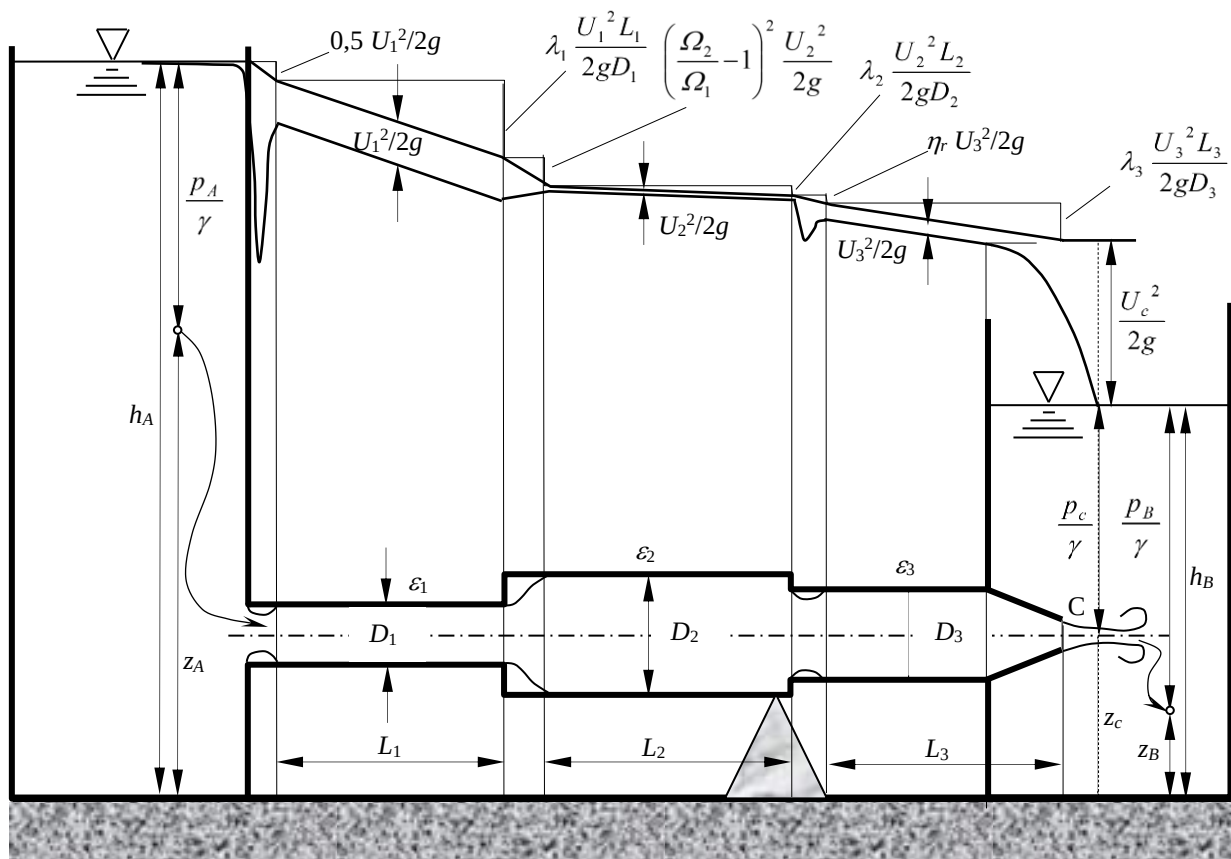


Andrea Balzano

Lezioni di IDRAULICA

per gli allievi ingegneri civili e ambientali
dell'ordinamento DM 270



Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Ingegneria
Dipartimento di Ingegneria Civile, Ingegneria Ambientale e Architettura

Dicembre 2023

*Gli esercizi di Idraulica sono
semplicissimi: bisogna usare
sempre l'equazione del moto e
l'equazione di continuità.*

G. R. Asproni

Gli esami non finiscono mai.

E. De Filippo

Prefazione alla prima edizione

Queste dispense raccolgono i contenuti delle lezioni del corso semestrale di Idraulica per allievi ingegneri edili-architetti e ingegneri edili specialisti della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Cagliari, costituente il primo modulo del Corso Integrato di Idraulica e Costruzioni Idrauliche.

La disponibilità di dispense viene generalmente sempre accolta con favore dagli studenti di corsi universitari, sia perché costituiscono un preciso riscontro delle lezioni che consente di alleggerire notevolmente l'attività di amanuensi cui essi devono altrimenti dedicarsi, a discapito della stessa comprensione verbale del docente e della possibilità di interagire con esso con richieste di chiarimenti – in parole povere: perdendo un po' il filo del discorso; sia perché talora il docente presenta alcuni argomenti in forma che ritiene preferibile, magari solo da un punto di vista puramente didattico, rispetto a quanto reperibile dei libri di testo indicati per lo studio della materia e la preparazione dell'esame; sia perché, più banalmente, lo studente tende naturalmente a guardare con certa simpatia alle dimensioni generalmente ridotte delle dispense rispetto a quelle dei testi indicati, magari con l'intento di omettere senz'altro la consultazione di questi ultimi.

Sebbene l'autore non abbia la minima pretesa che queste dispense, come tutte le dispense, possano essere assimilabili, per completezza e organicità, ai libri di testo adottati in passato per i corsi annuali, egli è stato indotto a redigerle affinché possano costituire il riferimento principale degli allievi per la preparazione dell'esame, in considerazione della scarsità di testi attagliati alle esigenze della didattica nel nuovo ordinamento degli studi: nello specifico, all'insegnamento dell'Idraulica in 50 ore comprensive di lezioni ed esercitazioni e alla necessità di completare la preparazione dell'esame in tempi tali da consentire allo studente di sostenerlo nella sessione immediatamente successiva al termine del corso. I più completi libri di testo disponibili vengono comunque indicati per maggiori chiarimenti od approfondimenti: oltre ai testi di Cenedese, Citrini-Noseda e Marchi-Rubatta, anche le dispense del Prof. C.A. Fassò, di cui in molti, da studenti, abbiamo apprezzato il carattere esauriente e rigoroso e la dovizia di puntualizzazioni ed esempi.

Le premesse della recente riforma universitaria indicavano, particolarmente per quanto riguarda le facoltà tecniche come Ingegneria, l'obiettivo di coniugare una maggiore preparazione pratico-professionale dei neolaureati con la solida formazione culturale tradizionalmente fornita, almeno in senso tecnico, da tale Facoltà, nonché con un accorciamento sensibile dei tempi necessari al conseguimento della laurea. Ora, anche a voler veramente porre mano ai tanti difetti dell'università italiana, rendendola simile, per esempio, alle celebrate università anglosassoni, con la laurea di primo livello non si potrebbe che produrre quel che si sa bene essere il laureato di primo livello statunitense o britannico: un tecnico dotato di abilità alquanto limitate, inclusive magari di addestramento intensivo all'uso di software per l'esecuzione di compiti specifici, privo di una solida cultura ingegneristica ad ampio spettro, il cui lavoro deve essere necessariamente coordinato da tecnici di formazione superiore – fra l'altro, nel contesto di una organizzazione del lavoro professionale più marcatamente industriale di quanto non avvenga, di norma, in Italia.

Rinunciando quindi al conseguimento dei mirabili obiettivi della riforma, perché impossibili da conseguire a parere dell'autore, e non essendo concepibile che uno studente che supera l'esame di Idraulica non possieda una sufficiente abilità nella soluzione dei principali problemi di tipo applicativo, necessitando a tale scopo di adeguata attività esercitativa, seppure a malincuore ci si vede costretti a limitare i contenuti culturali del corso, riducendo le trattazioni teoriche a ciò che è veramente essenziale per la comprensione dei concetti fondamentali, ma soprattutto – aspetto che l'autore non si stanca mai di portare all'attenzione degli studenti e che viene evidenziato, ove occorra, anche in queste dispense – per la stessa corretta applicazione dei metodi pratici.

Seppure conservando, rispetto agli anni passati, l'uso della notazione per componenti con la convenzione di Einstein a vantaggio della sintesi, a partire dall'A.A. 2005-2006 si abbandonerà il procedimento di deduzione delle equazioni in forma locale dalle forme globali lagrangiane, seguendo invece il procedimento inverso, basato sulla formulazione delle leggi della meccanica per volumi elementari, per i quali risulta generalmente più chiaro il significato fisico delle operazioni che vengono condotte – particolarmente nel caso degli studenti del ramo Edile, che non sostengono durante il loro corso di studi un esame di Meccanica Razionale.

In considerazione del tempo limitato a disposizione del docente, alcuni (pochi) concetti vengono illustrati dichiaratamente per via euristica, peraltro sempre con indicazione dei riferimenti a trattazioni più complete. Talvolta, si rinuncia invece alla sintesi per qualche maggiore puntualizzazione che, sebbene possa apparire superflua, perché scontata, e perciò inopportuna nell'ambito di un libro di testo, tale non risulta dalla esperienza pratica dell'autore. Il tutto, sperabilmente, senza rinunciare a un sostanziale rigore scientifico generale della trattazione.

A proposito dei riferimenti bibliografici indicati per maggiori chiarimenti e approfondimenti, si richiama l'attenzione dello studente sulla necessità di verificare accuratamente, allorché consultasse uno di tali testi, anche le convenzioni ivi adottate, confrontandole con quelle utilizzate nel corso e rendendosi così conto del motivo di eventuali differenze nelle formule cui si perviene nei vari casi. Le differenze più rilevanti quanto alle convenzioni adottate nei testi indicati verranno comunque richiamate anche in queste dispense in note a piè di pagina.

Più in generale, si sconsiglia vivamente lo studente di convincersi di aver preparato un certo argomento del corso per il fatto di saper ripetere i vari passaggi riportati nelle dispense, qualora non sia in grado di spiegarne il significato – illustrato peraltro con maggiore profusione di dettagli nelle lezioni, che servono proprio a questo, e che si invita perciò caldamente a seguire – essendo in tal caso preferibile approfittare del ricevimento studenti. Tale eventualità potrà tuttavia essere più frequente il primo anno successivo alla stesura delle dispense, questa volta per colpa dell'autore, perché inevitabilmente le prime edizioni sono sempre affette da un certo numero di refusi, che l'autore prega quindi vivamente gli studenti di segnalargli, a più forte ragione insistendo sulla raccomandazione di non prendere per buona un'equazione solo "perché c'è scritto nelle dispense". Tutti i procedimenti seguiti hanno una precisa logica, che lo studente deve comprendere; eventuali eccezioni imposte dalla mancanza di tempo verranno esplicitamente segnalate nel testo.

Infine, sempre nell'intento di agevolare la preparazione dell'esame da parte dello studente, il primo capitolo delle dispense è dedicato, oltre che alla presentazione di alcune nozioni introduttive, al richiamo di tutte le nozioni preliminari necessarie allo studio della materia, che dovrebbero essere già (ben) note allo studente dai corsi precedenti. A tale proposito, e anche sulla scorta della sconcertante verifica quotidiana della diffusa tendenza a sostenere gli esami in ordine esattamente inverso a quello dettato dal buon senso – peraltro facilmente eliminabile mediante sane propedeuticità obbligatorie, che però sono state incomprensibilmente abolite – si rimarca che tali richiami devono intendersi come tali, piuttosto che come un Bignami delle relative materie, le cui lezioni sono impartite, ovviamente, ben meglio che dall'autore, dai titolari dei relativi corsi, e i cui esami si presume siano stati superati con successo dallo studente che si presenta all'esame di Idraulica. L'intento è unicamente quello di dotare lo studente di un riferimento che riduca al minimo la necessità di consultazione di altri testi, almeno per tali nozioni già acquisite, che vengono inoltre riproposte nel medesimo formalismo utilizzato nel resto delle dispense.

Affrontare la materia avendo chiari in mente i principi fondamentali della Fisica ne renderà più agevole lo studio. Rinunciare a consolidare, ove necessario, le nozioni di base per inseguire una data di esame a tutti i costi, produce in genere tempo perso e frustrazione nello studente.

La verifica della preparazione media in sede di esame consentirà di valutare l'efficacia di tale lavoro, magari per apportare – oltre alle inevitabili correzioni di refusi – qualche effettiva correzione di tiro. La pratica di sottoporre il corso al giudizio degli studenti consentirà inoltre all'autore di verificare il gradimento anche di questo materiale didattico, del che anche verrà tenuto conto. Per quanto riguarda, però, eventuali rimostranze (già riscontrate in passato), del tipo "la materia è pesante" o "vorremmo terminare la lezione mezz'ora prima", oltre a ricordare l'aforisma di Einstein: *"Things should be as simple as possible, but not simpler"* (perché altrimenti si perde il significato delle cose di cui si sta parlando), si può solo invitare lo studente a considerare attentamente che, sul fatto che l'acqua sia una sostanza liquida (talora), viscosa, insidiosa e sfuggente, sede di moti talvolta laminari, più spesso turbolenti e caotici, o – come il comico R. Pozzetto diceva, in chiave surreale e stralunata, a proposito del mare – semovibile, il povero autore davvero non può farci niente!

Andrea Balzano

Cagliari, gennaio 2006

Prefazione alla seconda edizione

Questa seconda edizione delle dispense è stata predisposta per il corso di Idraulica 1 – prima parte – da impartire agli allievi ingegneri civili strutturisti del corso di laurea triennale e agli allievi ingegneri civili specialisti in possesso del titolo di laurea triennale in ingegneria edile.

A prima vista, il corso sembrerebbe presentare alcuni seri inconvenienti, peraltro determinati da scelte assunte dagli organismi accademici competenti in anni passati, nei quali l'autore teneva un corso di Idraulica per un corso di studi differente da quello di Ingegneria Civile.

Il corso ha la durata di 60 ore per cinque crediti: dieci ore in più rispetto al corso per allievi ingegneri-architetti, per il quale era stata predisposta la prima stesura delle dispense, per gli stessi crediti del vecchio corso. Se qualcuno dice, come effettivamente dice di questi tempi, che il metodo dei crediti non va bene anche per il modo in cui esso viene applicato, non si fa certo fatica a credergli.

Lo studente potrà forse essere interessato al motivo di tale anomalia. Riferire qui, nei dettagli, il contenuto delle sedute degli organi accademici competenti sulle questioni didattiche, nelle quali l'autore ha posto il problema della corretta assegnazione di crediti al corso, sarebbe tuttavia fuori luogo – anche se forse piuttosto istruttivo. Ciò che l'autore si sente di affermare è che non vi è alcun motivo sensato, che risponda al concetto genuino di credito formativo quale misura dell'impegno richiesto allo studente per la preparazione dell'esame. D'altro canto, l'autore non ricorda di avere sentito, nelle medesime sedi istituzionali, interventi dei rappresentanti degli studenti a tale proposito, per cui si è sentito, in definitiva, privo di un valido motivo per insistere ulteriormente nelle sue rimostranze (anzi, sulla base del principio di rappresentanza democratica cui sono informati gli organi accademici, si dovrebbe proprio dire che la categoria degli studenti è soddisfatta così).

Il numero di crediti non sarebbe però il solo inconveniente. Nella prefazione alla prima edizione veniva fatto riferimento alla sciagurata scelta di eliminare le propedeuticità degli esami. Si è riusciti a fare di meglio: si è abolita la propedeuticità della docenza, includendo nello stesso semestre i corsi di Meccanica Razionale, Scienza delle Costruzioni e Idraulica. L'autore confessa di non aver realizzato tale situazione tempestivamente, ma la cosa non fa alcuna differenza: il manifesto non sarebbe stato modificabile se non con larghissimo anticipo sull'inizio del corso, in tempi nei quali questo non era ancora stato attribuito all'autore, né l'operazione avrebbe potuto essere comunque realisticamente fattibile, non essendovi scadenze di legge o interessi specifici in gioco che potessero motivare gli organismi competenti a farsi carico del problema. D'altro canto, l'autore ritiene decisamente al di là delle sue capacità impartire l'insegnamento dell'Idraulica senza fare uso delle nozioni fondamentali delle due materie menzionate.

Il lettore si domanderà, a questo punto, il perché del condizionale riferito ai difetti del corso. Il motivo è semplice: gli inconvenienti esistono, ma si sono elisi vicendevolmente, o quasi. Infatti, la necessità di fornire in continuazione spiegazioni su concetti che gli studenti non possedevano, in quanto sarebbero stati impartiti loro in tempi successivi e in altri corsi (principalmente i due richiamati in precedenza), ha determinato, oltre a una certa frammentarietà del corso, una notevole perdita di tempo. Come conseguenza, il programma svolto in 60 ore ha superato in misura molto meno che proporzionale quello svolto, nei corsi di Idraulica tenuti dall'autore in anni precedenti, in sole 50 ore. Un animo sofista potrebbe quindi argomentare che 5 crediti si siano rivelati, a posteriori, proporzionati all'impegno richiesto allo studente, in quanto proporzionati all'estensione del programma svolto.

Naturalmente, gli studenti potranno obiettare di aver dovuto perdere dieci ore inutilmente, di 60 passate ad ascoltare discorsi non sempre comprensibili (a parte i limiti dell'autore come didatta), perché riferiti a concetti di cui essi erano, per i motivi detti in precedenza, sprovvisti. Di più, e non senza ragione a rigor di logica, potrebbero sostenere che, essendo state impegnate 60 ore di lezione del carico totale di lavoro corrispondente a 5 crediti, la parte rimanente di lavoro da svolgere per lo studio della materia dovrebbe essere inferiore a quella prevista per il vecchio corso di 50 ore per gli stessi 5 crediti, se si vuole che il carico totale rimanga invariato – il che dovrebbe comportare, logicamente, una *riduzione* dei contenuti del nuovo corso rispetto al vecchio. Il tutto, senza voler considerare la difficoltà della materia, oggettiva e ben nota, della quale peraltro l'autore non si bea affatto. Ma tutte queste considerazioni, in fin dei conti, non hanno alcuna importanza. Gli interessi

degli studenti sono un ottimo argomento, da usare all'occorrenza, quando essi coincidono con gli interessi del docente che se ne fa portatore – aumentando, oltretutto, di molto l'eleganza dell'eloquio, perché trasudante disinteresse. Ciò che conta è che la forma sia salva, perché la forma è ciò che conta veramente, in generale, in questa nostra Università italiana (con o senza l'On.Gelmini, o l'On. Berlinguer, al ministero).

Tant'è. Perciò, a maggior ragione e, questa volta, fuori da ogni ironia, l'autore si sente di concludere raccomandando vivamente agli studenti di procedere allo studio dell'Idraulica soltanto una volta sostenuti con successo gli esami di Meccanica Razionale e Scienza delle Costruzioni, o, quanto meno, avendo proceduto allo studio e alla assimilazione di tali due materie.

Andrea Balzano

Cagliari, gennaio 2009

Prefazione alla terza edizione

Questa terza edizione delle dispense è stata predisposta per il corso di Idraulica da impartire agli allievi del corso di laurea triennale in Ingegneria Civile secondo il più recente ordinamento degli studi di cui al DM 270/04.

Ancorché semestrale, il corso ha la durata di 100 ore. Ciò ha consentito sia di ampliare la trattazione di alcuni degli argomenti contenuti nelle edizioni precedenti, che di aggiungerne di nuovi, in precedenza soltanto accennati o del tutto omessi: analisi dimensionale, moti irrotazionali, strato limite, moti di filtrazione.

In alcuni casi – ad esempio, le correnti a superficie libera – la più approfondita trattazione degli argomenti si traduce nell’ampliamento della gamma di problemi pratici risolvibili. In altri casi – sostanzialmente moti irrotazionali e strato limite – si tratta certamente di temi, ancorché di grande rilevanza nell’ambito dell’Idraulica e della Meccanica dei Fluidi, in sé meno suscettibili di immediata applicazione ai problemi ordinari dell’ingegneria civile, con riferimento ai quali ci si aspetterebbe forse che un corso della laurea di primo livello venga progettato.

Il motivo fondamentale dell’inclusione di tali argomenti è legato alla presenza di due corsi di Idraulica fra i quali gli allievi ingegneri civili si dividono e alla conseguente necessità di contemperare, in un programma necessariamente comune, le diverse inclinazioni culturali dei docenti. In effetti, con i vincoli attualmente esistenti sul numero di corsi attivabili nella laurea magistrale, impartire un corso di Idraulica di taglio maggiormente applicativo – come sarebbe stata intenzione di chi scrive, in considerazione delle finalità della laurea triennale – non consentirebbe agli studenti interessati ad approfondire le tematiche della Meccanica dei Fluidi nei corsi di laurea magistrale e di dottorato di dotarsi delle necessarie basi culturali. In fin dei conti, anche questo inconveniente è un prodotto delle mirabili riforme dell’Università.

Pur all’interno dell’impostazione descritta, si è comunque cercato, per quanto possibile, di dare spazio ad argomenti di interesse più generale per le applicazioni dell’Ingegneria Civile. Ad esempio, pur includendola per i motivi detti, si è ritenuto preferibile limitare la parte della teoria dei moti irrotazionali, inserendone aspetti applicativi di rilievo nel capitolo dei moti di filtrazione, ove vengono trattati problemi pratici di interesse comune agli ingegneri idraulici, strutturisti e stradisti.

L’autore confida che queste dispense possano continuare, come le precedenti edizioni, a godere del favore degli studenti in sede di valutazione del corso di studio. Fortunatamente, il corso di Idraulica viene ora tenuto successivamente ai corsi di Meccanica Razionale e Scienza delle Costruzioni, col che lo studio della materia risulterà certamente più proficuo che in passato.

Infine, sono sempre gradite segnalazioni di refusi, presumibilmente corretti solo in parte sulla base delle segnalazioni fin qui ricevute.

Andrea Balzano

Cagliari, settembre 2010

INDICE

1. RICHIAMI DI NOZIONI NOTE E ALTRE NOZIONI INTRODUTTIVE	1
1.1 Richiami di Analisi Matematica.....	1
1.1.1 Funzioni di una variabile. Derivate, differenziali e sviluppi in serie.	1
1.1.2 Integrazione di funzioni di una variabile.....	3
1.1.3 Equazioni differenziali ordinarie.....	4
1.1.4 Funzioni di più variabili. Derivate, differenziali e sviluppi in serie.....	5
1.1.5 Integrazione di funzioni di più variabili.	7
1.2 Richiami di Analisi Vettoriale e Tensoriale	8
1.2.1 Generalità	8
1.2.2 Operazioni fra vettori	9
1.2.3 Tensori.....	13
1.2.4 Campi scalari, vettoriali e tensoriali. Operatori differenziali.	15
1.3 Richiami di Meccanica.....	18
1.3.1 Misura delle grandezze fisiche	18
1.3.2 Schematizzazione dello spazio fisico nella Meccanica Newtoniana. Il punto materiale	21
1.3.3 Cinematica.....	21
1.3.4 Statica	23
1.3.5 Dinamica	31
2. PROPRIETÀ FISICHE DEI FLUIDI	37
2.1 Schema di mezzo continuo.....	37
2.2 Definizione di fluido	38
2.3 Sforzi nei fluidi. Forze di superficie.....	41
2.4 Densità e peso specifico. Forze di volume	44
2.5 Viscosità.....	46
2.5.1 Fluidi newtoniani.....	47
2.5.2 Fluidi non newtoniani.....	48
2.6 Tensione superficiale.....	50
2.7 Tensione di vapore	51
2.8 Comprimibilità	52
2.9 Assorbimento dei gas nei liquidi.	53
3. IDROSTATICA	55
3.1 Introduzione	55
3.2 Stato di sforzo in un punto.	55
3.3 Equazione indefinita dell'idrostatica.	57
3.4 Equazione globale dell'idrostatica.....	60
3.5 Fluidi pesanti, isotermi, omogenei e incompressibili. Legge di Stevin.	61
3.6 Principio di Pascal.....	65
3.7 Fluidi non miscibili sovrapposti.....	66
3.8 Aeriformi.....	67
3.9 Strumenti di misura della pressione.	68
3.10 Spinte su superfici.	73
3.10.1 Spinte su superfici piane.	74
3.10.2 Spinte su superfici di forma qualunque.....	82
3.11 Equilibrio di corpi immersi o galleggianti	94
3.12 Stabilità dell'equilibrio di corpi immersi o galleggianti	95
3.13 Capillarità.....	99
4. IDROCINEMATICA	103
4.1 Generalità.	103

4.2 Campi di velocità e traiettorie.	103
4.3 Punti di vista Euleriano e Lagrangiano.	105
4.4 Classificazione dei moti.	107
4.5 Analisi del campo di moto nell'intorno di un punto	108
4.6 Linee di corrente e linee di fumo.	114
4.7 Flussi attraverso superfici.....	116
4.8 Teorema del trasporto.....	118
4.9 Principio di conservazione della massa. Equazioni di continuità.....	120
4.9.1 Equazione di continuità in forma globale.....	120
4.9.2 Equazione di continuità in forma locale.....	121
5. EQUAZIONI FONDAMENTALI DELLA DINAMICA DEI FLUIDI	125
5.1 Generalità	125
5.2 Stato di sforzo in un punto. Teorema di Cauchy.....	126
5.3 Simmetria del tensore degli sforzi.....	129
5.4 Equazione indefinita del moto.....	131
5.5 Legge costitutiva dei fluidi newtoniani.	132
5.6 Equazione di Navier-Stokes	136
5.7 Equazione globale del moto	139
5.7.1 Forma generale	139
5.7.2 Forma per un fluido viscoso	140
5.8 Analisi locale del moto di una particella lungo la sua traiettoria	141
5.8.1 Distribuzione della quota piezometrica nel piano normale alla traiettoria.....	143
5.8.2 Teorema di Bernoulli	143
5.9 Estensione del Teorema di Bernoulli ai fluidi comprimibili	146
6. FORONOMIA.....	149
6.1 Generalità	149
6.2 Efflusso da luce di fondo in parete sottile	149
6.3 Efflusso da luce in parete sottile verticale.....	151
6.4 Efflusso da luci con tubo addizionale.....	153
6.4.1 Luce di Venturi.....	154
6.4.2 Luce di Borda	155
6.5 Efflusso da luce in parete sottile rigurgitata.....	156
6.6 Efflusso da una paratoia piana verticale in parete sottile	157
6.7 Stramazzi in parete sottile	159
6.8 Stramazzo a larga soglia.....	162
6.9 Transitori	163
7. ANALISI DIMENSIONALE.....	167
7.1 Introduzione	167
7.2 Omogeneità dimensionale	167
7.3 Teorema del pigreco.....	170
7.4 Grandezze scala. Adimensionalizzazione di equazioni.....	171
7.5 Similitudine e modelli fisici	174
8. MOTI IRROTAZIONALI.....	177
8.1 Generalità	177
8.2 Moti irrotazionali e potenziale di velocità.....	177
8.3 Moti irrotazionali isocori.....	179
8.4 Teorema di Bernoulli	180
8.5 Moti irrotazionali piani.....	181
8.5.1 Funzione di corrente. Rete idrodinamica.	181
8.5.2 Moto uniforme.....	183

8.5.3 Corrente che investe ortogonalmente una parete piana impermeabile	184
8.5.4 Vortice irrotazionale.....	185
8.5.5 Sorgente e pozzo	187
8.5.6 Sovrapposizione di corrente uniforme e sorgente (semicorpo).....	188
8.5.7 Dipolo (doppietta)	190
8.5.8 Moto attorno a un cilindro.....	191
8.6 Problema inverso.....	193
8.7 Spinte: paradosso di d'Alembert e Teorema di Kutta-Joukowski.....	195
9. TURBOLENZA	197
9.1 Generalità	197
9.2 Evidenze sperimentali	197
9.3 Analisi statistica della turbolenza.....	199
9.4 Equazioni per le quantità medie.....	201
9.4.1 Equazione di continuità.....	201
9.4.2 Equazione di Navier-Stokes – equazione di Reynolds.....	202
9.4.3 Equazione globale del moto	204
9.4.4 Teorema di Bernoulli	205
9.5 Significato fisico del numero di Reynolds	206
10. STRATO LIMITE.....	209
10.1 Generalità	209
10.2 Strato limite laminare	209
10.3 Strato limite turbolento.....	212
10.4 Teorie fenomenologiche per lo studio dello strato limite turbolento	213
10.4.1 Modello di Boussinesq	214
10.4.2 Teoria della lunghezza di mescolamento	215
10.5 Separazione dello strato limite	217
11. CORRENTI FLUIDE.....	219
11.1 Definizioni.....	219
11.2 Equazione di continuità per le correnti.....	220
11.3 Potenza di una corrente in una sezione	222
11.4 Estensione del Teorema di Bernoulli alle correnti	224
11.4.1 Fluido ideale	224
11.4.2 Fluido reale in regime di moto turbolento.....	225
11.5 Strumenti di misura della portata e della velocità	228
12. CORRENTI IN PRESSIONE	233
12.1 Generalità	233
12.2 Moto uniforme nelle condotte in pressione.....	234
12.2.1 Cadente piezometrica, cadente dei carichi totali e resistenze al moto.....	234
12.2.2 Profilo di velocità.....	239
12.3 Leggi di resistenza al moto uniforme	241
12.3.1 Formula di Darcy-Weisbach	241
12.3.2 Formule pratiche	248
12.4 Perdite distribuite nel moto stazionario non uniforme	251
12.5 Perdite di carico localizzate.....	251
12.5.1 Perdita di Borda o per brusco allargamento. Perdita di sbocco.....	251
12.5.2 Perdita per brusco restringimento.....	255
12.5.3 Perdita di imbocco.....	256
12.5.4 Perdite in tronchi divergenti	257
12.5.5 Perdite nelle curve	258
12.6 Progetto e verifica delle condotte in pressione.....	259

12.7 Lunghe condotte.....	268
12.7.1 Generalità	268
12.7.2 Progetto e verifica di una condotta congiungente due serbatoi	270
12.7.3 Progetto e verifica di una rete di lunghe condotte con un nodo interno.....	271
12.8 Correnti in depressione.....	275
12.9 Equazione indefinita del moto per le correnti	278
13. MACCHINE IDRAULICHE	281
13.1 Macchine a fluido.....	281
13.2 Macchine idrauliche	282
13.3 Pompe.....	284
13.3.1 Generalità	284
13.3.2 Determinazione del punto di funzionamento di una pompa.....	288
13.3.3 Verifica delle massime depressioni in un impianto di pompaggio.....	290
13.3.4 Calcolo della portata massima convogliabile da una pompa.....	293
13.3.5 Progetto di un impianto di pompaggio	294
13.4 Turbine e impianti di forza motrice.....	298
14. CORRENTI A SUPERFICIE LIBERA	301
14.1 Generalità	301
14.2 Moto uniforme	302
14.3 Caratteristiche energetiche della corrente in una sezione. Stato critico	306
14.4 Caratteristiche cinematiche delle correnti a pelo libero	310
14.4.1 Propagazione delle perturbazioni. Classificazione delle correnti.....	310
14.4.2 Classificazione degli alvei.....	312
14.5 Profili di moto permanente.....	314
14.5.1 Equazione differenziale dei profili di moto permanente.	314
14.5.2 Profili di moto permanente in alvei prismatici	314
14.5.3 Alvei a debole pendenza	316
14.5.4 Alvei a forte pendenza.....	319
14.5.5 Alvei a pendenza critica	320
14.5.6 Alvei a pendenza nulla e alvei acclivi	322
14.6 Tracciamento dei profili di moto permanente	323
14.6.1 Generalità	323
14.6.2 Condizioni al contorno	324
14.6.3 Condizioni al contorno asintotiche in alvei indefiniti	325
14.6.4 Cause perturbatrici. Sezioni di controllo.	327
14.6.5 Transizione per lo stato critico.	330
14.6.6 Risalto idraulico	331
14.6.7 Tracciamento dei profili di moto permanente mediante integrazione numerica	337
14.7 Problemi di moto non lineare	339
14.7.1 Generalità	339
14.7.2 Passaggio su una soglia di fondo in alveo a debole pendenza	340
14.7.3 Passaggio su una soglia di fondo in alveo a forte pendenza.....	344
14.7.4 Restringimenti di sezione	347
14.7.5 Presa da un serbatoio	353
14.8 Sommario e suggerimenti pratici per l'analisi di una corrente a pelo libero	357
15. MOTI DI FILTRAZIONE	360
15.1 Generalità	360
15.2 Velocità di filtrazione.....	361
15.3 Emungimenti da falde artesiane	365
15.3.1 Trincea indefinita in falda di spessore costante.....	365

15.3.2 Trincea indefinita in falda artesianica seminfinita	366
15.3.3 Pozzo artesianico in falda di spessore costante	367
15.3.4 Pozzo artesianico in falda seminfinita.....	368
15.3.5 Pozzo artesianico in falda di spessore costante in movimento.....	369
15.4 Emungimenti da falde freatiche	369
15.4.1 Trincea indefinita in falda freatica	370
15.4.2 Pozzo in falda freatica indefinita su letto impermeabile	371
15.4.3 Condizioni al contorno: metodo delle immagini	371

CAPITOLO PRIMO

1. RICHIAMI DI NOZIONI NOTE E ALTRE NOZIONI INTRODUTTIVE

1.1 Richiami di Analisi Matematica

1.1.1 Funzioni di una variabile. Derivate, differenziali e sviluppi in serie.

Una funzione di una variabile, $f(x)$, si dice derivabile nel punto x_0 se esiste, finito, il seguente limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0). \quad (1)$$

Tale limite è la *derivata* della funzione f nel punto x_0 , $f'(x_0)$. Con riferimento allo schema di Figura 1a, detta y la variabile dipendente definita dalla funzione f , $y = f(x)$, il valore del rapporto incrementale rappresenta la tangente trigonometrica dell'angolo α che la retta passante per i punti $(x_0, y(x_0))$ e $(x, y(x))$, con $x = x_0 + \Delta x$, forma rispetto all'asse delle ascisse. Nel passaggio al limite, la retta tende alla tangente nel punto x_0 alla curva rappresentativa della funzione $f(x)$ e gli incrementi delle variabili indipendente e dipendente, Δx e $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$, tendono a zero e risultano perciò quantità infinitesime denominate *differenziali*, indicati con dx e df (o dy) rispettivamente. La derivata viene pertanto indicata anche con la notazione simbolica (ma espressiva del significato dell'operazione) df/dx o dy/dx . Conseguentemente dall'esistenza del limite (1) che la funzione debba essere *continua* nel punto x_0 (condizione necessaria per la derivabilità):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

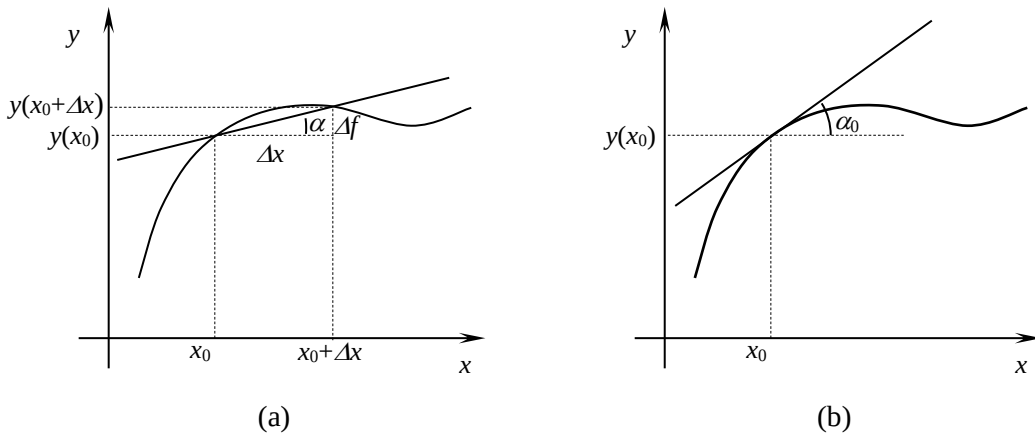


Figura 1. Rappresentazione grafica del significato geometrico (a) del rapporto incrementale e (b) della derivata di una funzione di una variabile.

Dalla (1) consegue anche che una funzione derivabile in un punto x_0 può essere espressa in un intorno sufficientemente ristretto di tale punto come:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x - x_0) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad (2)$$

in cui ε è l'errore dell'approssimazione espressa dal terzo membro della (2), infinitesimo per x tendente a x_0 . Il differenziale della funzione nel punto x_0 può quindi esprimersi come:

$$d f = f'(x_0) d x \quad (3)$$

Sulla base della (1) si definiscono la derivata seconda:

$$f''(x_0) = \frac{d(f')}{d x} = \frac{d^2 f}{d x^2}$$

e, in generale, le derivate di ordine n :

$$\frac{d^n f}{d x^n} = \frac{d}{d x} \left(\frac{d^{n-1} f}{d x^{n-1}} \right).$$

Sulla base del significato della derivata prima di una funzione, un valore positivo della derivata prima significa che la funzione è crescente. Inoltre, poiché la derivata seconda è la derivata della derivata prima, un valore positivo della derivata seconda denota una derivata prima crescente (la rappresentazione grafica della funzione ha la concavità rivolta verso l'alto); un valore negativo una derivata prima decrescente (concavità rivolta verso il basso).

Vari teoremi dell'Analisi presuppongono la continuità di una funzione e delle sue derivate fino a un determinato ordine. Salvo differente indicazione, di volta in volta si assumeranno sempre soddisfatte tali condizioni, pur senza darne una dettagliata descrizione. Volendo evitare tali dettagliate specificazioni, funzioni di questo tipo vengono genericamente definite *regolari*.

Una funzione regolare può essere espressa mediante uno sviluppo in serie attorno a un punto x_0 del tipo (*serie di Taylor*):

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{d f}{d x} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f}{d x^2} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{d^3 f}{d x^3} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^3 + \dots =$$

$$f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f}{d x^n} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^n, \quad (4)$$

che, in un intorno del punto x_0 sufficientemente ristretto, può essere approssimato dalla (2). Si parla allora di sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine; per $x \rightarrow x_0$ la corrispondente variazione della funzione è il suo differenziale, espresso dalla (3), e l'errore ε di cui alla espressione (2) è dato dal resto della serie di Taylor che si ottiene sommando i termini di ordine $n \geq 2$ della (4).

Un operatore Φ definito su un dominio di una variabile w si dice *lineare* se, dati due valori qualunque della variabile, w_1 e w_2 , e una costante c , si ha:

$$\Phi(w_1 + w_2) = \Phi(w_1) + \Phi(w_2)$$

$$\Phi(cw) = c \Phi(w) \quad (5)$$

La derivata è un operatore lineare. Date due funzioni regolari, f e g , e una costante c , si ha infatti:

$$\frac{d(f + g)}{d x} = \frac{d f}{d x} + \frac{d g}{d x} \quad (6)$$

$$\frac{d(cf)}{d x} = c \frac{d f}{d x}. \quad (7)$$

Sono operatori lineari le derivate di qualunque ordine.

Inoltre, valgono le seguenti regole per l'esecuzione delle derivate del prodotto di due funzioni:

$$\frac{d(f \cdot g)}{dx} = g \frac{df}{dx} + f \frac{dg}{dx} \quad (8)$$

del rapporto di due funzioni, deducibile dalla (8):

$$\frac{d(f/g)}{dx} = \frac{g(df/dx) - f(dg/dx)}{g^2}$$

e di una funzione di funzione:

$$\frac{df[g(x)]}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} \quad (9)$$

Si omettono le espressioni delle derivate delle funzioni più comuni, per le quali si rimanda ai testi di Analisi. A titolo di esempio, si illustra il calcolo della derivata della funzione di funzione $z = 1/y = y^{-1}$, con $y = cx$, dove c è una costante. Ricordando che, data la funzione $z = f(y) = y^n$, si ha $z' = ny^{n-1}$, mentre $y' = c$, per la funzione $z(y(x))$ si ha pertanto:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{y} \right) = \frac{dy^{-1}}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{cx} \right) = \frac{d(cx)^{-1}}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = [(-1) \cdot y^{-2}] \cdot c = -\frac{c}{(cx)^2} = -\frac{1}{cx^2} \quad (10)$$

L'esempio (10) mostra che le sole regole (8) e (9) possono essere utilizzate per l'esecuzione della derivata sia del prodotto che del rapporto di due funzioni. In generale, sulla base di tali regole, può essere eseguita la derivazione di una funzione quantunque complessa.

1.1.2 Integrazione di funzioni di una variabile.

Una funzione di una variabile, $f(x)$, raffigurata in Figura 2, si dice *integrabile* nell'intervallo $[a, b]$, dove a e b sono due numeri fissi assegnati, se esiste, finito, il seguente limite (*integrale definito*):

$$\int_a^b f(\xi) d\xi = \lim_{\max\{\delta_i\} \rightarrow 0} \sum_i f(\xi_i) \delta_i \quad (11)$$

in cui ξ_i è un qualunque valore della variabile x interno al generico intervallo δ_i e la quantità $f(\xi_i)\delta_i$ rappresenta l'area della superficie rettangolare campita in tratteggio. L'integrale definito (11) rappresenta pertanto l'area sottesa fra la curva $y = f(x)$ e l'asse delle ascisse nell'intervallo $[a, b]$ (*dominio di integrazione*), campita uniformemente in Figura 2a.

Il valore numerico dell'integrale definito è dato da:

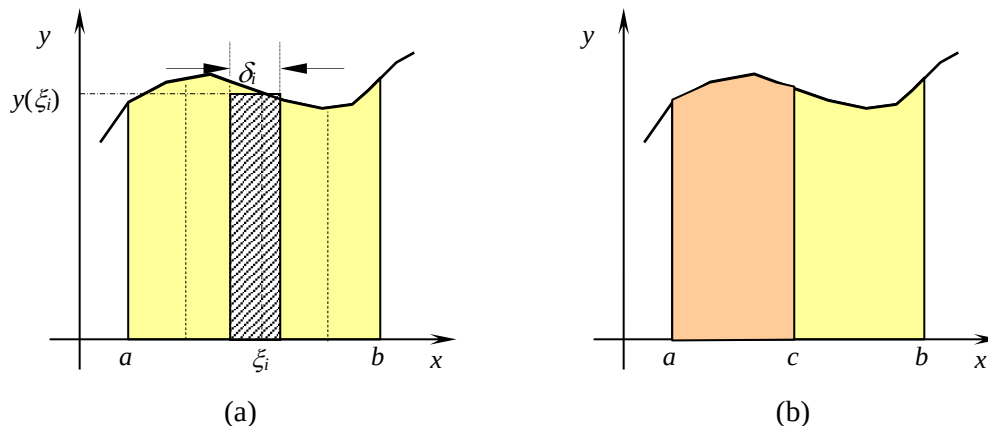


Figura 2. Rappresentazione grafica (a) della definizione di integrale definito e (b) della proprietà additiva dell'operatore.

$$\int_a^b f(\xi) d\xi = [\Theta(x)]_a^b = \Theta(b) - \Theta(a) ,$$

in cui $\Theta(x)$ è una *funzione primitiva* di $f(x)$, tale cioè che $f(x) = d\Theta(x)/dx$.

Data una funzione primitiva, sono tali anche tutte le funzioni che differiscono da essa per una costante. Tutte le primitive di una funzione f sono quindi date da:

$$F(x) + c = \int f(\xi) d\xi ,$$

detto *integrale indefinito* della funzione f , in cui $F(x)$ è la *funzione integrale* di f rispetto al punto x_0 :

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi , \quad (12)$$

in cui x_0 si intende fisso e x variabile. La derivata di una funzione integrale del tipo (12) è pertanto pari alla funzione integranda valutata in x , $f(x)$:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Sebbene l'operazione di integrazione risulti, generalmente, di meno agevole esecuzione rispetto all'operazione di derivazione, le condizioni per l'integrabilità di una funzione (cioè, per l'esistenza del limite (11)) sono *meno restrittive* di quelle per la sua derivabilità, non essendo richiesta, in particolare, la continuità della funzione.

L'integrale è un operatore lineare. Date due funzioni integrabili, f e g , e una costante c , si ha infatti:

$$\int_a^b [f(\xi) + g(\xi)] d\xi = \int_a^b f(\xi) d\xi + \int_a^b g(\xi) d\xi , \quad (13)$$

$$\int_a^b cf(\xi) d\xi = c \int_a^b f(\xi) d\xi .$$

L'integrale gode della *proprietà additiva*, secondo la quale, dato un valore $x = c$ appartenente all'intervallo $[a, b]$, si ha (vedi Figura 2b):

$$\int_a^b f(\xi) d\xi = \int_a^c f(\xi) d\xi + \int_c^b f(\xi) d\xi . \quad (14)$$

Inoltre, si ha:

$$\int_a^b f(\xi) d\xi = - \int_b^a f(\xi) d\xi \quad (15)$$

1.1.3 Equazioni differenziali ordinarie

Si definisce *equazione differenziale ordinaria di ordine n* una equazione contenente una funzione incognita $y(x)$ e sue derivate di ordine massimo n , del tipo:

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Le soluzioni (dette anche *integrali*) di una equazione differenziale di ordine n dipendono da n *costanti di integrazione* arbitrarie, determinabili mediante idonee *condizioni al contorno*. Il tipo più semplice

di equazioni differenziali ordinarie, che è anche l'unico cui verrà qui fatto riferimento, è del primo ordine *a variabili separabili*, nella forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{w(y)} . \quad (16)$$

Tale equazione viene risolta determinando gli integrali indefiniti ottenibili, per l'appunto, separando le variabili fra primo e secondo membro:

$$\int g(\xi) d\xi = \int w(\eta) d\eta .$$

Essendo gli integrali indefiniti determinati a meno di una costante, la soluzione dello specifico problema in oggetto rappresentato dalla (16) si ottiene imponendo una idonea condizione al contorno, anch'essa espressiva del particolare problema in esame, atta a determinare il valore della costante di integrazione.

