in ((i)) e vediamo che $u \in C(\mathbb{R}^+, D(A))$ e per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{du}{dt}(t) + A(u(t)) = 0.$$

Inoltre, si ha

$$\begin{aligned} u(0) &= \lim_n u_n(0) \\ &= \lim_n \tilde{u}_n = u_0. \end{aligned}$$

Dunque u risolve (2.1).

Proviamo ora le stime a priori per u . Passando al limite in ((ii)) otteniamo per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\|,$$

da cui (i). Similmente,

$$\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| \leq \|A(u_0)\|,$$

da cui applicando (2.1) ricaviamo (ii).

Infine proviamo che u è unica. Siano $u, v \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$ soluzioni di (2.1) con lo stesso valore iniziale u_0 . Allora si ha

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u - w) + A(u - w) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \\ (u - w)(0) = 0. \end{cases}$$

Per $(u - w) \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$ valgono stime a priori analoghe a (i) (ii), da cui per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$\|u(t) - w(t)\| \leq 0.$$

Dunque $u = w$. Così la dimostrazione è conclusa. \square

La regolarità della soluzione di (2.1) dipende da quella del dato iniziale u_0 :

Corollario 2.10. *Siano A massimale monotono, $k \in \mathbb{N}$, $u \in D(A^k)$, u la soluzione di (2.1). Allora si ha per ogni $i \in \{0, \dots, k\}$*

$$u \in C^{k-i}(\mathbb{R}^+, D(A^i))^6.$$

⁶Poniamo $D(A^0) = X$.

Dimostrazione. Chiaramente, per $k = 1$ la tesi equivale a quella del Teorema 2.9.

Per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$ poniamo $X_i = D(A^i)$, e su tale spazio vettoriale definiamo il prodotto scalare

$$\langle x, y \rangle_i = \sum_{j=1}^i \langle A^j(x), A^j(y) \rangle.$$

Poiché A è chiuso (Lemma 2.2 (iii)), si dimostra che X_i , dotato di questo prodotto scalare, è uno spazio di Hilbert (esso non è invece completo rispetto al prodotto scalare di X). Procediamo ora per induzione su $k \geq 2$:

(a) Per $k = 2$, definiamo un operatore lineare $A_1 : D(A_1) \subseteq X_1 \rightarrow X_1$ ponendo

$$D(A_1) = X_2, \quad A_1(x) = A(x).$$

L'operatore è ben definito, monotono per monotonia di A , e per ogni $y \in X_1$ esiste $x \in D(A)$ t.c.

$$x + A(x) = y,$$

da cui ovviamente $x \in D(A^2)$. Pertanto A_1 è massimale monotono. Per ipotesi $u_0 \in D(A_1)$, dunque per il Teorema 2.9 esiste un'unica soluzione $u_1 \in C^1(\mathbb{R}^+, X_1) \cap C(\mathbb{R}^+, D(A_1))$ del problema

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} + A_1(u_1) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \\ u_1(0) = u_0. \end{cases}$$

Per unicità abbiamo $u_1 = u$, da cui

$$u \in C^1(\mathbb{R}^+, D(A)) \cap C(\mathbb{R}^+, D(A^2)).$$

Resta da provare che $u \in C^2(\mathbb{R}^+, X)$. Poniamo a tal fine per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$v(t) = \frac{du}{dt}(t) = -A(v(t)).$$

Osserviamo che $A \in \mathcal{L}(X_1, X)$, infatti se (x_n) è una successione in X_1 t.c. $x_n \rightarrow x$ in X_1 , allora si ha in particolare $A(x_n) \rightarrow A(x)$ in X . Per composizione abbiamo $A(u) \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$ e per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ si ha

$$\frac{dv}{dt}(t) + A(v(t)) = \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{dt} + A(u) \right)(t) = 0.$$

Inoltre si ha

$$v(0) = -A(u_0) \in D(A).$$

Ancora per il Teorema 2.9 abbiamo $v \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$ ovvero $u \in C^2(\mathbb{R}^+, X)$.

(b) Sia $k \geq 3$, supponiamo la tesi vera fino all'ordine $k - 1$ e $u_0 \in D(A^k)$. Per il caso (a) abbiamo $u \in C^2(\mathbb{R}^+, X) \cap C^1(\mathbb{R}^+, D(A))$ e, definita v come sopra, abbiamo anche che $v \in C^1(\mathbb{R}^+, X) \cap C(\mathbb{R}^+, D(A))$ risolve il problema

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + A(v) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \\ v(0) = v_0, \end{cases}$$

con dato iniziale

$$v_0 = -A(u_0) \in D(A^{k-1}).$$

Per l'ipotesi induttiva abbiamo per ogni $i \in \{1, \dots, k - 1\}$

$$v \in C^{k-1-i}(\mathbb{R}^+, D(A^i)),$$

ovvero

$$u \in C^{k-i}(\mathbb{R}^+, D(A^i)).$$

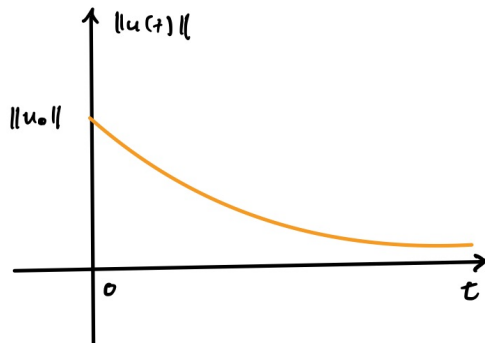


FIGURA 2.

Infine, per $i = k$ abbiamo $v \in C(\mathbb{R}^+, D(A^{k-1}))$ da cui per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$A(u(t)) = -\frac{du}{dt}(t) \in D(A^{k-1}).$$

Ne segue $u \in C(\mathbb{R}^+, D(A^k))$.

Così la dimostrazione è conclusa. □

Osservazione 2.11. Le stime a priori (i) (ii) garantiscono che sia la soluzione, sia la sua derivata sono limitate in \mathbb{R}^+ (fig. 2).

Esercizio 2.12. Dimostrare che X_i , definito nella dimostrazione del Corollario 2.10, è uno spazio di Hilbert.

Esercizio 2.13. Dimostrare che se $A \in \mathcal{L}(X)$, allora si ha $u \in C^\infty(\mathbb{R}^+, X)$.

3. IL CASO AUTOAGGIUNTO

Richiamiamo da [5] alcune nozioni. Siano X uno spazio di Hilbert, $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ un operatore lineare (generalmente discontinuo). L'operatore aggiunto $A^* : D(A^*) \subseteq X \rightarrow X$ è definito ponendo

$$D(A^*) = \{y \in X : \text{esiste } C > 0 \text{ t.c. } \langle y, A(x) \rangle \leq C\|x\| \text{ per ogni } x \in D(A)\},$$

e per ogni $x \in D(A)$, $y \in D(A^*)$ è verificata la condizione di simmetria

$$\langle A^*(y), x \rangle = \langle A(x), y \rangle.$$

L'operatore A è detto *autoaggiunto* se $D(A) = D(A^*)$ e $A = A^*$, in generale. Tuttavia, per un operatore massimale monotono la definizione si semplifica notevolmente, come mostra il seguente lemma tecnico:

Lemma 3.1. *Sia A un operatore massimale monotono t.c. per ogni $x, y \in D(A)$*

$$\langle A(x), y \rangle = \langle x, A(y) \rangle.$$

Allora:

(i) per ogni $\lambda > 0$, $x, y \in X$

$$\langle J_\lambda(x), y \rangle = \langle x, J_\lambda(y) \rangle;$$

(ii) per ogni $\lambda > 0$, $x, y \in X$

$$\langle A_\lambda(x), y \rangle = \langle x, A_\lambda(y) \rangle;$$

(iii) A è autoaggiunto.

