La geometria proiettiva

Francesco Paoli

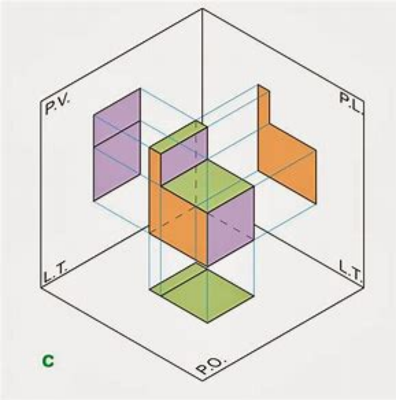
Filosofia della scienza, 2023-24

Gaspard Monge (1746-1818)

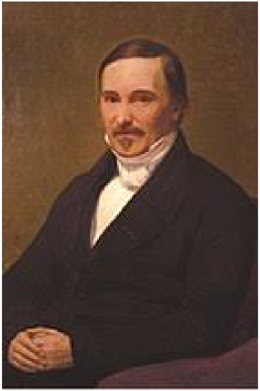
Monge e la geometria descrittiva (1)

- Nel 1794-95, Monge tiene delle lezioni presso l'École Normale di Parigi, le cui dispense successivamente pubblica col titolo di *Geometria descrittiva*.
- In tale volume, rivoluziona i metodi della geometria sintetica attraverso il metodo della *proiezione ortogonale*.
- Dato un solido che si vuole rappresentare, si fissano tre piani perpendicolari (convenzionalmente denominati *verticale*, *orizzontale* e *laterale*) e si proietta ortogonalmente su di essi il solido.

Monge e la geometria descrittiva (2)



Jean Victor Poncelet (1788-1867)



Poncelet: l'approccio alla matematica

Quando poteva sembrare che trascurassi lo studio della geometria a favore dell'insegnamento delle scienze meccaniche e industriali, non avevo in realtà altro scopo se non renderla utile alla classe lavoratrice e ai giovani delle nostre scuole; volevo ispirarli con l'amore delle verità eterne della scienza, con l'odio per gli intrighi e le sottigliezze della ciarlataneria ingorda, segni di un'epoca di cui [...] vanno deplorate con dolore le aberrazioni e la passione per il denaro che disonora il nostro carattere, i nostri costumi e persino la letteratura nazionale. [...]

Ho tentato di rendermi utile alla classe degli artisti e degli ingegneri, scrivendo per il grande pubblico in modo da evitare i rimproveri spesso, e giustamente, rivolti ai membri della nostra professione (Applicazioni di analisi e di geometria, 1862).

Metodi sintetici e metodi analitici

- Nel suo *Trattato sulle proprietà proiettive delle figure* (1822), Poncelet sostiene che la geometria analitica, da Cartesio in poi, ha raggiunto un grado ammirevole di generalità e sofisticazione.
- Le dimostrazioni della geometria sintetica, al contrario, mancavano di generalità. Spesso la dimostrazione di uno stesso teorema andava suddivisa in una moltitudine di casi da trattarsi separatamente, a seconda della posizione relativa dei punti e delle linee studiati.
- Poncelet si propone di rinnovare i metodi della geometria sintetica, per renderla alrettanto efficace di quella analitica:

Lo scopo di questo libro, per quanto voluminoso possa apparire, non è tanto di aggiungere nuove proprietà delle figure, quanto quello di indicare la via per cui possono essere trovate. In breve, ho cercato soprattutto di perfezionare i metodi di dimostrazione e scoperta nella geometria elementare.

Alcuni teoremi di geometria sintetica (1)

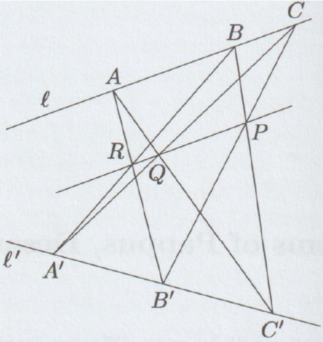


Figure 3.1 Pappus's theorem

Alcuni teoremi di geometria sintetica (2)

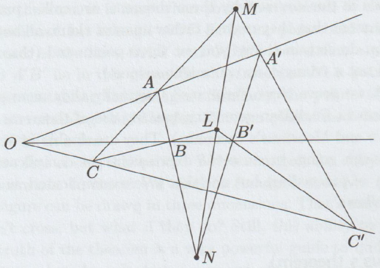


Figure 3.2 Desargues' theorem

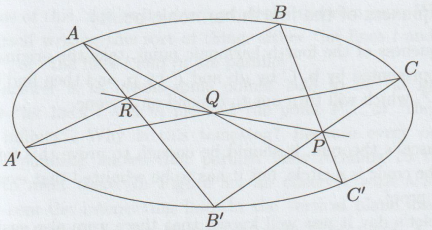


Figure 3.3 Pascal's theorem

Necessità di un metodo nuovo

- Questi teoremi possono essere dimostrati in geometria euclidea tradizionale, ma in modo laborioso, utilizzando teoremi sulle proporzioni.
- Ammettono anche dimostrazioni in geometria analitica, ma difficili, perché le espressioni algebriche coinvolte sono complicate.
- Inoltre, se alcune delle linee in queste figure sono parallele, semplicemente non esistono punti di intersezione, e quindi le dimostrazioni non posseggono la necessaria generalità perché questo caso va trattato a parte.