1.1.4 Funzioni di più variabili. Derivate, differenziali e sviluppi in serie.

Si dice *derivata parziale* di una funzione di n variabili, $f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n)$, rispetto alla variabile x_i la derivata *ordinaria* – ossia, del tipo (1) – della funzione dell'unica variabile x_i che si ottiene per valori costanti delle variabili rimanenti:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{1_0}, \dots, x_{i-1_0}, x_{i_0}, x_{i+1_0}, \dots, x_{n_0}) = \lim_{x_i \rightarrow x_{i_0}} \frac{f(x_{1_0}, \dots, x_{i-1_0}, x_i, x_{i+1_0}, \dots, x_{n_0}) - f(x_{1_0}, \dots, x_{i-1_0}, x_{i_0}, x_{i+1_0}, \dots, x_{n_0})}{x_i - x_{i_0}} ,$$

Analogamente a quanto visto per il caso di una funzione di una variabile, sono definibili le derivate di ordine superiore, anche *miste*, risultanti cioè da derivazioni successive rispetto a variabili differenti, del tipo:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_i^{k_i} \dots \partial x_{n-1}^{k_{n-1}} \partial x_n^{k_n}} , \quad (17)$$

con $k_1 + k_2 + \dots + k_i + k_{n-1} + k_n = k$.

Nel caso di funzioni di più variabili, l'attributo di regolarità riguarda la continuità delle derivate parziali fino all'ordine che interessa per il caso specifico. In generale, nello scrivere una derivata di ordine superiore di una funzione di più variabili, la sequenza dei differenziali delle variabili indipendenti che figura a denominatore dell'espressione formale della derivata deve riflettere precisamente l'ordine delle derivazioni successive; cambiando l'ordine di derivazione può infatti ottenersi un risultato differente. Nel caso di una funzione regolare, invece, non è rilevante l'ordine nel quale si effettuano le derivazioni successive, avendosi, ad esempio:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} ,$$

e analoghe espressioni per le derivate di ordine superiore. La scrittura (17) costituisce pertanto una forma generale per le sole funzioni regolari.

Il *differenziale totale* di una funzione regolare f di n variabili corrispondente all'insieme degli n differenziali delle n variabili indipendenti, $dx_1, dx_2, \dots, dx_i, \dots, dx_{n-1}, dx_n$, è dato da:

$$d f = \frac{\partial f}{\partial x_1} d x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} d x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_i} d x_i + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} d x_{n-1} + \frac{\partial f}{\partial x_n} d x_n . \quad (18)$$

Tale insieme di differenziali delle variabili indipendenti identifica uno spostamento lungo una direzione, s , e secondo un certo verso, nello spazio delle stesse variabili. La corrispondente *derivata direzionale* della funzione f nella direzione s è data da:

$$\frac{d f}{d s} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{d x_1}{d s} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{d x_2}{d s} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{d x_i}{d s} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} \frac{d x_{n-1}}{d s} + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{d x_n}{d s} ,$$

in cui ds rappresenta lo spostamento nella direzione identificata dalle componenti lungo gli assi coordinati, $dx_1, dx_2, \dots, dx_i, \dots, dx_{n-1}, dx_n$. In un consueto sistema di riferimento ortogonale, nel quale si ha $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_i^2 + \dots + dx_{n-1}^2 + dx_n^2$ e $dx_i = ds \cos(x_i \wedge s)$, la derivata lungo la direzione s è esprimibile come:

$$\frac{d f}{d s} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cos(x_1 \wedge s) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_i} \cos(x_i \wedge s) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cos(x_n \wedge s) . \quad (19)$$

L'operatore derivata parziale gode delle medesime proprietà (6)-(9) della derivata ordinaria.

Si osservi che una funzione del tipo:

$$y = f(x_1(t), x_2(t), x_3(t), t)$$

è, in definitiva, una funzione della sola variabile indipendente t e se ne può quindi calcolare la corrispondente derivata ordinaria. Per chiarire come debba effettuarsi tale operazione, in considerazione della dipendenza da t anche attraverso le x_i , conviene considerare la funzione:

$$y = f(x_1(t_1), x_2(t_2), x_3(t_3), t) = g(t_1, t_2, t_3, t) .$$

A norma della (18), e ricordando la regola per il calcolo della derivata di una funzione di funzione, equazione (9), il differenziale della funzione è dato da:

$$d y = \frac{\partial g}{\partial t_1} d t_1 + \frac{\partial g}{\partial t_2} d t_2 + \frac{\partial g}{\partial t_3} d t_3 + \frac{\partial g}{\partial t} d t =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{d x_1}{d t_1} d t_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{d x_2}{d t_2} d t_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{d x_3}{d t_3} d t_3 + \frac{\partial f}{\partial t} d t .$$

Nel caso particolare in cui $t_1 = t_2 = t_3 = t$, che qui interessa, la cercata derivata ordinaria della funzione f rispetto alla variabile indipendente t è data quindi da:

$$\frac{d y}{d t} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{d x_1}{d t_1} \frac{d t_1}{d t} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{d x_2}{d t_2} \frac{d t_2}{d t} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{d x_3}{d t_3} \frac{d t_3}{d t} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{d t}{d t} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{d x_1}{d t} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{d x_2}{d t} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{d x_3}{d t} + \frac{\partial f}{\partial t} . \quad (20)$$

Anche le funzioni di più variabili sono sviluppabili in serie di Taylor, esprimibile nella forma sintetica, e simbolica:

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = f(x_{i_0}, \dots, x_{i_0}, \dots, x_{n_0}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - x_{i_0}) \right)^k \quad (21)$$

in cui la potenza della sommatoria fra parentesi va sviluppata analogamente alla potenza di un polinomio, intendendo però gli esponenti contenuti in tale sviluppo come ordini di derivazione per quanto riguarda le derivate rappresentate, nella (21), dal termine $\partial f / \partial x_i$. A titolo di esempio, lo sviluppo in serie di Taylor di una funzione di due variabili si scrive per esteso, fino al terzo ordine, come di seguito riportato:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = & f(x_{1_0}, x_{2_0}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - x_{1_0}) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2 - x_{2_0}) + \\ & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1 - x_{1_0})^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_2 - x_{2_0})^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1 - x_{1_0})(x_2 - x_{2_0}) \right] + \\ & \frac{1}{6} \left[\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}(x_1 - x_{1_0})^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}(x_2 - x_{2_0})^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}(x_1 - x_{1_0})^2(x_2 - x_{2_0}) + \right. \\ & \left. + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2}(x_1 - x_{1_0})(x_2 - x_{2_0})^2 \right] + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^2 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i - x_{i_0}) \right)^k \end{aligned}$$

Come per una funzione di una variabile, in un intorno del punto $(x_{1_0}, \dots, x_{i_0}, \dots, x_{n_0})$ sufficientemente ristretto una funzione di più variabili può essere approssimata mediante uno sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine. Per incrementi delle variabili indipendenti tendenti a zero, la variazione della funzione è data dal suo differenziale, espresso dalla (18).

1.1.5 Integrazione di funzioni di più variabili.

D'ora in avanti restringeremo il discorso allo spazio euclideo a tre dimensioni, nell'ambito del quale sono descrivibili i fenomeni fisici di interesse del corso, mediante gli strumenti della Meccanica classica (newtoniana). Inoltre, considereremo sempre gli usuali sistemi di riferimento ortogonali destri, le cui tre coordinate indicheremo con i simboli x_1, x_2, x_3 (Figura 3).

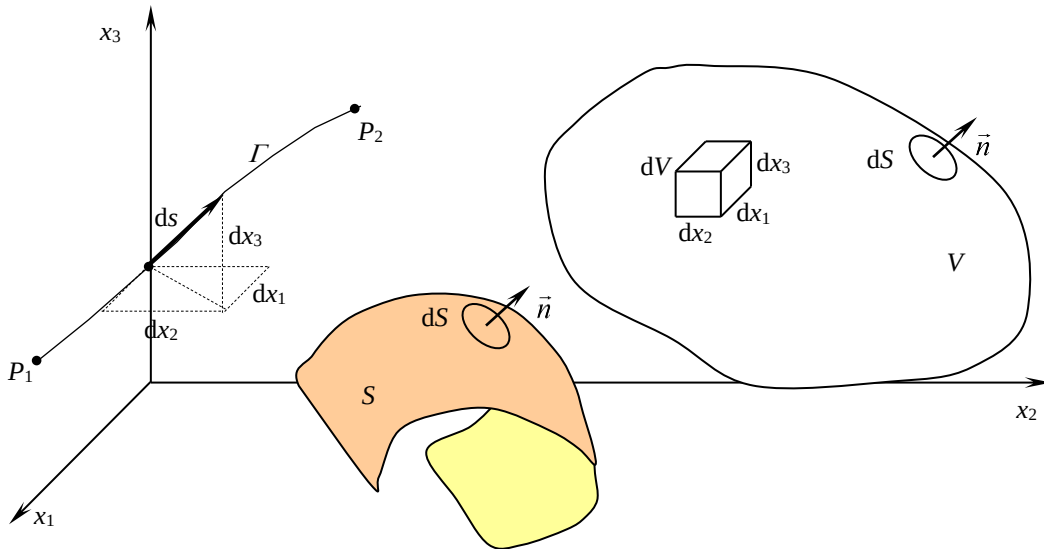


Figura 3. Schema rappresentativo degli integrali di linea, di superficie e di volume.

In tale spazio fisico si definiscono, in termini sostanzialmente analoghi a quelli espressi dalla (11), gli *integrali di linea*:

$$\int_{P_1}^{P_2} f(x_1, x_2, x_3) ds, \quad (22)$$

di superficie:

$$\int_S f(x_1, x_2, x_3) dS$$

e di volume:

$$\int_V f(x_1, x_2, x_3) dV.$$

Anche gli integrali di linea, di superficie e di volume possiedono le proprietà di linearità e additiva (13)-(14). In particolare, mentre per gli integrali di linea la proprietà additiva si esprime in modo formalmente identico alla (14), con riferimento a un punto P_0 intermedio a P_1 e P_2 nella curva Γ di Figura 3, più in generale essa può esprimersi nella forma:

$$\int_{I_U} f(x_1, x_2, x_3) dI = \int_{I_1} f(x_1, x_2, x_3) dI + \int_{I_2} f(x_1, x_2, x_3) dI + \dots + \int_{I_n} f(x_1, x_2, x_3) dI, \quad (23)$$

in cui il dominio di integrazione I_U è un insieme (curva, superficie o volume) dato dall'unione degli n sottoinsiemi I_i : $I_U = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_i \cup \dots \cup I_n$.

Di notevole importanza per le applicazioni nella fisica matematica sono le *formule di Gauss*. Data una funzione regolare $f(x_1, x_2, x_3)$, si ha:

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_i} dV = \int_S f \cos(x_i \wedge n) dS, \quad (24)$$

per una qualunque delle tre coordinate, identificata dal pedice i , in cui S è la superficie di contorno del volume V , n rappresenta la direzione di un segmento orientato di lunghezza unitaria (*versore*), localmente normale alla superficie S – ossia, normale, punto per punto, alla corrispondente areola dS – e rivolto verso l'esterno, detto *normale esterna* e indicato con il simbolo $\vec{n}$.

Nel prosieguo, verrà sempre adottata la convenzione di considerare la normale esterna a una data faccia di una superficie (adottare la convenzione opposta comporterebbe un cambiamento di segno a secondo membro della (24)¹). Si osservi che, qualora si consideri una superficie chiusa, come nelle formule di Gauss, cosa si intenda con l'attributo "esterna" riferito alla normale non richiede ulteriori precisazioni, perché reso evidente dalla presenza del volume racchiuso dalla superficie: la normale è rivolta verso l'esterno del volume. Quando invece si tratterà di integrali estesi a superfici non chiuse, occorrerà precisare (e avere chiaro) a quale delle due facce della superficie ci si stia riferendo (per esempio, la faccia di colore più scuro della superficie riportata in Figura 3), la normale esterna essendo quel versore che, considerato come spostamento di un osservatore, lascia alla vista dell'osservatore la faccia prescelta.

1.2 Richiami di Analisi Vettoriale e Tensoriale

1.2.1 Generalità

Nell'ambito della meccanica newtoniana, alla quale faremo esclusivo riferimento, le grandezze fisiche sono esprimibili mediante enti geometrici di vario tipo nello spazio euclideo a tre dimensioni.

Uno *scalare* è una grandezza caratterizzata da un solo numero reale. Esempi di grandezze fisiche scalari sono la pressione, la densità e la concentrazione di un soluto.

¹ Il Citrini-Nosedà ed il Marchi-Rubatta utilizzano la convenzione di normale interna.

Un *vettore* è un segmento orientato, caratterizzato pertanto da un *modulo* (la lunghezza del segmento), una direzione e un verso (Figura 4a). Un vettore può essere individuato compiutamente dalle sue proiezioni sugli assi coordinati (*le componenti*, al femminile), quindi, nello spazio euclideo a tre dimensioni, da una terna ordinata di numeri reali. Esempi di grandezze fisiche vettoriali sono la velocità, l'accelerazione e la forza. Nel prosieguo verranno utilizzati: per i vettori la notazione con una freccia in soprassegno del simbolo adottato per la grandezza ($\vec{u}$ in Figura 4), per il modulo il simbolo di valore assoluto ($|\vec{u}|$), o anche il solo simbolo della grandezza (u), e per le sue componenti il simbolo attribuito alla grandezza con il pedice dell'asse coordinato corrispondente (u_i , $i = 1, 2, 3$). Sebbene i vettori siano sempre rappresentati nello spazio fisico (si è parlato infatti di "lunghezza del segmento" a proposito del modulo), a seconda di quale tipo di grandezza fisica venga in tal modo rappresentata, stabilita una certa scala di rappresentazione grafica della grandezza (p.es.: $1\text{ cm} \equiv 1\text{ ms}^{-1}$ per le velocità), il modulo del vettore è in effetti espresso nelle unità di misura della grandezza in questione. Generalmente, è anche rilevante la posizione del vettore nello spazio, ossia, il suo *punto di applicazione*, P . La retta contenente un vettore costituisce la sua *retta d'azione*. Talora in luogo del modulo del vettore si parla di *intensità* della grandezza fisica rappresentata dal vettore.

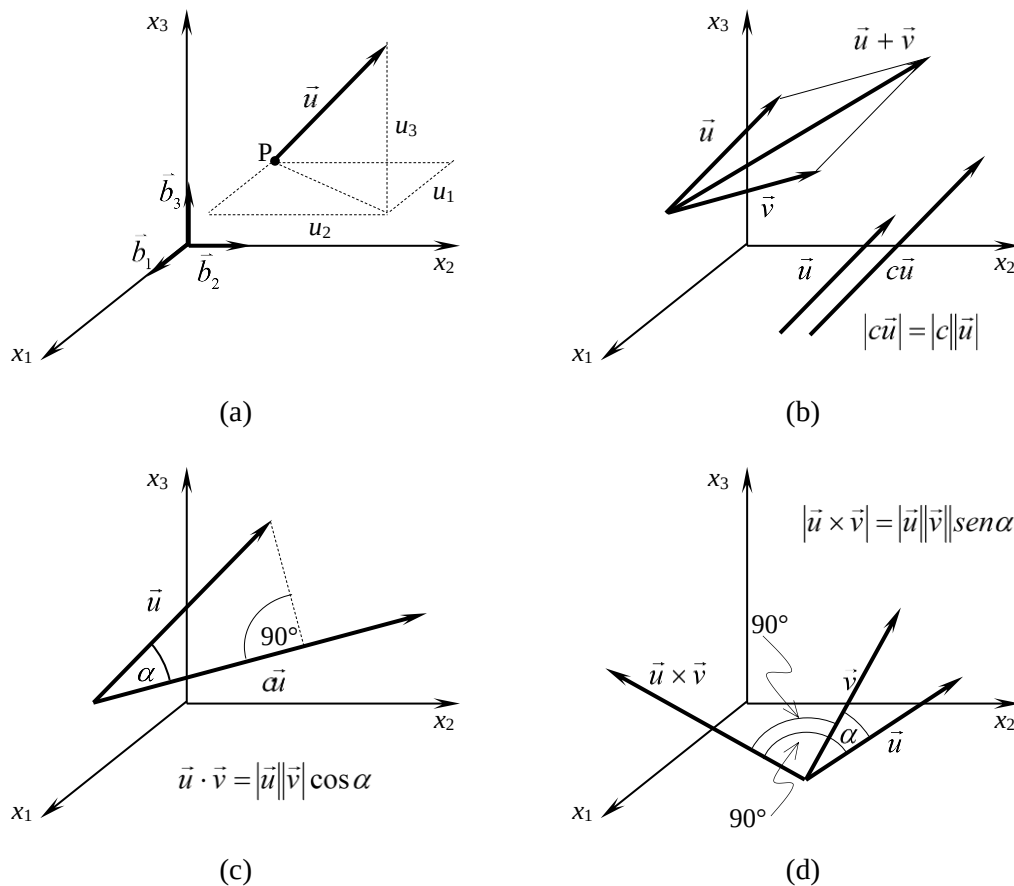


Figura 4. Schemi illustrativi di: (a) definizione di vettore; (b) somma di due vettori e prodotto di un vettore per uno scalare; (c) prodotto scalare; (d) prodotto vettoriale.

1.2.2 Operazioni fra vettori

Si definiscono le seguenti operazioni fra vettori:

- *prodotto di un vettore per uno scalare* (Figura 4b): si indica con la notazione dell'algebra, accostando i simboli del vettore e dello scalare senza segni ($c\vec{u}$); il risultato è dato da un vettore avente la stessa direzione del vettore originario, verso concorde o discorde da quello del vettore originario a seconda che lo scalare sia positivo o negativo rispettivamente, modulo pari al modulo

del vettore originario moltiplicato per il valore assoluto (o modulo) dello scalare. Nel caso $c = -1$, $c\vec{u} = -\vec{u}$ è il vettore opposto a $\vec{u}$, avente uguali direzione e modulo, ma verso opposto. Il prodotto di uno scalare per un vettore gode della proprietà distributiva rispetto alla somma di vettori ($c(\vec{u} + \vec{v}) = c\vec{u} + c\vec{v}$);

- **somma** (Figura 4b): la somma di due vettori si indica con il segno $+$ ($\vec{u} + \vec{v}$) e si esegue con la regola del parallelogramma, rappresentata in Figura 4b. Si osservi che l'operazione così definita equivale a mettere i due vettori uno in coda all'altro e a tracciare il vettore somma (detto anche vettore *risultante*) dalla coda alla punta estreme. Tale modo di procedere è senz'altro consigliabile, da un punto di vista pratico, qualora si debba eseguire la somma di più di due vettori, nel qual caso il tracciamento successivo dei vari parallelogrammi necessari renderebbe il disegno alquanto confuso. La somma gode delle proprietà commutativa ($\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$) e associativa ($\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$). La differenza di due vettori si ottiene dalla somma del primo con l'opposto del secondo;
- **prodotto scalare o prodotto interno** (Figura 4c): si indica con un punto interposto fra i vettori operandi ($\vec{u} \cdot \vec{v}$); ha per risultato uno scalare dato dal prodotto dei moduli dei vettori operandi per il coseno dell'angolo compreso fra i vettori. Conseguenza da tale definizione che il prodotto scalare di due vettori ortogonali sia nullo, e viceversa (il viceversa vale sempre, ovviamente, a meno del caso banale in cui uno dei due vettori operandi sia esso stesso nullo). Il prodotto scalare gode delle proprietà commutativa e distributiva rispetto alla somma. Non ha invece senso parlare di proprietà associativa, in quanto il risultato del prodotto scalare di due vettori, essendo uno scalare, non è più moltiplicabile scalarmente con un terzo vettore;
- **prodotto vettoriale o prodotto esterno** (Figura 4d): si indica con il segno $\times$ ($\vec{u} \times \vec{v}$)²; il risultato è un vettore ortogonale ai vettori operandi (quindi, al piano formato da tali due vettori), di modulo pari al prodotto dei moduli dei vettori operandi per il seno dell'angolo compreso fra i vettori e verso tale che un osservatore avente la testa sulla punta del vettore prodotto vede il primo vettore operando sovrapporsi al secondo ruotando in senso antiorario di un angolo inferiore a 180° (come il terzo asse, x_3 , della usuale *terna destra*, di cui il primo e il secondo vettore operando sono, nello stesso ordine, i primi due assi, x_1 e x_2). Il prodotto vettoriale non gode della proprietà commutativa, essendo $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ (proprietà *alternante*).

Da quanto sopra riportato, la componente (scalare) di un vettore $\vec{u}$ lungo una direzione orientata (dotata di un verso) s può ottenersi come prodotto scalare fra il vettore dato e un vettore parallelo ed equiverso alla direzione orientata data, di modulo unitario (*versore*), che indicheremo con $\vec{i}_s$.

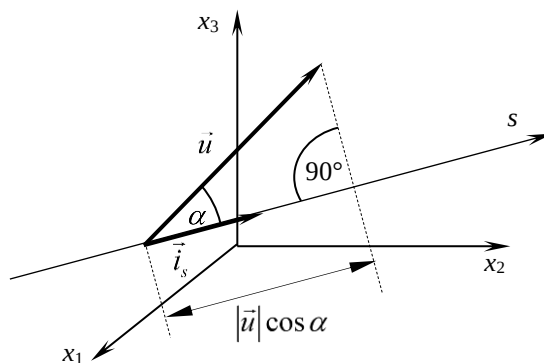


Figura 5. Componente di un vettore lungo una direzione orientata.

² In alcuni testi si può trovare il simbolo $\times$ utilizzato per il prodotto scalare o il simbolo $\wedge$ per il prodotto vettoriale. Il Cenedese utilizza la simbologia di queste dispense; il Marchi-Rubatta utilizza i simboli $\cdot$ e $\wedge$ rispettivamente per prodotto scalare e prodotto vettoriale; nel Citrini-Nosedà non compaiono prodotti vettoriali; prodotti scalari per il calcolo di componenti normali sono espressi nella forma cartesiana (29).

Indicando con u_s tale componente, si ha infatti (Figura 5):

$$u_s = \vec{u} \cdot \vec{i}_s = |\vec{u}| |\vec{i}_s| \cos \alpha = |\vec{u}| \cos \alpha . \quad (25)$$

Tale componente sarà positiva per un angolo compreso fra il vettore e il versore inferiore a 90° (come nell'esempio di Figura 5), negativa per un angolo maggiore di 90° , nulla, come s'è detto, se il vettore è ortogonale alla direzione s . In particolare, detti $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ i versori degli assi coordinati (Figura 4a), le componenti di un vettore $\vec{u}$ su tali assi sono date da:

$$u_i = \vec{u} \cdot \vec{b}_i$$

per $i = 1, 2, 3$. Sulla base della definizione di somma di vettori, il vettore $\vec{u}$ è esprimibile come:

$$\vec{u} = u_1 \vec{b}_1 + u_2 \vec{b}_2 + u_3 \vec{b}_3 , \quad (26)$$

in cui ciascuno dei tre vettori addendi nella (26) è detto anch'esso componente del vettore $\vec{u}$, ma al maschile (un componente, il componente, etc...). La (26) può quindi risciversi in termini di vettori componenti come:

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 . \quad (27)$$

Dalla (26) discende anche che la somma di due vettori sia un vettore avente per componenti la somma delle (e dei) componenti dei due vettori sommati, mentre il prodotto di un vettore per uno scalare ha componenti date (dati) dalle (dai) componenti del vettore originario, moltiplicate (moltiplicati) per lo scalare. In una terna ortogonale quale quella adottata, il modulo di un vettore può scriversi in funzione delle sue componenti come:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} .$$

Utilizzando la proprietà distributiva rispetto alla somma, il prodotto scalare tra due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ si può scrivere:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1 \vec{b}_1 + u_2 \vec{b}_2 + u_3 \vec{b}_3) \cdot (v_1 \vec{b}_1 + v_2 \vec{b}_2 + v_3 \vec{b}_3) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 , \quad (28)$$

perché il prodotto scalare di due versori vale 1 se si tratta di versori uguali, mentre è nullo se si tratta di versori differenti, essendo essi ortogonali. L'espressione finale dello sviluppo (28) costituisce la *forma cartesiana* del prodotto scalare.

Per quanto finora detto, la componente s_i di un versore generico $\vec{i}_s$ lungo uno degli assi coordinati, indicato genericamente dal pedice i , è data da $s_i = \vec{i}_s \cdot \vec{b}_i = \cos(x_i \wedge s)$, cioè, dal coseno dell'angolo fra la direzione orientata e l'asse prescelto (*coseno direttore*). Pertanto, la componente di un vettore $\vec{u}$ lungo una direzione orientata s può esprimersi, attraverso la forma cartesiana del prodotto scalare, come:

$$u_s = u_1 \cos(x_1 \wedge s) + u_2 \cos(x_2 \wedge s) + u_3 \cos(x_3 \wedge s) = u_1 s_1 + u_2 s_2 + u_3 s_3 . \quad (29)$$

La forma cartesiana del prodotto vettoriale si ottiene risolvendo il seguente determinante:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \vec{b}_1 (u_2 v_3 - u_3 v_2) + \vec{b}_2 (u_3 v_1 - u_1 v_3) + \vec{b}_3 (u_1 v_2 - u_2 v_1) .$$

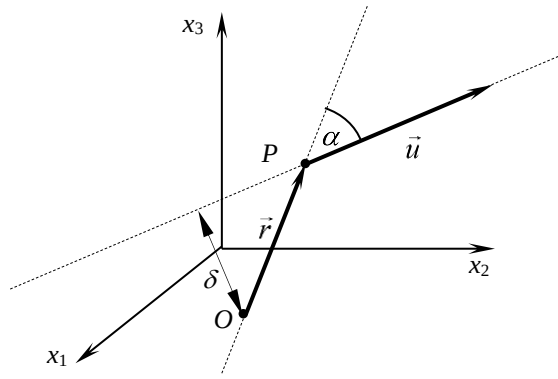


Figura 6. Schema illustrativo del momento di un vettore rispetto a un punto.

Dato un vettore $\vec{u}$ applicato in un punto dello spazio P (Figura 6), si dice *momento del vettore $\vec{u}$ rispetto a un punto O* , detto *polo*, il prodotto vettoriale:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{u} , \quad (30)$$

in cui $\vec{r}$ è il vettore congiungente i punti O e P , orientato da O verso P . Il vettore momento è normale al piano contenente la retta d'azione della forza e il polo. La somma dei momenti di più vettori rispetto a uno stesso polo O si dice *momento risultante* del sistema di vettori. Il momento di un vettore rispetto a un punto è invariante per scorrimento del vettore lungo la propria retta d'azione. Infatti, il modulo del vettore prodotto rimane invariato poiché, per qualunque posizione del vettore lungo la propria retta d'azione, risulta $|\vec{r}| \sin \alpha = \delta$, dove δ (detto *braccio del vettore* rispetto al punto O) è la distanza di O dalla retta d'azione del vettore. Inoltre, l'angolo rimane compreso fra i valori 0° e 180° , per cui rimane invariato anche il verso del vettore prodotto.

Nelle formule (26), (28) e (29) sono presenti sommatorie di tre termini caratterizzati dai tre valori dei pedici identificativi degli assi coordinati, ciascuno dei quali, inoltre, è costituito dal prodotto di quantità caratterizzate dallo stesso pedice. Tale circostanza è abbastanza frequente in vari campi della fisica matematica – in particolare, nell'Idraulica e nella Meccanica dei Fluidi – il che ha suggerito l'introduzione di una notazione sintetica basata sull'uso simbolico dei pedici (indicati cioè come i, j , etc...) secondo la seguente convenzione (*regola della sommatoria o di Einstein*): un termine di una espressione in cui compaia un pedice ripetuto ha il significato della somma dei tre termini ottenuti da quello in questione al variare del pedice ripetuto sui tre valori 1, 2, 3. A titolo di esempio, secondo tale convenzione le formule (26), (28) e (29) si scriverebbero:

$$\vec{u} = u_i \vec{b}_i$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_i v_i \quad (31)$$

$$u_s = u_i \cos(x_i \wedge s) = u_i s_i \quad (32)$$

Si osservi che la regola ha senso quando si parli di pedici che possono assumere più di un valore: in quanto segue, esclusivamente i pedici identificativi degli assi coordinati. Nel caso di un termine con un pedice ripetuto identificativo di una particolare, anche se generica, direzione s , avendo tale pedice un valore univoco, la regola non si applica (né avrebbe senso farlo). Qualora però occorresse considerare una e una sola generica quantità contenente pedici ripetuti, relativa a un unico, anche se generico, valore del pedice, ancorché espresso simbolicamente (i, j , etc...), per esprimere che non si intende di dover eseguire la sommatoria sui tre valori i pedici verranno sottolineati. Ad esempio, il generico componente del vettore $\vec{u}$ di cui alle formule (26) e (27) si scriverà:

$$\vec{u}_i = u_i \vec{b}_i$$

L'uso della regola di Einstein si giustifica, in pratica, col fatto che la necessità di eseguire la sommatoria è molto più frequente dell'indicazione di valori simbolici a valore unico del pedice.

1.2.3 Tensori

L'impostazione di alcuni problemi fisici porta a stabilire una corrispondenza fra il vettore rappresentativo di una certa grandezza e le direzioni orientate dello spazio, identificate da un versore variabile $\vec{n}$, secondo un'espressione del tipo:

$$\vec{\tau}_n = \vec{\tau}_1 \cos(x_1 \wedge n) + \vec{\tau}_2 \cos(x_2 \wedge n) + \vec{\tau}_3 \cos(x_3 \wedge n), \quad (33)$$

ovvero, nella notazione sintetica di Einstein:

$$\vec{\tau}_n = \vec{\tau}_j \cos(x_j \wedge n), \quad (34)$$

ove il pedice n del vettore a primo membro simboleggia la corrispondenza con le direzioni orientate dello spazio e i tre vettori a secondo membro rappresentano vettori associati alle direzioni orientate degli assi coordinati. Si osservi che tali vettori non hanno niente a che vedere con i componenti del vettore $\vec{\tau}_n$, né hanno una particolare direzione legata, in qualche modo, all'asse coordinato cui sono associati. Pertanto, una volta assegnati i vettori $\vec{\tau}_j$ ($j = 1, 2, 3$), a norma della (33) o (34), a ciascuna direzione orientata dello spazio, identificata dal versore $\vec{n}$, corrisponde un ben preciso valore del vettore $\vec{\tau}_n$. Si osservi l'analogia fra le espressioni della componente di un vettore lungo una direzione orientata (29) o (32) e le espressioni (33) o (34) rispettivamente. Così come, assegnato un vettore $\vec{u}$ mediante assegnazione delle sue tre componenti scalari, a ciascuna direzione orientata dello spazio è associato uno scalare dato dalla componente del vettore lungo tale direzione, così, assegnato questo nuovo ente matematico mediante assegnazione delle sue tre componenti vettoriali, a ciascuna direzione orientata dello spazio è associato un vettore, in entrambi i casi mediante combinazione lineare delle componenti (scalari per il vettore; vettoriali per questo nuovo ente) tramite i coseni direttori del versore identificativo della direzione orientata. Un ente matematico di questo tipo è detto *tensore* e verrà indicato con una doppia sottolineatura del simbolo prescelto; nel caso specifico: $\underline{\underline{\tau}}$.

Poiché ciascuna delle tre componenti vettoriali è definita mediante assegnazione delle sue tre componenti scalari, complessivamente un tensore è definito compiutamente assegnandone le sue nove componenti scalari. Tali componenti sono identificate simbolicamente come τ_{ij} , rappresentante la componente scalare nella direzione dell'asse x_i della componente vettoriale associata all'asse x_j , $\vec{\tau}_j$ ³.

Le componenti del vettore $\vec{\tau}_n$ si ottengono proiettandolo sugli assi coordinati, eseguendone il prodotto scalare con i versori degli assi coordinati. La generica componente del vettore $\vec{\tau}_n$ lungo l'asse x_i , indicata, per la convenzione assunta per gli indici, con τ_{in} , è data pertanto da:

$$\begin{aligned} \tau_{in} = \vec{\tau}_n \cdot \vec{b}_i &= \vec{\tau}_1 \cdot \vec{b}_i \cos(x_1 \wedge n) + \vec{\tau}_2 \cdot \vec{b}_i \cos(x_2 \wedge n) + \vec{\tau}_3 \cdot \vec{b}_i \cos(x_3 \wedge n) = \\ &= \tau_{i1} \cos(x_1 \wedge n) + \tau_{i2} \cos(x_2 \wedge n) + \tau_{i3} \cos(x_3 \wedge n) \end{aligned},$$

avendo applicato la proprietà distributiva del prodotto scalare rispetto alla somma di vettori. In termini di notazione sintetica e indicando i coseni direttori come componenti del versore $\vec{n}$, si ha:

$$\tau_{in} = \tau_{ij} n_j.$$

Tale scrittura consente di ottenere il valore di una qualunque delle tre componenti, relativa al corrispondente valore del pedice i , che assume, in quanto non ripetuto, sempre un valore alla volta

³ Il Citrini-Noseda ed il Marchi-Rubatta utilizzano la convenzione opposta.

(o 1, o 2, o 3). L'operazione si può eseguire simultaneamente per tutte e tre le componenti del vettore $\vec{\tau}_n$ mediante il seguente *prodotto matrice per vettore* secondo le regole dell'algebra matriciale (prodotto righe per colonne):

$$\begin{pmatrix} \tau_{1n} \\ \tau_{2n} \\ \tau_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11}n_1 + \tau_{12}n_2 + \tau_{13}n_3 \\ \tau_{21}n_1 + \tau_{22}n_2 + \tau_{23}n_3 \\ \tau_{31}n_1 + \tau_{32}n_2 + \tau_{33}n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{1j}n_j \\ \tau_{2j}n_j \\ \tau_{3j}n_j \end{pmatrix}, \quad (35)$$

ove la matrice quadrata a secondo membro è associata al tensore $\underline{\underline{\tau}}$ e ne costituisce la rappresentazione in termini delle sue nove componenti scalari, le quali, come si è detto, lo identificano compiutamente. Si osservi che i vettori colonna estraibili da tale matrice corrispondono alle componenti vettoriali del tensore. La stessa operazione si esprime, nella notazione vettoriale:

$$\vec{\tau}_n = \underline{\underline{\tau}} \vec{n},$$

la quale si scrive senza alcun segno di operazione fra i termini a secondo membro.

Un tensore quale quello considerato in precedenza è detto, più precisamente, tensore di ordine 2, in quanto caratterizzato da due indici. Più in generale, si possono definire tensori di ordine d qualunque, caratterizzati, nello spazio a tre dimensioni, da 3^d componenti; in particolare, i vettori sono tensori di ordine 1 e gli scalari tensori di ordine 0.

L'associazione di un tensore di ordine 2 a una matrice quadrata comporta l'adozione, per i tensori, della terminologia usualmente utilizzata per le matrici. Un tensore *simmetrico* è quindi rappresentato da una matrice simmetrica (tale cioè che $\tau_{ij} = \tau_{ji}$); un tensore *antisimmetrico* da una matrice antisimmetrica ($\tau_{ij} = -\tau_{ji}$); un tensore *trasposto* di un altro, indicato con un apice T, ha una matrice che si ottiene dalla matrice del tensore originario scambiando le righe con le colonne ($\tau^T_{ij} = \tau_{ji}$); la *traccia* di un tensore è la traccia della matrice associata, data dalla somma degli elementi della *diagonale* ($tr(\underline{\underline{\tau}}) = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = \tau_{ii}$). Un tensore a traccia nulla è detto *deviatore*. Nel prosieguo verranno utilizzate le seguenti operazioni riguardanti tensori e/o matrici:

- *prodotto di un tensore per uno scalare*: il risultato è un tensore associato a una matrice avente per elementi gli elementi della matrice originaria moltiplicati per lo scalare: $(c\underline{\underline{\tau}})_{ij} = c\tau_{ij}$;
- *somma di due tensori*: è un tensore associato alla matrice somma delle matrici dei due tensori, i cui elementi sono la somma degli elementi corrispondenti delle due matrici: $(\underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}})_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$;
- *prodotto di due tensori*: indicato con $\underline{\underline{a}}\underline{\underline{b}}$, può effettuarsi, secondo la regola del prodotto righe per colonne, se $\underline{\underline{a}}$ ha tante colonne quante sono le righe di $\underline{\underline{b}}$; per esempio, il prodotto matrice per vettore (35). Il risultato è una matrice con tante righe quante quelle della prima matrice e tante colonne quante quelle della seconda matrice: mentre il risultato del prodotto (35) è un vettore, il prodotto di due matrici quadrate 3×3 è un'altra matrice quadrata 3×3 . La matrice che moltiplicata per un'altra matrice quadrata la lascia inalterata è la *matrice* (o tensore) *unità* (o *identità*):

$$\underline{\underline{I}} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

di componenti δ_{ij} (*simbolo di Kronecker*), con $\delta_{ij} = 1$ per $i = j$; $\delta_{ij} = 0$ per $i \neq j$. Si dice *isotropo* o *sferico* un tensore del tipo $c\underline{\underline{I}}$, dove c è uno scalare, avente elementi non nulli e tutti uguali fra loro soltanto

sulla diagonale. Nel prosieguo verranno considerati unicamente prodotti matrice per vettore, mentre il tensore unità verrà utilizzato unicamente nell'espressione di un tensore isotropo.

L'operazione di trasposizione trasforma un vettore colonna in un vettore riga, e viceversa:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Si ricorda che le operazioni fra scalari, vettori e tensori in forma puramente matriciale sottintendono sempre la specificazione del sistema di riferimento adottato, ossia, adottando la terminologia della teoria degli spazi vettoriali, della *base* dello spazio vettoriale tridimensionale costituita dalla terna di versori $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Detta teoria insegna come modificare le rappresentazioni matriciali in relazione a cambiamenti del sistema di riferimento mediante semplici operazioni, che qui tuttavia non interessa richiamare in quanto non utilizzate nel prosieguo. Le notazioni vettoriale e matriciale sono quindi equivalenti; tale equivalenza è espressa, più correttamente, dal simbolo $\equiv$ (p.es.: $\vec{u} \equiv (u_1 \ u_2 \ u_3)^T$) piuttosto che dal simbolo di uguaglianza, $=$. Di norma la rappresentazione matriciale utilizzata per un vettore sarà quella del vettore colonna.

1.2.4 Campi scalari, vettoriali e tensoriali. Operatori differenziali.

Una regione dello spazio nella quale sia definibile, punto per punto, ed eventualmente in funzione del tempo, una certa grandezza scalare, vettoriale o tensoriale, si dice *campo scalare*, *vettoriale* o *tensoriale* rispettivamente. Nel caso del campo di uno scalare a , ad esempio, si utilizzerà la notazione:

$$a(x_1, x_2, x_3, t), \quad (36)$$

ovvero, considerando che le tre coordinate del punto possono essere riguardate come componenti di un *vettore posizione* $\vec{x}$ applicato nell'origine del sistema di riferimento, la notazione:

$$a(\vec{x}, t), \quad (37)$$

e analogamente per un campo vettoriale o tensoriale. Come risultato dell'impostazione di determinati problemi fisici si perviene alla definizione di vari operatori di tipo differenziale applicati a campi scalari, vettoriali o tensoriali dotati di opportune proprietà di regolarità. Definiamo dapprima:

- *gradiente di uno scalare*: si dice gradiente di uno scalare a un vettore avente per componenti le derivate parziali di a rispetto alle coordinate omologhe:

$$\text{grad}(a) = \frac{\partial a}{\partial x_1} \vec{b}_1 + \frac{\partial a}{\partial x_2} \vec{b}_2 + \frac{\partial a}{\partial x_3} \vec{b}_3 = \frac{\partial a}{\partial x_i} \vec{b}_i \equiv \begin{pmatrix} \partial a / \partial x_1 \\ \partial a / \partial x_2 \\ \partial a / \partial x_3 \end{pmatrix}; \quad (38)$$

- *divergenza di un vettore*: si dice divergenza di un vettore $\vec{u}$ uno scalare dato dalla somma delle derivate parziali delle componenti del vettore rispetto alle coordinate omologhe:

$$\text{div}(\vec{u}) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

In luogo dei simboli *grad* e *div*, nel prosieguo verrà utilizzata una simbologia basata sulla definizione del vettore, puramente simbolico, denominato *nabla* e indicato con il simbolo ∇ , avente per componenti gli operatori di derivata parziale rispetto alle coordinate omologhe:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} \vec{b}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \vec{b}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \vec{b}_3 = \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{b}_i \equiv \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix}.$$

Sulla base di tale definizione, il gradiente di uno scalare viene indicato con ∇a , mentre la divergenza di un vettore viene espressa dal prodotto scalare $\nabla \cdot \vec{u}$. Si osservi come, nell'ambito della generalizzazione del concetto di tensore indicata in precedenza, l'operatore gradiente fornisca un tensore di grado superiore a quello cui l'operatore è stato applicato (si passa da uno scalare a un vettore), mentre la divergenza produce un tensore di grado inferiore (da vettore a scalare). Per l'analogia fra le componenti scalari di un vettore e le componenti vettoriali di un tensore, si definiscono anche:

- *divergenza di un tensore*: fornisce un vettore dato da:

$$\text{div}(\underline{\underline{\tau}}) = \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} = \frac{\partial \vec{\tau}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \vec{\tau}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \vec{\tau}_3}{\partial x_3} = \frac{\partial \vec{\tau}_i}{\partial x_i} \equiv \begin{pmatrix} \partial \tau_{11}/\partial x_1 + \partial \tau_{12}/\partial x_2 + \partial \tau_{13}/\partial x_3 \\ \partial \tau_{21}/\partial x_1 + \partial \tau_{22}/\partial x_2 + \partial \tau_{23}/\partial x_3 \\ \partial \tau_{31}/\partial x_1 + \partial \tau_{32}/\partial x_2 + \partial \tau_{33}/\partial x_3 \end{pmatrix},$$

l'espressione della generica componente (i -esima) del quale è data, nella notazione sintetica, da:

$$(\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}})_i = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j},$$

e per il quale, come si è visto, si utilizza la medesima notazione della divergenza di un vettore, con il punto interposto fra il vettore simbolico nabla e il tensore;

- *gradiente di un vettore*: fornisce un tensore dato da:

$$\nabla \vec{u} \equiv \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial u_1/\partial x_1 & \partial u_2/\partial x_1 & \partial u_3/\partial x_1 \\ \partial u_1/\partial x_2 & \partial u_2/\partial x_2 & \partial u_3/\partial x_2 \\ \partial u_1/\partial x_3 & \partial u_2/\partial x_3 & \partial u_3/\partial x_3 \end{pmatrix},$$

l'espressione della generica componente scalare (i -esima riga, j -esima colonna) del quale è data da:

$$(\nabla \vec{u})_{ij} = \partial u_j / \partial x_i.$$

Le formule di Gauss (24) possono essere utilizzate per dedurre il *Teorema della divergenza*. Applicando le formule di Gauss a tre integrali di volume contenenti ciascuno la derivata di una componente di un vettore $\vec{u}$ rispetto alla coordinata omologa e sommando, si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla \cdot \vec{u}) dV &= \int_V \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) dV = \int_V \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dV + \int_V \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dV + \int_V \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dV = \\ &= \int_S u_1 \cos(x_1 \wedge n) dS + \int_S u_2 \cos(x_2 \wedge n) dS + \int_S u_3 \cos(x_3 \wedge n) dS = \\ &= \int_S [u_1 \cos(x_1 \wedge n) + u_2 \cos(x_2 \wedge n) + u_3 \cos(x_3 \wedge n)] dS = \int_S (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS, \end{aligned}$$

ossia, in forma vettoriale:

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{u}) dV = \int_S (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS , \quad (39)$$

ovvero, nella notazione per componenti:

$$\int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV = \int_S u_i n_i dS ,$$

avendo utilizzato il simbolo n_i per le componenti della normale in luogo della espressione esplicita dei coseni direttori, come più spesso faremo d'ora in avanti.

Nella formulazione del Teorema della divergenza su riportata, a secondo membro compare l'integrale di superficie del prodotto scalare fra il vettore $\vec{u}$ e la normale (esterna) alla superficie $\vec{n}$. Dalle formule di Gauss può dedursi anche una formulazione in cui non compare un prodotto scalare:

$$\int_V \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dV = \int_S \tau_{ij} n_j dS ,$$

la cui forma vettoriale è:

$$\int_V (\nabla \cdot \underline{\tau}) dV = \int_S (\underline{\tau} \cdot \vec{n}) dS ,$$

in cui nell'integrale di superficie a secondo membro figura, come preannunciato, non un prodotto scalare, ma un prodotto matrice per vettore, mentre a primo membro compare l'integrale di volume della divergenza di un tensore. Si tratta quindi dell'estensione del Teorema della divergenza al caso della divergenza di un tensore.