Dimostrazione. Proviamo (i). Fissiamo $\lambda > 0$, e per ogni $x, y \in X$ poniamo

$$x_\lambda = J_\lambda(x), \quad y_\lambda = J_\lambda(y).$$

Per la Definizione 2.3 (i) abbiamo

$$\begin{aligned} \langle x_\lambda, y \rangle &= \langle x_\lambda, y_\lambda + \lambda A(y_\lambda) \rangle \\ &= \langle x_\lambda + \lambda A(x_\lambda), y_\lambda \rangle = \langle x, y_\lambda \rangle. \end{aligned}$$

Proviamo ora (ii). Fissato $\lambda > 0$, dalla Definizione 2.3 (ii) e da (i) abbiamo per ogni $x, y \in X$

$$\begin{aligned} \langle A_\lambda(x), y \rangle &= \frac{1}{\lambda} \langle x - J_\lambda(x), y \rangle \\ &= \frac{1}{\lambda} \langle x, y - J_\lambda(y) \rangle = \langle x, A_\lambda(y) \rangle. \end{aligned}$$

Infine proviamo (iii). Dalla definizione sopra si vede immediatamente che $D(A) \subseteq D(A^*)$. Proviamo ora l'inclusione inversa. Sia $y \in D(A^*)$. Posto $w = y + A^*(y)$, per simmetria si ha per ogni $x \in D(A)$

$$\begin{aligned} \langle w, x \rangle &= \langle y, x \rangle + \langle A^*(y), x \rangle \\ &= \langle y, x \rangle + \langle y, A(x) \rangle = \langle y, x + A(x) \rangle. \end{aligned}$$

Proseguendo, per ogni $z \in X$, da (i) (con $\lambda = 1$) abbiamo

$$\begin{aligned} \langle J_1(w), z \rangle &= \langle w, J_1(z) \rangle \\ &= \langle y, (I + A)(J_1(z)) \rangle = \langle y, z \rangle. \end{aligned}$$

Pertanto $y = J_1(w)$, in particolare $y \in D(A)$. Dunque $D(A) = D(A^*)$. Per l'ipotesi di simmetria su A , abbiamo $A = A^*$. \square

In questa sezione studiamo il problema di Cauchy analogo a (2.1) per un operatore A autoaggiunto. La novità principale è che, in questo caso, il dato iniziale $u_0 \in X$ è arbitrario, ossia non appartiene necessariamente a $D(A)$. Di conseguenza, l'equazione differenziale non è in generale verificata per $t = 0$ e il problema di Cauchy si riformula come segue:

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} + A(u) = 0 & \text{in } \mathbb{R}_0^+ \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Il prossimo risultato fornisce esistenza, unicità e stime a priori per la soluzione di (3.1):

Teorema 3.2. *Siano A autoaggiunto, massimale monotono, $u_0 \in X$. Allora esiste un'unica soluzione $u \in C(\mathbb{R}^+, X) \cap C^1(\mathbb{R}_0^+, X) \cap C(\mathbb{R}_0^+, D(A))$ di (3.1), inoltre si ha per ogni $t \in \mathbb{R}_0^+$*

$$\begin{aligned} (i) \quad & \|u(t)\| \leq \|u_0\|; \\ (ii) \quad & \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| = \|A(u(t))\| \leq \frac{\|u_0\|}{t}. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Proviamo l'esistenza di u e le maggiorazioni a priori, distinguendo due casi:

- (a) Sia $u_0 \in D(A^2)$. Dal Lemma 2.8 sappiamo che per ogni $\lambda > 0$ esiste $u_\lambda \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$ soluzione di (2.3). Inoltre, esiste $u \in C^1(\mathbb{R}^+, X) \cap C(\mathbb{R}^+, D(A))$ soluzione di (2.1), t.c. per $\lambda \rightarrow 0^+$ si ha in $C_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, X)$

$$u_\lambda \rightarrow u, \quad \frac{du_\lambda}{dt} \rightarrow \frac{du}{dt}.$$

Sappiamo anche che u verifica (i) (anche per $t = 0$). Rimane da provare (ii). A tal fine, dimostriamo che per ogni $\lambda > 0$, $t \in \mathbb{R}^+$

$$(3.2) \quad \frac{d}{dt} \left\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right\|^2 \leq 0.$$

Infatti, posto $v_\lambda = \frac{du_\lambda}{dt}$, come nella Proposizione 2.6 vediamo che per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{dv_\lambda}{dt}(t) + A_\lambda(v_\lambda(t)) = 0.$$

Si ha pertanto, usando (1.3) e il Lemma 2.4 (vi),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right\|^2 &= 2 \left\langle \frac{d^2 u_\lambda}{dt^2}(t), \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right\rangle \\ &= 2 \left\langle \frac{dv_\lambda}{dt}(t), v_\lambda(t) \right\rangle \\ &= -2 \langle A_\lambda(v_\lambda(t)), v_\lambda(t) \rangle \leq 0, \end{aligned}$$

da cui (3.2). Di conseguenza, la funzione

$$t \mapsto \left\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right\|^2$$

è non-crescente in \mathbb{R}^+ . Ora fissiamo $t > 0$. Per ogni $\lambda > 0$, testando (2.3) con $u_\lambda(\tau)$ e integrando in $[0, t]$, otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t \left\langle \frac{du_\lambda}{dt}(\tau) + A_\lambda(u_\lambda(\tau)), u_\lambda(\tau) \right\rangle d\tau \\ &= \int_0^t \left[\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\lambda(\tau)\|^2 + \langle A_\lambda(u_\lambda(\tau)), u_\lambda(\tau) \rangle \right] d\tau \\ &= \frac{\|u_\lambda(t)\|^2}{2} - \frac{\|u_0\|^2}{2} + \int_0^t \langle A_\lambda(u_\lambda(\tau)), u_\lambda(\tau) \rangle d\tau, \end{aligned}$$

da cui

$$(3.3) \quad \int_0^t \langle A_\lambda(u_\lambda(\tau)), u_\lambda(\tau) \rangle d\tau \leq \frac{\|u_0\|^2}{2}.$$

Inoltre, dal Lemma 3.1 (ii) segue per ogni $\tau \in [0, t]$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \langle A_\lambda(u_\lambda(\tau)), u_\lambda(\tau) \rangle &= \left\langle A_\lambda \left(\frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau) \right), u_\lambda(\tau) \right\rangle + \left\langle A_\lambda(u_\lambda(\tau)), \frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau) \right\rangle \\ &= 2 \left\langle A_\lambda(u_\lambda(\tau)), \frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau) \right\rangle. \end{aligned}$$