La soluzione di Poncelet (1)

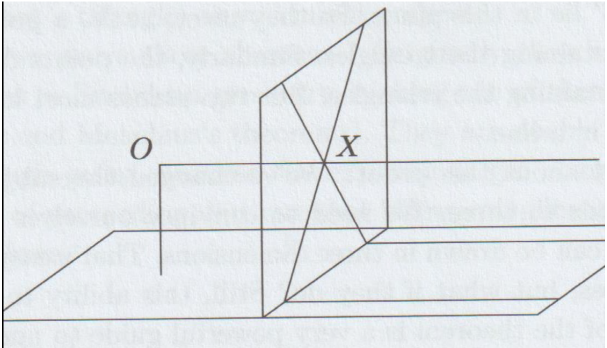


Figure 3.4 "Seeing" a point at infinity

La soluzione di Poncelet (2)

- Poncelet definisce una funzione f (*funzione di proiezione*) dal piano verticale V al piano orizzontale H, tale che per ogni $P \in V$,

$$f(P) = OP \cap H.$$

- Tale funzione associa punti a punti e linee a linee, ma se la retta OP è parallela a H allora $f(P)$ è un "punto all'infinito".
- Se prendiamo il piano per O parallelo a V, incontrerà H in una retta r, che non fa parte dell'immagine di f.

Proprietà delle proiezioni

- Le proiezioni non preservano le lunghezze, né gli angoli, né i rapporti tra lunghezze.
- Preservano il *rapporto anarmonico*, che è l'unico invariante della geometria proiettiva.
- Dati quattro punti collineari A, B, C, D, il loro rapporto anarmonico è dato da:

$$\frac{AB \cdot CD}{AD \cdot CB}$$

Joseph Diaz Gergonne (1771-1859)

Il principio di dualità (1)

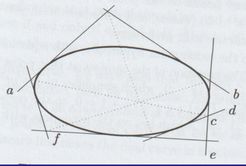
Nel 1806 Charles Julien Brianchon, studente di Monge all'École Polytechnique, dimostra un teorema il cui enunciato può essere ottenuto dal teorema di Pascal scambiando i termini "punto" e "retta" e i termini "lato" e "vertice".

Theorem

I sei vertici di un esagono giacciono su una conica se e solo se i tre punti comuni alle tre coppie di lati opposti hanno una retta in comune.

Theorem

I sei lati di un esagono giacciono su una conica se e solo se le tre rette comuni alle tre coppie di vertici opposti hanno un punto in comune.



Il principio di dualità (2)

- Gergonne, sulla base delle affinità tra i teoremi di Brianchon e di Pascal, avanza nel 1825 l'idea secondo cui i termini punto e linea sono interscambiabili in geometria, e che la loro sostituzione uniforme all'interno di un teorema corretto produce un altro teorema corretto.
- Introduce anche una procedura per dualizzare una curva C: si sostituisce ciascun punto di essa con una retta, ottenendo una famiglia di rette che racchiudono una curva C', la quale viene detta la *curva duale* di C.
- E' naturale congetturare che $C'' = C$, ma questo è in generale falso. Nel 1832 Poncelet avanza alcune idee per ottenere la reversibilità delle dualizzazioni, ma sono oscure e imprecise.
- Sarà Julius Plücker a perfezionare la teoria della dualità di Gergonne e Poncelet, ma nell'ambito della geometria *analitica*.

La prospettiva moderna (per chi ha fatto Geometria 1)

Definition

Il piano proiettivo RP^2 è l'insieme di tutti i sottospazi vettoriali unidimensionali di R^3 (*punti proiettivi*) diversi dal sottospazio banale.

In altre parole, un punto di RP^2 può essere visto come una classe di equivalenza di vettori di R^3 modulo la relazione di equivalenza $\sim$ data da:

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{w} \text{ sse esiste } k \neq 0 \text{ tale che } \mathbf{v} = k\mathbf{w}.$$

Definition

Una linea proiettiva è un insieme di punti proiettivi i cui vettori associati formano un piano in R^3.

Le trasformazioni proiettive sono definite in termini delle trasformazioni lineari di R^3. Poiché queste preservano la dimensione, i punti proiettivi vengono associati a punti proiettivi e le linee proiettive a linee proiettive. Anziché da R^3, si può partire da uno spazio euclideo n-dimensionale R^n $(n > 3)$ o persino da un campo arbitrario.