L'introduzione del vettore simbolico nabla consente anche di dedurre espressioni alternative per il differenziale e per la derivata direzionale di una funzione $f(x_1, x_2, x_3)$, formule (18) e (19) rispettivamente. detto $d\vec{s} \equiv (dx_1 \ dx_2 \ dx_3)^T$ un vettore spostamento elementare e $\vec{i}_s \equiv (s_1 \ s_2 \ s_3)^T = (\cos(x_1 \wedge s) \ \cos(x_2 \wedge s) \ \cos(x_3 \wedge s))^T$ il corrispondente versore, il differenziale della funzione può scriversi come:

$$df = \nabla f \cdot d\vec{s} = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i , \quad (40)$$

e la derivata direzionale:

$$\frac{df}{ds} = \nabla f \cdot \vec{i}_s = \frac{\partial f}{\partial x_1} s_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} s_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} s_3 = \frac{\partial f}{\partial x_i} s_i .$$

Da tali espressioni si evince anche che il gradiente di una funzione scalare $f(x_1, x_2, x_3)$ è punto per punto perpendicolare alle superfici ove f è costante. Infatti, considerati un punto dello spazio, la superficie ove $f = \text{cost}$ passante per quel punto e uno spostamento elementare $d\vec{s}$ su tale superficie – quindi, sul piano tangente alla superficie nel punto considerato – deve ovviamente risultare nullo il differenziale di f ; poiché tuttavia questo è espresso attraverso il prodotto scalare (40), i vettori ∇f e $d\vec{s}$ devono necessariamente essere ortogonali (se entrambi non nulli, naturalmente). Il gradiente è rivolto nel verso delle f crescenti perché il differenziale corrispondente a uno spostamento nel verso del gradiente è positivo, essendo nullo l'angolo fra ∇f e $d\vec{s}$ e pari quindi all'unità il relativo coseno. La derivata di f nella direzione e nel verso del gradiente assume pertanto anche il valore massimo rispetto a tutte le altre possibili direzioni, dato da $\partial f / \partial n = |\nabla f|$.

Dalla (40) si evince anche che una funzione scalare il cui gradiente sia ovunque nullo deve risultare costante, dovendo essere ovunque nullo il suo differenziale totale.

Nello sviluppo di alcune espressioni risulta conveniente esprimere il versore della verticale in termini del vettore simbolico nabla. Infatti, per quanto testé illustrato, detta z la coordinata verticale, il vettore ∇z è normale alle superfici su cui z è costante (i piani orizzontali) ed è pertanto verticale; ha modulo pari a $|\nabla z| = \partial z / \partial n = \partial z / \partial z = 1$ ed è orientato nel verso delle z crescenti: esso è dunque il versore della verticale (vedi Figura 7). In particolare, se l'asse z costituisce uno dei tre assi di una terna di riferimento xyz di versori $\vec{b}_x, \vec{b}_y, \vec{b}_z$, si ha, più semplicemente:

$$\nabla z = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{b}_x + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{b}_y + \frac{\partial z}{\partial z} \vec{b}_z = \vec{b}_z, \quad (41)$$

essendo $\partial z / \partial x = \partial z / \partial y = 0$. Il ragionamento è valido, peraltro, per qualunque direzione orientata.

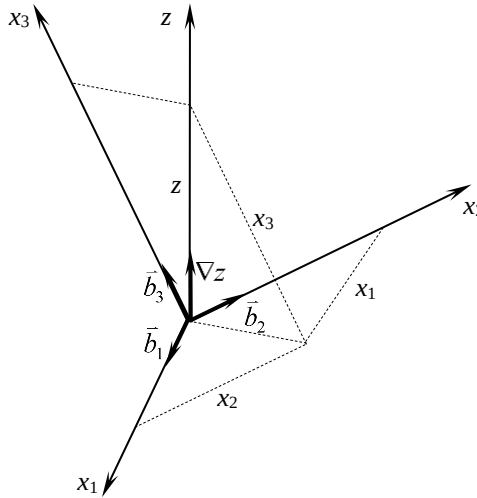


Figura 7. Versore della verticale in un sistema di riferimento generico.

1.3 Richiami di Meccanica

1.3.1 Misura delle grandezze fisiche

Per misura di una grandezza fisica si intende il rapporto fra essa e un'altra grandezza della stessa specie scelta come unità, da eseguire con modalità determinate. Allo scopo di conferire carattere di oggettività al sistema di misura, si richiede che, variando la grandezza campione assunta a unità di misura (operazione tutt'altro che infrequente nelle applicazioni tecniche), si mantenga inalterato il rapporto delle misure di due grandezze della stessa specie. Requisiti essenziali delle grandezze campione sono l'inalterabilità e la riproducibilità, il che ha determinato definizioni delle stesse sempre più sofisticate. Ad esempio, dopo l'originaria definizione quale frazione 10^{-7} del quarto di meridiano terrestre passante per Parigi (1791), il metro campione è stato successivamente definito come distanza fra due tacche incise su una barra di platino iridato di particolare sezione, conservata presso il Bureau of Poids et Mesures di Parigi (1889), come 1 650 763,73 volte la lunghezza d'onda di una particolare radiazione emessa dall'isotopo 86 del Krypton (1960) e, infine, dal 1983 ai giorni nostri, come la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un intervallo di tempo di $1/299792458$ s, inalterabile e riproducibile con maggiore precisione rispetto ai precedenti campioni.

È senz'altro possibile adottare una grandezza campione come unità di misura per ciascuna specie di grandezza fisica. Tuttavia, la sussistenza di relazioni fra le varie grandezze fisiche, in termini di leggi fisiche – descrittive cioè una certa classe di fenomeni fisici in termini relativamente generali – o legate alle sole definizioni delle grandezze, comporta la possibilità, più conveniente da un punto di vista pratico, di assumere in maniera arbitraria il numero strettamente sufficiente di grandezze campione, che vengono dette perciò *fondamentali*, definendo tutte le altre grandezze campione

attraverso le relazioni riconosciute valide fra le varie grandezze, denotandole perciò come *grandezze derivate*. Le grandezze fisiche, intese come specie (lunghezza, tempo, forza, etc...), verranno denotate, come d'uso, con simboli racchiusi fra parentesi quadre. Nella Meccanica, nel cui ambito si svolge interamente il corso di Idraulica, è necessario scegliere tre grandezze fondamentali. Ad esempio, scelti il metro, m, e il secondo, s, come unità di misura delle lunghezze [L] e del tempo [T] rispettivamente, la sola definizione di velocità consente di assumerne a unità di misura, ad esempio, quel valore che, mantenuto costante nel tempo, consente di percorrere la distanza di 1 m nel tempo di 1 s, ossia, 1 m/s o 1 ms⁻¹. Per definire l'unità di misura della forza [F], una volta assunta l'unità di misura della massa [M], p. es., il chilogrammo massa, kg, e definita, analogamente alla velocità, l'unità di misura dell'accelerazione [a], p. es. 1 ms⁻², ci si potrà invece basare su una vera e propria legge fisica, quale la seconda legge di Newton, $F = ma$, per definire come unità di misura quella forza che imprime alla massa di 1 kg l'accelerazione di 1 ms⁻² (Newton, N), oppure, la forza che imprime alla massa di 1 kg l'accelerazione media di gravità, $g = 9,80665 \text{ ms}^{-2}$ (chilogrammo forza, o chilogrammo peso, o chilopond, kp – quest'ultima denominazione utilizzata per brevità nel prosieguo).

Un sistema di unità di misura è dato dall'insieme delle unità assunte per le varie specie di grandezze fisiche. Dei vari sistemi di unità di misura esistenti, attualmente è fatto obbligo dell'uso delle unità del Sistema Internazionale (abbreviato SI), il quale assume come grandezze fondamentali della Meccanica e relative unità di misura: lunghezza [L] e metro (m); tempo [T] e secondo (s); massa [M] e chilogrammo massa, o chilogrammo *tout-court* (kg)⁴. Le *dimensioni fisiche* di una grandezza sono i prodotti delle potenze delle grandezze fondamentali che la definiscono (p.es., con riferimento alla forza: $[F] = [M][a] = [M L T^{-2}]$). Ciascuna grandezza fisica è perciò caratterizzata da proprie dimensioni ed è perciò fondamentalmente differente da un numero puro, che ne è privo. La differenza è rilevante perché mentre cambiando le unità di misura varierà anche la misura di una data grandezza fisica, un numero puro rimane inalterato. Il concetto di dimensione fisica fa sì che possano essere sommate soltanto grandezze fisiche della stessa specie e che i due membri di una equazione debbano possedere le medesime dimensioni fisiche (*principio di omogeneità dimensionale*). Fra l'altro, tale ultimo concetto è utile, da un punto di vista pratico, per verificare rapidamente eventuali errori nella scrittura di una equazione, nel senso che essa è certamente errata se non rispetta il principio di omogeneità dimensionale (mentre, naturalmente, il rispetto di tale principio non implica invece, di per sé, che l'equazione sia scritta correttamente).

Le dimensioni fisiche, come le corrispondenti unità di misura, sono trattabili con le regole dell'algebra, al fine di stabilire le corrispondenze fra unità di misura differenti, operazione utile anche per scopi tecnici. Ad esempio, volendo esprimere in km h⁻¹ (o km/h) una velocità di 20 ms⁻¹, tenendo presente che 1 km = 1000 m (1 m = 1/1000 km) e che 1 h = 3600 s (1 s = 1/3600 h), si ha:

$$20 \text{ ms}^{-1} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 20 \times \frac{\text{km}}{1000} \times \frac{3600}{\text{h}} = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 72 \text{ km h}^{-1}. \quad (42)$$

Nonostante, come s'è detto, attualmente sia obbligatorio l'uso del Sistema Internazionale, nella pratica sovente si è costretti a effettuare operazioni di conversione di unità di misura. Nel caso dell'Idraulica, ad esempio, è piuttosto comune trovare manometri (strumenti di misura della pressione che verranno descritti nel capitolo dedicato all'Idrostatica) graduati secondo svariate unità di misura: Nm⁻², bar, kp cm⁻², quando non, addirittura, in m di colonna d'acqua o mm di mercurio, che non sembrerebbero affatto essere unità di misura della pressione, se non sottintendendo relazioni che verranno, anch'esse, studiate in Idrostatica.

⁴ Le edizioni meno recenti del Citrini-Nosedà fanno uso del sistema pratico, le cui grandezze fondamentali e relative unità di misura sono: lunghezza (L) e metri (m); tempo (T) e secondi (s); forza (F) e chilopond, indicato come chilogrammo peso e per il quale, si badi, si usa il simbolo che nel SI è riservato al chilogrammo massa (kg). Le edizioni più recenti fanno invece riferimento alle unità SI.

Tabella 1: Unità di misura di impiego frequente.

Grandezza	Unità SI		Unità estranee	
	nome (simbolo)	unità	nome (simbolo)	equivalenza
Lunghezza	metro (m)	m	miglio terrestre (St mi) miglio marino (n mi) piede (ft) pollice (in)	1 St mi = 1.609 m 1 n mi = 1.852 m 1 ft = 0,3048 m 1 in = 2,540 m
Area	metro quadrato	m ²	ettaro (ha)	1 ha = 10 ⁴ m ²
Volume	metro cubo	m ³	litro (l) gallone (USA) (gal)	1 l = 10 ⁻³ m ³ 1 gal = 3,785 × 10 ⁻³ m ³
Angolo piano	radiante (rad)	rad	grado sessagesimale (°) grado centesimale (°)	360° = 2π rad 400° = 2π rad
Tempo	secondo (s)	s	minuto (min) ora (h) giorno solare (d)	1 min = 60 s 1 h = 3600 s 1 d = 86400 s
Velocità	—	m s ⁻¹	(km h ⁻¹) nodo (kn) miglio all'ora (mph)	1 km h ⁻¹ = 0,2778 m s ⁻¹ 1 kn = 0,5144 m s ⁻¹ 1 mph = 0,4470 m s ⁻¹
Velocità angolare	—	rad s ⁻¹	giri al minuto (rpm)	60 rpm = 2π rad s ⁻¹
Accelerazione	—	m s ⁻²	—	—
Portata	—	m ³ s ⁻¹	—	—
Viscosità cinematica	—	m ² s ⁻¹	Stokes (St)	1 St = 10 ⁻⁴ m ² s ⁻¹
Massa	chilogrammo (kg)	kg	(kp m ⁻¹ s ²) libbra (lb)	1 kp m ⁻¹ s ² = 9,80665 kg 1 lb = 0,4536 kg
Forza	Newton (N)	kg m s ⁻²	chilopond (kp)	1 kp = 9,80665 N
Quantità di moto	—	kg m s ⁻¹	(kp s)	1 kp s = 9,80665 kg m s ⁻¹
Momento di quantità di moto	—	kg m ² s ⁻¹	(kp m s)	1 kp m s = 9,80665 kg m ² s ⁻¹
Momento di una forza	—	N m	(kp m)	1 kp m = 9,80665 N m
Sforzo (pressione)	Pascal (Pa)	N m ⁻²	(kp cm ⁻²) bar (bar) atmosfera (atm) metri di colonna d'acqua (m H ₂ O) mm di mercurio (Torr)	1 kp cm ⁻² = 98.066,5 Pa 1 bar = 10 ⁵ Pa 1 atm = 101.303 Pa 1 m H ₂ O = 9.806,65 Pa 1 Torr = 133,3 Pa
Densità	—	kg m ⁻³	(kp m ⁻⁴ s ²)	1 kp m ⁻⁴ s ² = 9,80665 kg m ⁻³
Peso specifico	—	N m ⁻³	(kp m ⁻³)	1 kp m ⁻³ = 9,80665 N m ⁻³
Viscosità dinamica	—	kg m ⁻¹ s ⁻¹	(kp m ⁻² s) Poise (Po)	1 kp m ⁻² s = 9,80665 kg m ⁻¹ s ⁻¹ 1 Po = 0,1000 kg m ⁻¹ s ⁻¹
Modulo di elasticità	Pascal (Pa)	N m ⁻²	vedi sforzo	
Tensione superficiale	—	N m ⁻¹	(kp m ⁻¹)	1 kp m ⁻¹ = 9,80665 N m ⁻¹
Lavoro ed energia	Joule (J)	N m	(kp m) piccola caloria (cal) British thermal unit (BTU) chilowattora (kWh)	1 kp m = 9,80665 N m 1 cal = 4.1868 J 1 BTU = 1.055 J 1 kWh = 3,600 × 10 ⁶ J
Potenza	Watt (W)	N m s ⁻¹	(kp m s ⁻¹) cavallo vapore (CV)	1 kp m s ⁻¹ = 9,80665 W 1 CV = 735,5 W
Temperatura	grado Kelvin (K)	K	grado celsius (°C) grado Fahrenheit (°F)	T(°C) = T(K) - 273,15 T(°F) = 9/5 T(K) - 459,67 T(°F) = 9/5 T(°C) + 32

Nella Tabella 1 sono riportate le unità di misura di uso più frequente nelle applicazioni tecniche, suddivise fra unità del SI e unità di altri sistemi, con le corrispondenti equivalenze. La tabella è riportata a scopo riassuntivo; le definizioni delle varie grandezze verranno richiamate di volta in volta nel prosieguo. Di norma, nel corso si farà uso delle unità SI, con alcune eccezioni riguardanti unità del sistema pratico o poche altre di uso corrente.

Le equivalenze delle unità SI con varie altre unità alternative, quali, ad esempio, il piede quadrato (sq ft) o il pollice cubo (cu in), omesse nella Tabella 1 per ragioni di spazio, possono essere facilmente derivate sulla base delle unità fornite in tabella mediante operazioni di conversione del tipo (42). Per una più esauriente esposizione dei fattori di conversione fra le varie unità di misura si rimanda particolarmente ai manuali di ingegneria⁵.

Dalla Tabella 1 si può anche osservare come le stesse dimensioni fisiche possano competere a grandezze di diversa specie, quali il momento di una forza e il lavoro di una forza.

1.3.2 Schematizzazione dello spazio fisico nella Meccanica Newtoniana. Il punto materiale

Le leggi fondamentali della Meccanica elementare (Newtoniana), di interesse applicativo esclusivo per l'ingegnere civile, sono di norma introdotte ricorrendo all'astrazione del *punto materiale*, ossia un corpo privo di dimensioni, quale è un punto, nel quale si intenda concentrata una massa finita. Tale concetto, oltre che utile alla comprensione delle leggi fondamentali della Meccanica da un punto di vista didattico, storicamente ha costituito anche il mezzo attraverso il quale, semplificando radicalmente la descrizione dell'ambiente fisico, tali leggi hanno potuto essere riconosciute da pionieri del pensiero scientifico quali Galileo e Newton.

Si rimarca come il concetto di punto materiale costituisca una astrazione, non essendo fisicamente possibile la concentrazione di una massa finita in un ente geometrico quale il punto, privo di dimensione. Tuttavia, anche solo su base intuitiva, appare abbastanza ragionevole che un corpo possa essere schematizzato come punto materiale se possiede dimensioni lineari molto minori di quelle caratteristiche dell'ambiente in cui si muove (sotto questo aspetto, la definizione parrebbe simile a quella di particella fluida di cui al capitolo successivo, la quale tuttavia, come si vedrà, sottende concetti alquanto differenti). Inoltre, sebbene non esista il punto materiale in quanto tale, in qualunque sistema meccanico, come si avrà modo di richiamare più avanti, è definibile un punto caratteristico – il baricentro del sistema – che si muove seguendo le medesime leggi del punto materiale, legittimandone perciò l'introduzione nello studio della Meccanica in maniera più sostanziale. Seguendo il percorso tipico della Fisica elementare, nei presenti richiami di Meccanica si farà perciò senz'altro riferimento al concetto di punto materiale.

1.3.3 Cinematica

La cinematica studia il moto dei corpi al trascorrere del tempo da un punto di vista puramente geometrico, non comprendendo l'analisi delle cause che lo producono.

Il moto di un punto materiale nello spazio (vedi Figura 8) è descrivibile mediante il vettore posizione dipendente dal tempo, $\vec{X}(t)$, le cui componenti sono le coordinate del punto nel sistema di riferimento prescelto, $X_i(t)$, $i = 1, 2, 3$:

$$\vec{X}(t) \equiv \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{pmatrix}.$$

Le equazioni che esprimono tali componenti in funzione del tempo, del tipo $x_i = X_i(t)$, vengono dette equazioni del moto in forma *parametrica*. La *traiettoria* del punto è una curva nello spazio data dal

⁵ Si raccomanda vivamente l'allievo di dotarsi di un manuale di ingegneria, p. es.: Manuale dell'Ingegnere – nuovo Colombo, Hoepli; Manuale di Ingegneria Civile, Zanichelli - Edizioni Scientifiche Cremonese.

luogo delle posizioni da occupate dal punto al trascorrere del tempo, la cui equazione si ottiene eliminando il tempo fra le tre equazioni parametriche del moto.

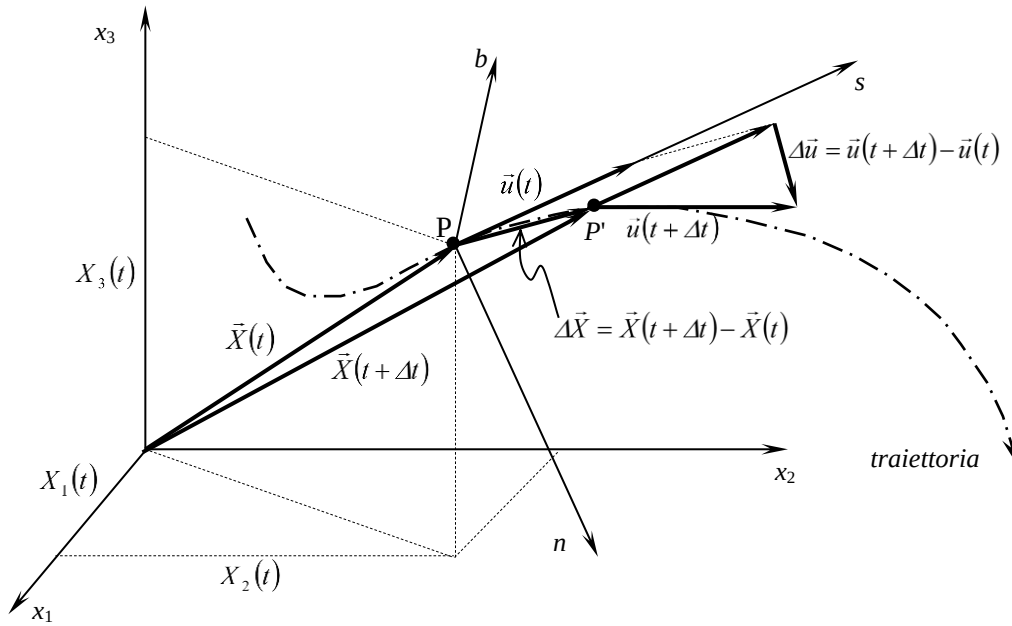


Figura 8. Schema di definizione delle grandezze caratteristiche del moto di un punto materiale.

Sulla base della definizione di somma e differenza di due vettori, la velocità del punto materiale al tempo t si calcola come derivata prima del vettore spostamento, data da:

$$\vec{u}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{X}(t + \Delta t) - \vec{X}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{X}}{dt}(t) , \quad (43)$$

in cui al numeratore del rapporto incrementale è contenuto il vettore spostamento nell'intervallo di tempo Δt , differenza dei vettori posizione agli estremi dell'intervallo, costituente un segmento elementare di traiettoria. Al limite, il vettore velocità assume quindi, punto per punto, la direzione della tangente alla traiettoria. Le componenti del vettore velocità sono le derivate prime delle componenti del vettore spostamento: $u_i = dX_i/dt$. Il rapporto incrementale che figura nella (43) rappresenta la velocità media occorrente per spostarsi dal punto P al punto P' nell'intervallo Δt e pertanto anche lo spostamento che avverrebbe, se tale velocità si mantenesse costante, in un intervallo di tempo unitario. Estendendo il concetto al limite, si dice che la velocità è data dallo spostamento subito nell'unità di tempo, o, in termini di modulo, dallo spazio percorso nell'unità di tempo. In quanto rapporto di una lunghezza e di un tempo, nel SI la velocità si misura in ms^{-1} .

Noto che sia l'andamento della velocità in funzione del tempo, $\vec{u}(t)$, l'equazione della traiettoria in forma parametrica si ottiene per integrazione dell'equazione differenziale ordinaria che si ottiene uguagliando primo e terzo membro dell'uguaglianza (43):

$$\vec{X}(t) = \int_{t_0}^t \vec{u}(t) dt + \vec{X}(t_0) , \quad (44)$$

in cui $\vec{X}(t_0)$, posizione del punto materiale al tempo $t = t_0$, rappresenta la costante di integrazione che è necessario assegnare per individuare compiutamente la traiettoria.

Analogamente, l'accelerazione del punto materiale al tempo t è data dalla derivata prima del vettore velocità:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{u}(t + \Delta t) - \vec{u}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{u}}{dt}(t), \quad (45)$$

quindi, dalla derivata seconda del vettore posizione. Se la funzione assegnata fosse l'accelerazione, occorrerebbe procedere dapprima all'integrazione dell'equazione differenziale espressa dalla (45):

$$\vec{u}(t) = \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt + \vec{u}(t_0),$$

in cui $\vec{u}(t_0)$ è una costante di integrazione, e successivamente all'integrazione (44). Per tale operazione è quindi necessaria la specificazione di due costanti di integrazione arbitrarie.

L'accelerazione del punto materiale in una data posizione P lungo la traiettoria risulta contenuta in un piano detto *piano osculatore del moto*, contenente la tangente alla traiettoria nel punto P considerato e il centro di curvatura locale O della traiettoria, rappresentato dal punto in cui, al limite per Δt tendente a zero, si intersecano le normali alla traiettoria nei punti P e P' . Il segmento $\overline{OP}$ è normale alla tangente alla traiettoria e rappresenta il *raggio di curvatura locale*, la cui lunghezza indichiamo con r . Ai fini dell'analisi locale del moto è conveniente definire un sistema di riferimento detto *terna intrinseca al moto*, avente origine in P e formato, nell'ordine, da un primo asse s parallelo ed equiverso al vettore velocità (*tangente*), da un secondo asse n rivolto verso il centro di curvatura (*normale interna*) e da un terzo asse perpendicolare ai primi due, quindi anche al piano osculatore, detto *binormale*, costituente una terna destra (tangente, normale e binormale sono posti rispettivamente come gli assi x_1 , x_2 e x_3 dei sistemi di riferimento considerati sinora).

Le componenti dell'accelerazione lungo gli assi della terna intrinseca sono date da:

$$\begin{aligned} a_s &= \frac{du}{dt} \\ a_n &= \frac{u^2}{r}, \\ a_b &= 0 \end{aligned} \quad (46)$$

in cui $u = |\vec{u}|$ è il modulo della velocità nel punto P . La componente dell'accelerazione lungo la normale interna è detta *accelerazione centripeta* in quanto rivolta verso il centro di curvatura.

In forza delle equazioni (46), lungo una traiettoria rettilinea ($r \rightarrow \infty$) l'accelerazione centripeta è nulla, mentre nel moto circolare uniforme ($u = \text{cost}$; $r = \text{cost}$) risulta nulla l'accelerazione tangenziale e costante nel tempo l'accelerazione centripeta.

1.3.4 Statica

1.3.4.1 Principi fondamentali. Equilibrio delle forze

Le forze sono grandezze fisiche vettoriali che sono in grado di produrre effetti meccanici, ossia di mettere in movimento un corpo inizialmente in quiete o variarne le condizioni di moto. La statica studia sotto quali condizioni i corpi possono rimanere in quiete sotto l'azione di forze.

Per quanto riguarda il punto materiale, si postula che l'effetto su di esso di un sistema di forze applicategli è il medesimo del vettore risultante delle forze applicate⁶. Pertanto, l'operazione di

⁶ Per evidenziare che si parla di forze tutte applicate al (quindi agenti sul) punto materiale, in Meccanica Razionale si denota la somma delle forze come *la risultante* (al femminile); con il termine *il risultante* (al maschile) si intende, invece, la pura e semplice somma vettoriale di un insieme di forze, che può sempre eseguirsi a prescindere dalla coincidenza o meno dei punti di applicazione delle forze stesse.

somma (*composizione*) delle forze non altera lo stato di quiete o di moto del punto cui esse sono applicate (e del corpo cui, eventualmente, il punto appartiene). Condizione necessaria e sufficiente affinché un punto materiale sia in quiete (se lo è inizialmente) è che si annulli la risultante delle forze applicategli, ossia, il sistema di forze sia *in equilibrio*.

Nel caso di un corpo costituito da più punti materiali, esso si dice in quiete se è in quiete ciascuno dei punti che lo compongono. Poiché ciò comporta che la risultante delle forze applicate a ciascun punto sia nulla, anche il vettore risultante di tutte le forze applicate all'intero sistema di punti deve essere nullo. Inoltre, per la proprietà distributiva del prodotto vettoriale rispetto alla somma di vettori è anche nullo il momento risultante delle forze applicate a ciascun punto materiale; pertanto, deve essere nullo anche il momento risultante dell'insieme di forze applicate al sistema di punti.

Tali conclusioni potrebbero, nella pratica, risultare di difficile utilizzazione, dal momento che parte delle forze agenti sui punti potrebbero essere esercitate da un punto su un altro (*forze interne*) e quindi, generalmente, non note a priori. Condizioni necessarie per la quiete più utili delle precedenti si ricavano in forza della Terza Legge di Newton (Principio di azione e reazione): *a ogni azione che un corpo esercita su un altro, corrisponde una reazione di quest'ultimo uguale e contraria* (cioè: una forza di pari modulo e direzione e verso opposto applicata al primo corpo).

Applicando tale principio al calcolo del vettore risultante e del momento risultante delle forze applicate al sistema di punti, si elidono i contributi delle forze interne. Condizione necessaria perché un sistema di punti sia in quiete è quindi che siano nulli il vettore risultante e il momento risultante delle sole *forze esterne* (non mutuamente esercitate fra punti del sistema). Se al sistema sono applicate N forze esterne $\vec{F}_{e_k}$, si hanno quindi le *equazioni cardinali della statica*⁷:

$$\vec{R}_e = \sum_{k=1}^N \vec{F}_{e_k} = 0 \quad , \quad (47)$$

$$\vec{M}_e = \sum_{k=1}^N \vec{M}_{e_k} = \sum_{k=1}^N \vec{r}_k \times \vec{F}_{e_k} = 0 \quad . \quad (48)$$

Un tale sistema di forze si dice, anch'esso, in equilibrio. Le condizioni (47) e (48) valgono per un sistema qualunque, anche deformabile, che è il caso che interessa trattando della quiete dei fluidi, studiata in Idrostatica⁸.

Nel caso di un corpo rigido le condizioni (47) e (48) sono anche sufficienti per garantire la quiete del corpo, se esso è in quiete quando gli viene applicato il sistema di forze. Tali condizioni risultano utili qualora si intenda eseguire il calcolo della spinta su una parete schematizzabile come un corpo rigido per eseguirne, ad esempio, la verifica a rottura o il progetto.

1.3.4.2 Sistemi di forze equivalenti

Si dicono *equivalenti* due sistemi di forze aventi uguali vettore risultante e momento risultante rispetto a un punto dello spazio. Due sistemi equivalenti soddisfacenti le (47) e (48) sono intercambiabili *su un corpo rigido*⁹ in quanto aventi lo stesso effetto meccanico di garantire la quiete del corpo. Il concetto di equivalenza dei sistemi di forze è di grande importanza sia nella statica che nella dinamica dei corpi rigidi, come si vedrà successivamente, in quanto, in generale, sistemi di forze equivalenti comportano gli stessi effetti meccanici su un corpo rigido e sono perciò sempre

⁷ Non interessa nell'ambito del corso distinguere le forze, interne o esterne che siano, in forze attive e reazioni vincolari, com'è invece utile qualora sia di interesse la determinazione di queste ultime.

⁸ È facile mostrare con un esempio come le condizioni (47) e (48) non siano sufficienti per la quiete di un corpo (sistema meccanico) non rigido. Consideriamo infatti il sistema meccanico costituito da due palle da biliardo che non siano a contatto; applicando alle due sfere due forze di uguale intensità dirette come la congiungente i centri delle sfere ma opposte in verso, il sistema di forze soddisfa chiaramente le (47) e (48), ma le sfere vengono ovviamente poste in movimento.

⁹ Anche il fatto che sistemi di forze equivalenti non siano intercambiabili su un corpo non rigido può essere dimostrato facilmente ragionando su esempi simili al precedente.

intercambiabili. Per effetto della uguaglianza dei vettori risultanti, cambiando il punto rispetto al quale si calcolano i momenti risultanti di due sistemi equivalenti tali momenti cambiano rispetto al valore originario, ma si mantengono sempre uguali fra loro. L'importante conseguenza di ciò è che, volendo determinare un sistema di forze equivalente a uno dato, oltre a renderne uguali i vettori risultanti, nell'imporre l'uguaglianza del momento risultante può scegliersi un punto qualunque, dunque il più comodo allo scopo.

Ogni sistema di forze è equivalente a una forza più una *coppia* (costituita da due forze uguali in modulo e direzione, aventi verso opposto – quindi, vettore risultante nullo – e rette d'azione differenti) o a due forze, eventualmente sghembe (non complanari). Analogamente al caso del momento di un vettore rispetto a un punto, la distanza fra le rette d'azione delle forze costituenti una coppia è detto braccio della coppia; il modulo del momento della coppia rispetto a un qualunque punto dello spazio è dato dal prodotto del modulo della singola forza per il braccio della coppia; il vettore momento della coppia è normale al piano contenente le rette d'azione delle due forze. Un sistema costituito da una forza più una coppia equivalente a un sistema di forze dato si determina facilmente. Poiché la coppia ha vettore risultante nullo, la forza deve essere data dal vettore risultante del sistema dato. Un sistema equivalente si ottiene applicando il vettore risultante in un qualunque punto dello spazio (*centro di riduzione* del sistema di forze) e aggiungendo una coppia di momento pari al momento risultante del sistema dato calcolato rispetto a tale punto, poiché il momento del vettore risultante rispetto al proprio punto di applicazione (come rispetto a tutti i punti della propria retta d'azione) è nullo.

Poiché le operazioni elementari di scorrimento e composizione (o decomposizione) delle forze non alterano né il vettore risultante, né il momento risultante, tali operazioni possono essere utilizzate, a partire da un sistema di forze dato applicato a un corpo rigido, per ottenerne uno equivalente, eventualmente più semplice. Se, dato un sistema di forze, è possibile ottenerne uno equivalente consistente in un'unica forza, questa si dice *la risultante* (al femminile) del sistema¹⁰. Tale circostanza si verifica se, rispetto a un qualche punto dello spazio, il momento risultante del sistema dato è nullo, poiché adottando tale punto sia come punto di applicazione della risultante che come polo per il calcolo del momento della risultante, tale sistema soddisfa le condizioni di equivalenza. La risultante potrà perciò essere applicata in tale punto, come in uno qualunque dei punti della corrispondente retta d'azione della risultante.

Nel caso in cui un sistema di forze sia equivalente a una sola forza (la risultante), si enuncia il *Teorema di Varignon*, secondo il quale il momento della risultante rispetto a un qualunque punto dello spazio è uguale al corrispondente momento risultante del sistema di forze.

Un sistema di forze tutte giacenti su uno stesso piano il cui vettore risultante non sia nullo è equivalente a una sola forza, perché a essa si può sempre pervenire mediante operazioni di scorrimento e composizione. In tal caso è agevole determinare la retta d'azione della risultante mediante il Teorema di Varignon, assumendo a incognita il valore del suo braccio rispetto a un qualunque punto dello spazio (che però, nel caso specifico, sarà conveniente scegliere nel piano che contiene le forze), la posizione relativa della retta d'azione rispetto al punto dovendo essere congruente con il verso del momento risultante del sistema di forze, che risulta perpendicolare al piano (così come i momenti delle singole forze) se il polo è scelto su di esso. Per un osservatore che diriga lo sguardo perpendicolarmente al piano che contiene le forze, sono rivolti verso di lui i vettori momento delle forze cui è associabile una rotazione in senso antiorario rispetto al polo, sono rivolti in senso opposto i vettori momento delle forze che ruotano in senso orario. Al verso dei vettori momento è quindi associabile, in sostanza, un segno corrispondente al verso di rotazione delle forze rispetto al polo, se orario o antiorario. Ai fini dell'applicazione del teorema di Varignon, tuttavia, è ovviamente irrilevante quale verso di rotazione venga assunto come positivo.

¹⁰ Un criterio generale per stabilire quando un sistema di forze equivalga ad una sola forza è basato sull'*invariante* del sistema, $I = \vec{M} \cdot \vec{R}$ (vedi D. Graffi, *Elementi di Meccanica Razionale*), di cui tuttavia non si tratterà in questa sede perché i sistemi di forze equivalenti ad una sola forza con cui avremo a che fare sono sempre facilmente identificabili sulla base di altri criteri.

Ad esempio, con riferimento al sistema di tre vettori giacenti sul piano $x_1 x_2$ di cui alla Figura 9a, per chiarezza assunti tutti rotanti in senso orario rispetto al polo O , la posizione della risultate, calcolata mediante la poligonale in Figura 9b¹¹, si determina intanto osservando che il suo momento deve essere associato a una rotazione oraria, come il momento risultante delle tre forze (Figura 9c); il braccio incognito δ_x si determina quindi imponendo l'uguaglianza:

$$F_1\delta_1 + F_2\delta_2 + F_3\delta_3 = R\delta_x .$$

1.3.4.3 Centro di un sistema di forze parallele. Baricentro. Geometria delle masse.

Un sistema costituito da forze tutte fra loro parallele (*sistema di forze parallele*) applicate a un corpo rigido equivale a una sola forza o a una coppia a seconda che il vettore risultante sia diverso da zero o uguale a zero rispettivamente. In particolare, il primo caso si verifica certamente se le forze sono tutte equiverse (*cospiranti*). Poiché due forze qualunque del sistema, in quanto parallele, sono anche complanari, la posizione della risultante (o il valore della coppia) si può ottenere facilmente applicando ripetutamente il Teorema di Varignon (sulla base di tale procedimento si dimostra in effetti la stessa equivalenza del sistema a una sola forza o a una coppia). Caratteristica importantissima di tale classe di sistemi di forze è che, nel caso il vettore risultante sia diverso da zero, la risultante può essere applicata in un punto, detto *centro di un sistema di forze parallele*, il quale resta invariato al ruotare delle forze, purché esse rimangano sempre parallele, con uguale modulo e applicate negli stessi punti.

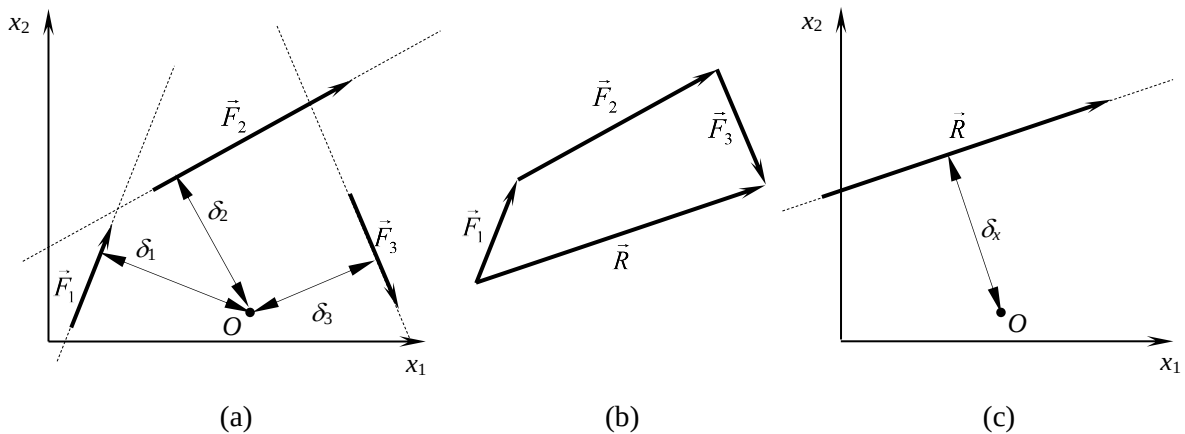


Figura 9. Schema esemplificativo dell'applicazione del Teorema di Varignon per la determinazione della retta d'azione della risultante di un sistema di forze.

Nel caso il sistema abbia vettore risultante non nullo, la posizione del centro di N forze parallele si determina nel seguente modo. Per una qualunque direzione delle forze, si consideri un versore avente la stessa direzione delle forze e orientato arbitrariamente, $\vec{i}_p$. Detta $F_{pk} = \vec{F}_k \cdot \vec{i}_p$ la componente della generica (k -esima) forza lungo la direzione orientata individuata dal versore, il vettore posizione del centro del sistema di forze parallele è dato dalla relazione:

$$\vec{X}_c = \frac{\sum_{k=1}^N \vec{x}_k F_{pk}}{\sum_{k=1}^N F_{pk}} , \quad (49)$$

¹¹ La poligonale di Figura 9b costituisce un esempio di come sia più conveniente operare la somma di più di due vettori senza tracciare parallelogrammi.

e la corrispondente generica coordinata da:

$$x_{c_i} = \frac{\sum_{k=1}^N x_{ik} F_{p_k}}{\sum_{k=1}^N F_{p_k}} . \quad (50)$$

Un caso notevole di sistema di forze parallele è dato dalle forze peso di un sistema di punti materiali rigidamente vincolati, che non possano quindi mutare la posizione relativa, per semplicità di rappresentazione esemplificato in Figura 10 da un sistema di punti complanari. Stante l'indeformabilità del sistema, durante il movimento del sistema i pesi dei punti, mantenendosi sempre verticali, ruotano rispetto al sistema di riferimento solidale con il sistema, mantenendosi però sempre reciprocamente paralleli e inalterati in modulo. Per le proprietà menzionate di un sistema di questo tipo, le coordinate del centro del sistema di forze nel riferimento solidale al sistema di punti rimangono anch'esse immutate durante il moto di quest'ultimo.

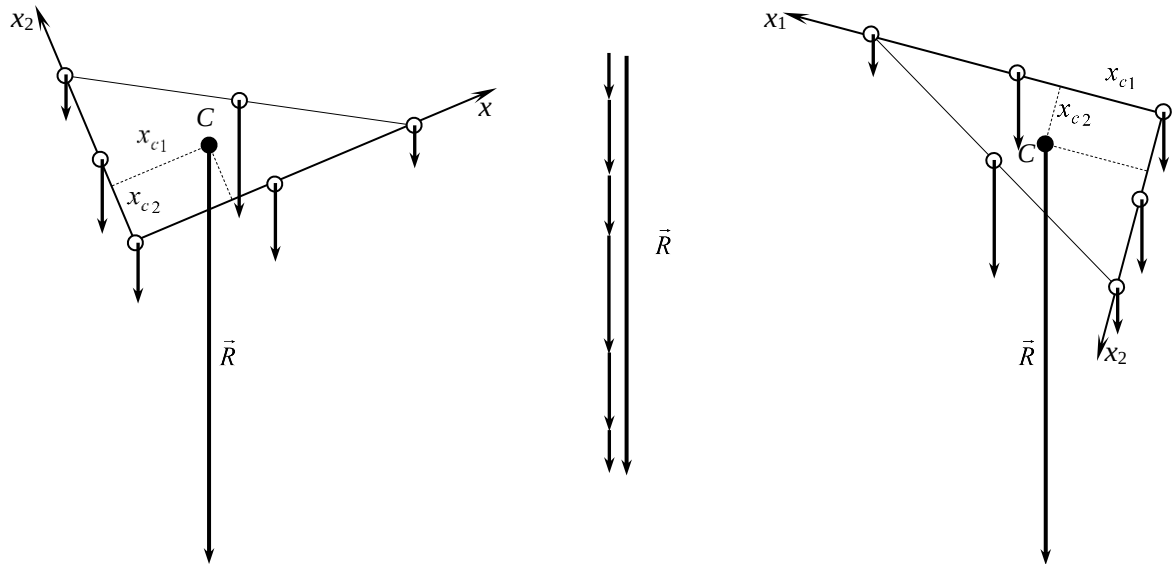


Figura 10. Sistema di punti materiali vincolati rigidamente.

Essendo i moduli dei pesi dei punti materiali dati dalle rispettive masse, m_k , moltiplicate per l'accelerazione di gravità, g , in virtù della costanza di quest'ultima le coordinate del centro del sistema di forze peso (*baricentro* del sistema di punti, generalmente indicato con il simbolo G) sono legate alla distribuzione delle masse e date dalla:

$$x_{G_i} = \frac{\sum_{k=1}^N x_{ik} m_k}{\sum_{k=1}^N m_k} = \frac{\sum_{k=1}^N x_{ik} m_k}{M} , \quad (51)$$

in cui M è la massa complessiva del sistema di punti materiali.

Nel caso di un sistema continuo omogeneo ideale¹², caratterizzato da una densità ρ (massa per unità di volume) uniforme su un volume V , un volume elementare, infinitesimo, dV è assimilabile a un punto materiale di massa infinitesima $dm = \rho dV$. Essendo il sistema composto di infiniti volumi elementari infinitesimi, le coordinate del suo baricentro si ottengono sostituendo, in formule del tipo (51), integrali estesi al volume V alle sommatorie estese all'insieme di punti materiali:

$$x_{G_i} = \frac{\int_V x_i \rho dV}{\int_V \rho dV} = \frac{\int_V x_i dV}{\int_V dV} = \frac{\int_V x_i dV}{V} . \quad (52)$$

La posizione del baricentro di un solido omogeneo è perciò dipendente unicamente dalle caratteristiche geometriche del solido. Per questo motivo, nonché per il fatto che a formule del tipo (52) si perviene anche in problemi che prescindono dalla presenza di forze peso, il termine baricentro è utilizzato, nella branca della Meccanica denominata *Geometria delle masse*, con riferimento alle caratteristiche geometriche dei solidi – come anche, per estensione, di superfici e curve. Nel prosieguo del paragrafo si farà riferimento esclusivo al caso di figure omogenee, senza ulteriore specificazione. Inoltre, per consuetudine il termine baricentro è talora utilizzato per identificare anche quello che, più propriamente, dovrebbe essere indicato come centro di un sistema di forze parallele diverse dalle forze peso. Si osservi anche che le (49)-(52) rappresentano l'espressione del Teorema di Varignon per il caso particolare di un sistema di forze parallele e in tale modo vengono talora presentate. Le quantità a numeratore delle (50) e (51) e del secondo e terzo membro della (52) sono detti *momenti statici* rispetto al piano coordinato normale all'asse x_i rispettivamente del sistema di forze, della distribuzione di masse e del solido continuo considerati.