Testiamo ora (2.3) con $\frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau)\tau$, e integriamo su $[0, t]$. Applicando (3.2), la relazione precedente, integrando per parti, e quindi usando (3.3), abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t \left\langle \frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau) + A_\lambda(u_\lambda(\tau)), \frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau)\tau \right\rangle d\tau \\ &= \int_0^t \left\| \frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau) \right\|^2 \tau d\tau + \int_0^t \left\langle A_\lambda(u_\lambda(\tau)), \frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau) \right\rangle \tau d\tau \\ &\geq \left\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right\|^2 \int_0^t \tau d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{d}{d\tau} \langle A_\lambda(u_\lambda(\tau)), u_\lambda(\tau) \rangle \right) \tau d\tau \\ &= \left\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right\|^2 \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} [\langle A_\lambda(u_\lambda(\tau)), u_\lambda(\tau) \rangle \tau]_0^t - \frac{1}{2} \int_0^t \langle A_\lambda(u_\lambda(\tau)), u_\lambda(\tau) \rangle d\tau \\ &\geq \left\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right\|^2 \frac{t^2}{2} + \frac{\langle A_\lambda(u_\lambda(t)), u_\lambda(t) \rangle t}{2} - \frac{\|u_0\|^2}{4} \\ &\geq \left\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right\|^2 \frac{t^2}{2} - \frac{\|u_0\|^2}{4}. \end{aligned}$$

Dunque si ha per ogni, $\lambda > 0$, $t \in \mathbb{R}_0^+$

$$\left\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right\| \leq \frac{\|u_0\|}{\sqrt{2t}}.$$

Passando al limite per $\lambda \rightarrow 0$ abbiamo

$$\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| \leq \frac{\|u_0\|}{\sqrt{2t}},$$

che in particolare implica (ii).

- (b) Sia ora $u_0 \in X$ arbitrario. Per il Lemma 2.2 (ii) (applicato due volte), $D(A^2)$ è un sottospazio denso di X . Dunque esiste una successione (\tilde{u}_n) in $D(A^2)$ t.c. $\tilde{u}_n \rightarrow u_0$ in X . In particolare (\tilde{u}_n) è una successione di Cauchy, ovvero per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $n, m \geq \nu$ si ha

$$(3.4) \quad \|\tilde{u}_n - \tilde{u}_m\| < \varepsilon.$$

Come visto nel caso (a), per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $u_n \in C^1(\mathbb{R}^+, X) \cap C(\mathbb{R}^+, D(A))$ soluzione di

$$\begin{cases} \frac{du_n}{dt} + A(u_n) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \\ u_n(0) = \tilde{u}_n. \end{cases}$$

e verificante per ogni $t \in \mathbb{R}_0^+$

$$\|u_n(t)\| \leq \|\tilde{u}_n\|, \quad \left\| \frac{du_n}{dt}(t) \right\| = \|A(u_n(t))\| \leq \frac{\|\tilde{u}_n\|}{t}.$$

Come nella dimostrazione del Teorema 2.9, per ogni $n, m \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}_0^+$ ricaviamo

$$\|u_n(t) - u_m(t)\| \leq \|w_n - w_m\|, \quad \left\| \frac{du_n}{dt}(t) - \frac{du_m}{dt}(t) \right\| \leq \frac{\|w_n - w_m\|}{t}.$$

Fissiamo ora $0 < T_1 < T_2$. Per (3.4) e per le stime precedenti abbiamo per ogni $n, m \geq \nu$ e ogni $t \in [T_1, T_2]$

$$\|u_n(t) - u_m(t)\| < \varepsilon,$$

e similmente

$$\left\| \frac{du_n}{dt}(t) - \frac{du_m}{dt}(t) \right\| \leq \frac{\|\tilde{u}_n - \tilde{u}_m\|}{t} < \frac{\varepsilon}{T_1}.$$

Pertanto (u_n) , $(\frac{du_n}{dt})$ verificano la condizione di Cauchy uniformemente in $[T_1, T_2]$, quindi esistono $u, v : [T_1, T_2] \rightarrow X$ t.c. in $C([T_1, T_2], X)$

$$u_n \rightarrow u, \quad \frac{du_n}{dt} \rightarrow v.$$

Come visto in precedenza, per arbitrarietà di T_1, T_2 si ha $u \in C^1(\mathbb{R}_0^+, X)$ e per ogni $t \in \mathbb{R}_0^+$

$$\frac{du}{dt}(t) = v(t).$$

Inoltre si ha in $C_{\text{loc}}(\mathbb{R}_0^+, X)$

$$u_n \rightarrow u, \quad \frac{du_n}{dt} \rightarrow \frac{du}{dt}.$$

Usando come nel Lemma 2.8 l'informazione che A è chiuso, per ogni $t \in \mathbb{R}_0^+$ abbiamo $u(t) \in D(A)$ e

$$\frac{du}{dt}(t) + A(u(t)) = 0.$$

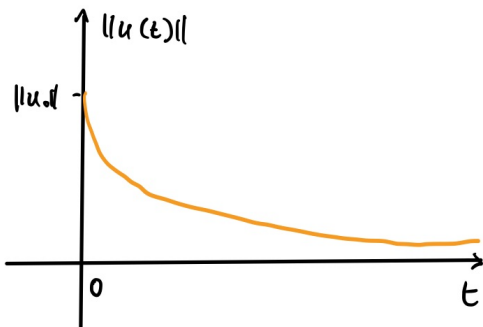


FIGURA 3.

Inoltre, per convergenza uniforme abbiamo

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t) = \lim_n \tilde{u}_n = u_0.$$

Possiamo allora porre $u(0) = u_0$, così che $u \in C(\mathbb{R}^+, X) \cap C^1(\mathbb{R}_0^+, X) \cap C(\mathbb{R}_0^+, D(A))$ è soluzione di (3.1). Infine, passando al limite per $n \rightarrow \infty$ nelle stime su u_n , otteniamo per ogni $t \in \mathbb{R}_0^+$

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\|, \quad \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| = \|A(u(t))\| \leq \frac{\|u_0\|}{t},$$

ovvero u soddisfa (i) (ii).

Infine proviamo che l'unicità della soluzione. Siano $u, w \in C(\mathbb{R}^+, X) \cap C^1(\mathbb{R}_0^+, X)$ soluzioni di (3.1), con lo stesso dato iniziale u_0 . Allora, come nella dimostrazione del Teorema 2.9 otteniamo per ogni $t \in \mathbb{R}_0^+$

$$\|u(t) - w(t)\| \leq 0,$$

da cui $u = w$. Così la dimostrazione è conclusa. \square

Osservazione 3.3. Anche in questo caso si può ottenere per la soluzione di (3.1) una maggiore regolarità, come nel Corollario 2.10 (ma senza ipotesi aggiuntive su u_0): per ogni $h, k \in \mathbb{N}$ si ha

$$u \in C^k(\mathbb{R}_0^+, D(A^h))$$

(ved. [1, Theorem 7.7]).

Osservazione 3.4. Un'altra differenza importante fra il Teorema 2.9 e il Teorema 3.2 è che in quest'ultimo la stima a priori sulla derivata vale in \mathbb{R}_0^+ , ovvero la soluzione può avere una singolarità per $t = 0$ (fig. 3).

Esercizio 3.5. Siano X uno spazio di Hilbert, $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ un operatore massimale monotono simmetrico. Dimostrare che A_λ è autoaggiunto per ogni $\lambda > 0$.

Esercizio 3.6. Dimostrare che se $A \in \mathcal{L}(X)$, allora si ha $u \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+, X)$.

4. EQUAZIONE DEL CALORE

In questa sezione ci occupiamo dell'equazione del calore, introdotta nella Sezione 1. Associamo a tale equazione una condizione di Cauchy-Dirichlet, ottenendo il seguente problema:

$$(4.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{in } Q \\ u = 0 & \text{su } \Sigma \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

Ricordiamo che $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N > 1$) è un aperto limitato con frontiera $\Gamma = \partial\Omega$ di classe C^∞ , $Q = \Omega \times \mathbb{R}_0^+$, $\Sigma = \Gamma \times \mathbb{R}_0^+$, il punto generico di Q viene indicato con $(x, t) = (x_1, \dots, x_N, t)$ (fig. 1), e $u_0 \in L^2(\Omega)$. L'equazione del calore è di tipo parabolico lineare. Il problema (4.1) fornisce un modello matematico dell'evoluzione della temperatura in un corpo Ω immerso in un ambiente a temperatura costante a partire da uno stato iniziale u_0 .

Cominciamo col chiarire che cosa intendiamo per *soluzione* di (4.1). Come al solito, questa espressione può avere due significati:

Definizione 4.1. Una *soluzione classica* di (4.1) è una funzione $u \in C(\overline{Q})$ t.c.

- (i) $u(\cdot, t) \in C^2(\overline{\Omega})$ per ogni $t \in \mathbb{R}^+$;
- (ii) $u(x, \cdot) \in C^1(\mathbb{R}^+)$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$;
- (iii) $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0$ per ogni $(x, t) \in Q$;
- (iv) $u(x, t) = 0$ per ogni $(x, t) \in \Sigma$;
- (v) $u(x, 0) = u_0(x)$ per ogni $x \in \Omega$.

Per calcolare direttamente una soluzione classica di (4.1) si può ricorrere a una funzione speciale detta *nucleo del calore* (ved. [4]). Qui seguiamo un altro approccio basato sul concetto di *soluzione debole* e sugli spazi di Sobolev (ved. [6]).

Consideriamo lo spazio di Hilbert $X = L^2(\Omega)$, con la norma usuale $\|\cdot\|_2$. Definiamo un operatore lineare (discontinuo) $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ ponendo

$$D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \quad A(u) = -\Delta u.$$

Come nella Sezione 3, studiamo il problema di Cauchy (3.1) indotto da A :

Definizione 4.2. Una *soluzione debole* di (4.1) è una soluzione di (3.1), ovvero una funzione $u \in C(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_0^+, L^2(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}_0^+, H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$ t.c.

- (i) $\frac{du}{dt}(t) + A(u(t)) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}_0^+$;
- (ii) $u(0) = u_0$.

Ovviamente, ogni soluzione classica di (4.1) è anche soluzione debole, mentre l'inverso non è vero in generale. Si noti che per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ (o \mathbb{R}_0^+) poniamo

$$u(t) = u(\cdot, t), \quad \frac{du}{dt}(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t).$$

Siamo allora in grado di applicare il Teorema 3.2 e provare il seguente risultato di esistenza, unicità e regolarità per (4.1), che comprende anche una legge di conservazione (impropria):

Teorema 4.3. Sia $u_0 \in L^2(\Omega)$. Allora esiste un'unica soluzione debole u di (4.1), inoltre si ha

- (i) $u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+)$;
- (ii) $u \in L^2(\mathbb{R}_0^+, H_0^1(\Omega))$ e per ogni $T > 0$

$$\frac{\|u(T)\|_2^2}{2} + \int_0^T \|\nabla u(t)\|_2^2 dt = \frac{\|u_0\|_2^2}{2}.$$

Dimostrazione. Esaminiamo l'operatore $A : D(A) \subseteq L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ definito come sopra. Proviamo innanzitutto che A è monotono. Infatti, per ogni $u \in D(A)$, applicando la formula di Gauß-Green (ved. [6]) si ha

$$\langle A(u), u \rangle = \int_{\Omega} (-\Delta u)u dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq 0.$$

Inoltre, $I + A$ è suriettivo. Infatti, per ogni $f \in L^2(\Omega)$, dai risultati di [7] sappiamo che esiste (unica) la soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma. \end{cases}$$

Inoltre, per la teoria della regolarità (ved. ancora [7]), poiché il dominio è di classe C^∞ , si ha $u \in H^2(\Omega)$. Abbiamo dunque $u \in D(A)$. Inoltre, per ogni $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ si ha

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\Delta u + u)\varphi \, dx &= \int_{\Omega} [\nabla u \cdot \nabla \varphi + u\varphi] \, dx \\ &= \int_{\Omega} f\varphi \, dx, \end{aligned}$$

ovvero si ha in $L^2(\Omega)$

$$u + A(u) = f.$$

Pertanto A è massimale monotono (Definizione 2.1).

Osserviamo anche che A è simmetrico, in quanto (sempre per la formula di Gauß-Green) per ogni $u, v \in D(A)$ si ha

$$\langle A(u), v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle u, A(v) \rangle.$$

Per il Lemma 3.1 (iii), A è un operatore autoaggiunto.

Consideriamo il problema (3.1). Per il Teorema 3.2, esso ha un'unica soluzione $u \in C(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_0^+, L^2(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}_0^+, H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$ di (3.1), che inoltre soddisfa per ogni $t \in \mathbb{R}_0^+$

$$\|u(t)\|_2 \leq \|u_0\|_2, \quad \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_2 = \|\Delta u(t)\|_2 \leq \frac{\|u_0\|_2}{t}.$$

Per la Definizione 4.2, u è l'unica soluzione debole di (4.1).

Proviamo ora la regolarità di u (i). Per l'Osservazione 3.3, per ogni $h, k \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$u \in C^k(\mathbb{R}_0^+, D(A^h)).$$

D'altra parte, si vede facilmente (per induzione) che per ogni $h \in \mathbb{N}_0$ ⁷

$$D(A^h) = \{u \in H^{2h}(\Omega) : \Delta^j u = 0 \text{ su } \Gamma, j = 0, \dots, h-1\}.$$

Dunque, per ogni $h, k \in \mathbb{R}_0^+$ abbiamo

$$(4.2) \quad u \in C^k(\mathbb{R}_0^+, H^{2h}(\Omega)).$$

Ricordando ora i Teoremi di immersione per gli spazi di Sobolev (ved. [6]), fissiamo $k \in \mathbb{N}_0$ e scegliamo $h \in \mathbb{N}_0$ t.c.

$$k < 2h - \frac{N}{2}.$$

Si ha allora $H^{2h}(\Omega) \subseteq C^k(\bar{\Omega})$. Da (4.2) segue allora $u \in C^k(\mathbb{R}_0^+, C^k(\bar{\Omega}))$. In virtù dell'identificazione fra le derivate di u e le derivate parziali della funzione $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$, abbiamo $u \in C^k(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, da cui (i).