Con riferimento al caso continuo, e immediata estensione al caso discreto (così come al caso di superfici e curve nello spazio), dati due volumi, V_1 e V_2 , aventi baricentri di coordinate x_{G1_i} e x_{G2_i} , le coordinate x_{G_i} del baricentro del volume V costituito dall'insieme dei due volumi, $V = V_1 + V_2$, si determina come segue:

$$x_{G_i} = \frac{\int_V x_i dV}{V} = \frac{\int_{V_1} x_i dV + \int_{V_2} x_i dV}{V_1 + V_2} = \frac{x_{G1_i} V_1 + x_{G2_i} V_2}{V_1 + V_2} . \quad (53)$$

Le coordinate del baricentro del volume totale si ottengono quindi come medie pesate delle corrispondenti coordinate dei baricentri dei singoli volumi, con pesi dati dai volumi. Tale formula può anche essere utilizzata per determinare le coordinate del baricentro di una parte di un volume, perché si può anche scrivere, con riferimento all'esempio precedente:

$$x_{G1_i} = \frac{x_{G_i} (V_1 + V_2) - x_{G2_i} V_2}{V_1} = \frac{x_{G_i} V - x_{G2_i} V_2}{V - V_2} .$$

Pertanto, la relazione (53) è generale, purché si adotti l'accorgimento di considerare con segno negativo il volume (V_2 nel caso specifico) che occorre sottrarre al volume totale per ottenere la parte di quest'ultimo (V_1) della quale si desidera determinare le coordinate del baricentro. Tali formule risultano particolarmente utili nel caso di figure composte da elementi più semplici, per le quali le espressioni delle coordinate dei baricentri possano reperirsi sui manuali tecnici, eliminando così la necessità di effettuare materialmente l'operazione di integrazione.

Se un solido è dotato di un piano di simmetria, il suo baricentro giace su tale piano. Infatti, assunto un sistema di riferimento avente due assi coordinati giacenti sul piano di simmetria (come x_2 e x_3 –

¹² La rappresentazione della materia come sistema continuo è qui assunta su base intuitiva. Tale semplificazione, nota sotto il nome di *schema di mezzo continuo*, è discussa in qualche dettaglio nel capitolo seguente in relazione al concetto di particella fluida.

quest'ultimo normale al piano del foglio – nell'esempio di Figura 11a), la coordinata del baricentro del solido relativa all'asse normale a tale piano (x_1 nell'esempio) è nulla, in quanto ottenibile dalla (53) per uguali volumi delle due parti speculari del solido, aventi baricentri, G_1 e G_2 , pure simmetrici rispetto al piano $x_2 x_3$ e perciò aventi coordinate x_1 uguali in valore assoluto ma di segno opposto.

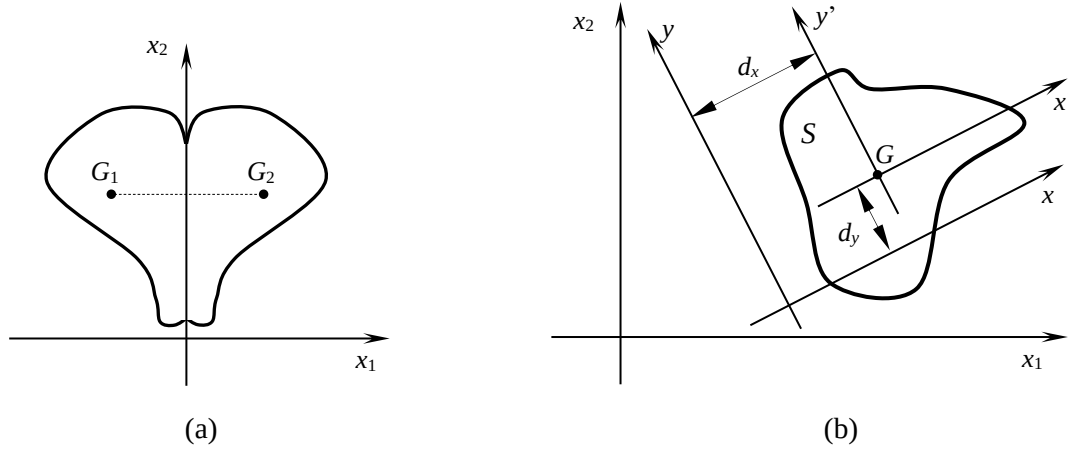


Figura 11. (a) figura solida dotata di un piano di simmetria; (b) schema di calcolo del momento di inerzia e del momento centrifugo di una figura piana.

Se un solido ha due piani di simmetria il baricentro deve giacere su entrambi i piani; esso deve quindi appartenere alla retta intersezione dei due piani. In particolare, un solido dotato di un asse di simmetria cilindrica – quindi, di infiniti piani di simmetria – ha il suo baricentro su tale asse. Alle stesse conclusioni si perviene nel caso di superfici o curve piane dotate di piani o assi di simmetria. Nei manuali tecnici le espressioni delle coordinate dei baricentri sono fornite con la massima sintesi possibile sfruttando eventuali proprietà di simmetria della figura.

Altre grandezze importanti studiate nella geometria delle masse sono il *momento di inerzia* e il *momento centrifugo*, che verranno qui considerati limitatamente al caso di figure piane. Il momento di inerzia di una figura piana di superficie S rispetto a una retta del piano, per esempio l'asse y di Figura 11b, è dato da:

$$I_{xx} = \int_S x^2 dS ,$$

mentre il momento centrifugo rispetto a due assi ortogonali (p.es. gli assi xy della stessa figura) è definito da:

$$I_{xy} = \int_S xy dS . \quad (54)$$

Il momento d'inerzia è ovviamente definito positivo, essendo tale la funzione integranda, x^2 . Il momento centrifugo può avere segno qualunque. Esso è nullo qualora uno dei due assi sia asse di simmetria per la figura. Infatti, in tal caso la figura piana può riguardarsi come costituita da infinite coppie di superfici elementari dS disposte simmetricamente rispetto a tale asse, aventi la stessa coordinata ad esso riferita ma coordinate relative all'altro asse opposte, i cui contributi all'integrale (54) sono pertanto a due a due (e quindi anche complessivamente) nulli.

Il momento di inerzia di una figura piana rispetto a una retta del piano è esprimibile come somma del momento di inerzia rispetto alla retta parallela passante per il baricentro e del prodotto della superficie della figura per il quadrato della distanza fra le due rette (*Teorema di trasposizione di Huygens*). Ad esempio, nel caso di Figura 11b si ha:

$$I_{xx} = I_{x'x'} + d_x^2 S \quad , \quad (55)$$

avendo indicato con $I_{x'x'}$ il momento di inerzia della superficie calcolato rispetto all'asse baricentrico y' . Analoga formula si ha per il momento centrifugo:

$$I_{xy} = I_{x'y'} + d_x d_y S \quad . \quad (56)$$

Dalla (55) si deduce che il minimo valore del momento di inerzia rispetto a un fascio di assi paralleli è quello calcolato rispetto alla retta baricentrica. Inoltre, la validità delle formule di trasposizione (55) e (56) consente di presentare nei manuali soltanto le formule relativi ad assi baricentrici.

I momenti statici (o del primo ordine) hanno dimensioni $[L^3]$ e si misurano perciò in m^3 in unità SI. I momenti del secondo ordine, quali sono il momento d'inerzia e il momento centrifugo hanno dimensioni $[L^4]$ e si misurano in m^4 in unità SI.

1.3.4.4 Stabilità dell'equilibrio

La stabilità dell'equilibrio statico di un sistema meccanico soggetto a un sistema di forze si definisce sulla base del comportamento del sistema in seguito a spostamenti dalla condizione di equilibrio iniziale. L'equilibrio si dice *stabile* se le forze agenti sul sistema tendono a riportarlo verso la posizione iniziale; si dice *instabile* se il sistema tende ad allontanarsene ulteriormente; si dice *indifferente* se il sistema risulta ancora in equilibrio statico in seguito allo spostamento.

Un esempio è rappresentato dall'equilibrio di una sfera vincolata a scorrere su una guida di diverse forme possibili, sotto l'azione del proprio peso e delle reazioni vincolari della guida, illustrato in Figura 12. Sono posizioni di equilibrio quelle in cui il baricentro della sfera si trova nel punto di minima quota della guida che rivolge la concavità verso l'alto (caso (a)), o nel punto di massima quota della guida con concavità verso il basso (caso (b)), perché in entrambi i casi la forza peso può essere equilibrata dalla reazione vincolare di semplice appoggio, anch'essa verticale nei punti detti in quanto il profilo della guida ha tangente orizzontale. Nel primo caso, spostando la sfera dal punto di minima quota, la componente della forza peso tangente alla guida fa sì che la sfera tenda a ritornare nel punto di equilibrio, che è pertanto stabile¹³. Nel secondo caso, la sfera spostata dalla posizione di equilibrio tende ad allontanarsene ulteriormente, per cui l'equilibrio è instabile. Nel caso di Figura 12c, nel quale la guida è rettilinea e orizzontale, ogni posizione lungo la guida è di equilibrio, per cui qualunque punto della guida è un punto di equilibrio indifferente per la sfera.

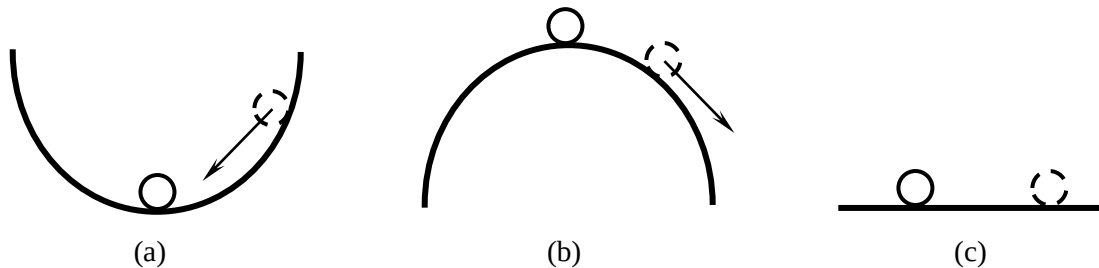


Figura 12. Tipi di equilibrio di un sistema meccanico costituito da una sfera vincolata a scorrere su una guida sotto l'azione del proprio peso: (a) equilibrio stabile; (b) equilibrio instabile; (c) equilibrio indifferente.

Nel caso di sistemi più complicati di quelli di Figura 12, ma per i quali le forze attive siano costituite unicamente dal peso proprio, si può dimostrare che le condizioni di equilibrio stabile, instabile e

¹³ Nel caso ideale di assenza di attrito, il sistema non ritornerebbe però mai nella posizione di equilibrio statico iniziale in quiete, perché oscillerebbe indefinitamente fra il punto nel quale la sfera era stata inizialmente spostata ed il punto avente la medesima quota del primo, posto da parte opposta rispetto al punto di equilibrio. Nella realtà, tuttavia, le oscillazioni sono smorzate dall'attrito, sempre esistente in misura maggiore o minore; lo stato di quiete nella posizione di equilibrio stabile viene perciò raggiunto asintoticamente.

indifferente corrispondono a condizioni di quota rispettivamente minima, massima e costante del baricentro del sistema, in relazione agli spostamenti consentiti dai vincoli.

1.3.5 Dinamica

La dinamica studia il moto dei corpi in relazione alle cause che lo provocano. Essa si basa su alcuni principi fondamentali noti sotto il nome di leggi di Newton¹⁴, così esprimibili:

1. (Principio di inerzia) Un punto materiale non soggetto a forze (o soggetto a forze a vettore risultante nullo) o è in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme;
2. (Legge fondamentale della dinamica) L'accelerazione $\vec{a}$ di un punto materiale è proporzionale alla forza $\vec{F}$ applicatagli, secondo una costante di proporzionalità m detta *massa inerziale*:

$$\vec{F} = m\vec{a} ; \quad (57)$$

3. (Principio di azione e reazione) A ogni azione che un punto materiale esercita su un altro, corrisponde una reazione di quest'ultimo uguale e contraria (cioè: una forza di pari modulo e direzione e verso opposto applicata al primo punto materiale).

Il principio di azione e reazione, già ricordato nei richiami di statica, ha quindi validità anche nel caso di movimento di punti materiali, determinando analoghe importanti semplificazioni.

Qualora si considerino unicamente *forze reali*, ossia esercitate effettivamente da un corpo su un altro, il principio di inerzia ha validità limitata ai sistemi di riferimento detti *inerziali*, identificabili sulla base del rispetto di tale principio, il cui prototipo identificato da Newton era un sistema riferito alle stelle fisse. Peraltro, qualunque sistema di riferimento che si muova di moto traslatorio (privo di rotazioni) uniforme (a velocità costante) rispetto a un sistema inerziale è esso stesso inerziale. Infatti, le velocità misurate nei due sistemi differiscono per quantità (intese come vettori) costanti; un moto che risulti rettilineo e uniforme in uno dei due sistemi è perciò tale anche nel secondo. In sostanza, ciò che priva un sistema non inerziale della proprietà di vedervi rispettato il principio di inerzia è l'essere accelerato rispetto a un sistema inerziale. L'importanza dei relativi effetti in termini di mancato rispetto del principio di inerzia dipende quindi dall'entità delle accelerazioni del sistema non inerziale rispetto a quello inerziale.

Un sistema di riferimento solidale con la Terra non è inerziale in conseguenza del moto di rotazione terrestre. Tuttavia, in determinate condizioni, gli effetti non inerziali possono risultare non rilevanti. Assumendo senz'altro tali condizioni, due esempi di sistemi di riferimento non inerziali sono costituiti da un riferimento solidale con una automobile che percorra una strada di moto rettilineo accelerato e un riferimento rotante attorno a uno dei suoi assi coordinati – per esempio, l'asse di una giostra. Nel primo caso, i passeggeri vedono gli alberi che fiancheggiano la strada muoversi di moto rettilineo accelerato di pari intensità ma in senso opposto rispetto al moto dell'automobile, mentre gli alberi risultano fermi rispetto a un riferimento solidale con un paracarro a bordo strada e soggetti al sistema di forze equilibrato costituito dal proprio peso, una eventuale spinta del vento, e delle reazioni vincolari del terreno esercitate attraverso le radici. Nel secondo caso, le persone sedute sui sedili della giostra rotante con velocità angolare costante vedono gli edifici circostanti muoversi di moto circolare uniforme (quindi, accelerato, vedi § 1.3.3) alla medesima velocità angolare e in senso opposto al verso di rotazione della giostra, mentre essi risultano fissi rispetto a un riferimento solidale col casello del giostrante e anch'essi soggetti a un sistema di forze reso equilibrato dalle reazioni vincolari agenti sulle fondazioni.

I conti non tornano anche per quanto riguarda la dinamica dei corpi solidali con i sistemi accelerati in relazione alle sole forze esercitate da altri corpi. Infatti, un passeggero dell'automobile è fermo rispetto al riferimento solidale a essa, pur subendo una spinta in avanti da parte dello schienale del sedile; lo stesso dicasi per una persona sulla giostra, nonostante essa subisca unicamente una spinta

¹⁴ Tale denominazione ricorda chi di tali principi diede gli enunciati più precisi. Tuttavia, alla loro elaborazione contribuirono in misura sostanziale altri scienziati, fra i quali particolarmente Galileo Galilei.

verso l'asse di rotazione (centripeta) da parte del seggiolino, a sua volta collegato a un tirante, che impedisce al passeggero di andare, rigorosamente, per la tangente alla traiettoria circolare percorsa.

Un artificio per ottenere il rispetto delle leggi della dinamica di Newton in sistemi non inerziali consiste nel definire delle forze fittizie dette *forze d'inerzia*. Riscrivendo la (57) nella forma:

$$\vec{F}_s - m_p \vec{a}_i = 0 \quad (58)$$

per un certo passeggero dell'automobile di massa m_p sul quale il sedile esercita la forza $\vec{F}_s$, imprimendogli la medesima accelerazione $\vec{a}_i$ cui è soggetta l'automobile, misurata rispetto al sistema inerziale solidale al paracarro, e attribuendo al termine $-m_p \vec{a}_i$ il significato di una forza agente su di esso – ma in realtà non esercitata da alcun corpo – la (58) assume l'aspetto dell'equazione cardinale della statica (47), che effettivamente garantisce le condizioni di quiete del passeggero rispetto al riferimento solidale con l'automobile. Allo stesso modo, la condizione di equilibrio della persona sulla giostra viene espressa da una simile equazione, il termine $-m_p \vec{a}_{pi}$ rappresentando, in quanto di verso opposto alla accelerazione centripeta misurata nel riferimento fisso, quella che viene comunemente denominata *forza centrifuga*, appartenente quindi, anch'essa, alla classe delle forze di inerzia, o fittizie. La percezione fisica della forza centrifuga è, in realtà, unicamente la percezione della tendenza del corpo a procedere di moto rettilineo uniforme nella direzione della tangente alla traiettoria, contrastata dal tirante collegato al seggiolino (o dalla portiera dell'automobile quando, al termine del rettilineo, essa descrive una curva).

In conclusione, attribuiremo la qualifica di forze di inerzia applicate a un corpo a termini dati dal prodotto della massa del corpo (eventualmente specifica all'unità di volume) per l'accelerazione del corpo misurata rispetto a un sistema di riferimento inerziale, cambiati di segno, o, comunque, derivanti da termini di questo tipo. Negli esempi fatti, i corpi considerati erano in condizioni di quiete rispetto ai rispettivi sistemi di riferimento accelerati. In generale, il Principio di D'Alembert consente di descrivere il moto di un corpo rispetto a un sistema di riferimento non inerziale mediante equazioni di equilibrio statico fra forze reali e forze d'inerzia.

Una importante forza d'inerzia che appare nel caso di moto rispetto a un sistema di riferimento rotante (quindi non inerziale) è la forza di Coriolis, che è essenziale per descrivere la circolazione oceanica o atmosferica, ma della quale non ci occuperemo perché non importante ai fini della descrizione dei fenomeni di interesse del corso. Invece, la forza centrifuga legata al moto di rotazione terrestre viene effettivamente considerata, sommata alla forza di attrazione gravitazionale terrestre, per fornire quella che, sinteticamente, viene chiamata *forza di gravità*. Pertanto, sebbene nel prosieguo l'impostazione delle equazioni della statica e del movimento verrà eseguita apparentemente come per sistemi di riferimento inerziali, esse tengono in realtà conto delle caratteristiche non inerziali del riferimento terrestre. Il contributo della forza centrifuga non è peraltro importante da un punto di vista tecnico rispetto alla forza di origine gravitazionale, tanto più che entrambe variano da punto a punto della superficie terrestre, in relazione sostanzialmente alla latitudine. Si assume perciò normalmente un valore medio della accelerazione di gravità $g = 9,80665 \text{ ms}^{-2}$ – indipendente, come è noto, dalle caratteristiche dei corpi – approssimabile per scopi tecnici dal valore $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$. La direzione della accelerazione (e quindi della forza) di gravità è la direzione verticale – che indicheremo, come già in precedenza mediante la coordinata z – materializzata dalla direzione del filo a piombo.

Sulla base della legge fondamentale della dinamica (57) è ora possibile definire l'unità di misura SI della forza, denominata Newton (simbolo N), come quella forza che impressa a un punto materiale di massa unitaria (1 kg) gli imprime l'accelerazione di 1 ms^{-2} : $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2}$. In termini di dimensioni fisiche: $[F] = [ML T^{-2}]$. Poiché la più agevole misura delle forze è di tipo statico (mediante *dinamometri*), non stupisce che per lungo tempo l'unità di misura della forza sia stata costituita dal chilopond (kp), dato dalla forza che imprime alla massa unitaria l'accelerazione di gravità $g = 9,80665 \text{ ms}^{-2}$ (cioè la forza peso agente su una massa unitaria): $1 \text{ kp} = 9,80665 \text{ kg m s}^{-2} = 9,80665 \text{ N}$.

Il momento di una forza ha dimensioni $[ML^2 T^{-2}]$ e viene misurata in Newton metro (N m) nel SI.

La legge fondamentale della dinamica (57) è esprimibile in una forma alternativa, ricordando che l'accelerazione è la derivata prima della velocità (equazione (45)) e che la massa del punto materiale si mantiene costante durante il moto. Si può quindi scrivere:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d(m\vec{u})}{dt} = \frac{d\vec{q}}{dt} , \quad (59)$$

in cui la grandezza vettoriale $\vec{q} = m\vec{u}$ è detta *quantità di moto* del punto materiale, ha dimensioni fisiche $[q] = [ML T^{-1}]$ e viene misurata in $kg m s^{-1}$ nel SI.

La quantità di moto di un sistema di punti N materiali in movimento è data dalla somma vettoriale (vettore risultante) delle quantità di moto dei singoli punti materiali:

$$\vec{q} = \sum_{k=1}^N m_k \vec{u}_k .$$

Scrivendo la (59) per ciascuno dei punti materiali del sistema, procedendo alla sommatoria membro a membro e invocando – come già fatto per la deduzione delle equazioni cardinali della statica – il principio di azione e reazione, si ottiene l'importante relazione nota sotto il nome di *Teorema della quantità di moto*, esprime il *Principio di bilancio della quantità di moto*:

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{d\left(\sum_{k=1}^N m_k \vec{u}_k\right)}{dt} = \vec{R}_e , \quad (60)$$

in cui $\vec{R}_e$ è il risultante delle sole forze esterne. Definito poi, conformemente alla (30), il *momento della quantità di moto* di un punto materiale rispetto a un polo O :

$$\vec{I} = \vec{r} \times \vec{q}$$

e il momento della quantità di moto del sistema di punti:

$$\vec{I} = \sum_{k=1}^N \vec{r}_k \times \vec{q}_k ,$$

si può dedurre l'equazione:

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{d\left(\sum_{k=1}^N \vec{r}_k \times \vec{q}_k\right)}{dt} = \vec{M}_e , \quad (61)$$

in cui $\vec{M}_e$ è il momento risultante delle sole forze esterne calcolato rispetto allo stesso polo O , equazione (48). Le equazioni (60) e (61) prendono anche il nome di *equazioni cardinali del moto* dei sistemi meccanici. Il momento della quantità di moto ha dimensioni fisiche $[I] = [ML^2 T^{-1}]$ e viene misurato in $kg m^2 s^{-1}$ nel SI.

Detta $m = \sum_k m_k$ la massa complessiva del sistema di punti materiali (sistema meccanico), si dimostra che il moto del baricentro del sistema è retto dalla:

$$\vec{R}_e = m\vec{a}_G , \quad (62)$$

dove $\vec{a}_G$ è l'accelerazione del baricentro. Il baricentro di un sistema meccanico si muove pertanto come un punto materiale di massa pari alla massa totale del sistema, soggetto al risultante delle forze esterne applicate al sistema. Almeno entro certi limiti, tale proprietà fornisce una giustificazione

formale della assimilazione a punti materiali di corpi di dimensioni piccole rispetto alle dimensioni caratteristiche dell'ambiente circostante, così come del concetto stesso di punto materiale.

Una forza applicata a un punto materiale inizialmente in quiete lo mette in movimento imprimendogli una accelerazione espressa dalla legge fondamentale della dinamica (57), con conseguente spostamento in direzione e verso concordi con quello della forza. In questo caso, si dice *lavoro elementare* della forza F relativo a uno spostamento elementare ds la quantità:

$$dL = F ds . \quad (63)$$

Il lavoro della forza corrispondente a uno spostamento finito Δs si ottiene integrando l'equazione (63). Tenendo conto della forma scalare della (57) e della definizione di velocità corrispondente, per il caso specifico, alla (43), $u = ds/dt$ si ottiene (*Teorema delle forze vive*):

$$L = \int_{\Delta s} dL = \int_{\Delta s} F ds = \int_{\Delta s} m \frac{du}{dt} ds = m \int_{\Delta s} \frac{du}{dt} u dt = m \int_{u_1}^{u_2} u du = \frac{1}{2} m (u_2^2 - u_1^2) , \quad (64)$$

in cui u_1 e u_2 sono le velocità del punto materiale agli estremi dello spostamento Δs (la prima nulla nell'ipotesi di punto inizialmente in quiete). La quantità $\frac{1}{2} mu^2$ è detta *energia cinetica* del punto materiale. Il lavoro della forza F è pertanto pari alla variazione di energia cinetica del punto materiale. Lavoro di una forza ed energia cinetica sono grandezze della stessa specie, aventi dimensioni fisiche $[ML^2T^{-2}]$. L'unità di misura SI corrispondente è il lavoro compiuto dalla forza di 1 N per uno spostamento di 1 m, denominata Joule (simbolo J): $1 J = 1 N m = 1 kg m^2 s^{-2}$.

Nel caso generale di uno spostamento non parallelo alla forza (vedi Figura 13), il lavoro elementare si valuta sulla base della componente della forza $\vec{F}$ lungo lo spostamento elementare $d\vec{s}$, fornito dal prodotto scalare (vedi equazioni (25), (28) e (31)):

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F ds \cos \alpha = F_1 ds_1 + F_2 ds_2 + F_3 ds_3 = F_i ds_i .$$

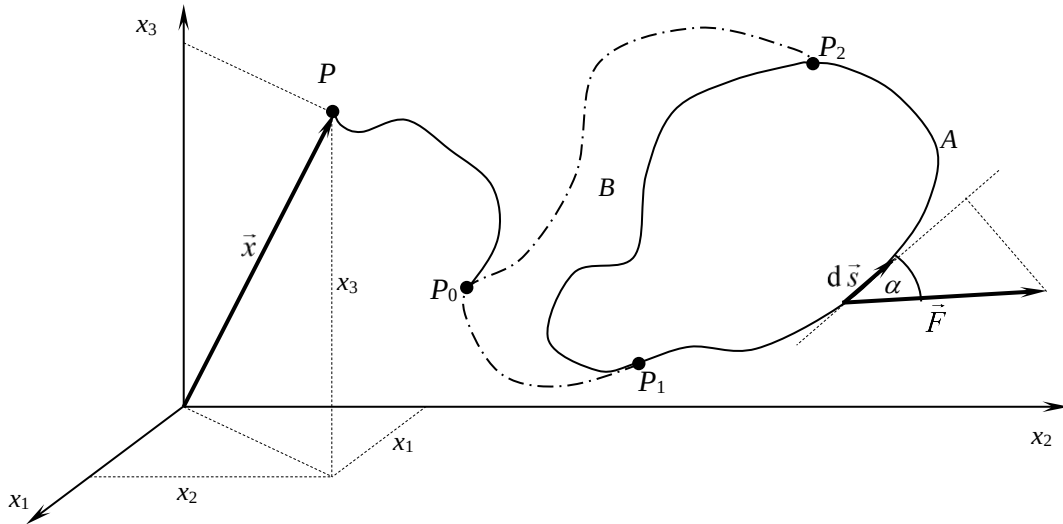


Figura 13. Schema illustrativo del lavoro delle forze di un campo.

Conformemente alla definizione di campo vettoriale, un campo di forze è una regione dello spazio nella quale agisca, punto per punto, una forza, eventualmente funzione del tempo, esprimibile come:

$$\vec{F}(\vec{x}, t) = \vec{F}(x_1, x_2, x_3, t) . \quad (65)$$

Una classe particolarmente importante di campi di forze è data dai *campi di forze conservativi*. Un campo di forze si dice conservativo se, dati due punti qualunque del campo, P_1 e P_2 , raffigurati in Figura 13, il lavoro compiuto dalle forze del campo in relazione a uno spostamento da un punto all'altro, dato dall'integrale di linea (equazione (22)):

$$L_{P_1 P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{P_1}^{P_2} F \cos \alpha \, ds = \int_{P_1}^{P_2} (F_1 \, ds_1 + F_2 \, ds_2 + F_3 \, ds_3) = \int_{P_1}^{P_2} F_i \, ds_i$$

non dipende dal particolare percorso seguito, ma soltanto dalla posizione dei punti estremi del percorso. Presi ora un punto P_0 inteso fisso e uno P variabile, identificato dal suo vettore posizione $\vec{x}$ (vedi Figura 13), il lavoro relativo a un qualunque percorso da P_0 a P , dovendo dipendere unicamente dalla posizione di P (a P_0 fissato), può essere espresso come:

$$L_{P_0 P} = \int_{P_0}^P \vec{F} \cdot d\vec{s} = \phi(\vec{x})$$

in cui la funzione scalare $\phi(\vec{x})$ così definita è detta *potenziale* del campo di forze.

Mantenuto sempre il riferimento al punto P_0 fissato, il lavoro corrispondente a uno spostamento qualunque fra due punti P_1 e P_2 può sempre esprimersi, in particolare, relativamente a un percorso passante per P_0 (riportato a tratto e punto in Figura 13). Ricordate le proprietà (14) e (15) degli integrali (valide anche per gli integrali di linea), si può quindi scrivere:

$$L_{P_1 P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{P_1}^{P_0} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{P_0}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \phi(\vec{x}_2) - \phi(\vec{x}_1) .$$

Pertanto, la differenza fra i valori del potenziale di un dato campo di forze in due punti fornisce il lavoro delle forze del campo relativo a un qualunque percorso che congiunga i due punti. La funzione potenziale come sopra definita assume ovviamente il valore zero in P_0 . La scelta del punto P_0 è tuttavia inessenziale, dal momento che il lavoro corrispondente a un certo percorso è dato dalla differenza dei potenziali nei punti estremi: i medesimi risultati si otterrebbero quindi utilizzando una funzione $\phi^*(\vec{x}) = \phi(\vec{x}) + c$, con $c = \text{cost}$. In altri termini: il potenziale di un campo di forze conservativo è determinato a meno di una costante inessenziale.

Si dice *energia potenziale* di un campo di forze conservativo una funzione scalare data dal potenziale del campo cambiato di segno:

$$E(\vec{x}) = -\phi(\vec{x}) .$$

Pertanto, a una diminuzione del potenziale corrisponde un aumento dell'energia potenziale, e viceversa.

Nel caso il campo di forze sia descritto da una funzione regolare, condizione necessaria e sufficiente perché il campo sia conservativo è che le forze del campo siano date, punto per punto, dal gradiente del potenziale:

$$\vec{F} = \nabla \phi . \quad (66)$$

Ogni campo di forze esprimibile come gradiente di una funzione scalare è pertanto conservativo. In tal caso risulta nullo il *rotore* (o *rotazione*) del campo di forze (che è quindi *irrotazionale*), dato da:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \partial F_3/\partial x_2 - \partial F_2/\partial x_3 \\ \partial F_1/\partial x_3 - \partial F_3/\partial x_1 \\ \partial F_2/\partial x_1 - \partial F_1/\partial x_2 \end{pmatrix}.$$

L'esempio più importante di campo di forze conservativo è dato dal campo della forza di gravità (o forza peso). Poiché su ogni corpo è esercitata una forza peso proporzionale alla massa del corpo, è conveniente rappresentare il campo delle forze di gravità agenti sull'unità di massa, dato dal campo del vettore accelerazione di gravità, talora indicato con il simbolo $\vec{g}$. Tale campo ha intensità che può essere considerata uniforme su estensioni sufficientemente limitate e pari al valore medio $g \cong \text{cost} \cong 9,80665 \text{ ms}^{-2} \cong 9,81 \text{ ms}^{-2}$. Rivolto, come d'uso, l'asse della verticale in verso opposto alla forza di gravità e ricordata l'espressione (41) del corrispondente versore in funzione della coordinata verticale z , l'espressione del campo delle forze di gravità specifiche all'unità di massa è data dalle forme alternative:

$$\vec{g} = -g\nabla z = -\nabla(gz) = \nabla(-gz).$$

Essendo dato dal gradiente della funzione scalare $-gz$, il campo della forza di gravità è conservativo. Mentre il potenziale del campo diminuisce all'aumentare della quota z , l'energia potenziale aumenta corrispondentemente. A norma del Teorema delle forze vive (64), per un grave di massa m in caduta libera fra le quote z_1 e z_2 , descrivente una traiettoria anche non verticale, supposto soggetto unicamente all'azione del proprio peso (trascurando quindi, ad esempio, l'attrito dell'aria) si ha:

$$L_{1-2} = \phi(z_2) - \phi(z_1) = [(-gmz_2) - (-gmz_1)] = gm(z_1 - z_2) = \frac{1}{2}m(u_2^2 - u_1^2),$$

da cui:

$$gmz_1 + \frac{1}{2}mu_1^2 = gmz_2 + \frac{1}{2}mu_2^2. \quad (67)$$

Pertanto, la somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica (energia meccanica totale) del corpo in caduta libera si mantiene costante (*Principio di conservazione dell'energia meccanica*). La (67) si può esprimere nella forma riferita all'unità di peso (gm), che ritroveremo nel prosieguo:

$$z_1 + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{u_2^2}{2g}.$$

La grandezza fisica corrispondente al lavoro compiuto, ovvero alla variazione di energia avvenuta, nell'unità di tempo, data da:

$$P = \frac{dL}{dt},$$

o espressione analoga riferita all'energia, è detta *potenza*, avente dimensioni fisiche $[P] = [ML^2T^{-3}]$. L'unità di misura SI è la potenza corrispondente al lavoro di 1 J compiuto in 1 s, denominata Watt (simbolo W): $1 \text{ W} = 1 \text{ J s}^{-1} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-3}$.

Fino a questo, ove possibile, le varie espressioni sono state riportate utilizzando, per quanto riguarda la scrittura per componenti, sia la forma per esteso che la forma basata sulla convenzione di Einstein allo scopo di favorire la familiarità dello studente con tale notazione. Nei capitoli successivi, invece, la notazione per componenti verrà riportata con esclusivo riferimento alla convenzione di Einstein (che è stata introdotta, per l'appunto, per la sintesi).

CAPITOLO SECONDO

2. PROPRIETÀ FISICHE DEI FLUIDI

2.1 Schema di mezzo continuo

Gli strumenti dell'Analisi Matematica illustrati nel Capitolo 1 richiedono, per la loro applicabilità, la regolarità delle funzioni che descrivono i campi delle grandezze di interesse. I fluidi, come del resto i solidi e la materia in generale, sono tuttavia mezzi essenzialmente discontinui, essendo composti di molecole poste a distanze reciproche grandi rispetto alle proprie dimensioni e caratterizzate da movimenti rapidi e irregolari. Le molecole, a loro volta, sono composte di atomi; gli atomi di particelle elementari, anch'esse in rapido movimento su distanze anche molto maggiori delle proprie dimensioni. Da tali caratteristiche è quindi evidente che le grandezze fisiche misurabili in un punto, quali velocità, accelerazione, etc..., sono anche discontinue nel tempo e, in definitiva, anche a essere in grado di determinarle compiutamente, di scarso interesse pratico, almeno nell'ambito dello studio dell'Idraulica. Si pensi, a tale proposito, che quello che possiamo definire, da un punto di vista macroscopico, pratico e applicativo, un fluido in quiete è in realtà anch'esso sede di moti caotici delle molecole – che è infatti la causa, nel caso si tratti di un liquido, della sua evaporazione. Tuttavia, il carattere macroscopico di quiete del fluido deriva dal fatto che, determinato un volume contenente un numero di molecole sufficientemente alto, il valore medio della velocità delle molecole è, a meno di uno scarto trascurabile, nullo.

La chiave per l'interpretazione del comportamento dei fluidi (ma lo stesso vale per i solidi) mediante gli strumenti matematici richiamati in precedenza consiste nell'ammettere, in considerazione delle ridottissime dimensioni delle molecole per confronto con le dimensioni delle porzioni di fluido di interesse pratico, che un numero sufficientemente alto di molecole, tale da fornire valori medi statisticamente significativi della grandezza di interesse, sia contenuto in volumi di dimensioni caratteristiche molto minori di quelle entro le quali si desidera rilevare eventuali variazioni della grandezza (per esempio: il raggio di una tubazione a sezione circolare nel caso di un liquido in movimento entro essa, nell'ambito del quale la velocità passa dal valore nullo alla parete, al valore massimo sull'asse della tubazione). Mentre nell'esempio del fluido in quiete è evidente che maggiore è il volume considerato, più accurata sarà la media (nulla) della velocità, nel caso di un fluido in movimento il problema è più sottile, occorrendo che il volume sia al tempo stesso non troppo piccolo, in modo da contenere un numero di molecole sufficientemente alto da fornire una media statisticamente significativa della grandezza in esame, ma anche di dimensioni sufficientemente ridotte perché, in buona sostanza, la misura possa essere considerata praticamente puntuale rispetto alla variabilità nello spazio del campo in esame. A un volume di fluido che soddisfi tali requisiti viene dato il nome di *particella fluida*.

Consegue da quanto detto che le dimensioni che possono essere assunte per una particella fluida varino da caso a caso: potranno essere, ad esempio, molto maggiori nel caso di un'onda di marea, di periodo dell'ordine di 12 ore e lunghezza dell'ordine delle decine o centinaia di chilometri, piuttosto che nel caso di un'onda prodotta dal vento, avente periodo dell'ordine di alcuni secondi e lunghezza dell'ordine delle decine o centinaia di metri. In linea di principio, tali valutazioni dovrebbero essere effettuate di volta in volta, a seconda del problema in studio, al fine di verificare la possibilità stessa di individuare la particella fluida come definita in precedenza. Tuttavia, in pratica, l'essere stato riconosciuto ciò possibile per la generalità dei problemi di interesse dell'Idraulica conduce, in ultima analisi, semplicemente al ritenere ammissibile l'assimilazione del fluido, nella realtà come s'è detto discontinuo, a un mezzo continuo (*schema di mezzo continuo*), suscettibile pertanto di rappresentazione mediante gli strumenti matematici richiamati nel Capitolo 1.

In effetti, tutti gli strumenti dell'analisi infinitesimale, essendo basati sul concetto di limite, sono in realtà rigorosamente compatibili con il concetto di particella fluida di dimensione finita. Lo sviluppo in serie di una funzione di più variabili (21) mostra infatti che la variazione di una funzione

nell'intorno di un punto è rappresentabile mediante il differenziale (18) a meno di scarti trascurabili purché, per l'appunto, le dimensioni dell'intorno siano sufficientemente ridotte. In altri termini, tutti i fenomeni di interesse del corso potranno senz'altro studiarsi attraverso una descrizione dei campi delle grandezze nell'ambito dello schema di mezzo continuo, assumendo sempre di poter individuare volumi (particelle fluide) le cui dimensioni siano, oltre che non troppo piccole perché possano ottenersi valori medi statisticamente significativi della grandezza in esame, anche sufficientemente ridotte per consentire di sviluppare la funzione rappresentativa del campo della grandezza in serie di Taylor arrestata al primo ordine su distanze dell'ordine di tali dimensioni. Tutto ciò precisato, nel prosieguo si farà perciò di norma riferimento a spostamenti (ds , dx_i , etc...), superfici (dS , $d\Omega$, etc...) o volumi (dV) elementari intesi infinitesimi, salvo eventuali eccezioni in cui risulti conveniente evidenziare il volume della particella fluida, V_p . Inoltre, i campi delle varie grandezze che verranno considerate si intendono descritti da funzioni dello spazio e del tempo continue, derivabili e a derivate continue fino all'ordine che occorre, di volta in volta, per utilizzare i vari teoremi dell'Analisi richiamati nel Capitolo 1 (genericamente dette regolari).

Le leggi fondamentali della Meccanica sono di norma introdotte, così come sono state richiamate nel capitolo precedente, ricorrendo all'astrazione del punto materiale, ossia un punto nel quale si intenda concentrata una massa finita. Sebbene il ricorso a tale astrazione venga giustificata con argomentazioni simili a quelle che consentono di definire il concetto di particella fluida – un corpo può essere schematizzato come punto materiale se possiede dimensioni lineari molto minori di quelle caratteristiche dell'ambiente in cui si muove – i due concetti non sono equivalenti, perché, per l'appunto, il punto materiale è un'astrazione, mentre la particella fluida è un ente reale, di dimensioni finite, fisicamente ben definito e individuabile, anche se non univocamente. In particolare, mentre l'astrattezza del punto materiale si esplica nella proprietà singolare di possedere una densità infinita (massa finita su volume nullo), tale eventualità è esclusa dallo schema di mezzo continuo, il cui carattere di astrattezza è, al contrario, legato alla continuità dei campi (con eventuali singolarità localizzate, peraltro non legate alla struttura della materia e, comunque, non riguardanti gli argomenti del corso) e, in particolare, alla distribuzione non singolare della densità. Ciò nondimeno, almeno per quanto riguarda alcuni aspetti del movimento di una singola particella, questa potrà essere efficacemente schematizzata come punto materiale, conforme sia alla giustificazione sopra richiamata, che, più sostanzialmente, sulla base del fatto che il baricentro di una particella fluida, come di un qualsiasi sistema meccanico, si muove nel rispetto delle leggi postulate per il punto materiale, equazione (62).

Per quanto riguarda le leggi fondamentali della meccanica, lo schema di mezzo continuo richiede di esprimere in termini di integrali su porzioni continue di fluido le grandezze presentate nel capitolo precedente con riferimento al caso discreto (insieme di punti materiali), secondo l'approccio generalmente seguito nei corsi di base specifici, in termini di sommatorie di quantità competenti ai punti materiali. Tali formulazioni integrali verranno introdotte caso per caso nel prosieguo.

2.2 Definizione di fluido

A livello microscopico, i fluidi si distinguono dai solidi per la mobilità delle loro molecole, che consente loro di subire variazioni di forma molto maggiori a parità di forze applicate. Inoltre, tali deformazioni sono permanenti, mentre un solido riacquista la forma iniziale al cessare delle azioni che ne avevano determinato la deformazione – per lo meno nel caso, abbastanza comune e spesso considerato desiderabile ai fini tecnici, di comportamento elastico. Infine, tipicamente, le piccole resistenze che i fluidi in movimento oppongono alle deformazioni, si annullano in condizioni di quiete. Conseguentemente, i fluidi tendono ad assumere la forma del recipiente che li contiene. I fluidi possono essere suddivisi in *liquidi* e *aeriformi* (o *gas*) a seconda della resistenza che essi oppongono ad azioni tendenti a modificarne il volume, ossia, a seconda della loro maggiore o minore *comprimibilità*: i liquidi sono fluidi poco comprimibili; gli aeriformi molto comprimibili. Naturalmente, un aeriforme, in quanto molto comprimibile, tende anche a dilatarsi liberamente e occupa perciò interamente il volume di un recipiente chiuso che lo contenga.

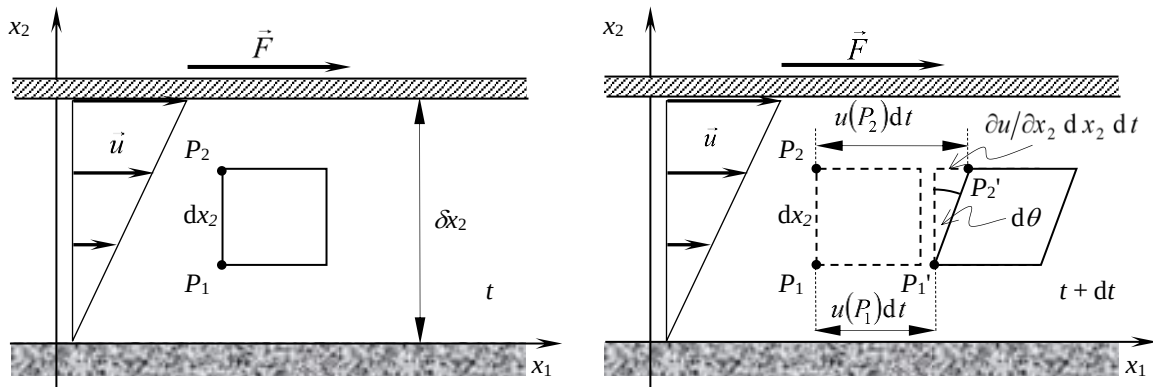


Figura 14. Velocità di deformazione di un volume fluido nel moto fra pareti piane parallele scorrevoli.

I concetti fin qui riassunti rimandano, in sostanza, alla distinzione fra solidi, liquidi e aeriformi della Fisica elementare: i solidi hanno forma e volume propri; i liquidi hanno volume proprio ma non forma propria; gli aeriformi non hanno forma né volume propri. Tali criteri di riconoscimento sono evidentemente riferiti a condizioni di quiete dei fluidi. Sebbene in precedenza siano state indicate alcune peculiarità del comportamento dei fluidi in movimento, a tali condizioni può essere riferita una definizione più puntuale, che ha il pregio di evidenziare alcune caratteristiche fisiche importanti del comportamento dei fluidi, rappresentabili in termini quantitativi.