Infine proviamo (ii). Per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ poniamo

$$\Phi(t) = \frac{\|u(t)\|_2^2}{2}.$$

⁷Poniamo $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$, $\Delta^0 u = u$.



FIGURA 4.

Chiaramente $\Phi \in C(\mathbb{R}^+) \cap C^1(\mathbb{R}_0^+)$, inoltre, applicando (1.3) e (4.1), per ogni $t \in \mathbb{R}_0^+$ si ha

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &= \int_{\Omega} u(t) \frac{du}{dt}(t) dx \\ &= \int_{\Omega} u(t) \Delta u(t) dx = -\|\nabla u(t)\|_2^2 \leq 0.\end{aligned}$$

Dunque Φ è monotona non-crescente in \mathbb{R}^+ , con

$$\Phi(0) = \frac{\|u_0\|_2^2}{2}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = \phi_{\infty} \in [0, \infty).$$

In particolare, Φ è limitata in \mathbb{R}^+ . Per ogni $0 < \varepsilon < T$ si ha

$$\begin{aligned}\Phi(T) - \Phi(\varepsilon) &= \int_{\varepsilon}^T \Phi'(t) dt \\ &= - \int_{\varepsilon}^T \|\nabla u(t)\|_2^2 dt,\end{aligned}$$

da cui la legge di conservazione. Infine, passando al limite per $T \rightarrow \infty$ abbiamo

$$\int_0^{\infty} \|\nabla u(t)\|_2^2 dt = \frac{\|u_0\|_2^2}{2} - \phi_{\infty} < \infty.$$

Adottando su $H_0^1(\Omega)$ la norma $\|\nabla u\|_2$ (grazie alla Diseguaglianza di Poincaré, ved. [6]), vediamo che $u \in L^2(\mathbb{R}_0^+, H_0^1(\Omega))$ (ii). Così la dimostrazione è conclusa. \square

Osservazione 4.4. Come visto nel Teorema 4.3 (i), l'equazione del calore ha un forte (e immediato) effetto regolarizzante sul dato iniziale (fig. 4), che non si applica 'all'indietro'. Ciò esprime matematicamente il carattere *irreversibile* del fenomeno di diffusione del calore. Anche (ii) ha un significato fisico: l'energia termica complessiva del sistema diminuisce, man mano che il calore si diffonde.

Sotto ipotesi più restrittive circa il dato iniziale u_0 , possiamo dimostrare ulteriori proprietà della soluzione u :

Corollario 4.5. Siano $u_0 \in L^2(\Omega)$, u la soluzione di (4.1):

(i) se $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, allora $u \in C(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega)) \cap L^2(\mathbb{R}_0^+, H^2(\Omega))$, $\frac{du}{dt} \in L^2(\mathbb{R}_0^+, L^2(\Omega))$, e per ogni $T > 0$

$$\frac{\|\nabla u(T)\|_2^2}{2} + \int_0^T \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_2^2 dt = \frac{\|\nabla u_0\|_2^2}{2}.$$

(ii) se $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, allora $u \in C(\mathbb{R}^+, H^2(\Omega)) \cap L^2(\mathbb{R}_0^+, H^2(\Omega))$, $\frac{du}{dt} \in L^2(\mathbb{R}_0^+, H_0^1(\Omega))$;

(iii) se per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $u_0 \in H^k(\Omega)$ e $\Delta^k u_0 = 0$ su Γ , allora $u \in C^\infty(\bar{Q})$ è soluzione classica di (4.1).

Dimostrazione. Proviamo (i), servendoci dello stesso schema usato nel Teorema 4.3 ma con una diversa scelta degli spazi e dell'operatore. Poniamo $X = H_0^1(\Omega)$, spazio di Hilbert dotato (questa volta) della norma completa

$$\|u\| = (\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Definiamo l'operatore lineare (discontinuo) $A : D(A) \subset H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ ponendo

$$D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega) \cap H^3(\Omega) : \Delta u \in H_0^1(\Omega)\}, \quad A(u) = -\Delta u.$$

Anche in questo caso, l'operatore A è monotono. Si ha infatti per ogni $u \in D(A)$

$$\begin{aligned} \langle A(u), u \rangle &= \int_{\Omega} [\nabla(-\Delta u) \cdot \nabla u + (-\Delta u)u] dx \\ &= \int_{\Omega} [(\Delta u)^2 + |\nabla u|^2] dx \geq 0. \end{aligned}$$

Inoltre, $I + A$ è suriettivo. Infatti, per ogni $f \in H_0^1(\Omega)$ il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma \end{cases}$$

ammette una (unica) soluzione $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^3(\Omega)$ (ved. [7]), per la quale si ha anche

$$\Delta u = u - f \in H_0^1(\Omega),$$

da cui $u \in D(A)$ e in $L^2(\Omega)$

$$u + A(u) = f.$$

Per la Definizione 2.1 (ii), A è massimale monotono. Verifichiamo che A è simmetrico: per ogni $u, v \in D(A)$ abbiamo

$$\begin{aligned} \langle A(u), v \rangle &= \int_{\Omega} [\nabla(-\Delta u) \cdot \nabla v + (-\Delta u)v] dx \\ &= \int_{\Omega} [(-\Delta u)(-\Delta v) + \nabla u \cdot \nabla v] dx \\ &= \int_{\Omega} [\nabla u \cdot \nabla(-\Delta v) + u(-\Delta v)] dx = \langle u, A(v) \rangle. \end{aligned}$$

Per il Lemma 3.1 (ii), A è autoaggiunto. Dunque, per il Teorema 3.2 esiste un'unica soluzione $u \in C(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_0^+, H_0^1(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}_0^+, D(A))$ del seguente problema di Cauchy:

$$(4.3) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} + A(u) = 0 & \text{in } \mathbb{R}_0^+ \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Inoltre, per ogni $t \in \mathbb{R}_0^+$ si ha

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\|, \quad \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| = \|\Delta u(t)\| \leq \frac{\|u_0\|}{t}$$

(ricordiamo la definizione di $\|\cdot\|$). Da (4.3) ricaviamo per ogni $t \in \mathbb{R}_0^+$

$$\frac{du}{dt}(t) - \Delta u(t) = 0,$$

dunque, per l'unicità della soluzione debole di (4.1), deduciamo che questa $u \in C(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega))$ coincide con quella del Teorema 4.3.

Restano da provare le proprietà di integrabilità di u . Operiamo come nel Teorema 4.3, ponendo stavolta per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$\Phi(t) = \frac{\|\nabla u(t)\|_2^2}{2}.$$

Ovviamente $\Phi \in C(\mathbb{R}^+) \cap C^1(\mathbb{R}_0^+)$ e per ogni $t \in \mathbb{R}_0^+$ abbiamo

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{du}{dt}(t) \right) \cdot \nabla u(t) \, dx \\ &= - \int_{\Omega} \frac{du}{dt}(t) \Delta u(t) \, dx \\ &= - \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_2^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Anche in questo caso, pertanto, Φ è monotona non-crescente e limitata in \mathbb{R}^+ con

$$\Phi(0) = \frac{\|\nabla u_0\|_2^2}{2}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = \phi_{\infty} \in [0, \infty).$$

Per ogni $0 < \varepsilon < T$ si ha

$$\Phi(T) - \Phi(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^T \Phi'(t) \, dt = - \int_{\varepsilon}^T \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_2^2 \, dt.$$

Passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ abbiamo

$$\Phi(T) - \frac{\|\nabla u_0\|_2^2}{2} = - \int_0^T \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_2^2 \, dt,$$

da cui la legge di conservazione. Inoltre, passando al limite per $T \rightarrow \infty$ abbiamo

$$\int_0^{\infty} \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_2^2 \, dt = \frac{\|\nabla u_0\|_2^2}{2} - \phi_{\infty},$$

da cui $\frac{du}{dt} \in L^2(\mathbb{R}_0^+, L^2(\Omega))$. Infine, da (4.1) abbiamo

$$\int_0^{\infty} \|\Delta u(t)\|_2^2 \, dt < \infty.$$

Ricordando che $u \in L^2(\mathbb{R}_0^+, L^2(\Omega))$ (Teorema 4.3 (ii)) e che

$$u \mapsto (\|u\|_2^2 + \|\Delta u\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

è una norma equivalente su $H^2(\Omega)$, abbiamo $u \in L^2(\mathbb{R}_0^+, H^2(\Omega))$. Così si conclude la dimostrazione di (i).

Similmente, con scelte opportune degli spazi e degli operatori, si dimostrano (ii), (iii) (applicando l'Osservazione 3.3). \square

Il problema (4.1) si può anche risolvere per *decomposizione spettrale*. Siano (λ_n) la successione degli autovalori di $-\Delta$ in $H_0^1(\Omega)$ e (e_n) la corrispondente base ortonormale di $L^2(\Omega)$ t.c. $e_n \in H_0^1(\Omega)$ è un'autofunzione associata a λ_n per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ (ved. [7]). Detta u la soluzione di (4.1), per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ abbiamo $u(t) \in L^2(\Omega)$, quindi esiste una successione $(a_n(t))$ in \mathbb{R} t.c.

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) e_n.$$

Si ha in effetti $a_n \in C^1(\mathbb{R}^+)$ per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ (non lo dimostriamo). Da (4.1) ricaviamo per ogni $(x, t) \in Q$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [a'_n(t)e_n(x) - a_n(t)\Delta e_n(x)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [a'_n(t) + \lambda_n a_n(t)]e_n(x). \end{aligned}$$

Poiché (e_n) è una base ortonormale di $L^2(\Omega)$, per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, $t \in \mathbb{R}_0^+$ abbiamo

$$a'_n(t) + \lambda_n a_n(t) = 0.$$

Risolvendo la precedente equazione differenziale ordinaria abbiamo

$$a_n(t) = a_n(0)e^{-\lambda_n t}.$$

Rimane da calcolare la successione numerica $(a_n(0))$. Dalla condizione iniziale di (4.1) abbiamo

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)e_n,$$

e dall'Identità di Parseval (ved. [7]) ricaviamo i coefficienti

$$a_n(0) = \int_{\Omega} u_0 e_n dx.$$

Sostituendo in $u(t)$, abbiamo per ogni $(x, t) \in Q$

$$(4.4) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{\Omega} u_0 e_n dy \right] \frac{e_n(x)}{e^{\lambda_n t}}.$$

Anche per l'equazione del calore vale il *principio del massimo* (in una forma diversa da quella vista in [7]), che permette di stimare i valori della soluzione a partire da quelli del dato iniziale:

Teorema 4.6. *Siano $u_0 \in L^2(\Omega)$, u la soluzione di (4.1). Allora si ha per ogni $(x, t) \in Q$*

$$\min \left\{ 0, \inf_{\Omega} u_0 \right\} \leq u(x, t) \leq \max \left\{ 0, \sup_{\Omega} u_0 \right\}^8.$$

Dimostrazione. Proviamo la stima dall'alto. Poniamo

$$K = \max \left\{ 0, \sup_{\Omega} u_0 \right\}.$$

Senza perdita di generalità possiamo supporre $K < \infty$. Scegliamo una funzione $g \in C^1(\mathbb{R})$ t.c. $g(t) = 0$ per ogni $t \leq 0$, $0 < g'(t) \leq M$ ($M > 0$) per ogni $t > 0$, e poniamo per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$G(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau.$$

Quindi poniamo per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$\Psi(t) = \int_{\Omega} G(u(x, t) - K) dx (\geq 0).$$

⁸Gli estremi di u_0 sono *essenziali*.

Allora si ha $\Psi \in C(\mathbb{R}^+) \cap C^1(\mathbb{R}_0^+)$ e per ogni $t \in \mathbb{R}_0^+$, da (4.1) e dalla formula di Gauß-Green segue

$$\begin{aligned}\Psi'(t) &= \int_{\Omega} g(u(x, t) - K) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx \\ &= \int_{\Omega} g(u(x, t) - K) \Delta u(x, t) dx \\ &= - \int_{\Omega} g'(u(x, t) - K) |\nabla u(x, t)|^2 dx \leq 0.\end{aligned}$$

Dunque Ψ è monotona non-crescente in \mathbb{R}^+ . D'altra parte si ha

$$\Psi(0) = \int_{\Omega} G(u(x, 0) - K) dx = 0,$$

da cui $\Psi(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}^+$. Abbiamo dunque per ogni $(x, t) \in Q$

$$u(x, t) \leq K.$$

Similmente si dimostra la stima dal basso. □

Dal Teorema 4.6 si deducono facilmente i seguenti controlli sulla soluzione:

Corollario 4.7. *Siano $u_0 \in L^2(\Omega)$, u la soluzione di (4.1):*

- (i) *se $u_0 \geq 0$ q.o. in Ω , allora $u \geq 0$ in Q ;*
- (ii) *se $u_0 \leq 0$ q.o. in Ω , allora $u \leq 0$ in Q ;*
- (iii) *se $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, allora per ogni $t \in \mathbb{R}_0^+$ si ha $u \in L^\infty(Q)$ e per q.o. $(x, t) \in Q$*

$$|u(x, t)| \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Dimostrazione. Proviamo (i). Se $u_0 \geq 0$ q.o. in Ω , dal Teorema 4.6 abbiamo per ogni $(x, t) \in Q$

$$u(x, t) \geq \min \left\{ 0, \inf_{\Omega} u_0 \right\} = 0.$$

Similmente si provano (ii), (iii). □

Osservazione 4.8. Nella proprietà (iii), in generale non si ha l'eguaglianza: dal punto di vista fisico, questo corrisponde alla diminuzione della temperatura delle zone più calde nella diffusione del calore.