Si consideri il caso di un fluido, per esempio acqua, interposto fra due pareti piane parallele poste a distanza molto piccola δx_2 (Figura 14), di cui una fissa e un'altra posta in movimento da una forza $\vec{F}$ avente direzione identificata da un asse x_1 complanare alle pareti, a partire da condizioni di quiete del fluido. Dopo un certo periodo di tempo, durante il quale le velocità aumentano progressivamente (*transitorio*), mantenendosi ovunque parallele all'asse x_1 , si perviene a una situazione di regime caratterizzata da una distribuzione lineare delle velocità nella direzione x_2 perpendicolare alle pareti piane, identica su piani paralleli al piano cartesiano $x_1 x_2$ (*moto piano*) e rappresentabile, pertanto, in termini del solo modulo $u(x_2)$. Il fluido aderisce perfettamente alle pareti, per cui il valore massimo della velocità del fluido a contatto con la parete superiore è anche la velocità della parete.

Si consideri, all'interno della massa fluida, un volume parallelepipedo di cui in Figura 14 è riportata la sezione sul piano $x_1 x_2$ e le particelle fluide aventi i propri baricentri nei punti P_1 e P_2 inizialmente coincidenti con gli estremi del lato della sezione parallelo all'asse x_2 , di lunghezza dx_2 . A partire da un generico istante di tempo t , relativo a condizioni di regime raggiunto, si consideri la deformazione del parallelepipedo (e della sua sezione rettangolare) in un intervallo di tempo elementare dt , durante il quale le due particelle si portano nelle posizioni P_1' e P_2' , avendo percorso le distanze date da $u(P_1)dt$ e $u(P_2)dt$. Sulla base dello schema di mezzo continuo introdotto nel §2.1, la velocità nel punto P_2 (come in tutti i punti aventi stessa coordinata x_2) si può esprimere come:

$$u(P_2) = u(P_1) + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2.$$

Conseguentemente, la maggiore distanza percorsa dalla particella centrata inizialmente nel punto P_2 rispetto alla particella centrata inizialmente nel punto P_1 è data da:

$$ds = \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 dt$$

Trattandosi di una quantità piccola rispetto al lato dx_2 della sezione, perché contenente a fattore la piccola quantità dt , l'angolo di rotazione del segmento congiungente i baricentri delle particelle intervenuto nell'intervallo elementare dt può essere espresso come:

$$d\theta = \arctg\left(\frac{ds}{dx_2}\right) \cong \frac{ds}{dx_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2} dt .$$

Tale angolo esprime la deformazione del parallelepipedo nell'intervallo dt . La rapidità con cui tale deformazione ha luogo (*velocità di deformazione*) è espressa da:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} , \quad (68)$$

avendo evidenziato a terzo membro che il modulo della velocità u coincide con la sua componente nella direzione x_1 . Poiché si tratta di condizioni di regime, invariabili nel tempo, concludiamo che il fluido in esame, soggetto a una sollecitazione costante rappresentata dallo scorrimento a velocità costante di un piano rispetto all'altro – o, se si preferisce, dalla forza costante $\vec{F}$ che induce lo scorrimento – in condizioni di regime è soggetto a una velocità di deformazione anch'essa costante nel tempo, finita e misurabile. Potremmo quindi anche definire fluido una sostanza che soddisfa tale requisito. Un comportamento di questo tipo implica evidentemente che a una sollecitazione nulla corrisponda anche una velocità di deformazione nulla.

Una caratteristica importante del processo di deformazione del fluido descritto in precedenza è che esso avviene in assenza di variazioni di volume del fluido, perché l'area della sezione deformata, che è un parallelogramma, è pari a quella della sezione rettangolare al tempo t . La definizione alternativa di fluido introdotta con riferimento a questo esempio è in effetti da intendersi riferita unicamente a deformazioni (e corrispondenti velocità di deformazione) a volume costante, del che è facile convincersi dall'esempio seguente.

Si consideri un recipiente contenente un aeriforme – per esempio, aria – chiuso dalla testata di un pistone sul quale viene esercitata una forza di modulo costante F a esso normale e tale da indurre una compressione dell'aeriforme, come da schema riportato in Figura 15. Partendo, ad esempio, da condizioni di pressione atmosferica dell'aeriforme, dopo un tempo sufficientemente lungo dall'inizio dell'applicazione della forza si perviene a una condizione di equilibrio statico, in cui la forza esterna F è bilanciata dalla spinta che il fluido esercita sulla superficie interna del pistone, determinata dalla aumentata pressione all'interno del recipiente rispetto al valore iniziale. Tale condizione di quiete del fluido in configurazione deformata rispetto alle condizioni iniziali si mantiene inalterata nel tempo nonostante l'azione continua della forza F . Il comportamento del fluido in termini di relazione fra sollecitazioni e velocità di deformazione è quindi sostanzialmente differente a seconda che le deformazioni avvengano a volume costante o a volume variabile.

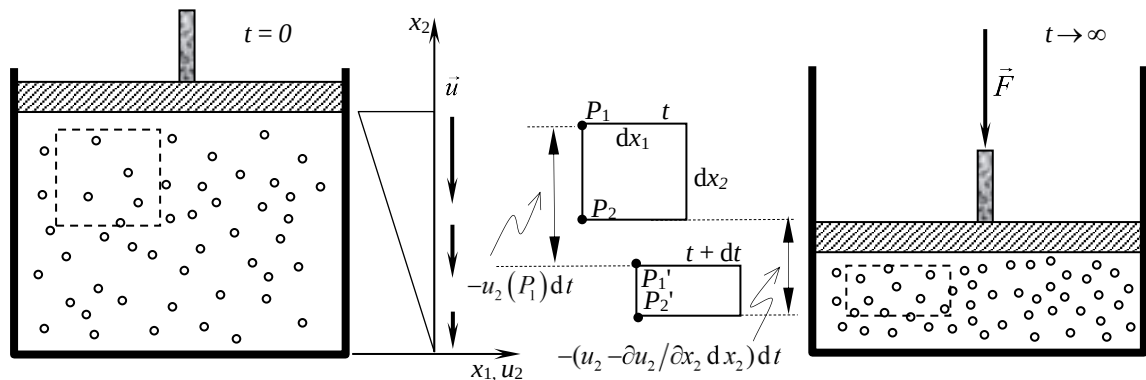


Figura 15. Fluido sottoposto a una deformazione a volume variabile.

Nel caso del sistema recipiente-aria-pistone, l'unica velocità di deformazione riscontrabile riguarda il volume. Lo strato di aria a contatto con il pistone si muove verso il basso con la sua stessa velocità,

avente unicamente componente $u_2 < 0$ sull'asse x_2 , mentre lo strato a contatto della parete di fondo rimane fermo. Pertanto, a un dato istante di tempo, uno strato intermedio si muove verso il basso con velocità tanto maggiore in modulo quanto più esso è vicino al pistone. La componente u_2 della velocità è quindi decrescente all'aumentare di x_2 , cosicché la sua derivata $\partial u_2 / \partial x_2$ è negativa. Se il movimento del pistone è sufficientemente lento da far sì che, istante per istante, la pressione dell'aria rimanga costante, la distribuzione istantanea delle velocità sulla colonna d'aria è lineare, come rappresentato in Figura 15.

Con riferimento a tale figura, un parallelepipedo fluido di lati dx_1 , dx_2 e dx_3 paralleli agli assi coordinati ha volume iniziale $V_0 = dx_1 dx_2 dx_3$. Con riferimento alla sezione del parallelepipedo nel piano $x_1 x_3$, nell'intervallo di tempo elementare dt il punto P_1 compie uno spostamento verso il basso di modulo $-u_2 dt$ (perché u_2 è negativa). La velocità del punto P_2 , inizialmente a distanza dx_2 da P_1 , si può ottenere da uno sviluppo in serie al primo ordine come $u_2 + \partial u_2 / \partial x_2 (-dx_2)$. Il punto P_2 compie quindi uno spostamento verso il basso di modulo $-(u_2 - \partial u_2 / \partial x_2 dx_2) dt$. La nuova altezza del parallelepipedo fluido risulta pertanto $dx_2 + \partial u_2 / \partial x_2 dx_2 dt$, mentre gli altri due lati sono rimasti invariati; il volumetto ha ancora forma parallelepipedica e volume $V = dx_1 (dx_2 + \partial u_2 / \partial x_2 dx_2 dt) dx_3$. La variazione di volume intercorsa fra i tempi t e $t+dt$ (negativa), è quindi:

$$dV = V - V_0 = dx_1 dx_2 dx_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dt ;$$

la variazione di volume specifica (per unità di volume iniziale) è:

$$\frac{dV}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dt$$

e la corrispondente velocità di variazione volumetrica specifica

$$\frac{1}{V_0} \frac{dV}{dt} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} ,$$

Anch'essa, essendo associata a una deformazione, è l'espressione di una velocità di deformazione, ma, diversamente dall'espressione (68), una velocità di deformazione a volume variabile.

Evidentemente, moti meno semplici geometricamente dei due illustrati in precedenza possono ammettere campi di velocità nei quali tutte e tre le componenti del vettore velocità siano diverse da zero e dipendenti dalla posizione, così da avere $\partial u_i / \partial x_j$ non nulle per tutte le combinazioni di i e j . Nel §4.5 si mostrerà che, nel caso più generale possibile di campo di moto, le velocità di deformazione di un volume fluido parallelepipedo potranno essere decomposte in: i) componenti a volume costante, rappresentate da termini $\partial u_i / \partial x_j$ con $i \neq j$, determinate da rotazioni attorno al terzo asse x_k , $k \neq i \neq j$; ii) componenti a volume variabile, rappresentate da termini $\partial u_i / \partial x_i$ con $i = j$, determinate da traslazioni differenziali lungo l'asse x_i di facce ad esso ortogonali.

L'insieme degli elementi forniti nel presente paragrafo fornisce un quadro abbastanza chiaro di cosa debba intendersi per fluido, nonché alcune caratteristiche essenziali del comportamento dei fluidi, anche se esposte in parte in forma puramente qualitativa. Successivamente, in sede di descrizione delle caratteristiche *reologiche* dei fluidi – attinenti alla relazione fra sollecitazioni e velocità di deformazione – si vedrà che alcune sostanze classificate come fluidi – anche di interesse tecnico – non soddisfano in realtà completamente le proprietà fin qui illustrate, peraltro comuni alla gran parte dei fluidi di interesse tecnico, fra cui in primo luogo l'acqua.

2.3 Sforzi nei fluidi. Forze di superficie.

Si consideri il volume fluido V riportato in Figura 16 e una delle due facce di un elemento di superficie ΔS interno al volume, di estensione finita e contenente un punto dello spazio P ,

appartenente a una superficie S di forma qualunque. Detta $\Delta \vec{T}$ la forza agente su tale faccia dell'elemento di superficie, si dice *sforzo* medio o *tensione* media sulla data faccia dell'elemento di superficie ΔS considerato la grandezza vettoriale:

$$\vec{\tau} = \frac{\Delta \vec{T}}{\Delta S} .$$

In generale, il valore dello sforzo medio dipende dalle dimensioni della superficie ΔS . Riducendo progressivamente le dimensioni di tale elemento di superficie contenente il punto P , questo tende a essere contenuto nel piano tangente alla superficie S nel punto P . La giacitura e la faccia dell'elemento di superficie ΔS in questione possono quindi essere individuati dalla corrispondente normale esterna $\vec{n}$. Nell'ambito dello schema di mezzo continuo si dice sforzo (o tensione) nel punto P e sulla data faccia dell'elemento di superficie considerato la grandezza vettoriale definita dal limite:

$$\vec{\tau}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{T}}{\Delta S} = \frac{d \vec{T}}{d S} . \quad (69)$$

Poiché finora il concetto di schema di mezzo continuo è stato trattato con riferimento al concetto di particella fluida – quindi, di un volume – è il caso di osservare che, nel caso della valutazione dello sforzo in un punto, il limite (69) andrebbe piuttosto riferito a una superficie elementare ΔS_P sufficientemente ristretta da poter essere considerata come puntiforme rispetto alle superfici che caratterizzano il volume fluido in oggetto ma anche sufficientemente estesa di modo che la corrispondente forza elementare $\Delta \vec{T}$ costituisca un valore statisticamente rappresentativo delle azioni che le molecole che vengono a contatto attraverso la superficie esercitano l'una sull'altra.

Con la notazione utilizzata per lo sforzo nel punto P , contenente il pedice n , si vuole evidenziare il fatto che il valore dello sforzo nel punto dipende dall'orientazione della faccia dell'elemento di superficie contenente il punto, ossia, dalla direzione e dal verso della sua normale. In generale, per uno stesso punto dello spazio, a ciascuna delle ∞^2 possibili giaciture dell'elemento di superficie corrispondono quindi differenti valori dello sforzo nel punto. Pertanto, la stessa terminologia "sforzo in un punto", di per sé imprecisa per quanto sopra detto, viene impiegata sottintendendo la cognizione della dipendenza dello sforzo nel punto dalla giacitura della superficie, eventualmente per aver già precisato la giacitura cui ci si intende riferire. Si vedrà peraltro nel prosieguo come lo stato di sforzo in un punto possa essere compiutamente rappresentato in termini alquanto più semplici.

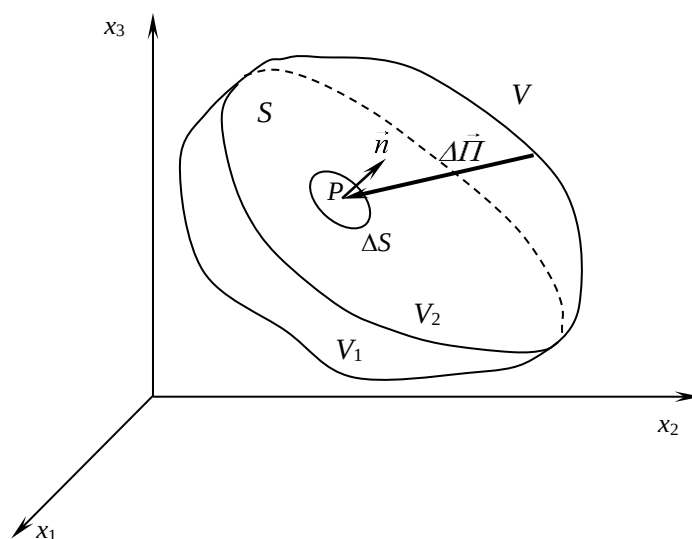


Figura 16. Schema di definizione dello sforzo in un punto di una superficie fluida.

Lo sforzo in un punto può essere decomposto nelle sue componenti *tangenziale* e *normale* alla superficie su cui agisce. La componente normale, detta anche *assiale*, si dice di *compressione* se avente verso opposto alla normale (esterna) $\vec{n}$, tendente perciò a far avvicinare due particelle contigue la cui congiungente sia essa stessa normale alla superficie, di *trazione* nel caso contrario. Salvo che in condizioni molto particolari, i fluidi non sono atti a sopportare sforzi di trazione ragguardevoli, per cui gli sforzi normali risultano generalmente di compressione. La componente normale dello sforzo viene talora designata, impropriamente, con il termine di *pressione*, senza riferimento al particolare stato di sforzo vigente. Nel prosieguo, tale termine verrà utilizzato unicamente, e più propriamente, con riferimento a uno stato di sforzo puramente assiale e indipendente dalla giacitura dell'elemento di superficie considerato, detto *isotropo* o *sferico*, che si osserva, ad esempio, nei più comuni tipi di fluidi in condizioni di quiete.

Come di consueto, anche nel passaggio al limite (69) si conserva la definizione dello sforzo come forza agente sull'unità di superficie, o forza per unità di superficie. Diciture analoghe verranno d'ora in poi utilizzate, senza ulteriore simile precisazione, per grandezze definite in modo analogo. Gli sforzi hanno le dimensioni fisiche di una forza divisa per una superficie, $[ML^{-1}T^{-2}]$ e si misurano in N/m^2 nel SI¹⁵. Tale unità di misura è denominata *Pascal* (simbolo Pa).

Nel prosieguo si ammetterà sempre che il modulo dello sforzo in un punto sia sempre finito. In tal caso, la forza elementare agente su un'areola dS , supposta tendente a zero, data da:

$$d\vec{I} = \vec{\tau}_n dS ,$$

risulta proporzionale all'area della superficie dS e pertanto infinitesima dello stesso ordine, così come il suo modulo. Forze di questo tipo vengono dette, per ovvi motivi, *forze di superficie*.

Data una superficie S , per esempio la superficie che separa il volume V di Figura 16 nelle due parti V_1 e V_2 , il sistema delle (infinite) forze elementari agenti punto per punto sulla faccia della superficie prescelta, detto *spinta* sulla superficie, è caratterizzato, come ogni sistema di forze, dal suo risultante, dato dall'integrale:

$$\vec{I} = \int_S \vec{\tau}_n dS \quad (70)$$

e dal suo momento risultante, calcolato rispetto a un dato polo:

$$\vec{M} = \int_S \vec{r} \times \vec{\tau}_n dS .$$

Per il principio di azione e reazione, i due vettori sforzo relativi a uno stesso punto e a una stessa giacitura, ma alle due facce opposte della superficie elementare così definita, sono uguali e contrari. Pertanto, anche la spinta che il fluido appartenente al volume V_1 esercita sul volume V_2 attraverso la superficie di contatto S fra i due volumi ha risultante e momento risultante uguali e contrari alla spinta che il fluido appartenente al volume V_2 esercita sul fluido appartenente al volume V_1 .

In particolare, un volume fluido può trovarsi a contatto con una parete solida attraverso una certa superficie S . Anche in questo caso, per il principio di azione e reazione la spinta che il fluido esercita sulla parete è uguale e contraria alla spinta che la parete esercita sul fluido. Tale considerazione tornerà utile nella soluzione di problemi pratici legati alla determinazione della spinta su pareti solide. Nei problemi applicativi riguardanti il calcolo di spinte su superfici materiali, inoltre, si desidera generalmente sostituire il sistema di forze di superficie in esame con un sistema di forze equivalente, avente quindi uguali risultante e momento risultante, ma più semplice. Qualunque sistema di forze può ridursi a un sistema equivalente dato da due forze non complanari (sghembe) o da una forza più una coppia, come richiamato nel § 1.3.4.2.

¹⁵ Ove non si incorra in ambiguità in presenza di più grandezze a denominatore, le unità di misura verranno indicate facendo uso del simbolo di frazione in luogo della forma in termini di potenze a esponenti negativi.

2.4 Densità e peso specifico. Forze di volume.

Sino a questo punto, è stato utilizzato un concetto di densità riferito a corpi omogenei di dimensioni finite su base sostanzialmente intuitiva, legato al rapporto fra la massa e il volume di tali corpi. Lo schema di mezzo continuo richiede tuttavia di definire valori puntuali della densità ρ ai fini della rappresentazione della distribuzione della densità in termini di campi scalari del tipo (36) o (37):

$$\rho = \rho(\vec{x}, t) \equiv \rho(x_1, x_2, x_3, t) ,$$

in cui $\vec{x}$ è il vettore che identifica la posizione di un punto P nello spazio e $x_i, i = 1, 2, 3$ le coordinate del punto nel sistema di riferimento prescelto, costituenti le componenti scalari del vettore posizione (vedi Figura 17).

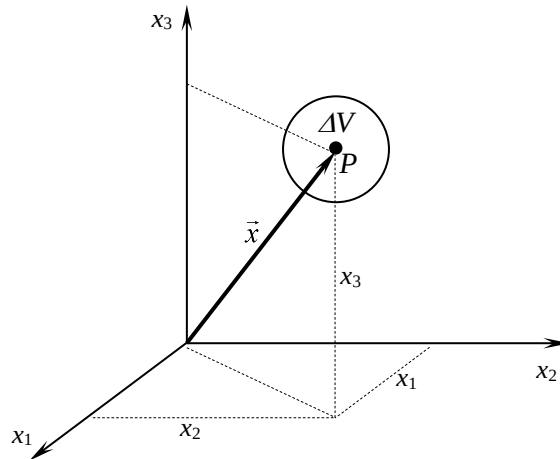


Figura 17. Schema di definizione della densità in un punto.

Analogamente al caso dello sforzo medio su una superficie di cui al § 2.3, considerato un volume finito ΔV di massa Δm contenente il punto P , la densità media della porzione di fluido considerato, dipendente in generale dalle dimensioni del volume ΔV , è data dal rapporto:

$$\bar{\rho} = \frac{\Delta m}{\Delta V} .$$

Riducendo progressivamente le dimensioni del volume racchiudente il punto P , nell'ambito dello schema di mezzo continuo la densità nel punto è data dal limite:

$$\rho(\vec{x}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{d m}{d V} ,$$

che – lo si ripete per un'ultima volta – è in realtà da intendersi equivalente al limite:

$$\rho(\vec{x}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow V_P} \frac{\Delta m}{\Delta V} ,$$

se si desidera che il campo risultante sia continuo.

In quanto definita come massa dell'unità di volume, la densità ha dimensioni fisiche $[M L^{-3}]$ e si misura in kg/m^3 nel SI. Il volume dell'unità di massa, inverso della densità, è detto *volume specifico*.

In generale, la densità di un fluido può essere funzione di svariate variabili termodinamiche; quantomeno, della temperatura T e della pressione p . Il corrispondente legame funzionale:

$$\rho = \rho(p, T) \quad (71)$$

è detto *equazione di stato* del fluido¹⁶.

Nel caso dei liquidi, per definizione poco comprimibili, può essere di una qualche rilevanza la dipendenza della densità dalla temperatura. In tutti i liquidi, la densità diminuisce all'aumentare della temperatura, con l'eccezione dell'acqua, la cui densità presenta il valore massimo alla temperatura $T^{\circ} = 4^{\circ}\text{C}$. Per l'acqua alla pressione atmosferica normale è stata determinata la seguente relazione:

$$\rho = \rho_0 \left(1 + 5,2939 \times 10^{-5} T - 6,5322 \times 10^{-6} T^2 + 5,2939 \times 10^{-8} T^3 \right),$$

in cui T è la temperatura in gradi centigradi (celsius) e $\rho_0 = 999,457 \text{ kg/m}^3$ è la densità a $T^{\circ} = 0^{\circ}\text{C}$.

Nel campo di temperature $0 < T < 40^{\circ}\text{C}$ le modeste variazioni della densità dell'acqua ($< 0,8\%$) consentono di fare senz'altro riferimento al valore di 1000 kg/m^3 .

La massa dm di un volume elementare dV è data evidentemente da:

$$dm = \rho dV$$

e la massa m di un volume finito V dall'integrale:

$$m = \int_V \rho dV.$$

Il volume dV di massa dm di cui sopra è soggetto a una forza peso pari in modulo al prodotto della massa per l'accelerazione di gravità, g :

$$dG = \rho g dV \quad (72)$$

Potendo l'accelerazione di gravità essere considerata costante su estensioni sufficientemente limitate¹⁷, con ragionamento analogo a quello esposto per definire la densità in un punto, si può definire il *peso specifico* (per unità di volume) γ , dato da:

$$\gamma = \frac{dG}{dV} = \rho g.$$

Il peso specifico ha dimensioni $[\text{ML}^{-2}\text{T}^{-2}]$ e si misura in N/m^3 nel SI. Il valore di peso specifico dell'acqua utilizzabile nei calcoli corrispondente alla densità di 1000 kg/m^3 indicata in precedenza è pari a 9806 N/m^3 , corrispondente a 1000 kp/m^3 nel sistema pratico.

Nella Tabella 2 vengono riportati i valori delle densità e dei pesi specifici di alcuni fluidi di impiego più frequente, riferiti a condizioni di pressione atmosferica normale di 101325 Pa . Gli ordini di grandezza della densità e del peso specifico dell'acqua dovrebbero tuttavia essere memorizzati, perché veramente fondamentali.

Come per lo sforzo in un punto, nel prosieguo si ammetterà sempre che la densità in un punto sia finita. Il modulo della forza peso elementare agente su un volume infinitesimo dV , dato dalla equazione (72), risulta proporzionale al volume dV e pertanto infinitesimo dello stesso ordine. Forze di questo tipo vengono dette *forze di volume* o *forze di massa*, identificate, in generale, dalla forza agente sull'unità di massa, $\vec{f}_m$. Esempi di forze di massa differenti dalla forza peso sono la forza

¹⁶ La densità può dipendere, oltre che dalla pressione e dalla temperatura, anche da altre grandezze; in particolare, dalla concentrazione di sostanze disciolte: ad esempio, la salinità nel caso dell'acqua di mare, o le concentrazioni delle stesse numerose specie disciolte nella normale acqua dolce potabile. Un'espressione del tipo (71) è quindi relativa ad un fluido *omogeneo*, in cui la concentrazione di sostanze disciolte eventualmente presenti sia, comunque, uniforme.

¹⁷ Anche questa precisazione verrà d'ora in avanti omessa.

centrifuga e la forza di Coriolis, entrambe forze fittizie che si manifestano in riferimenti non inerziali (§1.3.5), delle quali tuttavia non ci occuperemo nell'ambito del corso.

Ricordando che il versore della verticale può esprimersi come gradiente della corrispondente coordinata z , nel caso della forza peso si ha, in particolare, $\vec{f}_m = -g\nabla z$, coincidente con l'accelerazione di gravità. La forza peso elementare agente sul volumetto dV è data pertanto da:

$$d\vec{G} = \rho \vec{f}_m dV = -\rho g dV \nabla z = -\gamma dV \nabla z ,$$

mentre il peso di un volume fluido finito V si ottiene dall'integrale:

$$\vec{G} = \int_V -\gamma \nabla z dV = \int_V -\rho g \nabla z dV = -g \nabla z \int_V \rho dV = -gm \nabla z , \quad (73)$$

suscettibile di ovvie semplificazioni nel caso di densità uniforme ($\rho = \text{cost}$).

Tabella 2: Densità e pesi specifici di fluidi di uso più frequente in condizioni di pressione atmosferica normale.

<i>Fluido</i>	<i>T</i> (°C)	ρ (kg/m ³)	γ (N/m ³)
Idrogeno	20	0,0838	0,821
Azoto	20	1,166	11,434
Ossigeno	20	1,331	13,052
Aria secca	0	1,293	12,679
Aria secca	15	1,226	12,022
Acqua	15	1000	9806
Acqua di mare	15	1030	10100
Mercurio	20	13546	132871
Alcool etilico	15	794	7786
Acqua ossigenata	15	1465	14366
Benzina per automobili	15	740	7256
Combustibili liquidi pesanti	15	880 ÷ 970	8629 ÷ 9512
Oli vegetali	15	900 ÷ 920	8225 ÷ 9032

2.5 Viscosità

Come si è avuto modo di accennare nel § 2.2, i fluidi si distinguono dai solidi per la relativa modesta entità delle resistenze opposte a cambiamenti di forma sotto l'azione di forze applicate loro. Ancora, si è accennato al fatto che, tipicamente, nei fluidi le resistenze alle deformazioni si annullano in condizioni di quiete, con le diverse conseguenze che da ciò derivano nei casi di liquidi e aeriformi. Tali caratteristiche sono, invero, quelle riscontrabili nell'acqua, nell'aria e in una molteplicità di fluidi di interesse anche tecnico, ma non si possono tuttavia dire comuni alla totalità dei fluidi esistenti in natura, né ai soli fluidi di interesse tecnico. Nel presente paragrafo verranno sinteticamente illustrate più specificamente tali proprietà dei fluidi di opporre resistenza alle deformazioni, dette proprietà *reologiche* (*Reologia* è detta la branca della Fisica che si occupa di tali proprietà), con riferimento a una più specifica definizione, peraltro in larga misura idealizzata, dell'esperimento rappresentato in Figura 14.

Si supponga infatti ora che la lastra superiore soggetta a una azione tangenziale di modulo F abbia una superficie finita S . Si può pertanto ammettere, idealmente, che uno sforzo tangenziale uniforme di modulo $\tau = F/S$ sia esercitato dalla faccia inferiore della lastra superiore scorrevole sulla superficie dell'acqua a contatto con essa. Fintantoché la velocità della piastra non supera un valore limite tale da determinare l'insorgere di turbolenza all'interno del liquido, al di sotto della lastra in movimento

le caratteristiche del profilo di velocità a regime sono le medesime del caso di Figura 14: una distribuzione lineare della velocità con valore nullo sul fondo e massimo sulla superficie del fluido a contatto con la lastra superiore, cui corrisponde un certo valore della derivata spaziale della velocità nella direzione normale al moto (e alle lastre), pari, come s'è, visto, alla velocità di variazione dell'angolo di deformazione θ , equazione (68). Le caratteristiche reologiche dei fluidi vengono frequentemente rappresentate in termini di legame funzionale (*equazione reologica*) fra la velocità di deformazione angolare $d\theta/dt$ e lo sforzo τ , il quale risulta costante lungo la direzione normale alle piastre nell'esperimento ideale summenzionato, data la linearità del profilo di velocità.

2.5.1 Fluidi newtoniani

Le proprietà reologiche di un'ampia classe di fluidi, inclusiva di acqua, aria, tutti i gas e quasi tutti i liquidi omogenei non macromolecolari sono descritte dal seguente legame di proporzionalità:

$$\tau = \mu \frac{d\theta}{dt} \quad (74)$$

in cui il fattore di proporzionalità μ dipende dalla pressione e dalla temperatura. I fluidi appartenenti a tale classe vengono definiti *fluidi newtoniani*. Tale categoria di fluidi è talmente estesa, comprende fluidi di natura talmente comune ed è caratterizzata da una equazione reologica di tale semplicità da dare luogo alla distinzione fondamentale dei fluidi fra newtoniani e non newtoniani. L'equazione reologica dei fluidi newtoniani (per dati valori di temperatura e pressione) è rappresentata da una retta passante per l'origine degli assi, come mostrato in Figura 18. Tali rappresentazioni grafiche sono dette *curve reologiche*. Si rimarca, ancora una volta, la differenza rispetto ai solidi elastici, nei quali gli sforzi tangenziali sono direttamente proporzionali alle deformazioni angolari piuttosto che alla velocità di deformazione angolare.

Il coefficiente di proporzionalità della relazione (74) prende il nome di *viscosità dinamica* o semplicemente viscosità. La viscosità ha dimensioni $[ML^{-1}T^{-1}]$ e si misura in $kg\ m^{-1}s^{-1}$ (ovvero Ns/m^2) nel SI. Nei gas, la viscosità aumenta con la temperatura e con la pressione, mentre nei liquidi diminuisce all'aumentare della temperatura e aumenta generalmente con la pressione. In particolare, un'eccezione è costituita dall'acqua, nella quale la variazione con la pressione non è monotona e comunque di scarsa importanza ai fini tecnici. Per l'acqua può utilizzarsi la seguente espressione stabilita da Poiseuille, in buon accordo con i valori determinati sperimentalmente anche di recente:

$$\mu = \mu_0 (1 + 0,0337\ T + 0,00022\ T^2)^{-1},$$

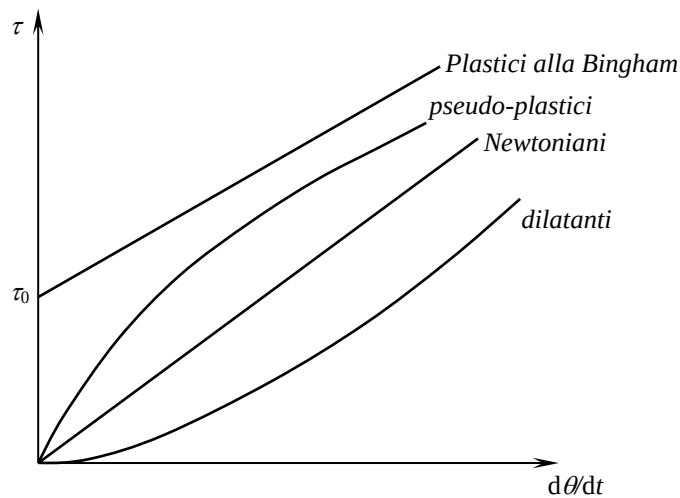


Figura 18. Diagrammi rappresentativi delle caratteristiche reologiche (curve reologiche) di fluidi a comportamento indipendente dal tempo.

in cui T è la temperatura in gradi centigradi e $\mu_0 = 1,773 \times 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$ è la viscosità a 0°C . Variazioni della viscosità con la pressione sono state misurate ma in misura estremamente ridotta, apprezzabile per variazioni di pressione dell'ordine di 10^7 Pa , ossia, di centinaia di volte la pressione atmosferica. Tali variazioni sono pertanto certamente trascurabili in campo tecnico.

Nelle equazioni che governano il moto dei fluidi è rilevante, piuttosto che la viscosità dinamica μ in sé, il suo rapporto alla densità del fluido ρ . La grandezza:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

viene denominata *viscosità cinematica*, ha dimensioni $[\text{L}^2 \text{T}^{-1}]$ e si misura in m^2/s nel SI.

In Tabella 3 vengono riportati i valori di viscosità dinamica e viscosità cinematica di alcuni fluidi alla temperatura di 20°C .

Tabella 3: valori di viscosità dinamica e viscosità cinematica di alcuni fluidi alla temperatura di 20°C .

<i>Fluido</i>	$\mu \cdot 10^6$ (Ns/m ²)	$\nu \cdot 10^4$ (m ² /s)
Idrogeno	9,12	1,09
Azoto	17,36	0,149
Ossigeno	20,10	0,151
Aria secca	18,24	0,151
Acqua	1006	0,01008
Glicerina	800000	6,35
Mercurio	1560	0,00115
Alcool etilico	1200	0,00746
Benzina	290	0,00440
Kerosene	1867	0,0233
Petrolio greggio (*)	18000	0,20
Olio lubrificante SAE 30 (*)	290000	4,0
Olio crudo	7845	0,0913

(*) valori medi indicativi

2.5.2 Fluidi non newtoniani

Fondamentalmente, i fluidi non newtoniani vengono distinti in:

- fluidi le cui caratteristiche reologiche sono indipendenti dal tempo;
- fluidi le cui caratteristiche reologiche dipendono dalla durata dello sforzo applicato o della deformazione, oppure dalla precedente storia;
- fluidi che possiedono alcune caratteristiche dei solidi (*elastoviscosi* o *viscoelastici*).

In Figura 18 sono mostrate le rappresentazioni grafiche delle equazioni reologiche delle varie specie di fluidi a comportamento indipendente dal tempo, per i quali è possibile esprimere un'equazione reologica nella forma $\tau = f(d\theta/dt)$. Essi si distinguono in:

- fluidi *plastici alla Bingham*;
- fluidi *pseudoplastici*;
- fluidi *dilatanti*.

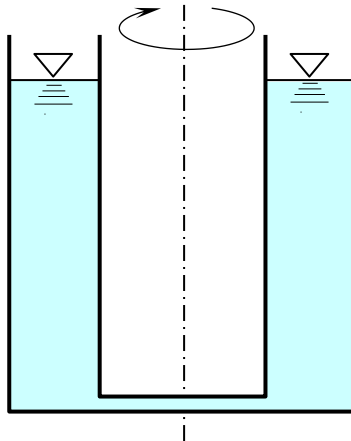


Figura 19. Illustrazione schematica di un viscosimetro.

I fluidi plastici alla Bingham sono caratterizzati da un'equazione reologica lineare non passante per l'origine degli assi. Ciò significa che tali fluidi sono in grado di subire e trasmettere sforzi tangenziali anche in condizioni di quiete ($d\theta/dt = 0$). È quindi evidente che essi non rispondono pienamente alla definizione di fluido fornita nel §2.2, che in tale sede era stata infatti segnalata come non rigorosamente esaustiva. Esempi di fluidi di questo tipo, anche di interesse tecnico, sono: alcune vernici, la comune pasta dentifricia, la boiaccia di cemento, i fanghi impiegati nelle trivellazioni e i fanghi di fogna. In particolare, l'utilità di tale comportamento nei fanghi di trivellazione è data dal fatto che, a trivella non operante, la coesione dei fanghi corrispondente alla possibilità di sopportare lo sforzo τ_0 consente loro di evitare il franamento delle pareti del pozzo; la trivellazione può successivamente essere ripresa per effetto del superamento del valore critico di sforzo dovuto all'attrito esercitato dalla trivella rotante sulle pareti del pozzo.

I fluidi pseudoplastici sono caratterizzati da una curva reologica passante per l'origine e avente concavità rivolta verso il basso. Il rapporto fra sforzo tangenziale e velocità di deformazione, detto *viscosità apparente*, diminuisce pertanto all'aumentare della velocità di deformazione, tendendo a valori pressoché costanti per valori sufficientemente elevati di quest'ultima. Pertanto, essi presentano una resistenza al moto relativamente elevata per piccole velocità, che diminuisce all'aumentare della velocità di deformazione. Esempi di fluidi pseudoplastici sono dati da sospensioni di particelle asimmetriche o soluzioni di polimeri come i derivati della cellulosa o le sostanze macromolecolari.

I fluidi dilatanti presentano un comportamento opposto a quello dei fluidi pseudoplastici, la relativa curva reologica presentando la concavità rivolta verso l'alto, con una viscosità apparente crescente con la velocità di deformazione. Esempi di fluidi dilatanti sono costituiti da sospensioni di materiali solidi ad alta concentrazione.

Per quanto riguarda i fluidi a comportamento dipendente dalla durata del movimento, questi vengono detti *tixotropici* se, a velocità di deformazione mantenuta costante, lo sforzo tangenziale, e quindi la viscosità apparente, decrescono al trascorrere del tempo, tendendo a un valore asintotico corrispondente a un comportamento di tipo newtoniano; si dicono *reopettici* se denotano un comportamento opposto, in alcuni casi tendendo però ad assumere l'aspetto e il comportamento di una sostanza solida. Esempi di fluidi tixotropici di interesse tecnico sono alcuni tipi di vernici e di lubrificanti.

Infine, i fluidi elastoviscosi presentano, accanto alle proprietà viscose proprie dei fluidi, anche alcune caratteristiche tipiche dei solidi – in particolare, una parziale reversibilità delle deformazioni – di cui peraltro le prime prevalenti rispetto alle seconde. Esempi di tale tipo di fluidi sono emulsioni o sospensioni di un fluido newtoniano in un altro o alcuni tipi di bitumi.

Piuttosto che allestendo l'esperimento descritto nel §2.2, mediante il quale non possono essere eseguite misure sufficientemente accurate, in pratica la determinazione delle caratteristiche reologiche dei fluidi viene eseguita mediante un apparecchio denominato *viscosimetro*, costituito da

due cilindri coassiali di diametri poco differenti, in grado di ruotare con attriti trascurabili rispetto all'asse comune ma indipendentemente l'uno dall'altro (Figura 19), fra i quali si interpone il fluido di interesse. Ponendo in rotazione il cilindro esterno e mantenendo fermo il cilindro interno mediante applicazione di una coppia, dalla misura di tale coppia e sulla base della linearità della distribuzione radiale di velocità e della simmetria cilindrica del moto, si risale alla misura della viscosità.

2.6 Tensione superficiale

Si consideri la superficie di separazione fra un liquido e un fluido (liquido o gas) non miscibili – per esempio, la superficie libera di un liquido a contatto con l'atmosfera riportata in Figura 20 – e si consideri una curva Γ di forma qualunque su tale superficie. Si immagini di effettuare un taglio della superficie lungo tale curva, dividendola in due parti, S_1 e S_2 . Per effetto delle forze di attrazione molecolare, attraverso un segmento elementare di lunghezza ds individuato sulla curva, la superficie S_2 esercita sulla superficie S_1 la forza elementare di trazione $d\vec{F}$ raffigurata in Figura 20, uguale e contraria alla forza che la superficie S_1 esercita sulla superficie S_2 , di modulo $T_s ds$, in cui T_s è detta *tensione superficiale* e rappresenta, per quanto detto, una forza di trazione per unità di lunghezza¹⁸.

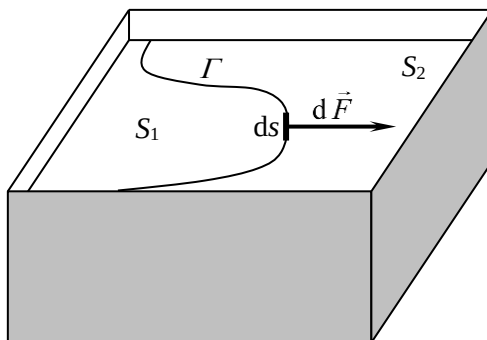


Figura 20. Schema illustrativo della tensione superficiale agente lungo una curva giacente sulla superficie libera di un liquido.

Il valore della tensione superficiale dipende dalla natura dei fluidi a contatto e dalla temperatura, diminuendo all'aumentare di questa. In Tabella 4 vengono riportati i valori di tensione superficiale per alcune coppie liquido-fluido alla temperatura di 20 °C.

Tabella 4. Valori della tensione superficiale per alcune coppie liquido-fluido alla temperatura di 20 °C.

Fluidi a contatto	T_s (N/m)
acqua – gas	0,0726
mercurio – gas	0,4820
benzene – gas	0,0294
olio di oliva – gas	0,3187
alcool etilico – gas	0,0216
etere etilico – gas	0,0157
mercurio – acqua	0,4178
acqua – olio di oliva	0,0196

¹⁸ Il termine "tensione" viene quindi qui utilizzato con riferimento esclusivo ad una azione di trazione esercitata in direzione normale all'elemento di curva. Tale accezione non è quindi da confondere con quella equivalente al concetto di sforzo, sia esso tangenziale o normale e, in quest'ultimo caso, sia di trazione che di compressione.

Gli effetti della tensione superficiale si manifestano, ad esempio, nel determinare la forma approssimativamente sferica delle gocce di un liquido o nei fenomeni di capillarità. È facile mostrare come, in virtù dei valori relativamente modesti della tensione superficiale, il suo effetto può essere rilevante solo in presenza di curvature relativamente accentuate della superficie del liquido in esame – ad esempio, nel menisco che si determina in tubi di piccolo diametro (capillari). Tali fenomeni verranno trattati sinteticamente nel §3.13.

2.7 Tensione di vapore

La tensione di vapore costituisce la proprietà fisica dei liquidi che ne determina la possibilità di passare allo stato di vapore. Per chiarire tale concetto, si consideri il recipiente chiuso raffigurato nella Figura 21, nel quale venga creato il vuoto e, successivamente, venga immesso del liquido che ne occupi soltanto una parte.

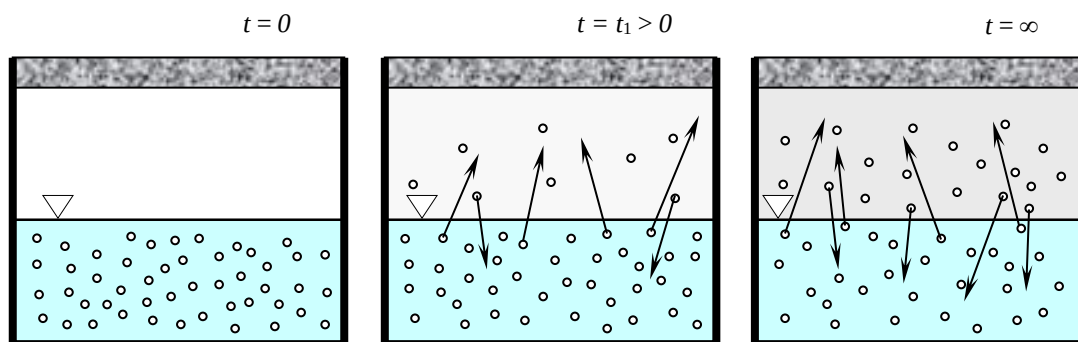


Figura 21. Formazione di vapore saturo per evaporazione di un liquido in un contenitore inizialmente sottovuoto.

Le molecole costituenti il liquido sono animate da moti caratterizzati, nel loro insieme, da una distribuzione di velocità e, quindi, di energia cinetica, il cui valore medio è legato alla grandezza macroscopica costituita dalla temperatura del liquido. Le singole molecole mutano in continuazione le proprie quantità di moto ed energia cinetica per effetto degli urti vicendevoli e sono, inoltre, soggette alle forze di mutua attrazione alle quali si è fatto cenno nel §2.6. Una molecola passa in fase gassosa quando, per effetto della propria energia cinetica e di una relativa vicinanza alla superficie libera del liquido, essa è in grado di abbandonare la massa liquida, vincendo le resistenze costituite dalle forze di attrazione opposte delle molecole circostanti. La probabilità che ciò avvenga è, quindi, tanto maggiore quanto maggiore è l'energia cinetica della molecola e quanto più prossima essa si trova alla superficie libera. Supponendo di mantenere costante la temperatura all'interno del contenitore, il numero di molecole che passano in fase gassosa nell'unità di tempo è costante, perché tale si manterrà la frazione di molecole in possesso dei requisiti su indicati.

Le molecole che sono passate in fase gassosa sono anch'esse animate da moti caotici. I conseguenti scambi di quantità di moto con il liquido e con le pareti del contenitore hanno la loro manifestazione macroscopica nella pressione misurabile nel vapore, la quale, per quanto detto, aumenta all'aumentare del numero di molecole in fase gassosa. A loro volta, fra le molecole allo stato di vapore, alcune si troveranno nelle condizioni favorevoli a un loro rientro nella massa liquida. Tuttavia, anche il numero di molecole che si trovano in tale condizione risulta proporzionale al numero di molecole in fase gassosa e, pertanto, crescente con la pressione del vapore.