Risultati simili si ottengono per l'equazione del calore con condizioni di Cauchy-Neumann, che modella l'evoluzione della temperatura in un corpo Ω senza scambi di calore con l'ambiente a partire da uno stato iniziale u_0 :

$$(4.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{in } Q \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \Sigma \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

dove ν denota il versore normale uscente su Γ (e quindi su Σ), ved. [1, Chapter 10]. Per ricondurre (4.5) a un problema del tipo (3.1) si può definire un operatore lineare $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ ponendo

$$D(A) = \{u \in H^2(\Omega) : \nabla u \cdot \nu = 0 \text{ su } \Gamma\}, \quad A(u) = -\Delta u.$$

Esercizio 4.9. Completare la dimostrazione del Corollario 4.5.

Esercizio 4.10. Completare la dimostrazione del Teorema 4.6.

Esercizio 4.11. Completare la dimostrazione del Corollario 4.7.

Esercizio 4.12. Si può risolvere il problema (4.5) per decomposizione spettrale?

5. EQUAZIONE DELLE ONDE

In quest'ultima sezione ci occupiamo dell'equazione delle onde, introdotta nella Sezione 1. Associamo a tale equazione una condizione di Cauchy-Dirichlet, in cui la condizione iniziale (di Cauchy) si compone di due eguaglianze:

$$(5.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & \text{in } Q \\ u = 0 & \text{su } \Sigma \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

Le ipotesi su Ω , Γ , Σ , Q sono identiche a quelle della Sezione 4. Lo stato iniziale u_0 e la velocità iniziale v_0 saranno invece soggette a ipotesi più restrittive, per ragioni che saranno chiarite nel seguito.

L'equazione delle onde è di tipo iperbolico lineare. Il problema (5.1) fornisce un modello matematico del moto oscillatorio di un fluido contenuto in un recipiente di base Ω , con livello costante sul bordo.

Anche in questo caso abbiamo due definizioni di *soluzione*:

Definizione 5.1. Una soluzione classica di (5.1) è una funzione $u \in C^2(\overline{Q})$ t.c.

- (i) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0$ per ogni $(x, t) \in Q$;
- (ii) $u(x, t) = 0$ per ogni $(x, t) \in \Sigma$;
- (iii) $u(x, 0) = u_0(x)$ per ogni $x \in \Omega$;
- (iv) $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x)$ per ogni $x \in \Omega$.

Più conveniente per il nostro approccio è la seguente:

Definizione 5.2. Una soluzione debole di (5.1) è una funzione $u \in C(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega)) \cap C^2(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$ t.c.

- (i) $\frac{d^2 u}{dt^2}(t) - \Delta u(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}^+$;
- (ii) $u(0) = u_0$;
- (iii) $\frac{du}{dt}(0) = v_0$.

Osserviamo che l'equazione differenziale ordinaria (astratta) in (i) è di ordine 2, per questo essa richiede due condizioni iniziali (ii) (iii) per avere soluzione unica. Ogni soluzione classica di (5.1) è anche soluzione debole, mentre l'inverso non vale in generale. Oltre a quelle introdotte nella Sezione 4, adottiamo per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ l'identificazione

$$\frac{d^2 u}{dt^2}(t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot, t).$$

Per il problema (5.1) abbiamo un risultato di esistenza, unicità e conservazione (in senso proprio):

Teorema 5.3. Siano $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $v_0 \in H_0^1(\Omega)$. Allora esiste un'unica soluzione debole u di (5.1). Inoltre, per ogni $t \in \mathbb{R}_0^+$ si ha

$$\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_2^2 + \|\nabla u(t)\|_2^2 = \|v_0\|_2^2 + \|\nabla u_0\|_2^2.$$

Dimostrazione. Al fine di ridurre l'ordine dell'equazione, riformuliamo (5.1) come un sistema di equazioni differenziali. Poniamo $v = \frac{\partial u}{\partial t}$, così che (5.1) è equivalente al problema

$$(5.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - v = 0 & \text{in } Q \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{in } Q \\ u = v = 0 & \text{su } \Sigma \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } \Omega \\ v(x, 0) = v_0(x) & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

Il sistema (5.3) è un sistema di ordine 1 (rispetto alla variabile t) con una condizione iniziale. Mostriamo ora come si può ricondurre il problema (5.2) al modello generale (2.1). Poniamo $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e denotiamo $U = (u, v)$ gli elementi di X . Definiamo su X un prodotto scalare ponendo per ogni $U_1 = (u_1, v_1)$, $U_2 = (u_2, v_2)$

$$\langle U_1, U_2 \rangle = \int_{\Omega} [\nabla u_1 \cdot \nabla u_2 + v_1 v_2] dx.$$

Il prodotto è ben definito per la Diseguaglianza di Poincaré (ved. [6]), e si vede facilmente che X è uno spazio di Hilbert con la norma $\|\cdot\|_X$ indotta da tale prodotto. Definiamo un operatore lineare (discontinuo) $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ ponendo

$$D(A) = (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$$

e per ogni $U = (u, v) \in D(A)$

$$A(U) = (-v, -\Delta u).$$

L'operatore A è densamente definito in X . Poniamo $U_0 = (u_0, v_0)$, e osserviamo che $U_0 \in D(A)$. Il sistema (5.2) si riformula ulteriormente come un problema di Cauchy:

$$(5.3) \quad \begin{cases} \frac{dU}{dt} + A(U) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \\ U(0) = U_0. \end{cases}$$

Infatti, sia $U = (u, v)$ una soluzione di (5.2). Allora si ha per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt}(t) &= \left(\frac{du}{dt}(t), \frac{dv}{dt}(t) \right) \\ &= (v(t), \Delta u(t)) = -A(U(t)), \end{aligned}$$

così che U risolve (5.3), e viceversa.

Verifichiamo le proprietà dell'operatore A . Osserviamo che A è monotono: infatti, per ogni $U = (u, v) \in D(A)$ si ha (per la formula di Gauß-Green)

$$\begin{aligned} \langle A(U), U \rangle &= \int_{\Omega} [(-\nabla v) \cdot \nabla u + (-\Delta u)v] dx \\ &= \int_{\Omega} [-\nabla v \cdot \nabla u + \nabla u \cdot \nabla v] dx = 0. \end{aligned}$$

Inoltre, $I + A$ è suriettivo. Per ogni $F = (f, g) \in X$, consideriamo l'equazione funzionale

$$(5.4) \quad U + A(U) = F.$$

Consideriamo il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(x) + g(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma. \end{cases}$$

Dai risultati di [7] sappiamo che questo problema ammette una (unica) soluzione $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Poniamo ora (ricordando che $f \in H_0^1(\Omega)$)

$$v = u - f \in H_0^1(\Omega).$$

Si ha pertanto

$$\begin{cases} u - v = f(x) & \text{in } \Omega \\ v - \Delta u = g(x) & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

Posto $U = (u, v)$, deduciamo che $U \in D(A)$ risolve (5.4). Dunque A è massimale monotono. Per il Teorema 2.9, esiste un'unica soluzione $U = (u, v) \in C^1(\mathbb{R}^+, X) \cap C(\mathbb{R}^+, D(A))$ di (5.3). Si ha allora per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{du}{dt}(t) = v(t),$$

da cui segue $u \in C(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega)) \cap C^2(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$. Inoltre, per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ si ha

$$\frac{d^2u}{dt^2}(t) - \Delta u(t) = \frac{dv}{dt}(t) - \Delta u(t) = 0,$$

e inoltre

$$u(0) = u_0, \quad \frac{du}{dt}(0) = v_0.$$

Per la Definizione 5.2, u è soluzione debole di (5.1). Viceversa, si vede facilmente che se u è soluzione debole di (5.1), allora $U = (u, \frac{du}{dt})$ risolve (5.3). Pertanto u è unica.