Inizialmente ($t=0$ in Figura 21) vi saranno pertanto unicamente molecole che riescono ad abbandonare la massa liquida, contribuendo così alla formazione di vapore e della corrispondente pressione. In un istante intermedio del processo ($t = t_1 > 0$ in Figura 21), il numero di molecole che si porta, nell'unità di tempo, dalla fase liquida a quella gassosa si mantiene costante, mentre la quantità di molecole che dalla fase gassosa si riporta alla fase liquida, in quanto inferiore alla prima, determina un continuo aumento delle molecole in fase gassosa e, corrispondentemente, un aumento sia della

pressione del vapore che, quindi, del numero di molecole che rientra in fase liquida. Dopo un tempo sufficientemente lungo dall'inizio del processo (schematicamente indicato con $t = \infty$ in Figura 21) si raggiunge una condizione di equilibrio nella quale il numero di molecole che si porta dalla fase gassosa a quella liquida nell'unità di tempo uguaglia la corrispondente grandezza relativa al passaggio opposto. In tali condizioni, il numero di molecole in fase gassosa si deve mantenere costante (naturalmente, a meno di variazioni irrisorie che possono intervenire in intervalli di tempo molto piccoli), così come, conseguentemente, la pressione del vapore. Tale condizione di equilibrio, nella quale non si ha ulteriore evaporazione di liquido, è anche detta di *saturazione* e la corrispondente pressione *pressione di vapor saturo* o *tensione di vapore*. Più precisamente, sebbene le due grandezze siano numericamente identiche, la prima rappresenta, concettualmente, il fenomeno legato alla presenza di molecole in fase gassosa, quindi la pressione vera e propria del vapore e la conseguente tendenza delle molecole in fase gassosa a rientrare nella fase liquida; la seconda rappresenta piuttosto la tendenza del liquido a evaporare, evidenziata da un termine – tensione – che richiama in maniera più suggestiva il processo di "estrazione" delle molecole dalla fase liquida. Come ogni pressione, anche la tensione di vapore è misurata in Pascal nel SI.

Le condizioni di equilibrio menzionate sono naturalmente di tipo dinamico: sebbene il numero di molecole allo stato di vapore si mantenga costante, esse non sono sempre le stesse, venendo continuamente sostituite da altre molecole fuoriuscite dal liquido, mentre altre nel contempo vi ritornano.

Ogniquale volta un liquido è soggetto a una pressione esterna uguale o inferiore alla tensione di vapore esso tende a passare allo stato di vapore, cioè a entrare in ebollizione. Un liquido può essere quindi portato in condizioni di ebollizione aumentandone la tensione di vapore mediante un aumento di temperatura a fronte di date condizioni di pressione esterna (è il caso dell'acqua nella pentola per cuocere gli spaghetti soggetta alla pressione atmosferica), o, in date condizioni di temperatura (quindi, di tensione di vapore), diminuendo la pressione esterna. Il secondo caso è quello che interessa qui maggiormente, potendo realizzarsi in situazioni di interesse tecnico legate alla presenza di depressioni, come è il caso, ad esempio, dei sifoni o degli impianti di pompaggio. Dei problemi connessi al verificarsi di condizioni di questo tipo si darà conto nei capitoli seguenti.

Nella Tabella 5 sono riportati alcuni valori della tensione di vapore dell'acqua in funzione della temperatura. Si osservi come in Tabella 5 siano inclusi anche valori relativi a temperature inferiori allo zero, ossia al passaggio diretto dallo stato solido allo stato di vapore, che è pure possibile e prende il nome di *sublimazione*.

Tabella 5. Valori della tensione di vapore dell'acqua, p_v , in funzione della temperatura.

T (°C)	p_v (atm)	T (°C)	p_v (atm)	T (°C)	p_v (atm)
-25	$6,26 \times 10^{-4}$	10	$1,21 \times 10^{-2}$	90	$6,92 \times 10^{-1}$
-15	$1,63 \times 10^{-3}$	30	$4,19 \times 10^{-2}$	100	1,00
-5	$3,95 \times 10^{-3}$	50	$1,22 \times 10^{-1}$	150	4,70
0,01	$6,03 \times 10^{-3}$	70	$3,08 \times 10^{-1}$	200	39,24

2.8 Comprimibilità

Qualsiasi fluido modifica il proprio volume al variare della pressione cui esso è soggetto. Dato un volume di fluido V in date condizioni di pressione, a una variazione di pressione elementare dp , supposta uniforme sulla superficie di contorno del volume, corrisponde una variazione di volume dV data da:

$$dV = -\frac{V}{\varepsilon} dp, \quad (75)$$

in cui il termine ε è detto *modulo di elasticità di volume*. A norma della (75), a un aumento di pressione corrisponde una diminuzione di volume tanto minore in modulo quanto maggiore è il

valore del modulo di elasticità di volume. L'inverso del modulo di elasticità di volume è detto *coefficiente di comprimibilità*. Il modulo di elasticità di volume ha le dimensioni di una pressione e si misura perciò in Pascal nel SI. Il significato fisico che gli si può attribuire è quello del valore di variazione di pressione da realizzare per ottenere una variazione di volume pari al volume iniziale. Un'espressione equivalente alla (75) espressa in termini di densità invece che di volume può ottenersi osservando che la massa del volume V è data da $m = \rho V$; poiché la massa si mantiene costante nel processo di compressione o dilatazione in oggetto, risulta $dm = \rho dV + V d\rho = 0$, da cui:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V} \quad (76)$$

Per tutti i liquidi ε può ritenersi praticamente indipendente dalla pressione, mentre aumenta generalmente con la temperatura, mantenendosi tipicamente dell'ordine di 10^9 Pa. In particolare, il modulo di elasticità di volume dell'acqua alla temperatura di 10°C e alla pressione atmosferica vale $2,03 \times 10^9$ Pa. Tali valori sono indice della scarsa comprimibilità dei liquidi: a norma della (75), una variazione di pressione di 10^5 Pa, dell'ordine della pressione atmosferica, comporta una variazione di volume dello 0,005 %. Lo studio di alcuni fenomeni di interesse dell'Ingegneria Civile richiede di considerare la comprimibilità dei liquidi; nell'ambito dei fenomeni oggetto di studio del presente corso, i liquidi potranno tuttavia essere sempre considerati praticamente incompressibili. Assumendo, inoltre, condizioni di temperatura costante (isoterme), l'equazione di stato (71) assume la sua forma più semplice:

$$\rho = \text{cost.} \quad (77)$$

A tale fine, naturalmente, è necessario assumere che il liquido sia anche *omogeneo*, ossia, ad esempio, non contenente specie disciolte con concentrazioni variabili all'interno della massa liquida, il che peraltro è implicito nella forma (71) dell'equazione di stato.

Nei gas, o aeriformi, il modulo di elasticità di volume dipende in misura apprezzabile sia dalla pressione che dalla temperatura. La determinazione del valore di ε può effettuarsi, per esempio, sulla base della legge dei gas perfetti, qualora il gas in esame sia a essi assimilabile, come in genere avviene per valori di pressione relativamente ridotti. In particolare, nel caso di trasformazione isoterma può dedursi facilmente che il modulo di elasticità di volume è pari alla pressione del gas: $\varepsilon = p$. Pertanto, alla pressione atmosferica, dell'ordine di 10^5 Pa come detto, l'aria risulta circa 2×10^4 volte più comprimibile dell'acqua. Anche con questi ordini di grandezza, un aeriforme può talora essere trattato approssimativamente come un fluido incompressibile, purché non subisca variazioni di pressione rilevanti. Ciò è quanto potrà assumersi, ad esempio, in problemi di idrostatica, qualora la massa di aeriforme in esame non si estenda apprezzabilmente in verticale.

2.9 Assorbimento dei gas nei liquidi.

I gas hanno la possibilità di passare in soluzione nei liquidi con i quali si trovino a contatto attraverso una superficie libera. Tale fenomeno è detto *assorbimento* o *assorbimento* gas-liquido. Nel caso di gas poco solubili, fra i quali rientrano azoto e ossigeno, costituenti principali dell'aria, il fenomeno è governato dalla legge di Henry, a norma della quale, a temperatura costante e per una determinata coppia gas-liquido, la massa di gas m_g disciolta nell'unità di volume di liquido è proporzionale alla pressione p_g del gas sovrastante la massa liquida:

$$m_g = k_T p_g.$$

La costante di proporzionalità k_T fra concentrazione del gas disciolto m_g (massa di gas disciolta per unità di volume liquido) e pressione p_g , detta *coefficiente di assorbimento*, decresce all'aumentare della temperatura, cui corrisponde pertanto una diminuzione della solubilità.

La Legge di Henry è valida anche per una miscela gassosa, quale è l'aria. In tal caso, essa si applica ai singoli gas costituenti la miscela, con riferimento alle corrispondenti pressioni parziali. A norma della Legge di Dalton, la pressione parziale di un gas ideale in una miscela soggetta alla pressione p è pari al prodotto di tale pressione per la frazione volumetrica del gas, ovvero, alla pressione che la massa di gas presente nella miscela assumerebbe se occupasse da sola tutto il volume a disposizione della miscela.

Nell'ambito dell'Idraulica, tale proprietà dei gas è rilevante nei casi in cui si verificano, in alcune parti del liquido in esame, delle consistenti diminuzioni di pressione, come è il caso dei punti più elevati o di strozzature di una condotta, o delle condotte di aspirazione di impianti di pompaggio. In tali casi, infatti, alla diminuzione di pressione e alla conseguente ridotta solubilità dei gas corrisponde la formazione di sacche gassose rilasciate dal liquido perché non più assorbibili, le quali determinano un funzionamento irregolare della condotta.

CAPITOLO TERZO

3. IDROSTATICA

3.1 Introduzione

L'idrostatica studia il comportamento dei fluidi in quiete, caratterizzati cioè da valori nulli, punto per punto, sia delle velocità che delle accelerazioni. Non sono infatti di tipo idrostatico le condizioni che si verificano, ad esempio, all'interno di un recipiente dotato di una apertura (detta *luce*) regolabile, all'interno del quale sia contenuto del liquido inizialmente in quiete, allorché la luce venga aperta istantaneamente.

Tanto nel presente capitolo quanto nel prosieguo del corso, verranno considerati unicamente fluidi newtoniani, sebbene, nel caso specifico dell'idrostatica, le trattazioni che verranno sviluppate possano ritenersi valide per alcuni degli altri tipi di fluidi esaminati in sede di descrizione delle proprietà reologiche, e precisamente tutti i fluidi per i quali, in condizioni di quiete, risultino nulli gli sforzi tangenziali.

3.2 Stato di sforzo in un punto.

Come preannunciato nel §2.3, lo stato di sforzo in un punto assume caratteri di particolare semplicità nel caso di fluidi newtoniani in quiete, come conseguenza dell'annullamento delle componenti di sforzo tangenziali, a norma della equazione (74).

Si consideri infatti il volume elementare di fluido di Figura 22, avente forma di un cilindro con una delle due superfici di estremità, dS_n , avente una giacitura generica individuata dalla normale $\vec{n}$, che forma un angolo α con l'asse del cilindro¹⁹. L'angolo α è quindi anche l'angolo formato dalla superficie dS_n con l'altra superficie di estremità, dS , normale all'asse del cilindro, per cui si ha anche $dS = dS_n \cos \alpha$. Assumendo tutte le dimensioni lineari proporzionali allo sviluppo in asse infinitesimo del cilindro ds , le superfici di estremità dS e dS_n e la superficie laterale dS_L sono infinitesime di ordine 2 rispetto a ds , mentre il volume dV è infinitesimo di ordine 3.

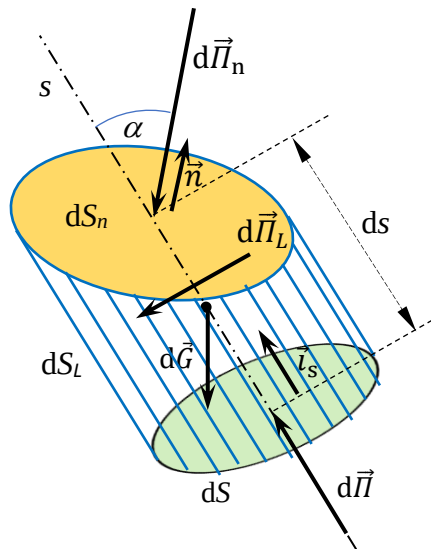


Figura 22. Schema illustrativo dello stato di tensione in un punto in condizioni idrostatiche.

¹⁹ Si noti che dS_n può assumere ∞^2 diverse giaciture, corrispondenti agli ∞^1 valori di α per gli ∞^1 valori dell'angolo di rotazione della superficie dS_n attorno all'asse del cilindro s . L'angolo α è tuttavia l'unico parametro rilevante ai fini del risultato che si vuole dimostrare.

Si vuole esaminare lo stato di sforzo nel punto nel quale il volume cilindrico collassa al tendere a zero di tutte le dimensioni lineari, mantenendo costante l'angolo α . Il volume fluido è in equilibrio sotto l'azione della forza peso $d\vec{G}$ (forza di volume o di massa) e delle forze (spinte) $d\vec{II}$, $d\vec{II}_n$ e $d\vec{II}_L$, agenti sulle tre superfici dS , dS_n e dS_L , rispettivamente. Essendo il fluido in quiete, e quindi gli sforzi puramente assiali, $d\vec{II}$ e $d\vec{II}_n$ sono ortogonali alle superfici piane su cui agiscono, mentre $d\vec{II}_L$ è ortogonale all'asse del cilindro, tali essendo tutte le forze elementari che lo compongono.

A norma della prima equazione cardinale della statica (47), deve risultare:

$$d\vec{G} + d\vec{II} + d\vec{II}_n + d\vec{II}_L = 0 , \quad (78)$$

in cui:

$$dG = \rho f_m dV$$

$$dII = p dS$$

$$dII_n = p_n dS_n$$

$$dII_L = \bar{p}_L dS_L$$

dove p e p_n sono gli sforzi assiali uniformi sulle superfici piane dS e dS_n , mentre $\bar{p}_L$ è il valore medio degli sforzi assiali sulla superficie laterale gobba, avente giacitura variabile. Osservato che la forza di massa è proporzionale al volume dV e che le forze di superficie sono proporzionali alle superfici dS , dS_n e dS_L , si conclude che la forza di massa è trascurabile rispetto alle forze di superficie, attesi i diversi ordini di infinitesimo di superfici e volumi, per cui l'equazione (78) si semplifica nella:

$$d\vec{II} + d\vec{II}_n + d\vec{II}_L = 0 . \quad (79)$$

Inoltre, delle tre spinte rimanenti soltanto $d\vec{II}$ e $d\vec{II}_n$ hanno componente non nulla lungo l'asse del cilindro, essendo, come detto, $d\vec{II}_L$ ad esso ortogonale. Proiettando l'equazione lungo l'asse del cilindro e ricordando la relazione fra le aree delle superfici dS e dS_n si ottiene pertanto:

$$p dS = p_n dS_n \cos \alpha = p_n dS . \quad (80)$$

da cui, infine:

$$p = p_n . \quad (81)$$

Il medesimo ragionamento si può ripetere, pervenendo alle medesime conclusioni, per qualunque valore dell'angolo α e per qualunque rotazione della superficie dS_n attorno all'asse del cilindro, in tal modo considerando tutte le ∞^2 giaciture possibili di elementi di superficie passanti per il punto. Rimane così dimostrato che, in un fluido in quiete, lo stato di sforzo in un punto è individuato da un valore univoco della componente scalare dello sforzo normale, indipendente dalla giacitura della superficie considerata, cui viene dato il nome di *pressione*, e alla quale si conviene, come già ricordato, di assegnare valori positivi se corrispondenti a una sollecitazione di compressione sulla superficie premuta. Conseguentemente, nel caso idrostatico l'espressione (69) dello sforzo $\vec{\tau}_n$ agente sulla faccia di una superficie di giacitura individuata dalla propria normale esterna $\vec{n}$ si riduce a:

$$\vec{\tau}_n = -p\vec{n} , \quad (82)$$

mentre l'espressione (70) del risultante delle forze di superficie esercitate su una superficie S assume la forma:

$$\vec{II} = - \int_S p \vec{n} dS . \quad (83)$$

3.3 Equazione indefinita dell'idrostatica.

Accertato che lo stato di sforzo in un punto di un fluido in quiete è caratterizzato da un valore univoco di pressione, si pone il problema di determinare la distribuzione delle pressioni all'interno della massa fluida considerata. A tale scopo, si consideri il volume elementare parallelepipedo dV appartenente a un fluido in quiete, di lati dx_1 , dx_2 e dx_3 , rappresentato in Figura 23.

Il volume dV è in equilibrio sotto l'azione delle forze di superficie, associate alla distribuzione delle pressioni, e delle forze di massa $\vec{f}_m$, che ammetteremo di norma costituite dalla sola forza peso:

$$\vec{f}_m = -g\nabla z,$$

cui corrisponde la forza peso elementare agente sul volume parallelepipedo dV :

$$d\vec{G} = \rho \vec{f}_m dV = -\rho g \nabla z dx_1 dx_2 dx_3$$

Detta p la pressione nel punto P individuato dal suo vettore posizione $\vec{x}$, mediante sviluppi in serie di Taylor arrestati al primo ordine nelle tre direzioni degli assi coordinati, la spinta agente complessivamente sulle facce esterne della superficie di contorno del volume elementare dV , risultante delle forze di superficie, può esprimersi come segue (vedi schema di Figura 23):

$$\begin{aligned} d\vec{\Pi} = & -\left(p + \frac{\partial p}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2}\right) dx_2 dx_3 \vec{b}_1 + \left(p - \frac{\partial p}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2}\right) dx_2 dx_3 \vec{b}_1 + \\ & -\left(p + \frac{\partial p}{\partial x_2} \frac{dx_2}{2}\right) dx_1 dx_3 \vec{b}_2 + \left(p - \frac{\partial p}{\partial x_2} \frac{dx_2}{2}\right) dx_1 dx_3 \vec{b}_2 + \\ & -\left(p + \frac{\partial p}{\partial x_3} \frac{dx_3}{2}\right) dx_1 dx_2 \vec{b}_3 + \left(p - \frac{\partial p}{\partial x_3} \frac{dx_3}{2}\right) dx_1 dx_2 \vec{b}_3 = \\ & -\left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \vec{b}_1 + \frac{\partial p}{\partial x_2} \vec{b}_2 + \frac{\partial p}{\partial x_3} \vec{b}_3\right) dx_1 dx_2 dx_3 = -\nabla p dx_1 dx_2 dx_3, \end{aligned}$$

in cui $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ e $\vec{b}_3$ sono i versori degli assi coordinati x_1 , x_2 e x_3 rispettivamente.

Le forze agenti sul volume elementare devono farsi equilibrio. A norma della prima equazione cardinale della statica, equazione (47), nel caso di forze di massa qualunque deve pertanto risultare, dopo semplificazione del volume elementare $dV = dx_1 dx_2 dx_3$:

$$\rho \vec{f}_m = \nabla p, \quad (84)$$

ovvero, nel caso in cui le forze di massa siano costituite dalla sola forza peso:

$$-\rho g \nabla z = \nabla p. \quad (85)$$

L'equazione (84) è detta *equazione indefinita dell'idrostatica* o *equazione dell'idrostatica in forma locale*. Essa deve essere soddisfatta in ogni punto della massa fluida in quiete. Poiché il vettore gradiente di una funzione scalare è, punto per punto, perpendicolare alla superficie dello spazio sulla quale la funzione è costante, dalla (84) risulta che la pressione è costante su superfici (dette *isobariche*) rispetto alle quali la forza di massa risulta, punto per punto, normale. Nel caso della forza peso, le superfici isobariche sono piani orizzontali. Proiettando la (85) lungo la verticale, per le proprietà dell'operatore gradiente espresse nel §1.2.4 si ottiene:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (86)$$

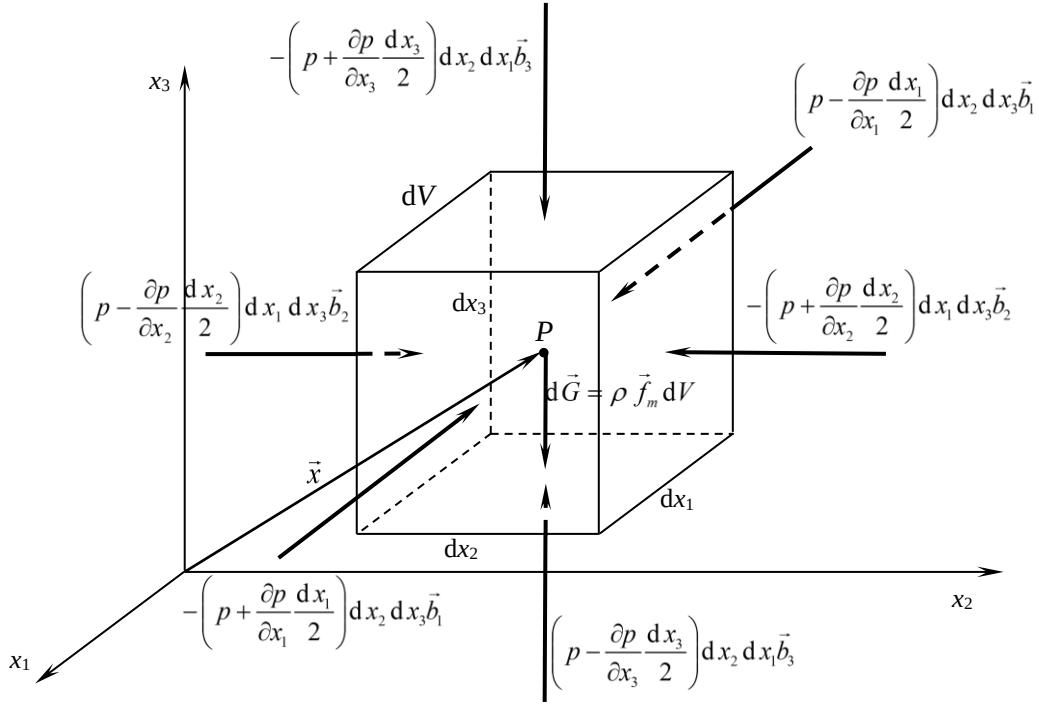


Figura 23. Volume fluido elementare in equilibrio idrostatico.

la quale, sulla base di una equazione di stato, $\rho = \rho(p, T)$, consente di determinare la distribuzione di pressione $p(z)$. La (86) può essere utilizzata per determinare la distribuzione di pressione nell'atmosfera terrestre, ipotizzando il tipo di trasformazione termodinamica rappresentativa delle condizioni della colonna d'aria: ad esempio, isoterma o adiabatca. Lo stesso tipo di valutazione può effettuarsi allo scopo di rendersi conto delle condizioni nelle quali un aeriforme possa essere considerato, ai fini applicativi, come un fluido praticamente incompressibile. Assumendo condizioni isoterme e pressioni non troppo elevate, l'equazione di stato è data dalla Legge di Boyle-Mariotte, qui scritta in termini di densità invece che di volume specifico, inverso della densità:

$$\frac{p}{\rho} = \text{cost} = \frac{p_0}{\rho_0} , \quad (87)$$

in cui il valore della costante può desumersi, ad esempio, per l'aria, in condizioni di pressione atmosferica e alla temperatura di 20 °C, dai valori riportati in Tabella 1 ($p_0 = 1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$) e Tabella 2 ($\rho_0 = 1,226 \text{ kg/m}^3$). Si ha quindi la seguente equazione differenziale ordinaria:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{\text{cost}} dz = -\frac{g\rho_0}{p_0} dz ,$$

la quale, integrata con le condizioni al contorno $p = p_0$ per $z = 0$, fornisce la distribuzione di pressione in funzione della quota:

$$p = p_0 e^{-\frac{g\rho_0}{p_0} z} .$$

Mediante tale relazione si può valutare il rapporto delle pressioni, p_1 e p_2 vigenti alle quote z_1 e z_2 :

$$\frac{p_1}{p_2} = e^{-\frac{g\rho_0}{p_0}(z_1 - z_2)} .$$

Ad esempio, a una differenza di quota di 10 m corrisponde un rapporto fra le pressioni pari a:

$$\frac{p_1}{p_2} = e^{-\frac{9,80665 \times 10^3}{101303}} = 0,99881 ,$$

pari anche al rapporto fra le densità corrispondenti, mentre al dislivello di 50 m corrisponderebbe un rapporto delle pressioni pari a 0,994. Pertanto, ogniqualvolta si abbia a che fare con volumi di aeriformi non troppo estesi in verticale, la pressione risulta distribuita in modo pressoché uniforme all'interno del volume, in conseguenza della densità relativamente ridotta. All'atto pratico, tale osservazione porta ad assumere senz'altro uniforme la pressione e, coerentemente, nulla la densità dell'aeriforme. A queste condizioni ci riferiremo esclusivamente nel prosieguo, ferme restando le considerazioni esposte sulle possibilità di utilizzo più generale della (86).

Importanti condizioni riguardanti il campo delle forze di massa e il fluido possono essere ricavate dall'equazione indefinita dell'Idrostatica (84). Nel caso di un fluido incomprimibile, isoterma e omogeneo, la cui densità risulti una costante, la forza di massa si può esprimere come:

$$\vec{f}_m = \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) .$$

Essendo le forze di masse date da un gradiente, per le proprietà esposte al §1.3.5 esse devono costituire un campo conservativo. Tale condizione è quindi necessaria per l'equilibrio idrostatico di fluidi a densità costante. Nel caso di un fluido qualunque (eventualmente anche comprimibile) in equilibrio idrostatico in un campo di forze di massa conservativo dotato di potenziale U , tale che:

$$\vec{f}_m = \nabla U ,$$

l'equazione indefinita dell'Idrostatica si scrive:

$$\rho \nabla U = \nabla p . \quad (88)$$

Essendo il gradiente di uno scalare un vettore, dalla proporzionalità dei gradienti del potenziale e della pressione consegue il parallelismo degli stessi gradienti. Poiché inoltre il gradiente di una funzione scalare del posto è un vettore punto per punto ortogonale alle superfici sulle quali la funzione è costante, dal parallelismo dei due gradienti discende la coincidenza delle superfici sulle quali è costante il potenziale (*superfici equipotenziali*) e la pressione (*superfici isobariche*). Tale circostanza comporta anche l'esistenza di un legame funzionale fra potenziale U e pressione p :

$$p = \pi(U) .$$

Moltiplicando scalarmente la (88) per un vettore spostamento elementare avente direzione qualunque, si ottiene la relazione fra i corrispondenti differenziali:

$$\rho dU = dp ,$$

dalla quale, in forza del legame funzionale fra potenziale e pressione, discende un analogo legame funzionale con la densità, essendo:

$$\rho = \frac{dp}{dU} = \psi(p) = \psi(\pi(U)) = \chi(U) .$$

Un tale tipo di fluido è detto *barotropico*. In un fluido barotropico risultano pertanto coincidenti le superfici isobariche, equipotenziali e le superfici ove è costante la densità, dette *isocore* o *isopicnotiche*.

Nel §2.4 è stata richiamata la seguente forma dell'equazione di stato, esprimente il legame fra densità e variabili termodinamiche (o di stato):

$$\rho = \rho(p, T)$$

ed è stato altresì osservato che il legame funzionale può includere, in generale, ulteriori variabili di stato – per esempio la salinità. In forza dell'equazione di stato, in un fluido barotropico anche le superfici sulle quali è costante la temperatura (*isoterme*) e, se del caso, la salinità (*isoaline*) devono quindi risultare coincidenti con le superfici isobariche, equipotenziali e isopicnotiche. Un fluido non barotropico si dice *baroclinico*²⁰.

3.4 Equazione globale dell'idrostatica.

Si consideri un qualunque volume finito V_c individuato all'interno di una massa fluida in quiete, detto *volume di controllo*, sia esso interamente immerso nel fluido circostante, ovvero a contatto con una parete, come rappresentato in due esempi in Figura 24, o anche con altri fluidi. Essendo tale volume fluido in condizioni di equilibrio statico, devono valere per esso le equazioni cardinali della statica (47) e (48):

$$\vec{R}_e = \sum_{k=1}^N \vec{F}_{e_k} = 0 \quad , \quad (47)$$

$$\vec{M}_e = \sum_{k=1}^N \vec{M}_{e_k} = \sum_{k=1}^N \vec{r}_k \times \vec{F}_{e_k} = 0 \quad . \quad (48)$$

in cui $\vec{R}_e$ e $\vec{M}_e$ sono rispettivamente il risultante delle forze esterne e il momento risultante rispetto a un qualunque punto dello spazio delle forze esterne applicate alla massa fluida contenuta nel volume di controllo.

Le forze esterne agenti sul volume di controllo possono suddividersi in forze di massa (o di volume) di risultante²¹:

$$\vec{G} = \int_V \rho \vec{f}_m dV$$

e forze di superficie, esercitate dalle masse esterne alla superficie di contorno, siano esse fluide o solide (pareti), di risultante:

$$\vec{H} = - \int_{S_c} p \vec{n} dS \quad . \quad (83)$$

Nel caso le forze di massa siano costituite dalle sole forze peso, il vettore:

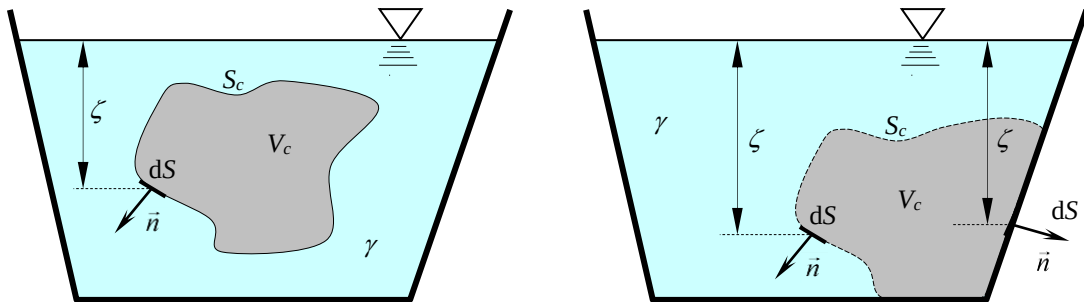


Figura 24. Schemi per la derivazione dell'equazione globale dell'idrostatica.

²⁰ La non coincidenza delle superfici isobariche, equipotenziali, isopicnotiche, isoterme ed isoaline su grandi estensioni di mare, determinando la natura baroclinica degli oceani, non consente il verificarsi della condizione di equilibrio idrostatico ed è pertanto la causa della circolazione oceanica.

²¹ Da declinare al femminile, perché *singolo* vettore equivalente alla distribuzione continua di forze peso elementari se applicato nel baricentro del volume fluido.

$$\vec{G} = \int_V -\rho g \nabla z dV = -g \nabla z \int_V \rho dV = -gm \nabla z \quad (73)$$

rappresenta evidentemente il peso del volume di controllo di massa m .

La prima equazione cardinale della statica si scrive perciò:

$$\vec{G} + \vec{I} = 0 \quad , \quad (89)$$

denominata *equazione globale dell'idrostatica*. In generale, in Idraulica si dicono globali equazioni in forma di integrali estesi a volumi di controllo.

Essendo il sistema di forze esterne esercitato sul volume di controllo costituito dalle sole due forze menzionate, uguali in modulo, parallele e discordi per effetto della (89), la seconda equazione cardinale richiede che esse risultino agenti sulla medesima retta d'azione²². Nel caso in cui le forze di massa siano costituite dalle sole forze peso, si concluderebbe che le forze di superficie costituiscono un sistema equivalente al vettore risultante $\vec{I}$, verticale, rivolto verso l'alto e di modulo pari al peso del volume fluido, applicato nel baricentro di quest'ultimo, in quanto costituente anche il punto di applicazione della forza peso $\vec{G}$.

Un procedimento più formale per la deduzione dell'equazione globale dell'idrostatica, del quale non daremo conto, è basato sull'uso delle formule di Gauss, equazione (24)²³.

Nel §3.10.2.1, in sede di illustrazione dei metodi per la determinazione delle spinte esercitate da fluidi in condizioni idrostatiche, si mostrerà come l'equazione globale costituisca uno strumento particolarmente efficace nel caso della valutazione di spinte su superfici di forma qualunque. In particolare, si fa qui osservare che, non essendo richiesto per l'integrazione di una funzione che essa sia continua, le equazioni globali hanno il pregio di poter essere applicata a volumi di controllo non omogenei.

3.5 Fluidi pesanti, isotermi, omogenei e incompressibili. Legge di Stevin.

Un caso di particolare rilevanza ai fini applicativi, in idrostatica come in idrodinamica, è quello dei fluidi pesanti, isotermi, omogenei e incompressibili, per i quali le forze di massa sono costituite soltanto dalla forza peso e la densità risulta costante in tutta la massa fluida ($\rho = \text{cost}$). È questo il tipico caso dei liquidi in svariate condizioni di pratico interesse.

In forza dell'essere la densità costante, l'equazione indefinita dell'idrostatica per fluidi pesanti, isotermi, omogenei e incompressibili (85) può riscriversi nella forma:

$$\nabla \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) = 0 \quad ,$$

per cui la quantità costituente l'argomento del gradiente, in cui può porsi $\gamma = \rho g$, risulta costante in tutta la massa fluida:

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost} \quad . \quad (90)$$

L'equazione (90) è detta *equazione fondamentale della statica dei fluidi incompressibili* o *legge di Stevin*. La grandezza $z + p/\gamma$ è detta *quota piezometrica* o *carico piezometrico* e verrà d'ora in avanti indicata con il simbolo h . La grandezza p/γ è detta *altezza piezometrica*. Evidentemente, la quota

²² Data l'arbitrarietà della scelta del polo (§1.2.2) per il calcolo del momento risultante, la scelta di un qualunque punto appartenente alla retta d'azione di una delle due forze rende nullo il momento della stessa forza. Dovendo essere quindi individualmente nullo anche il momento della seconda forza, questa deve avere braccio nullo e, pertanto, necessariamente, anche la medesima retta d'azione della prima forza.

²³ Vedi Citrini-Nosedà o Dispense di Idraulica A. Balzano per allievi ingegneri edili-architetti. Le stesse formule consentirebbero la deduzione dell'equazione indefinita a partire dall'equazione globale (89).

piezometrica in un punto dipende dal piano di riferimento scelto per le quote z (le quali verranno talora più specificamente indicate con il nome di *quote geodetiche*), mentre l'altezza piezometrica assume un valore univocamente determinato dalla pressione nel punto e dal peso specifico del liquido. A norma della (90), a tutti i punti di una massa fluida pesante e incompressibile compete lo stesso valore di quota piezometrica, il cui valore può essere determinato qualora si conosca il valore di pressione esistente in un punto di quota data. Inoltre, come già evidenziato anche per il caso di fluidi pesanti comprimibili, la (90) indica che le superfici isobariche sono piani orizzontali.

Dimensionalmente, la quota piezometrica e l'altezza piezometrica sono lunghezze. Si osservi tuttavia che alla quota piezometrica si può attribuire il significato fisico di energia potenziale totale per unità di peso di liquido. Infatti, la quota parte di energia potenziale relativa al campo delle forze peso di un volume V di massa $m = \rho V$ e peso $W = gm$ rispetto al piano di riferimento per la valutazione delle quote è data da $E_w = gmz = Wz^{24}$. Per quanto riguarda il termine l'altezza piezometrica p/γ , essa rappresenta una energia di pressione per unità di peso, in quanto derivante dal termine ∇p delle equazioni (84) e (85). Sebbene tale termine derivi, in effetti, da forze di superficie, il risultante delle forze di superficie cui è soggetto il volume elementare rappresentato in Figura 23 è dato dalla forza di volume $d\vec{F}_p = -\nabla p dV = \nabla(-p dV)$, corrispondente a una forza per unità di peso $\vec{f}_p = d\vec{F}_p / (\gamma dV) = \nabla(-p/\gamma)$. In quanto dato dal gradiente di una funzione scalare, il relativo campo di forze è conservativo (vedi §1.3.5.); esso ammette potenziale $\phi = -p/\gamma$ ed energia potenziale $E_p = -\phi = p/\gamma$, detta *energia di pressione*. Rimane pertanto dimostrato che la quota piezometrica rappresenta una energia potenziale totale (somma dell'energia del campo delle forze peso e dell'energia di pressione) per unità di peso di liquido.

Dati due punti, P_1 e P_2 , posti a quote z_1 e z_2 rispettivamente, la legge di Stevin fornisce:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} , \quad (91)$$

dalla quale si ricava l'espressione di uno dei due valori di pressione in funzione dell'altro:

$$p_2 = p_1 + \gamma(z_1 - z_2) . \quad (92)$$

La (92) indica che la pressione aumenta linearmente al diminuire della quota geodetica, con fattore di proporzionalità dato dal peso specifico del fluido.

In particolare, la (91) può essere scritta con riferimento a un punto a quota geodetica generica z e a un altro, la cui quota indichiamo con z_0 , alla quale risulti nulla la pressione:

$$z + \frac{p}{\gamma} = z_0 . \quad (93)$$

Il piano orizzontale posto alla quota z_0 , sul quale la pressione è ovunque nulla, è detto *piano dei carichi idrostatici* del fluido in questione. La sua quota rappresenta la costante che compare nella legge di Stevin (90), ossia, il valore di quota piezometrica comune a tutti i punti del fluido. La pressione in un punto di quota z è dunque esprimibile in funzione dell'affondamento del punto rispetto al piano dei carichi idrostatici:

$$p = \gamma(z_0 - z) , \quad (94)$$

il quale rappresenta pertanto un riferimento importante per il calcolo delle pressioni. Per questo motivo il piano dei carichi idrostatici viene sempre riportato nella rappresentazione grafica di problemi applicativi. Viceversa, data la pressione p in un punto di quota z , la posizione del piano dei carichi idrostatici può ottenersi sommando alla quota del punto z l'altezza piezometrica p/γ .

²⁴ la costante arbitraria a meno della quale sono definiti i potenziali e le energie potenziali di cui al §1.3.5 è in effetti implicitamente considerata per l'arbitrarietà della scelta del piano di riferimento delle quote.

Fino a questo momento è stato fatto riferimento a un concetto di pressione legato, attraverso la definizione di sforzo riportata nel §2.3, alle forze realmente agenti su un elemento di superficie. Tale nozione di pressione è quella utilizzata in Termodinamica – ad esempio, nella scrittura della legge di Boyle-Mariotte (87). Diremo d'ora in avanti *pressioni assolute* tali pressioni e le indicheremo con un asterisco in apice, p^* , così come eventuali altre grandezze caratteristiche riferite alle pressioni assolute. Corrispondentemente, chiameremo *piano dei carichi idrostatici assoluto* il piano alla cui quota, z_0^* , sono nulle le pressioni assolute.

Nelle applicazioni pratiche risulta tuttavia particolarmente comodo considerare le cosiddette *pressioni relative*, che indicheremo con il simbolo p privo di apici, definite come differenza fra pressioni assolute e pressione atmosferica:

$$p = p^* - p_{atm}^* , \quad (95)$$

e alle quali faremo d'ora in avanti riferimento salvo diversa indicazione. Nel §3.10 verrà verificata la correttezza dell'uso di tale nuova scala delle pressioni ai fini del calcolo delle spinte.

Poiché, da quanto detto, tutte le relazioni esaminate finora devono essere intese riferite alle pressioni assolute (le pressioni “vere”), di seguito viene mostrato che le stesse relazioni valgono anche per le pressioni relative. Esprimendo la (93) in termini di pressioni relative, si ottiene:

$$z + \frac{p^*}{\gamma} = z + \frac{p + p_{atm}^*}{\gamma} = z_0^* ,$$

da cui:

$$z + \frac{p}{\gamma} = z_0^* - \frac{p_{atm}^*}{\gamma} = z_0 . \quad (96)$$

L'equazione (96) indica che la distribuzione delle pressioni relative, come quella delle pressioni assolute, ha andamento lineare con la quota, con fattore di proporzionalità dato dal peso specifico del fluido. Con ragionamento analogo a quello svolto in precedenza, si riconosce che il secondo membro della (96) ha il significato di quota del piano dei carichi idrostatici corrispondente alle pressioni relative (*piano dei carichi idrostatici relativi*), ove queste sono nulle e la pressione assoluta uguaglia quindi la pressione atmosferica. Pertanto, il riferimento alle pressioni relative comporta il vantaggio di poter individuare il corrispondente piano dei carichi idrostatici in una superficie del fluido a contatto con l'atmosfera, qualora essa sia materialmente presente. Dalla (96) la differenza di quota fra i piani dei carichi idrostatici assoluti e relativi risulta data da:

$$z_0^* - z_0 = \frac{p_{atm}^*}{\gamma} .$$

Nel caso dell'acqua, il valore di tale differenza di quote corrispondente a valori medi della pressione atmosferica ($p_{atm}^* = 101'325 \text{ Pa}$) e di peso specifico ($\gamma_m = 9'806 \text{ N/m}^3$) è pari a 10,33 m. Nel caso del mercurio, avente peso specifico molto maggiore ($\gamma_m = 132'871 \text{ N/m}^3$ a 20°C e $p^* = 1 \text{ atm}$) la differenza corrispondente sarebbe pari a 0,76 m.

In tema di piano dei carichi idrostatici assoluto, giova puntualizzare che, a rigore, in assenza di provvedimenti particolari realizzabili in laboratorio²⁵, non è possibile realizzare in una massa fluida condizioni di pressione assoluta nulla, in quanto, secondo quanto discusso nel §2.7, al di sopra della superficie libera di un liquido inizialmente soggetta a una pressione nulla si crea del vapore avente pressione pari alla tensione di vapore del liquido. Peraltro, dato il modesto valore che la tensione di vapore assume nell'acqua, per tale liquido la differenza fra la quota teorica del piano dei carichi idrostatici assoluti e la quota del piano soggetto alla pressione di vapor saturo, data da $\Delta z = p_v^*/\gamma$ sulla base della (94), è modesta rispetto alla differenza di quota fra i due piani dei carichi idrostatici (sulla

²⁵ Per una discussione di questi aspetti si veda C.A. Fassò – Dispense di Idraulica.

base dei dati di Tabella 1, Tabella 2 e Tabella 5, alla temperatura di 10 °C risulta $\Delta z = 1,21 \times 10^{-2} \times 101'325/9'806 = 0,125$ m, mentre la differenza di quota fra i piani dei carichi idrostatici assoluti e relativi è pari, come già rilevato, a circa 10,33 m).

Mentre, quindi, i fluidi non sono praticamente atti a sopportare pressioni assolute negative (cioè sforzi normali assoluti di trazione), sono invece ammessi valori negativi della pressione relativa, corrispondenti semplicemente a condizioni di pressione assoluta inferiore alla pressione atmosferica, e pertanto a condizioni di sforzo normale reale ancora positivo. Si parla in tal caso di fluido *in depressione*; nel più usuale caso contrario si dice invece che il fluido è *in pressione*.

A parte la comodità di poter visualizzare il piano dei carichi idrostatici relativi, ci si può porre il problema di quali siano le conseguenze del riferimento alle pressioni relative nel caso in cui si debba valutare, come spesso occorre fare, la spinta che un fluido esercita, ad esempio, sulla parete di un recipiente. Come verrà meglio chiarito nel prosieguo in sede di descrizione dei metodi disponibili per tali operazioni, tipicamente il problema riguarda pareti esposte, sulla faccia opposta a quella a contatto con il fluido, alla pressione atmosferica. Il riferimento alle pressioni relative equivale pertanto a evitare la considerazione di due distribuzioni di pressione uniformi pari entrambi alla pressione atmosferica: una, relativa al fluido che esercita la spinta, costituente soltanto una parte del diagramma delle pressioni assolute del fluido; l'altra, agente in verso opposto, dall'esterno, esercitata dall'atmosfera. Il riferimento alle pressioni relative, oltre che risultare equivalente nei confronti della valutazione della spinta sulla parete, risulta pertanto anche semplificativo rispetto alla considerazione delle pressioni assolute, in quanto consente di considerare un'unica distribuzione (netta) di pressioni.

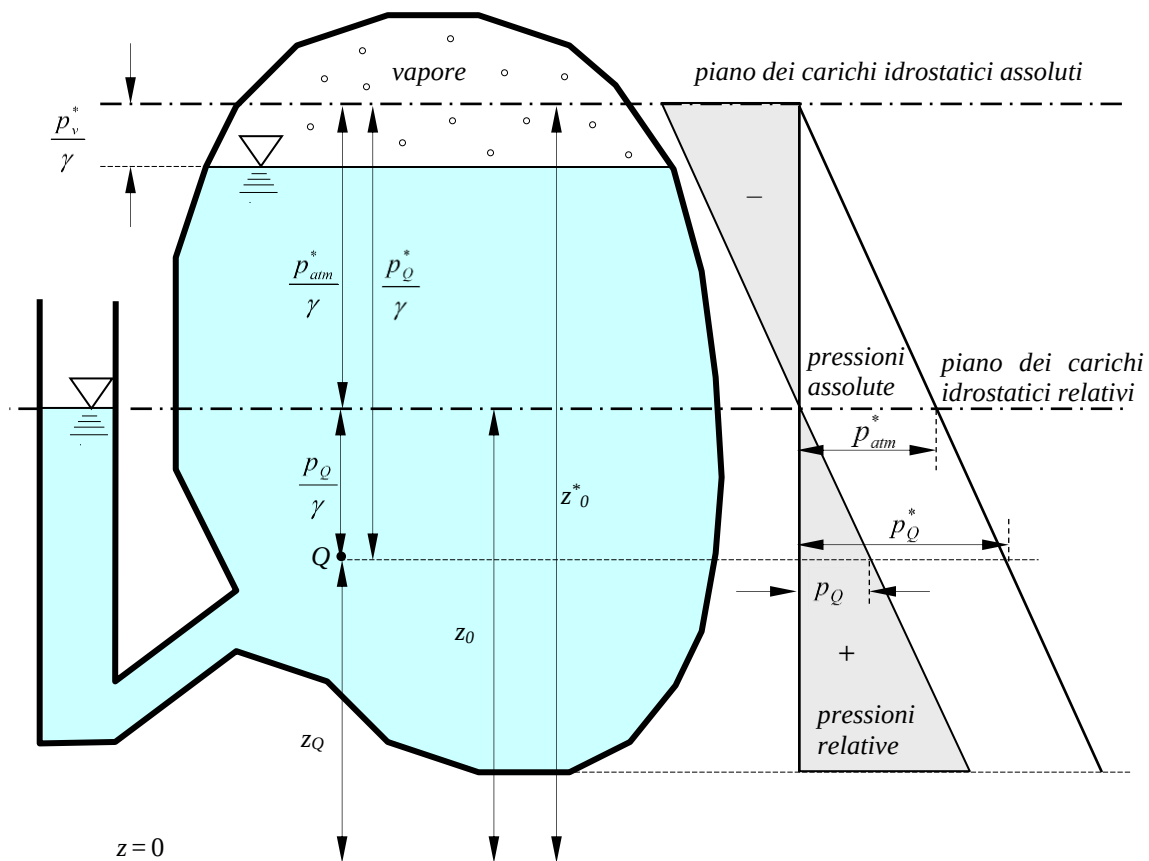


Figura 25. Rappresentazione grafica della distribuzione delle pressioni e dei relativi elementi caratteristici in un fluido pesante, isoterma, omogeneo e incompressibile.

Tutti i concetti legati alla legge di Stevin per fluidi pesanti a densità uniforme fin qui illustrati sono rappresentati in forma grafica in Figura 25. Si rimarca tuttavia che, in generale, i concetti di piano

dei carichi idrostatici relativi e assoluti discendono da un mero esame formale della legge di Stevin e del conseguente andamento lineare delle pressioni con la quota. Pertanto, si può dare il caso – tutt'altro che infrequente – che, tanto il piano dei carichi idrostatici relativi di un fluido, quanto quello assoluto, risultino posti a quote ove non è in realtà presente fluido²⁶.

3.6 Principio di Pascal.

Una conseguenza elementare della legge di Stevin è nota sotto il nome di Principio di Pascal.

Si considerino due punti di un fluido pesante, isoterma, omogeneo e incompressibile in quiete posti alle quote z_1 e z_2 e soggetti alle pressioni p_1 e p_2 . In forza della legge di Stevin devono essere verificate le equazioni (91) e (92):

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} , \quad (91)$$

$$p_2 = p_1 + \gamma(z_1 - z_2) . \quad (92)$$

In seguito all'applicazione, con un mezzo opportuno, di una sovrappressione Δp_1 nel punto 1, si vuole determinare l'eventuale variazione di pressione nel punto 2, qualora il fluido si mantenga in condizioni di quiete. Il nuovo valore di pressione nel punto 2, p_2' , deve soddisfare la relazione:

$$z_1 + \frac{p_1 + \Delta p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2'}{\gamma} ,$$

da cui:

$$p_2' = p_1 + \gamma(z_1 - z_2) + \Delta p_1 = p_2 + \Delta p_1 ,$$

la quale sancisce che l'incremento di pressione imposto nel punto 1 si è risentito, inalterato, in tutti gli altri punti della massa fluida. Tale conclusione costituisce l'enunciato del Principio di Pascal.

Naturalmente, la sovrappressione Δp comporta anche l'aumento della quota dei piani dei carichi idrostatici (sia relativi che assoluti) della quantità $\Delta p/\gamma$ rispetto alla situazione iniziale.

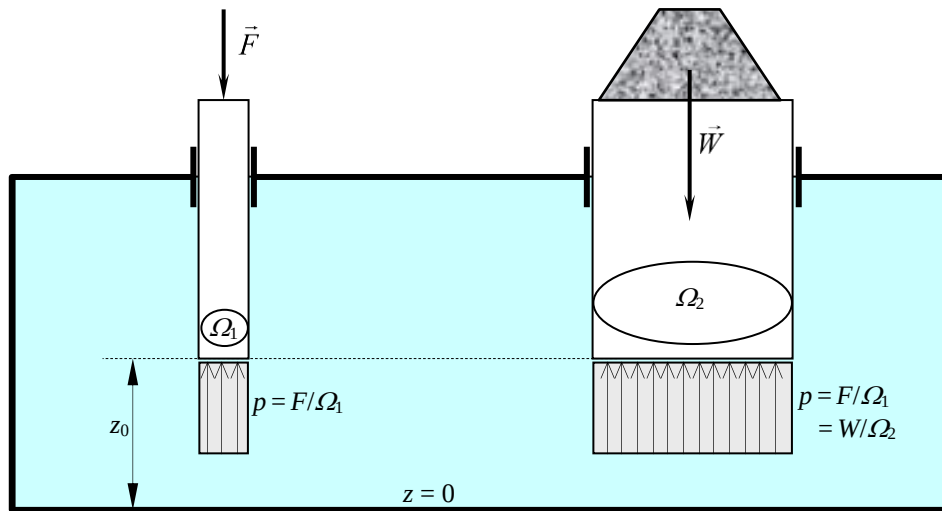


Figura 26. Schema di funzionamento del torchio idraulico.

²⁶ È questo il caso dei serbatoi in pressione, quali sono, ad esempio, i comuni scaldacqua domestici, il cui piano dei carichi idrostatici relativi può essere visualizzato per mezzo di un *piezometro*, di cui si dirà al §3.9.

Una importante applicazione del principio di Pascal è costituita dal *torchio idraulico*. Si consideri il contenitore chiuso rappresentato in Figura 26, provvisto sulla parete posta in sommità di due cilindri all'interno dei quali possono scorrere dei pistoni cilindrici ideali, tali cioè da non risentire di resistenze apprezzabili allo scorrimento all'interno del cilindro per effetto di attriti. I pistoni abbiano sezioni Ω_1 e Ω_2 , con $\Omega_1 < \Omega_2$. Si supponga anche, per semplicità, che i pistoni abbiano peso trascurabile, che le loro basi siano poste alla medesima quota z e che su tale piano viga inizialmente la pressione atmosferica (pressione relativa nulla). I pistoni sono dunque in equilibrio poiché le traslazioni orizzontali e le rotazioni sono impediti dai rispettivi cilindri – i quali costituiscono un tipo di vincolo denominato, nella Scienza delle Costruzioni, *manicotto* – mentre la componente lungo la verticale delle forze agenti sui pistoni è nulla in termini di pressioni relative (pressioni nulle alle due sezioni estreme dei pistoni, con peso proprio dei pistoni trascurabile), o comunque equilibrata in termini di pressioni assolute (spinte uguali e contrarie sulle due sezioni estreme, date in modulo dal prodotto della pressione atmosferica per l'area delle sezioni).

La distribuzione delle pressioni è pertanto data dall'equazione (93), ove z_0 è la quota delle sezioni di base dei pistoni. Successivamente all'applicazione di una forza assiale $\vec{F}$ di compressione sul pistone 1, questo rimane in equilibrio se alla sua base si produce una pressione positiva p e una conseguente spinta verticale rivolta verso l'alto esercitata dal fluido sul pistone, di modulo $p\Omega_1 = F$, da cui $p = F/\Omega_1$. Poiché, in condizioni di equilibrio, il medesimo valore di pressione deve ritrovarsi alla base del pistone 2, questa è sottoposta a una spinta, anch'essa verticale e rivolta verso l'alto, di modulo $p\Omega_2$, che è in grado di equilibrare un uguale peso W di un corpo posto sulla sommità del cilindro 2. Il valore del peso che può essere mantenuto in equilibrio sul pistone 2 è quindi dato da:

$$W = F \frac{\Omega_2}{\Omega_1}.$$

Il sistema dei due pistoni costituisce pertanto una sorta di leva idraulica, detto torchio idraulico, in quanto consente il contrasto di una forza resistente W maggiore di quella attiva F .

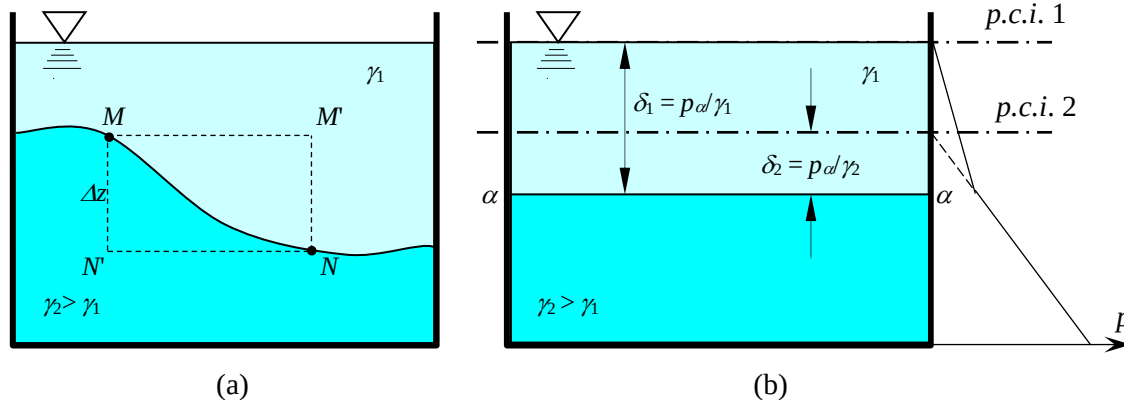


Figura 27. Liquidi non miscibili sovrapposti: (a) ipotetica superficie di separazione diversa da piano orizzontale; (b) superficie di separazione reale e posizioni dei piani dei carichi idrostatici.

3.7 Fluidi non miscibili sovrapposti.

La legge di Stevin (90) si applica, come più volte richiamato, a fluidi pesanti, incompressibili isotermini e omogenei. Essa può essere utilizzata anche nel caso in cui coesistano due o più fluidi che soddisfino tali condizioni, non miscibili l'uno nell'altro, purché per ciascuno si consideri un diverso valore della costante, ossia, una diversa quota del piano dei carichi idrostatici. Tale requisito deriva dall'aver ammesso costante il peso specifico nella derivazione della legge, quindi né variabile con continuità, né, tanto meno, discontinuo all'interfaccia fra due fluidi di caratteristiche differenti. Risulta d'altro

canto evidente che all'interfaccia di due fluidi (ad esempio quelli rappresentati in Figura 27), dovendo considerarsi per ciascuno dei due fluidi la medesima quota e, per il principio di azione e reazione, la medesima pressione, essendo differenti i relativi pesi specifici non può risultare identico il valore della quota piezometrica. In questo caso risulta di interesse quale forma debba avere la superficie di separazione dei due fluidi e quali siano le posizioni dei relativi piani dei carichi idrostatici.

Il primo aspetto si chiarisce ipotizzando per la superficie di separazione una forma qualunque, per esempio quella riportata in Figura 27a, e verificando a quali conseguenze conduce l'applicazione della legge di Stevin a ciascuno dei due fluidi. La pressione nel punto N può esprimersi in funzione del valore nel punto M nei seguenti due modi, con riferimento ai due punti ausiliari, M' e N' , posti alla stessa quota di M e N rispettivamente:

$$\begin{aligned} p_N &= p_{M'} + \gamma_1 \Delta z = p_M + \gamma_1 \Delta z \\ p_N &= p_{N'} = p_M + \gamma_2 \Delta z \end{aligned} ,$$

da cui, sottraendo membro a membro, si ottiene:

$$\Delta z (\gamma_1 - \gamma_2) = 0 .$$

Poiché, per ipotesi, $\gamma_1 \neq \gamma_2$, deve essere $\Delta z = 0$. Non essendo stata fatta alcuna ipotesi particolare sui punti M e N , due punti qualunque della superficie di separazione tra i fluidi devono essere posti alla stessa quota; la superficie deve essere pertanto costituita da un piano orizzontale.²⁷

Ciò chiarito, la situazione deve risultare quindi quella rappresentata in Figura 27b. La posizione relativa dei piani dei carichi idrostatici si ricava osservando intanto che, affinché si abbiano condizioni di equilibrio stabile, il fluido avente peso specifico maggiore deve disporsi inferiormente all'altro, poiché in tal caso risulta la minima possibile la quota del baricentro dell'intero sistema costituito dai due fluidi. La situazione opposta costituisce, anch'essa, una configurazione di equilibrio, di natura però instabile, perché in tal caso la quota del baricentro del sistema risulta massima. In pratica, ciò significa che, quand'anche questa seconda situazione venisse realizzata, una minima perturbazione indotta nella massa fluida tenderebbe, per evoluzione spontanea dei due fluidi, a determinare lo stabilirsi della condizione di equilibrio stabile.

Esprimendo la pressione sul piano di interfaccia fra i due fluidi con riferimento ai corrispondenti piani dei carichi idrostatici deve risultare:

$$p_\alpha = \gamma_1 \delta_1 = \gamma_2 \delta_2 ,$$

da cui:

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} . \quad (97)$$

Per una condizione, quale quella rappresentata in Figura 27b, in cui il piano di separazione dei fluidi risulti in pressione, si ha pertanto che il piano dei carichi idrostatici del fluido più pesante giace al di sotto del piano dei carichi idrostatici del liquido più leggero. Nel caso invece il piano di separazione dei fluidi risultasse in depressione, con ragionamento del tutto analogo si perverrebbe alla conclusione opposta, poiché un volume fluido in depressione è situato al di sopra del proprio piano dei carichi idrostatici.

3.8 Aeriformi.

Nel § 3.3 si è verificato con un esempio realistico che in un volume di aeriforme, almeno fintantoché esso non si estende in misura rilevante in verticale, la pressione, e quindi la densità possono essere considerati praticamente costanti. Per quanto riguarda la densità costante, ciò potrebbe far concludere

²⁷ Più in generale, nel caso di un qualunque campo di forze di massa, purché dotato di potenziale, si dimostra che la superficie di separazione fra due fluidi è una superficie equipotenziale.

che, presentando il gas un comportamento da fluido incompressibile, gli sia applicabile la legge di Stevin (90). Tuttavia, il fatto che possa considerarsi costante anche la pressione si concilia con tale legge, ovvero con la (92) che ne è conseguenza, soltanto ammettendo nullo il peso specifico del gas. Pertanto, avvalersi della semplificazione determinata dall'assumere costante la pressione in un gas nega la possibilità di definirne un piano dei carichi idrostatici, perché ciò comporterebbe una divisione per zero nella stessa espressione della quota piezometrica (90). Nulla impedirebbe, ovviamente, di assumere, invece, un peso specifico non nullo ma pur sempre costante. Tuttavia, poiché i valori di tale grandezza sono estremamente ridotti nei gas, ciò comporterebbe la localizzazione del relativo piano dei carichi idrostatici in posizione poco pratica perché notevolmente al di sopra del piano dei carichi idrostatici di un liquido sottostante.

A titolo di esempio, si considerino acqua e aria sovrapposti in un contenitore chiuso superiormente, alla temperatura di 15 °C. Con riferimento ai valori di peso specifico riportati in Tabella 2 e alla equazione (97), qualora il piano dei carichi idrostatici dell'acqua si trovasse 1 m al di sopra del piano di separazione fra acqua e aria, il piano dei carichi idrostatici dell'aria si troverebbe al di sopra dello stesso piano di $9806 / 12,022 = 815,7$ m. Oltre a una inutile possibilità di valutazione di minime variazioni di pressione nel gas, tale scelta comporterebbe una certa mancanza di praticità per quanto riguarda la rappresentazione grafica dei piani dei carichi idrostatici.

In conclusione, ogniquale volta si presenti l'eventualità di dover considerare un gas in applicazioni di carattere tecnico che escludano estensioni in verticale apprezzabili, come si assumerà in via esclusiva nel presente corso, si farà senz'altro l'ipotesi semplificativa di assumere uniforme la pressione del gas e non si definirà alcun piano dei carichi idrostatici per esso.

3.9 Strumenti di misura della pressione.

Il più semplice strumento di misura della pressione in un liquido è costituito dal *piezometro*. Esso è costituito semplicemente da un tubo collegato a un estremo al liquido e all'altro estremo all'atmosfera. Un esempio di piezometro è riportato nella parte sinistra della Figura 25. Esso consente, in sostanza, la localizzazione del piano dei carichi idrostatici relativi e, sulla base della (94), il calcolo delle pressioni in ciascun punto della massa liquida. Naturalmente, nel caso del piezometro non può che trattarsi di liquidi, in quanto un gas si disperderebbe nell'atmosfera.

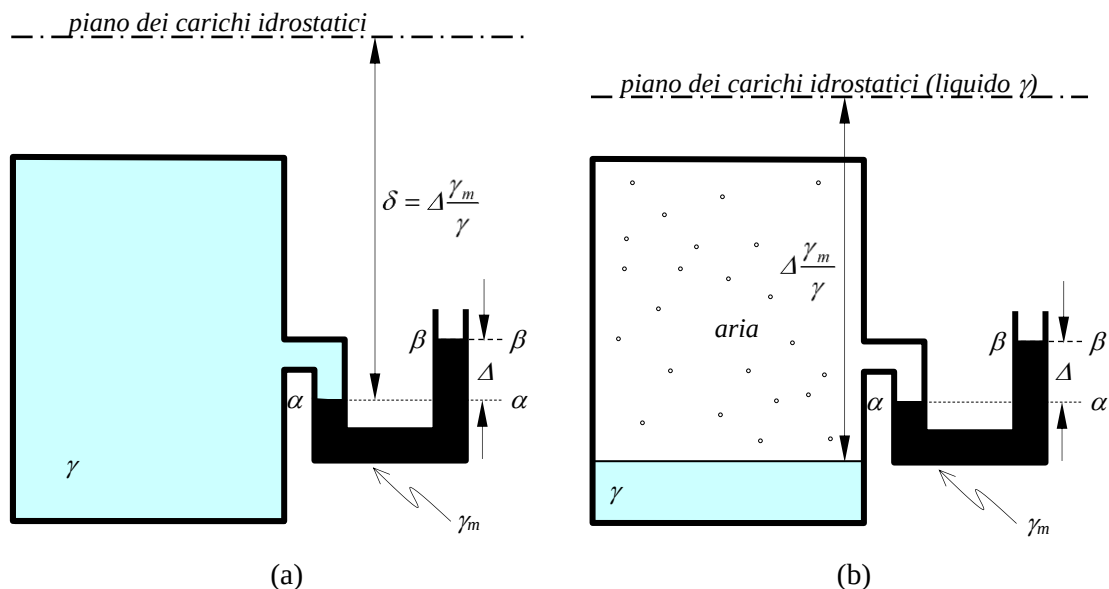


Figura 28. Manometro semplice collegato (a) a un liquido e (b) a un aeriforme sovrastante un liquido.

Il piezometro risulta di difficile utilizzo nel caso di pressioni del liquido elevate, poiché in tal caso la superficie libera esposta alla pressione atmosferica (detta *menisco se*, come sempre accade, il tubo ha una sezione relativamente ridotta) risulta posta a una quota elevata e la relativa lettura conseguentemente poco pratica. In questo caso risulta utile uno strumento solo leggermente più elaborato detto *manometro semplice*. Tale strumento è costituito da un tubo conformato a U, anch'esso collegato a un estremo al fluido del quale si voglia misurare la pressione (il quale può essere anche un gas) e all'altro all'atmosfera, al cui interno è posto del liquido (*liquido manometrico*) di peso specifico maggiore di quello del fluido oggetto della misura di pressione.

Con riferimento agli schemi di Figura 28, detto γ_m il peso specifico del liquido manometrico, la pressione al menisco interno, posto sul piano α - α , vale:

$$p_\alpha = \gamma_m \Delta$$

Qualora il manometro sia collegato a un liquido (Figura 28a), tale valore di pressione deve anche essere pari al prodotto del peso specifico del liquido, γ , per l'affondamento del menisco interno rispetto al piano dei carichi idrostatici del liquido (altezza piezometrica alla quota del menisco interno), δ . Quest'ultimo deve pertanto essere pari a:

$$\delta = \frac{p_\alpha}{\gamma} = \frac{\gamma_m \Delta}{\gamma} \quad (98)$$

Dalla (98) si può osservare come la misura del manometro Δ sia ridotta rispetto all'altezza piezometrica al menisco interno δ nel rapporto dei pesi specifici dei liquidi oggetto della misura e manometrico rispettivamente. Per questo motivo, e per le ragioni esposte in precedenza per le quali si fa uso di tale strumento, come liquido manometrico si adotta generalmente il mercurio, in quanto avente un peso specifico elevato (vedi Tabella 2).

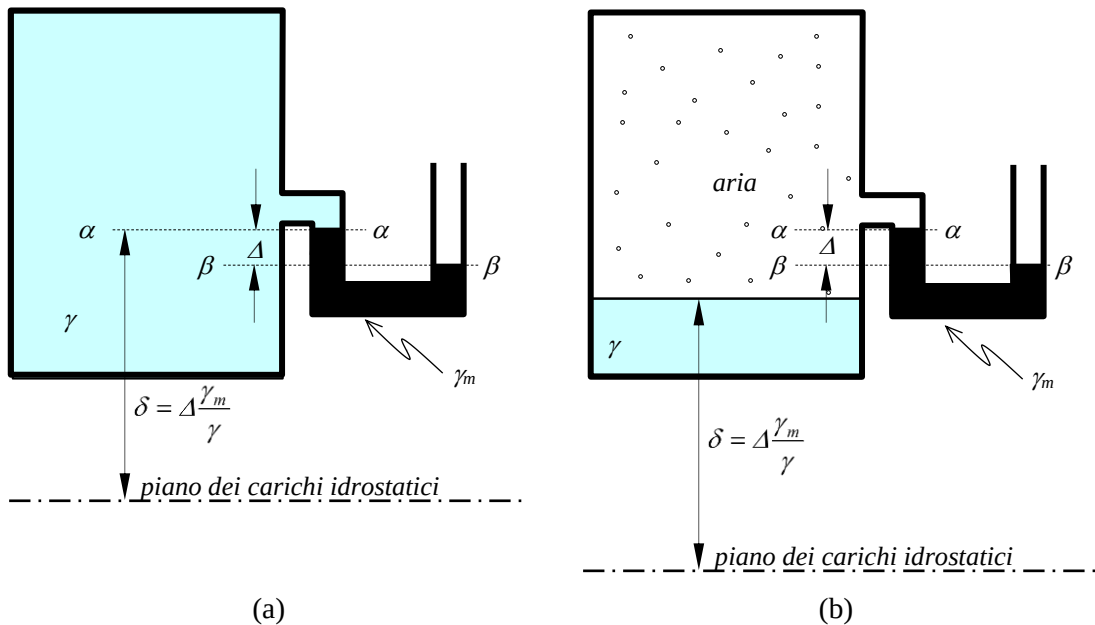


Figura 29. Manometro semplice collegato (a) a un liquido e (b) a un aeriforme sovrastante un liquido, in condizioni di depressione.

Nel caso in cui il manometro semplice sia collegato a un aeriforme, come nell'esempio di Figura 28b, a parità di misura dello strumento si ottiene il medesimo valore di pressione al menisco interno. Tuttavia, in questo caso, sulla base dell'approssimazione ammessa nel § 3.8 tale valore di pressione si mantiene inalterato in tutto il volume di aria sovrastante il liquido di peso specifico γ e, in

particolare, sui punti di tale volume a contatto con il liquido attraverso il relativo piano di separazione. La posizione del piano dei carichi idrostatici del liquido si ottiene pertanto innalzandosi rispetto a tale piano di separazione del medesimo valore di altezza piezometrica di cui al caso precedente. Il piano dei carichi idrostatici del liquido risulta pertanto essere posto necessariamente a una quota inferiore rispetto al caso precedente. Naturalmente, in un sistema quale quelli rappresentati Figura 28 è definibile un ulteriore piano dei carichi idrostatici: quello del liquido manometrico, posto, ovviamente, alla quota del menisco esterno collegato all'atmosfera.

In Figura 29 sono rappresentati casi analoghi a quelli di Figura 28, ma relativi a condizioni di depressione nei fluidi, segnalate dalla quota del menisco esterno del manometro inferiore rispetto alla quota del menisco interno. A norma della legge di Stevin, sul menisco interno si ha infatti:

$$p_{\alpha} = -\gamma_m \Delta ,$$

per cui i piani dei carichi idrostatici del liquido si trovano abbassandosi dell'altezza piezometrica $\delta = \Delta \gamma_m / \gamma$ rispetto al menisco interno e al piano di separazione fra liquido e aria rispettivamente nei casi in cui il recipiente contenga soltanto il liquido (Figura 29a) o liquido con aria sovrastante (Figura 29b).

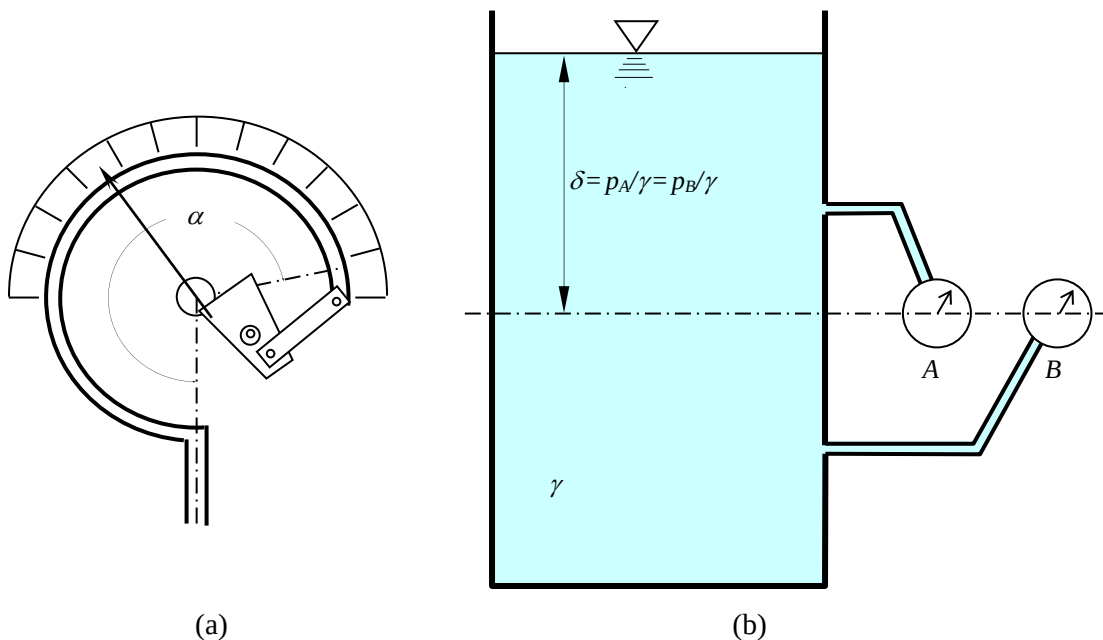


Figura 30. (a) rappresentazione schematica (a) del manometro Bourdon e (b) dell'indipendenza della misura dalla quota di attacco del manometro.



Figura 31. Esempi di manometri metallici con diverse scale di graduazione.

Qualora le pressioni da misurare siano rilevanti, può risultare necessario l'uso di *manometri metallici*, esempi dei quali possono reperirsi facilmente nell'erogatore di aria compressa di un distributore di benzina o in vicinanza della caldaia di un impianto di riscaldamento domestico. In ogni caso, l'uso di un manometro metallico è sempre decisamente più pratico di quello di un manometro semplice.

Il tipo più semplice di manometro metallico è quello detto di Bourdon. Esso è costituito sostanzialmente da un tubo a forma di spirale e sezione ellittica, chiuso a un estremo e collegato all'altro estremo al fluido del quale si intende misurare la pressione (Figura 30a). Sotto l'azione della pressione interna al tubo, questo tende a svolgersi²⁸, determinando, attraverso una serie di leve collegata all'estremo cieco, il movimento di un indice su un quadrante graduato, sul quale viene effettuata la lettura della pressione. Dal tipo di funzionamento descritto, risulta evidente che il valore di pressione segnato sul quadrante dipende dal valore di pressione vigente nella zona della spirale. Tipicamente, la taratura dello strumento viene effettuata in modo che esso fornisca la pressione esistente alla quota del suo baricentro. Tale misura non dipende pertanto dalla quota alla quale lo strumento viene collegato al recipiente contenente il fluido in oggetto, magari tramite una tubazione più o meno lunga, ma soltanto dalla quota del baricentro dello strumento. Pertanto, nell'esempio riportato in Figura 30b, i due manometri A e B collocati alla stessa quota ma collegati al liquido contenuto nel serbatoio mediante attacchi posti a quote differenti forniscono il medesimo valore di pressione, $p_A = p_B$.

In Figura 31 sono riportate riproduzioni fotografiche di due manometri metallici graduati in diverse unità di misura (m H₂O e bar). In particolare, il primo fornisce direttamente la misura dell'altezza piezometrica $\delta = p/\gamma$ se utilizzato con acqua; desiderando conoscere il valore corrispondente di pressione, questo è fornito ovviamente da $p = \gamma\delta$. Naturalmente, lo strumento è atto a fornire la misura di pressione anche in liquidi diversi dall'acqua; in tal caso occorrerà però fare riferimento al peso specifico dell'acqua per il calcolo della pressione, poiché la misura letta sul quadrante non rappresenta l'altezza piezometrica per il liquido in oggetto.

Un'ultima categoria di manometri è costituita dai *manometri differenziali*, i quali sono atti a misurare differenze di pressione fra gas o differenze di quote piezometriche fra liquidi. Nel caso dei liquidi, i manometri differenziali misurano pertanto differenze di quote di piani dei carichi idrostatici.

Un primo tipo di manometro differenziale è del tipo metallico. Nel caso del manometro Bourdon, la superficie esterna del tubo a spirale è soggetta alla pressione di uno dei due fluidi. La rotazione del tubo a spirale dipende infatti dall'azione risultante della pressione interna, che tende, come detto, a far svolgere la spirale, e della pressione esterna, che tende invece a farla avvolgere. La rotazione della spirale dipende quindi dalla differenza delle pressioni dei due fluidi. Da ciò consegue anche che, nei manometri metallici comuni, nei quali non viene adottato alcun accorgimento per isolare la superficie esterna del tubo ricurvo dall'ambiente esterno, detta superficie è soggetta alla pressione atmosferica e la pressione misurata dal manometro è perciò la pressione relativa del fluido cui il manometro è collegato. Nel caso in cui all'interno del tubo si realizzi il vuoto, il manometro metallico funziona come barometro, poiché risulta soggetto alla sola pressione atmosferica sulla superficie esterna del tubo ricurvo.

Un secondo tipo di manometro differenziale è del tipo *a liquido*. Esso è costituito da un tubo a U collegato ai recipienti contenenti i due fluidi oggetto della misura (Figura 32). Limiteremo il discorso al caso di fluidi di uguale peso specifico, aeriformi o liquidi, che è il solo caso in cui la misura dello strumento fornisce una indicazione univoca della differenza di pressione e di quote piezometriche rispettivamente. Nel caso il liquido manometrico possieda peso specifico γ_m maggiore di quello γ del fluido oggetto della misura, esso si troverà nella parte bassa del tubo, costituente una posizione di equilibrio stabile per esso, come nel caso di Figura 32.

Dalla legge di Stevin, si ha:

$$p_\beta = p_\alpha + \gamma_m \Delta .$$

²⁸ l'effetto è il medesimo utilizzato nelle cosiddette "lingue di Menelik" in uso durante il Carnevale.

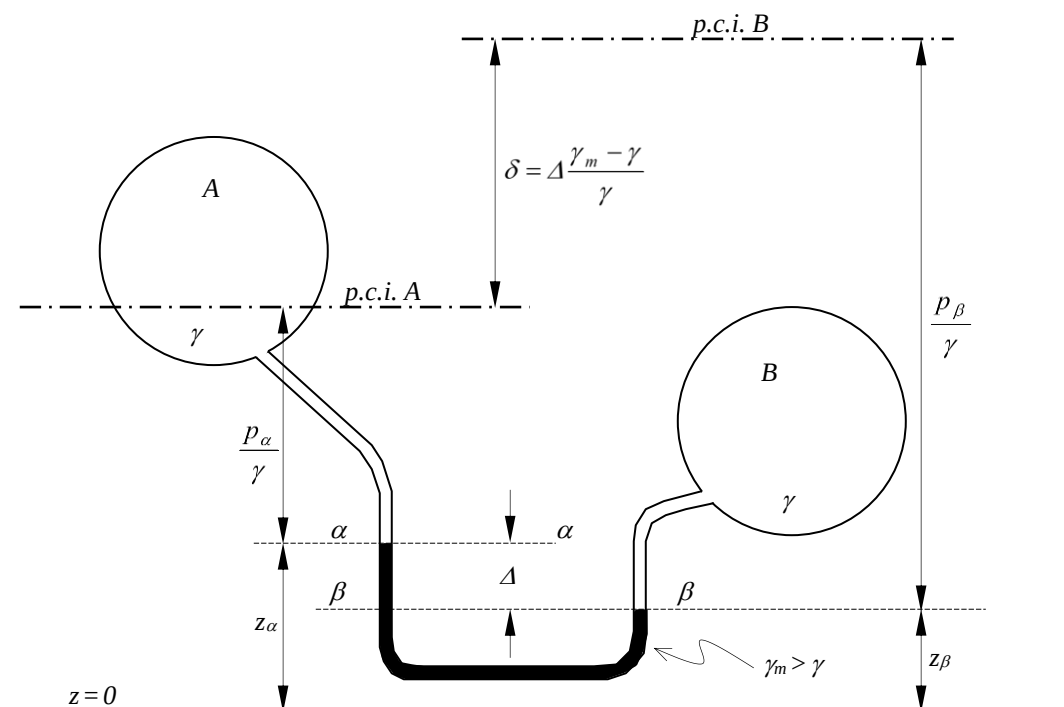


Figura 32. Schema di manometro differenziale a liquido (liquido manometrico più pesante dei fluidi oggetto della misura).

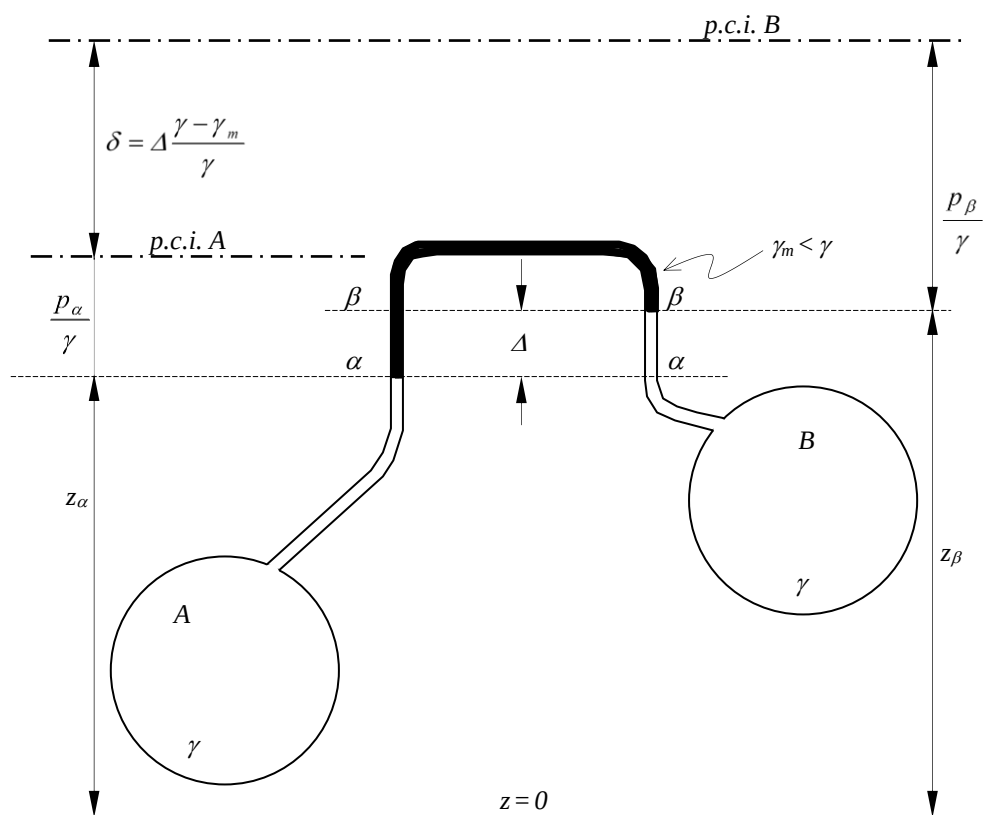


Figura 33. Schema di manometro differenziale con fluido manometrico più leggero dei fluidi oggetto della misura.

Nel caso di un liquido, dividendo membro a membro per il peso specifico γ , sommando successivamente membro a membro $z_\alpha - z_\beta = \Delta$ e riarrangiando si ottiene:

$$\delta = \left(z_\beta + \frac{p_\beta}{\gamma} \right) - \left(z_\alpha + \frac{p_\alpha}{\gamma} \right) = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}, \quad (99)$$

da cui si deduce che il piano dei carichi idrostatici più elevato è quello del liquido a contatto con il menisco del liquido manometrico meno elevato.

Si osservi che il manometro differenziale fornisce unicamente la differenza delle quote dei piani dei carichi idrostatici, sulle cui posizioni nulla può dirsi in mancanza di ulteriori informazioni – in sostanza, del valore della pressione in un punto qualunque di uno dei due liquidi. I liquidi possono quindi essere entrambi interamente in pressione, interamente in depressione, o parte in pressione e parte in depressione.

Nel caso il fluido manometrico sia più leggero dei fluidi oggetto della misura, il fluido manometrico deve disporsi nella parte alta del tubo ricurvo, come mostrato in Figura 33. Con ragionamento analogo a quello utilizzato per la deduzione della (99), si ottiene in questo caso:

$$\delta = \left(z_\beta + \frac{p_\beta}{\gamma} \right) - \left(z_\alpha + \frac{p_\alpha}{\gamma} \right) = \Delta \frac{\gamma - \gamma_m}{\gamma}. \quad (100)$$

In particolare, se il fluido manometrico è un gas (tipicamente, aria) e il fluido oggetto della misura un liquido, potendosi trascurare il peso specifico del fluido manometrico rispetto a quello del liquido la misura del manometro differenziale uguaglia la differenza di quota dei piani dei carichi idrostatici, $\delta = \Delta$.

3.10 Spinte su superfici.

Sulla base della espressione (82) dello stato di sforzo idrostatico, la spinta elementare che un fluido in quiete esercita sulla faccia di un'areola dS avente normale $\vec{n}$ è data da:

$$d\vec{I} = -p\vec{n} dS. \quad (101)$$

da cui l'espressione generale della spinta esercitata da un fluido in quiete su una superficie qualunque S , risultante delle forze elementari (101):

$$\vec{I} = \int_S -p\vec{n} dS. \quad (102)$$

Come ogni sistema di forze, anche il sistema di forze elementari di pressione esercitate da un fluido in quiete su una superficie equivale a una forza pari al vettore risultante del sistema più una coppia o a due forze non complanari (§ 1.3.4.2). La determinazione di tale sistema di forze equivalente si esegue in maniera differente a seconda che la superficie che subisce la spinta sia piana o gobba. Nei paragrafi successivi verranno presentati i metodi utilizzabili nei vari casi.

Prima di illustrare i metodi di calcolo pratici delle spinte idrostatiche, rimane però da chiarire se, e perché, tali calcoli possano essere effettuati utilizzando le pressioni relative, introdotte nel §3.5 e, di fatto, arbitrariamente definite dalla (95), in luogo delle pressioni assolute.

A tale scopo, conviene procedere al calcolo della spinta in un caso generico, facendo uso delle pressioni assolute, e mostrare che lo stesso risultato si può ottenere (anche in modo più agevole) riferendosi alle pressioni relative. Si consideri quindi il caso illustrato in Figura 34, nel quale la superficie sulla quale si vuole calcolare la spinta è la calotta sferica di sezione A-B. Da un punto di vista pratico, si ha interesse a calcolare la sollecitazione totale alla quale la parete è soggetta, al fine, per esempio, di dimensionare la bullonatura che tiene la calotta fissata al corpo cilindrico del serbatoio, con i metodi forniti dalla Tecnica delle Costruzioni.

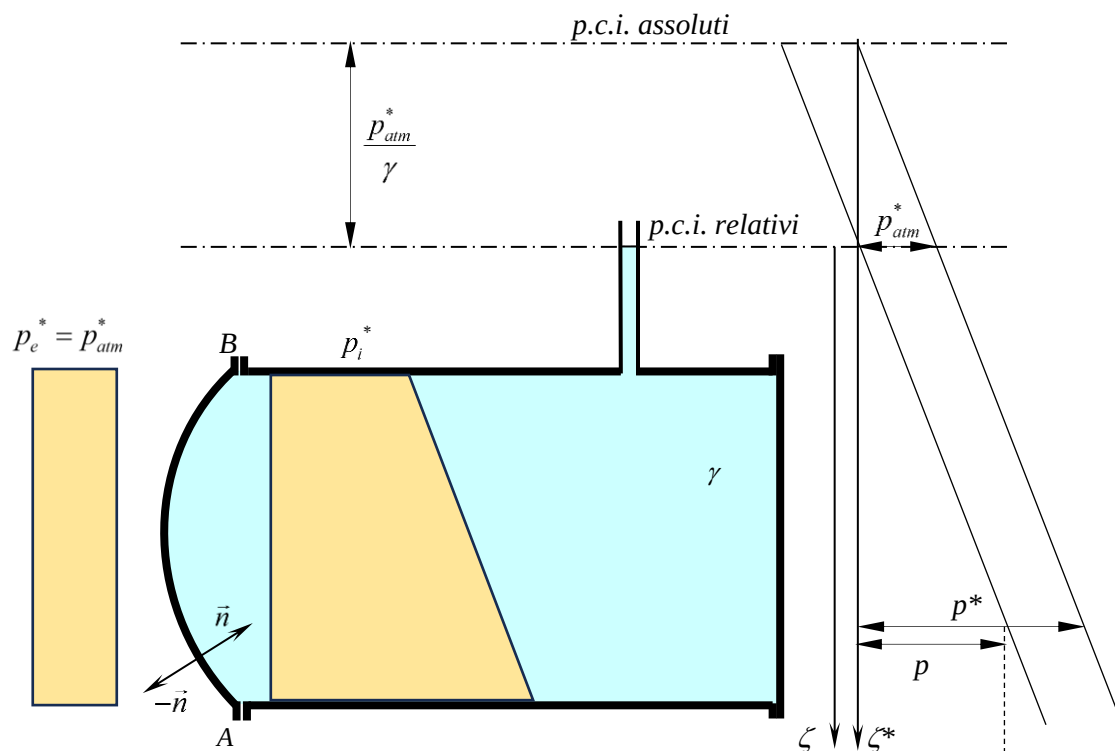


Figura 34. Schema di calcolo della spinta idrostatica su una superficie.

Ragionando in termini delle pressioni assolute (le pressioni “vere”), la calotta è soggetta, sulla sua faccia rivolta verso l’interno del serbatoio, a contatto con il liquido ivi contenuto, al regime di pressioni assolute rappresentato dal relativo diagramma, del quale, con campitura in giallo, è estratta la porzione effettivamente esercitata sulla calotta; sulla faccia esterna, a contatto con l’ambiente esterno, la calotta è soggetta alla pressione atmosferica, praticamente uniforme sull’intera superficie.

La spinta complessiva è quindi la risultante delle spinte ricevute dall’interno dal liquido e dall’esterno dall’atmosfera. Trascurando lo spessore della parete, col che le superfici esterna ed interna della parete risultano identiche, e osservando che, detta $\vec{n}$ la normale alla faccia interna, nello stesso punto della faccia esterna la normale è uguale e contraria, la spinta cercata è data da:

$$\vec{IT} = \int_S -p_i^* \vec{n} dS + \int_S -p_e^* (-\vec{n}) dS = \int_S -p_i^* \vec{n} dS + \int_S -p_{atm}^* (-\vec{n}) dS = \int_S -(p_i^* - p_{atm}^*) \vec{n} dS = \int_S -p \vec{n} dS$$

La spinta complessiva si può quindi ottenere facendo riferimento alle pressioni relative, che è quanto si voleva dimostrare. A parte il vantaggio già evidenziato, legato alla agevole individuazione del piano dei carichi idrostatici, si osserva come anche il calcolo della spinta in sé, sia in termini di risultante che di momento risultante (quindi anche della posizione della retta d’azione), risulti alquanto semplificato dal riferimento ad un’unica distribuzione di pressione.