Per completare la dimostrazione, testiamo (5.1) con $\frac{du}{dt}$. Si ha allora per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ (applicando (1.3))

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \left[\frac{d^2u}{dt^2}(t) - \Delta u(t) \right] \frac{du}{dt}(t) dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{d^2u}{dt^2}(t) \frac{du}{dt}(t) dx + \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla \left(\frac{du}{dt}(t) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_2^2 + \|\nabla u(t)\|_2^2 \right]. \end{aligned}$$

Dunque la mappa

$$t \mapsto \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_2^2 + \|\nabla u(t)\|_2^2$$

è costante in \mathbb{R}^+ . Abbiamo allora per ogni $t \in \mathbb{R}_0^+$

$$\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_2^2 + \|\nabla u(t)\|_2^2 = \|v_0\|_2^2 + \|\nabla u_0\|_2^2,$$

il che conclude la dimostrazione. □

La regolarità della soluzione migliora sotto ipotesi più restrittive circa i dati iniziali. Per esempio si ha (ved. [1, Theorem 10.8]):

Corollario 5.4. *Siano u_0, v_0, u come nel Teorema 5.3. Se $u_0, v_0 \in H^k(\Omega)$ e $\Delta^k u_0 = \Delta^k v_0 = 0$ su Γ , per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora $u \in C^\infty(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^+)$ è una soluzione classica di (5.1).*



FIGURA 5.

Dimostrazione. Fissiamo $k \in \mathbb{N}$. Si dimostra per induzione che $U = (u, v) \in D(A^k)$ se e solo se le sue componenti verificano le seguenti condizioni⁹:

$$\begin{cases} u \in H^{k+1}(\Omega), \Delta^i u = 0 \text{ su } \Gamma, i = 0, \dots, \left[\frac{k}{2}\right] \\ v \in H^k(\Omega), \Delta^i v = 0 \text{ su } \Gamma, i = 0, \dots, \left[\frac{k+1}{2}\right] - 1. \end{cases}$$

Inoltre si ha

$$A(U) = ((-1)^k v, (-q)^k \Delta^k u).$$

Per ipotesi abbiamo $U_0 \in D(A^k)$. Dunque, per il Corollario 2.10 si ha per ogni $i \in \{0, \dots, k\}$

$$U \in C^{k-i}(\mathbb{R}^+, D(A^i)).$$

Come nel Corollario 4.5, per ogni $h \in \mathbb{N}$ possiamo scegliere k abbastanza grande t.c. $H^{k+1}(\Omega) \subseteq C^h(\overline{\Omega})$, da cui

$$u \in C^h(\mathbb{R}^+, C^h(\overline{\Omega})),$$

da cui la tesi. □

Osservazione 5.5. A differenza dall'equazione del calore, quella delle onde descrive un fenomeno *conservativo*: per questo nel Teorema 5.3 l'energia complessiva della soluzione è costante. D'altra parte, non si osserva un effetto regolarizzante rispetto ai dati, il che significa che la propagazione del moto ondoso è *reversibile*. Osserviamo anche che per (5.1) non vale in generale un principio del massimo, ovvero le onde possono elevarsi oltre l'altezza iniziale (fig. 5). Inoltre, l'operatore A definito sopra *non* è autoaggiunto (si ha invece $A^* = -A$), il che restringe la scelta dei dati iniziali come si è visto nel Teorema 5.3.

Accenniamo alla risoluzione di (5.1) per *decomposizione spettrale*, che si svolge come nella Sezione ???. Sia u la soluzione di (5.1), allora per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ esiste una successione di coefficienti $(a_n(t))$ t.c.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) e_n(x),$$

dove (λ_n) , (e_n) hanno lo stesso significato della Sezione 4. Supponiamo che $a_n \in C^2(\mathbb{R}^+)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora, da (5.1) segue che $a_n \in C^2(\mathbb{R}^+)$ soddisfa per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$a_n''(t) + \lambda_n a_n(t) = 0.$$

⁹Denotiamo $[a]$ la parte intera di $a \in \mathbb{R}$.

Risolviendo questa equazione differenziale ordinaria (e ricordando che $\lambda_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ved. [7]) si ha

$$a_n(t) = a_n(0) \cos(\sqrt{\lambda_n}t) + \frac{a'_n(0)}{\sqrt{\lambda_n}} \sin(\sqrt{\lambda_n}t).$$

Per determinare i valori iniziali di a_n, a'_n basta sviluppare u_0, v_0 nella base (e_n) , ottenendo

$$a_n(0) = \int_{\Omega} u_0 e_n dx, \quad a'_n(0) = \int_{\Omega} v_0 e_n dx.$$

Sostituendo in u otteniamo per ogni $(x, t) \in Q$

$$(5.5) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\int_{\Omega} u_0 e_n dy \right) \cos(\sqrt{\lambda_n}t) + \left(\int_{\Omega} v_0 e_n dy \right) \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}t)}{\sqrt{\lambda_n}} \right] e_n(x).$$

Esempio 5.6. Sfruttiamo la formula (5.5) per dimostrare che il problema (5.1) non ammette un principio del massimo. Consideriamo i dati iniziali $u_0 = e_1, v_0 = 0$ (chiaramente si ha $e_1 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$), ricordando che $e_1 \geq 0$ in Ω . Da (5.5) abbiamo per ogni $(x, t) \in Q$

$$u(x, t) = e_1(x) \cos(\sqrt{\lambda_1}t),$$

e questa funzione è negativa in Ω per alcuni valori di $t > 0$.

In modo simile si studia l'equazione delle onde con condizione di Neumann:

$$(5.6) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & \text{in } Q \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \Sigma \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

Esercizio 5.7. Dimostrare che l'operatore A definito nel Teorema 5.3 non è autoaggiunto.

Esercizio 5.8. Completare la dimostrazione del Corollario 5.4.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] H. BREZIS, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer (2011)
- [2] K. DEIMLING, Ordinary differential equations in Banach spaces, Springer (1977)
- [3] E. DI BENEDETTO, Degenerate parabolic equations, Springer (1993)
- [4] L.C. EVANS, Partial differential equations, American Mathematical Society (1998)
- [5] A. IANNIZZOTTO, Spazi di Hilbert e operatori lineari
- [6] A. IANNIZZOTTO, Spazi di Sobolev
- [7] A. IANNIZZOTTO, Equazioni alle derivate parziali lineari/1: Problemi stazionari
- [8] F. JOHN, Partial differential equations, Springer (1971)
- [9] A. PAZY, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer (1983)

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA
 UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI
 VIA OSPEDALE 72, 09124 CAGLIARI, ITALY
 Email address: antonio.iannizzotto@unica.it