3.10.1 Spinte su superfici piane.

Una faccia di una superficie piana ha ovunque la stessa normale. Il sistema di forze di pressione elementari (101) agente sulla superficie costituisce pertanto un sistema di forze parallele, il quale, nel caso ammetta risultante non nullo, è equivalente al vettore risultante (che in tal caso è detto *la* risultante), applicato nel relativo centro del sistema di forze parallele (§ 1.3.4.3).

La determinazione della risultante e della posizione della sua retta d’azione è svolta di seguito, dapprima per il caso di fluido incompressibile, con riferimento allo schema di Figura 35, nella quale è rappresentato un liquido contenuto in un recipiente prismatico a sezione trapezia.

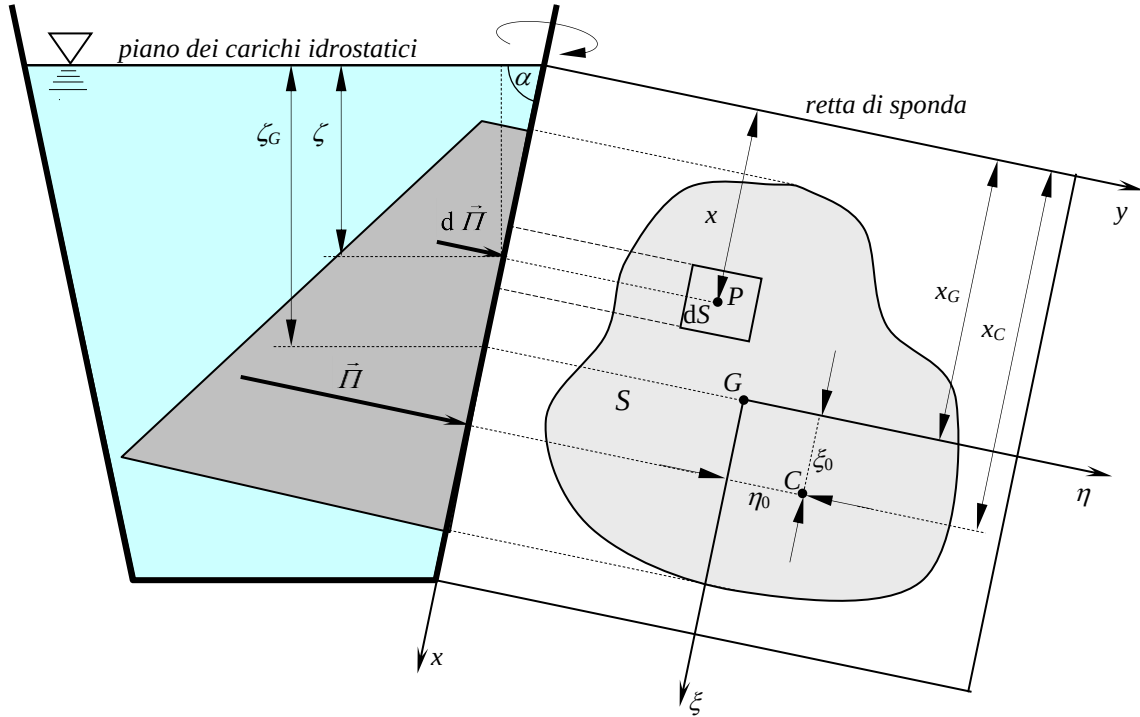


Figura 35. Schema di calcolo della spinta idrostatica su una superficie piana.

La superficie S sulla quale si desidera calcolare la spinta, assunta di forma del tutto generica, è posta sulla faccia interna di una parete inclinata della sezione trapezia, vista frontalmente nella parte destra del disegno previo ribaltamento della parete di 90° attorno a una retta di massima pendenza. Nel disegno, campita in grigio, è riportata la parte della distribuzione di pressione agente sulla superficie. Il solido avente per base la superficie S e per altezza, punto per punto, la pressione ivi vigente, è detto *solido delle pressioni* o *solido di spinta*. Evidentemente, il concetto di solido di spinta costituisce una astrazione, il suo volume essendo espresso in Newton ($\text{Pa} \times \text{m}^2 = \text{N}$) invece che in m^3 .

Per quanto riguarda la risultante, la normale $\vec{n}$ può essere portata fuori dall'integrale (83) in quanto costante su una superficie piana, consentendo di scrivere:

$$\vec{R} = -\vec{n} \int_S p \, dS, \quad (103)$$

in cui l'integrale esprime la proiezione della spinta nella direzione opposta alla normale. Nel caso in esame di Figura 35, nel quale le pressioni sono ovunque positive, essendo la normale esterna, il segno positivo dell'integrale corrisponde a una sollecitazione di compressione nei confronti della superficie, di modulo dato dal valore dell'integrale, che ha anche il significato di volume del solido di spinta.

Viceversa, se la stessa superficie fosse interamente in depressione, come nel caso rappresentato in Figura 36, l'integrale assumerebbe valore negativo, la risultante sarebbe quindi una forza di trazione e l'integrale assumerebbe il significato di modulo della spinta e di volume del solido di spinta solo se preso in valore assoluto. D'ora in avanti attribuiremo senz'altro all'integrale contenuto nella (103) il significato di volume del solido di spinta e di modulo della risultante, sottintendendo che, in generale, tali rappresentazioni richiedano di considerare l'integrale in valore assoluto.

Per quanto riguarda il punto di applicazione della risultante, nel caso di un fluido incompressibile, detto ζ l'affondamento di un generico punto P della superficie S rispetto al piano dei carichi idrostatici, l'integrale a secondo membro della (103) può svilupparsi come segue:

$$\int_S p \, dS = \int_S \gamma \zeta \, dS = \gamma \int_S \zeta \, dS, \quad (104)$$

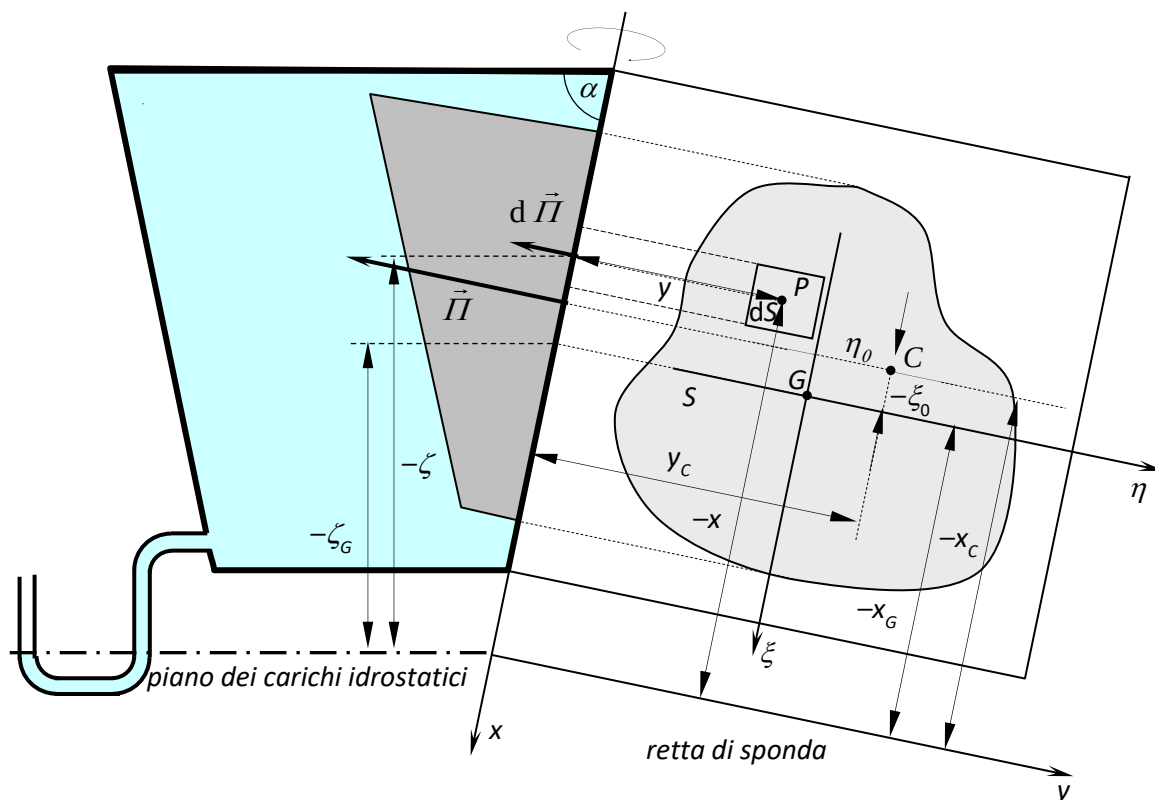


Figura 36. Schema di calcolo della spinta idrostatica su una superficie piana in depressione.

Dalla espressione (104) del volume di spinta, si deduce che il risultante delle forze di pressione agenti sulla superficie S si possa riguardare, oltre che come il volume (astratto) del solido di spinta, come il peso di un solido propriamente detto, di forma simile a quest'ultimo, avente per altezze, punto per punto, l'affondamento ζ del punto rispetto al p.c.i. in luogo della pressione. Pertanto, il punto di applicazione della risultante può essere determinato quale baricentro di tale solido – come tale non appartenente alla superficie S . Il punto di intersezione della retta d'azione della risultante condotta per il baricentro del solido di spinta con la superficie S è denominato *centro di spinta*. Naturalmente, oltre che in tali due punti caratteristici, la risultante può essere applicata in uno qualunque dei punti della sua retta d'azione, lungo la quale è libera di scorrere²⁹. Per lo stesso motivo, delle tre coordinate di tale baricentro, sono rilevanti soltanto le due definite sul piano che contiene la superficie premuta, per cui ci si può riferire indifferentemente al baricentro del solido di spinta propriamente detto.

Il calcolo della spinta sulla base del concetto di solido delle pressioni, seppure di validità del tutto generale, non riesce però sempre di agevole esecuzione, nel calcolo sia del volume che del baricentro del solido di spinta. A titolo di esempio, si consideri il caso illustrato in Figura 37, in cui la superficie premuta è circolare e, quindi, piuttosto regolare. Ciò nonostante, poiché il solido di spinta è un cilindro sezionato con un piano non ortogonale al suo asse (normale alla superficie premuta), tanto il calcolo del volume quanto la determinazione della posizione del suo baricentro richiedono l'uso di formule diverse da quelle che, per essere frequentemente utilizzate nella pratica, vengono anche facilmente memorizzate, rendendo perciò necessaria la consultazione di un manuale.

In pratica, la determinazione della spinta con il metodo del solido di spinta risulta agevole soltanto nel caso in cui la superficie S sia costituita da un rettangolo con due lati orizzontali, come nel caso di Figura 38, nel qual caso il solido di spinta è un prisma, denominato perciò *prisma di spinta*. In particolare, in Figura 38 la superficie soggetta alla spinta, campita in grigio, si estende fino al pelo

²⁹ È questo il motivo per cui, a rigore, la locuzione “il punto di applicazione” in uso nella terminologia tecnica è da ritenersi improprio. Ciò nonostante, tale termine viene utilizzato anche in queste dispense per brevità.

libero e il prisma di spinta ha quindi sezione retta triangolare. Se un solido ammette un piano di simmetria, il baricentro giace su tale piano. La risultante giace quindi sul piano verticale di mezzeria della superficie bagnata. Ricordando che il baricentro di un triangolo rettangolo dista da un cateto un terzo della lunghezza dell'altro cateto, il punto di intersezione della retta d'azione della risultante con la superficie bagnata è posto a una distanza dal fondo, misurata lungo la direzione di massima pendenza, pari a un terzo dello sviluppo della superficie bagnata ℓ nella stessa direzione. Anche nel caso in cui la superficie S non si estendesse fino al pelo libero, la sezione del prisma sarebbe un trapezio e il calcolo non presenterebbe particolari difficoltà, in quanto la posizione del baricentro si otterrebbe da una media ponderale delle coordinate di un rettangolo e un triangolo.

Nel caso in cui S fosse orizzontale, come anche per una giacitura qualunque nel caso di aeriformi, il problema risulta alquanto semplificato dal fatto che la distribuzione di pressione sulla superficie S è uniforme. Pertanto, il modulo della risultante si calcola semplicemente come prodotto della pressione costante per l'area della superficie S . Il solido di spinta è ancora un prisma, avente però ora per base la superficie S . Se ne deduce che i baricentri G_V del prisma di spinta e G della superficie S sono disposti lungo la retta d'azione della risultante, per cui il centro di spinta C coincide con G .

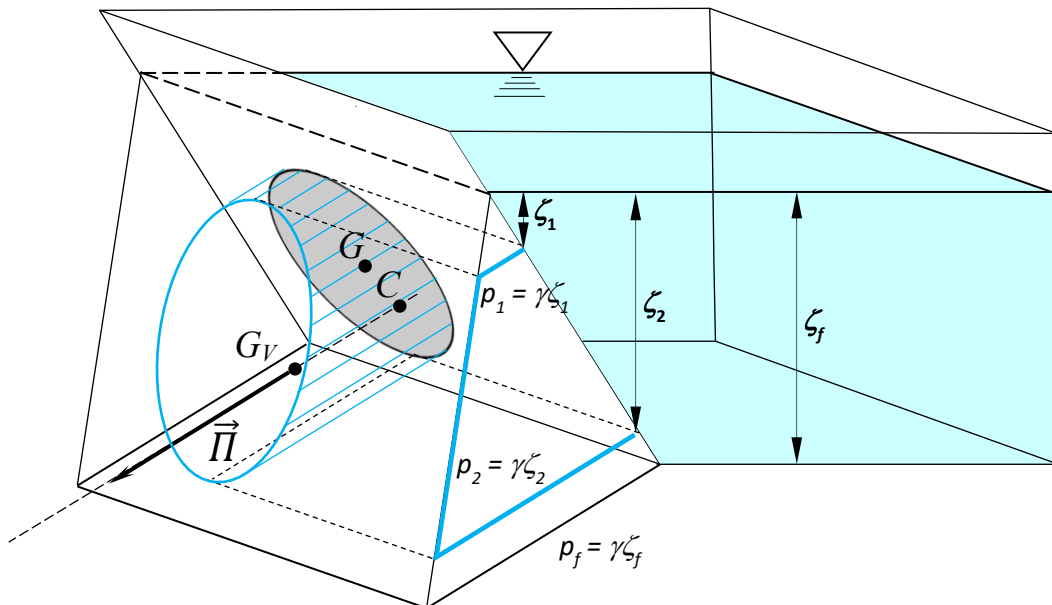


Figura 37. Solido di spinta su una superficie premuta circolare.

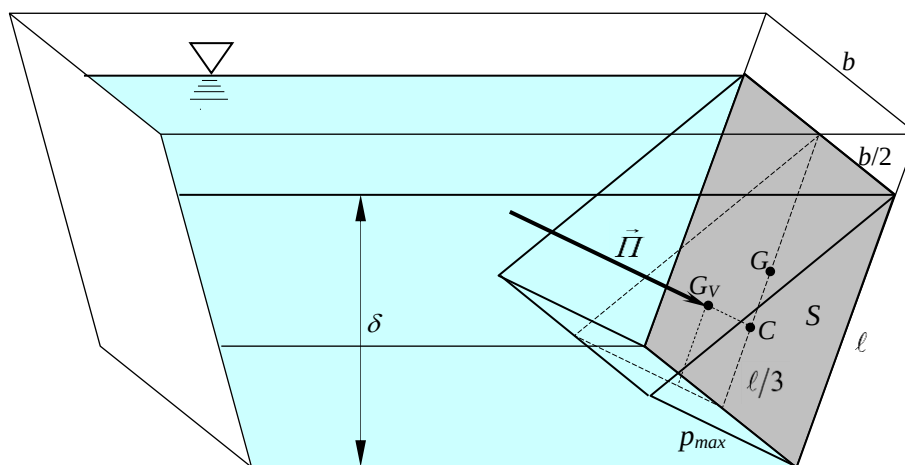


Figura 38. Spinta idrostatica su una superficie rettangolare con un lato posto sulla retta di sponda. Il solido di spinta è un prisma (prisma di spinta) a sezione triangolare.

Le limitazioni pratiche all'uso del metodo del solido di spinta possono essere facilmente superate elaborando ulteriormente l'espressione (104), osservando che l'integrale presente a terzo membro rappresenta il momento statico della superficie S rispetto al piano dei carichi idrostatici, pari al prodotto dell'affondamento ζ_G del baricentro G della superficie S per l'area della superficie:

$$\int_S p dS = \int_S \gamma \zeta dS = \gamma \int_S \zeta dS = \Pi_{-n} = \gamma \zeta_G S = p_G S, \quad (105)$$

in cui p_G è la pressione nel baricentro della superficie premuta. Pertanto, la componente della spinta sulla superficie nella direzione opposta alla normale alla superficie è esprimibile, semplicemente, come prodotto della pressione nel baricentro della superficie per l'area della superficie stessa. La spinta è di compressione se la pressione nel baricentro della superficie è positiva, ossia, se il baricentro è posto inferiormente al piano dei carichi idrostatici (Figura 35); è di trazione in caso contrario (Figura 36). Si badi che tale corrispondenza fra posizione del baricentro (quindi segno della pressione baricentrica) e natura della spinta, di compressione o di trazione, vale anche nei casi in cui la superficie risultasse parte in pressione e parte in depressione. Si osservi anche come il riferimento alla pressione baricentrica semplifichi radicalmente il calcolo del modulo della spinta nel caso della superficie circolare di Figura 37.

Nel caso particolare in cui il baricentro della superficie fosse posto alla quota del piano dei carichi idrostatici, la risultante sarebbe nulla. Escludendo il caso banale di una superficie orizzontale posta alla stessa quota del p.c.i., questo caso è rappresentato in Figura 39. Pur essendo nulla la risultante, la spinta non sarebbe tuttavia un sistema di forze nullo, come mostrato di seguito.

Indicando con S_p e S_d le parti della superficie S in pressione e in depressione rispettivamente, e con ζ_{Gp} e ζ_{Gd} gli affondamenti dei relativi baricentri rispetto al p.c.i., dalle regole per il calcolo delle coordinate del baricentro di una figura composta (Eq. (53)), si deduce che la componente del risultante della spinta nella direzione della normale interna, Π_{-n} , si può esprimere come somma dei termini corrispondenti relativi alle due parti della sezione, Π_{p-n} e Π_{d-n} , che risultano uguali in modulo e di segno opposto, dato che la loro somma è nulla:

$$\Pi_{-n} = \gamma \zeta_G S = \gamma (\zeta_{Gp} S_p + \zeta_{Gd} S_d) = \Pi_{p-n} + \Pi_{d-n} = 0.$$

Pertanto, la spinta non è riducibile a un'unica forza (*la risultante*), avendo risultante nullo; è, invece, equivalente a una coppia di forze, costituita dalle spinte agenti sulla superficie in pressione (di compressione) e sulla superficie in depressione (di trazione), applicate ciascuna nel relativo centro di spinta, indicati con C_p e C_d in Figura 39, di braccio pari alla distanza dei due centri di spinta.

Il significato dell'integrale contenuto nella (103) in termini di volume del solido di spinta e di modulo della spinta, evidenziato in precedenza, si applica anche al caso in questione, purché sottintendendo una ulteriore generalizzazione, essendo il risultato (nullo) della somma algebrica di due volumi di valori uguali in modulo e opposti in segno. I punti di applicazione delle due forze costituenti la coppia sono i baricentri dei corrispondenti solidi di spinta; i corrispondenti centri di spinta si ottengono per proiezione di detti baricentri sulle superfici S_p e S_d nella direzione delle forze stesse. La coppia è quindi pienamente determinata in modulo, direzione e verso³⁰.

Si è visto come le complicazioni legate alla determinazione del modulo della spinta con il metodo del solido di spinta si possano evitare utilizzando il metodo delle pressioni baricentriche. Analoga importante semplificazione si può ottenere anche per la determinazione del centro di spinta per tutti i casi considerati, rappresentati in Figura 35, Figura 36 e Figura 39, nonché per il caso di distribuzione uniforme di pressione. Per fissare le idee, ai fini della derivazione delle formule pratiche si farà riferimento allo schema di Figura 35. A tale caso, come pure al caso di Figura 36, entrambi caratterizzati da risultante non nullo, può essere ricondotto anche il caso di Figura 39, nel quale, semplicemente, si dovranno calcolare le posizioni di due centri di spinta invece che di uno solo.

³⁰ Si ricorda che la coppia è caratterizzata dal momento risultante delle due forze che la compongono, che è, come tutti i momenti di forze, un vettore.

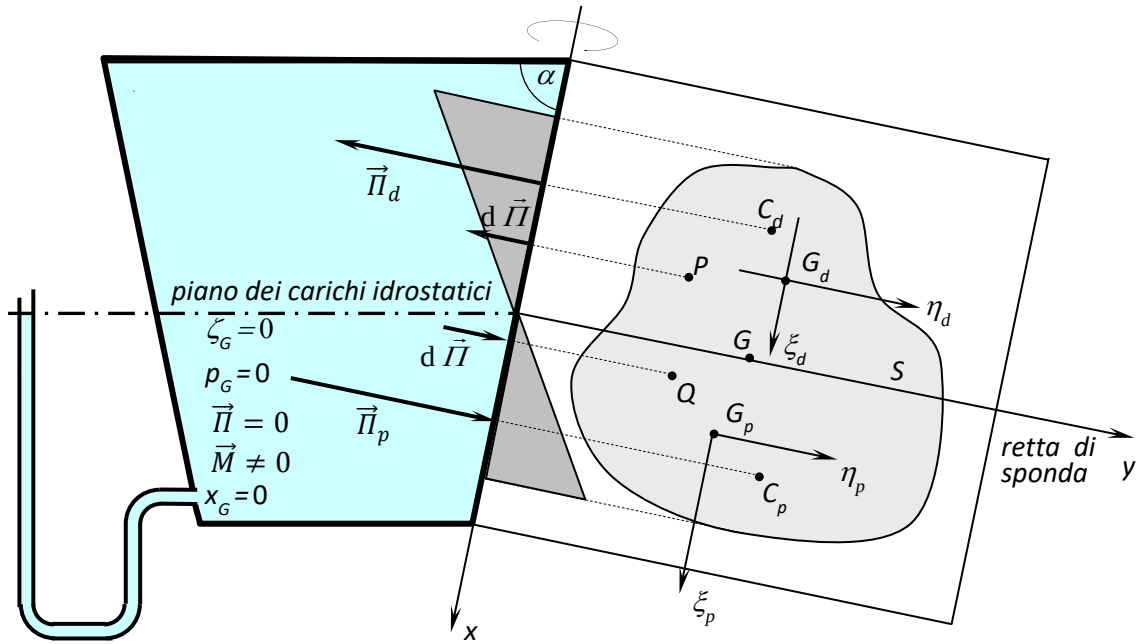


Figura 39. Schema di calcolo della spinta idrostatica su una superficie piana per $p_G = 0$.

Il centro di spinta (punto C in Figura 35) è compiutamente individuato quando se ne conoscano le coordinate x_C e y_C in un sistema di riferimento giacente sul piano che contiene la superficie S .

A tale scopo conviene definire un sistema di riferimento costituito da un asse x coincidente con una qualunque retta di massima pendenza e un asse y , orizzontale, dato dall'intersezione del piano contenente la superficie S e il piano dei carichi idrostatici –materializzato dal pelo libero del volume liquido nel caso di Figura 35. La retta corrispondente è detta *retta di sponda*. Tale retta orizzontale costituisce infatti la sponda del liquido sulla parete contenente la superficie soggetta alla spinta. Essendo $d\Pi_n = p dS$ la componente della forza elementare agente su un elemento di superficie dS , nella stessa direzione e nel verso opposto alla normale, l'analogo nel caso continuo della espressione (50) delle coordinate del centro di un sistema discreto di forze parallele fornisce per le due coordinate x_C e y_C del centro di spinta nel sistema di riferimento scelto le seguenti espressioni:

$$x_C = \frac{\int_S x p dS}{\int_S p dS} \quad ; \quad y_C = \frac{\int_S y p dS}{\int_S p dS} . \quad (106)$$

Si ricorda che le (106) costituiscono l'espressione del teorema di Varignon. Scritte nella forma:

$$\begin{aligned} x_C \Pi_{-n} &= x_C \int_S p dS = \int_S x p dS = \int_S x d\Pi_{-n} \\ y_C \Pi_{-n} &= y_C \int_S p dS = \int_S y p dS = \int_S y d\Pi_{-n} , \end{aligned}$$

in cui Π_{-n} rappresenta la componente della risultante nella stessa direzione e in verso opposto alla normale $\vec{n}$ (cioè, a meno del segno, il modulo della spinta), esse esprimono infatti l'uguaglianza dei momenti rispetto agli assi x e y della risultante $\vec{\Pi}$ applicata nel centro di spinta incognito e della distribuzione di forze di pressione elementari applicate nei punti della superficie S . Si può mostrare facilmente che uguagliare i momenti rispetto agli assi (che sono quantità scalari) equivale a uguagliare le componenti sugli assi x e y dei corrispondenti vettori momento, calcolati assumendo

l'origine del riferimento come polo. Tali vettori momento giacciono infatti sul piano che contiene la superficie in quanto dati da prodotti vettoriali fra un raggio vettore contenuto nel piano della superficie S e forze (la risultante e le forze di pressione elementari) normali alla superficie S . Rimane quindi verificata l'equivalenza dei due sistemi di forze nei termini più generali di uguaglianza del vettore risultante e del momento risultante rispetto a un qualunque punto dello spazio.

Nel caso di fluido incomprimibile, la pressione che compare negli integrali contenuti nella (106) può essere espressa in funzione della coordinata x del punto generico:

$$p = \gamma \zeta = \gamma x \sin \alpha . \quad (107)$$

Osservando che, oltre al peso specifico γ , anche l'angolo α fra il piano che contiene la superficie S e il piano dei carichi idrostatici risulta costante, entrambi possono essere portati fuori dal segno di integrale e semplificati fra numeratore e denominatore, per cui le coordinate del centro di spinta possono esprimersi come:

$$x_C = \frac{\int_S x^2 dS}{\int_S x dS} = \frac{I_{xx}}{M_s} \quad ; \quad y_C = \frac{\int_S xy dS}{\int_S x dS} = \frac{I_{xy}}{M_s} , \quad (108)$$

in cui in cui I_{xx} e I_{xy} sono rispettivamente il momento d'inerzia della superficie S rispetto alla retta di sponda e il momento centrifugo rispetto agli assi x e y ; M_s è il momento statico della superficie S rispetto alla retta di sponda.

In genere risulta più comodo esprimere le coordinate del centro di spinta rispetto a un sistema di riferimento ξ, η avente origine nel baricentro della superficie S e assi paralleli rispettivamente agli assi x e y . A tale scopo occorre utilizzare il teorema di trasposizione dei momenti di inerzia e centrifugo di Huygens (§1.3.4.3). Detti I_{xx_0} e I_{xy_0} rispettivamente il momento di inerzia rispetto all'asse η (retta parallela alla retta di sponda passante per il baricentro G) e il momento centrifugo rispetto agli assi ξ, η , si ha:

$$I_{xx} = I_{xx_0} + x_G^2 S \quad (55)$$

$$I_{xy} = I_{xy_0} + x_G y_G S , \quad (56)$$

avendo indicato con x_G e y_G le coordinate del baricentro nel sistema di riferimento x, y , costituenti rispettivamente, in modulo, le distanze dell'asse y dall'asse η e dell'asse x dall'asse ξ . Sostituendo le (55) e (56) nelle (108) e ricordando che $M_s = x_G S$, si ottiene:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{I_{xx}}{M_s} = \frac{I_{xx_0} + x_G^2 S}{x_G S} = \frac{I_{xx_0}}{x_G S} + x_G \\ y_C &= \frac{I_{xy}}{M_s} = \frac{I_{xy_0} + x_G y_G S}{x_G S} = \frac{I_{xy_0}}{x_G S} + y_G \end{aligned} .$$

Pertanto, le coordinate del centro di spinta nel sistema di riferimento ξ, η sono date da:

$$\xi_0 = \frac{I_{xx_0}}{M_s} \quad ; \quad \eta_0 = \frac{I_{xy_0}}{M_s} . \quad (109)$$

Le formule (109) risultano di più agevole utilizzazione rispetto alle (108) in quanto nei manuali vengono fornite le espressioni dei momenti di inerzia e centrifughi rispetto ad assi baricentrici.

Se la superficie S presenta un asse di simmetria, il baricentro della superficie appartiene a tale asse (§1.3.4.3). Se, in particolare, l'asse di simmetria è uno dei due assi del riferimento baricentrico,

all'asse ξ di tale riferimento appartiene, oltre al baricentro, anche il centro di spinta, poiché in tal caso risulta nullo il momento centrifugo e si ha pertanto $\eta_0 = 0$ ³¹.

A norma della prima delle (109), il centro di spinta è posto a una distanza dall'asse baricentrico orizzontale (asse η) inversamente proporzionale alla distanza del baricentro dalla retta di sponda. Inoltre, il centro di spinta è sempre posto da parte opposta della retta di sponda rispetto all'asse η . Infatti, essendo il momento d'inerzia una quantità definita positiva, il segno di ξ_0 è uguale al segno del momento statico $M_s = x_G S$, quindi, essendo anche l'area S positiva, al segno della coordinata x_G . Poiché l'asse x deve essere sempre orientato nel verso delle pressioni crescenti affinché valga la (107), nel caso $p_G > 0$ ($\zeta_G > 0$, $x_G > 0$), rappresentato in Figura 35, il baricentro è posto al di sotto del piano dei carichi idrostatici e il centro di spinta al di sotto del baricentro; nel caso $p_G < 0$ ($\zeta_G < 0$, $x_G < 0$), rappresentato in Figura 36, il baricentro è posto al di sopra del piano dei carichi idrostatici e il centro di spinta al di sopra del baricentro. Ovviamente, qualora il liquido soggiaccia interamente a un pelo libero ci si trova sempre nel primo caso.

Si osservi che, come già per la natura della risultante, se di compressione o di trazione, anche ai fini della determinazione della posizione del centro di spinta, rileva unicamente il segno della pressione baricentrica, indipendentemente dal fatto che parte della sezione possa essere in pressione e parte in depressione. Infine, nel caso di pressione baricentrica nulla rappresentato in Figura 39, le (109) possono essere utilizzate per ricavare le coordinate dei centri di spinta C_p e C_d delle due forze, uguali in direzione e modulo e opposte in verso, costituenti la coppia al quale il sistema di forze di pressione risulta equivalente³².

Le (109) valgono anche nel caso in cui la superficie piana premuta S sia orizzontale. In tal caso, la distribuzione delle pressioni è uniforme; escludendo il caso banale in cui il piano che contiene la superficie S e il piano dei carichi idrostatici siano coincidenti, essi sono paralleli e la loro intersezione, che per definizione è la retta di sponda, si trova all'infinito. Nelle (109) si ha quindi $x_G = \infty$ con S , I_{xx_0} e I_{xy_0} indipendenti dalla giacitura della superficie e non nulli. Risulta dunque $\xi_0 = \eta_0 = 0$ e il centro di spinta coincide quindi con il baricentro della superficie, come era già stato dedotto sulla base del metodo del solido di spinta.

Come già rilevato, il caso delle superfici piane soggette a una distribuzione di pressione uniforme si presenta, oltre che al caso dei liquidi, per il quale valgono le (109), quando la superficie è orizzontale, anche al caso degli aeriformi, qualunque sia la giacitura della superficie piana, sulla base della consueta approssimazione basata sulla limitata estensione in quota della superficie, nel qual caso non viene definito un piano dei carichi idrostatici. In generale, ogni qualvolta si possa ammettere uniforme la pressione, sia per i liquidi che per gli aeriformi, le (106) si sviluppano come segue:

$$x_c = \frac{\int_S x p dS}{\int_S p dS} = \frac{p}{p} \frac{\int_S x dS}{\int_S dS} = \frac{\int_S x dS}{S} = x_G \quad ; \quad y_c = \frac{\int_S y p dS}{\int_S p dS} = \frac{\int_S y dS}{S} = y_G ,$$

per cui le espressioni delle coordinate del centro di spinta si riducono alle espressioni delle coordinate del baricentro (§1.3.4.3).

A titolo di verifica, determiniamo la spinta per il caso di Figura 38, con entrambi i metodi. Il modulo della spinta è calcolabile in termini di volume del prisma di spinta come:

$$II = \frac{1}{2} p_{\max} \ell b = \frac{1}{2} \gamma \delta \ell b ,$$

³¹ Alla stessa conclusione non si perviene se l'asse di simmetria non è uno dei due assi coordinati ξ , η ,

³² Questo caso è altresì interpretabile (in modo certamente meno pratico) come caso limite di un sistema equivalente a una risultante di modulo tende a zero, applicata in un centro di spinta che, a norma delle formule (109), tende all'infinito, al tendere a zero della coordinata x_G del baricentro della superficie S , il cui momento, dato da una forma indeterminata $0 \cdot \infty$, tende al valore finito del momento della coppia.

in cui $p_{max} = \gamma \delta$ è la pressione al fondo del serbatoio, e in termini di pressione baricentrica, equazione (105), come:

$$II = p_G S = \gamma \zeta_G S = \gamma \frac{\delta}{2} b \ell.$$

Come già esposto in precedenza, il baricentro del prisma di spinta ricade nel suo piano verticale di simmetria e, all'interno della sezione triangolare così individuata, costituita dal diagramma delle pressioni, nel baricentro del triangolo, distante da ciascun cateto un terzo della lunghezza dell'altro cateto. Condotta la retta d'azione della risultante per tale baricentro, il punto di intersezione con la superficie bagnata, che è il centro di spinta, è posto a una distanza dal fondo, misurata lungo la direzione di massima pendenza, pari a $\ell/3$. Poiché il baricentro della superficie rettangolare è posto alla distanza $\ell/2$ dal fondo (nonché dalla superficie), il centro di spinta risulta posto al di sotto del baricentro, a una distanza $\ell/2 - \ell/3 = \ell/6$.

Il medesimo risultato deve ottenersi mediante le formule (109). La coordinata η_0 del centro di spinta è nulla, poiché entrambi gli assi ξ e η sono assi di simmetria per la superficie. La coordinata ξ_0 vale:

$$\xi_0 = \frac{I_{xx_0}}{M_s} = \frac{I_{xx_0}}{x_G S} = \frac{\frac{1}{12} b \ell^3}{\frac{\ell}{2} b \ell} = \frac{\ell}{6},$$

che coincide con il risultato ottenuto utilizzando il metodo del solido di spinta.

3.10.2 Spinte su superfici di forma qualunque.

Per i casi di superfici di forma qualunque, sono disponibili due metodi di calcolo delle spinte: un primo metodo basato sull'uso dell'equazione globale dell'idrostatica (89), un secondo metodo basato sul calcolo dei componenti orizzontali e verticale della spinta (*metodo per componenti*).

3.10.2.1 Calcolo di spinte su superfici mediante l'equazione globale dell'idrostatica

L'uso dell'equazione globale dell'idrostatica per il calcolo di spinte su superfici viene illustrato con alcuni esempi tipici. Il primo è costituito dal problema della valutazione della spinta che un liquido contenuto in un recipiente esercita su un corpo di volume V di natura qualunque (metallico, plastico, omogeneo o meno, etc...) immerso in esso (vedi Figura 40a). Detta S la superficie di contorno del volume V , la spinta su tale superficie è data dall'espressione generale (83):

$$\vec{II} = \int_S -p \vec{n} dS. \quad (83)$$

Si supponga ora di estrarre il corpo di volume V e sostituirlo con un uguale volume di liquido. Si consideri quindi un volume di controllo V_c avente la medesima forma del corpo e posto esattamente nella stessa posizione occupata in precedenza da esso. Ciascun punto della superficie di contorno di tale volume liquido, essendo posto nella medesima posizione del corrispondente punto del corpo rispetto al piano dei carichi idrostatici, è soggetto alla stessa pressione e le corrispondenti superfici elementari sono soggette alle medesime spinte elementari, $- \vec{n} p dS$. In definitiva, la spinta agente sulla superficie esterna del volume liquido è la medesima esercitata sulla superficie esterna del corpo. Essendo il volume liquido in quiete, gli si può applicare l'equazione globale (89), al fine di valutare la spinta sulla superficie di contorno, la quale, per quanto discusso, *risulta identica a quella che agiva sul corpo immerso*. Si ottiene pertanto:

$$\vec{II} = -\vec{G},$$

in cui $\vec{G}$ è il peso del volume liquido, pari in modulo a γV . Si ritrova pertanto il principio di Archimede, secondo il quale un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto pari in modulo al peso del fluido spostato. Come già osservato nel §3.4, l'equazione globale (89) esprime

l'annullamento della risultante delle forze esterne applicate al volume di controllo (prima equazione cardinale della statica). Essendo la spinta uguale e contraria al peso del volume liquido, la seconda equazione cardinale della statica, esprime l'annullamento del momento risultante delle forze esterne, implica che la retta d'azione del vettore spinta $\vec{I}$ debba passare per il baricentro del volume liquido, ove è applicata la forza peso $\vec{G}$.

Nel caso di superfici gobbe non chiuse, l'uso dell'equazione globale risulta efficace quando il contorno della superficie in esame è contenuto in un piano. Un esempio di questo tipo è costituito dal problema del calcolo della spinta sulla calotta sferica BB posta a chiusura del serbatoio cilindrico ad asse orizzontale rappresentato in Figura 41.

La spinta $\vec{S}_{BB}$ viene esercitata sulla calotta sferica dal liquido adiacente. Pertanto, per il principio di azione e reazione essa è uguale e contraria alla forza $\vec{I}_0$ che la calotta esercita sul liquido attraverso la superficie di contatto. Fatta questa osservazione preliminare, la spinta può determinarsi mediante applicazione dell'equazione globale dell'idrostatica a un volume fluido in quiete avente una parte della superficie di contorno a contatto con la calotta. Il volume più conveniente rispondente a questo requisito è il volume V_c avente come parte rimanente della superficie di contorno la superficie circolare verticale di diametro D (Figura 42).

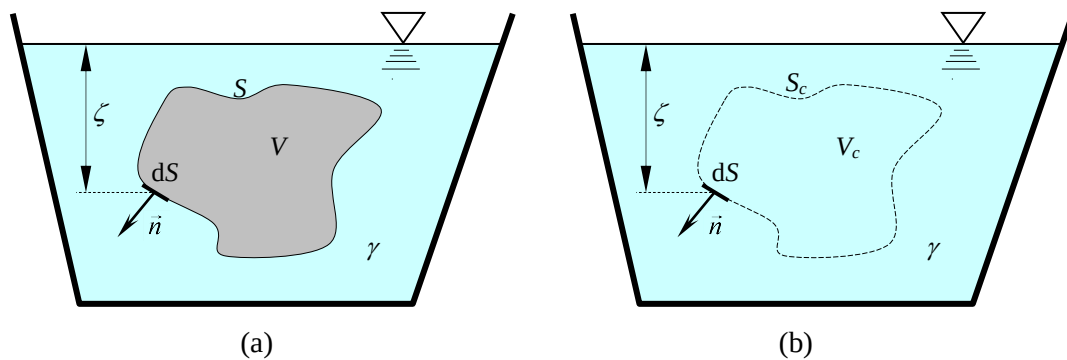


Figura 40. Derivazione del principio di Archimede mediante applicazione dell'equazione globale dell'idrostatica.

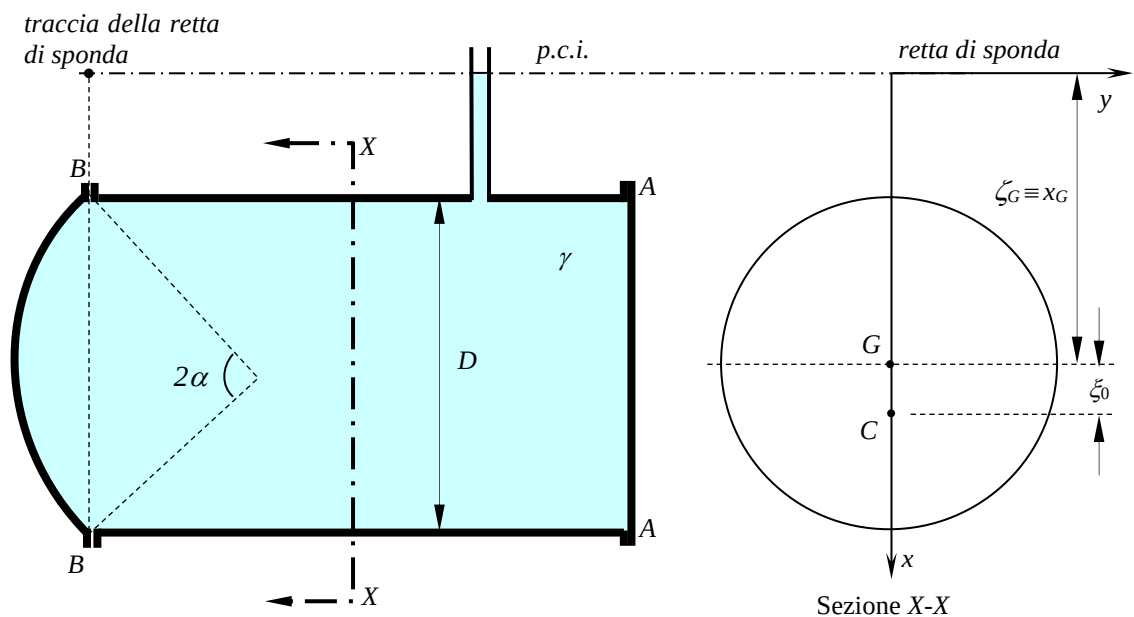


Figura 41. Calcolo della spinta su una calotta sferica mediante l'equazione globale dell'idrostatica.

La risultante delle forze di superficie, $\vec{\Pi}$, che compare nella forma generale (89), è esprimibile come somma della $\vec{\Pi}_0$ esercitata dalla calotta sul volume di controllo, uguale e contraria alla spinta esercitata dal fluido sulla calotta, $\vec{S}_{BB} = -\vec{\Pi}_0$, e della $\vec{\Pi}_1$ esercitata dal liquido adiacente attraverso la superficie circolare, sezione retta del serbatoio cilindrico. Detto $\vec{G}$ il peso proprio del volume di controllo, l'equazione globale a esso riferito si scrive perciò:

$$\vec{G} + \vec{\Pi}_0 + \vec{\Pi}_1 = 0 ,$$

da cui l'espressione della spinta cercata:

$$\vec{S}_{BB} = -\vec{\Pi}_0 = \vec{G} + \vec{\Pi}_1 . \quad (110)$$

La $\vec{\Pi}_1$ si determina in modulo, direzione, verso e punto di applicazione sulla base dei criteri presentati nel §3.10.1 per il calcolo di spinte su superfici piane. Con riferimento alla Figura 41, la spinta $\vec{\Pi}_1$ risulta di compressione poiché il baricentro della sezione circolare sottostà al piano dei carichi idrostatici. Il modulo della spinta vale:

$$\Pi_1 = p_G S = \gamma \zeta_G \frac{\pi D^2}{4} .$$

Il relativo centro di spinta giace sull'asse x indicato in Figura 41, in quanto costituente un asse di simmetria per la sezione, ed è posto a una distanza dal baricentro data da (Figura 41 e Figura 43):

$$\xi_0 = \frac{I_{xx_0}}{M_s} = \frac{\pi D^4 / 64}{x_G \pi D^2 / 4} = \frac{D^2}{16 x_G} .$$

Il modulo della forza peso è dato dal prodotto del peso specifico del liquido, γ , per il volume di controllo, V_c . Essa è applicata nel baricentro del volume liquido, G_v .

In Figura 43 è rappresentata in forma di poligono delle forze la somma vettoriale (110) che fornisce la spinta cercata $\vec{S}_{BB}$. Inoltre, viene rappresentato il procedimento grafico necessario a determinarne la posizione della retta d'azione, consistente nello scorrimento della $\vec{G}$ e della $\vec{\Pi}_1$ fino al punto di intersezione delle rispettive rette d'azione, ove queste possono essere composte per fornire la $\vec{S}_{BB}$, la cui retta d'azione deve pertanto passare per tale punto. Si ricorda che tali due operazioni (scorrimento e composizione) possono essere eseguite in quanto non alteranti né la risultante delle forze $\vec{G}$ e $\vec{\Pi}_1$, né il loro momento risultante rispetto a un qualunque punto dello spazio. Pertanto, esse conducono a un sistema di forze costituito dalla sola $\vec{S}_{BB}$, equivalente al sistema costituito dalla $\vec{G}$ e dalla $\vec{\Pi}_1$.

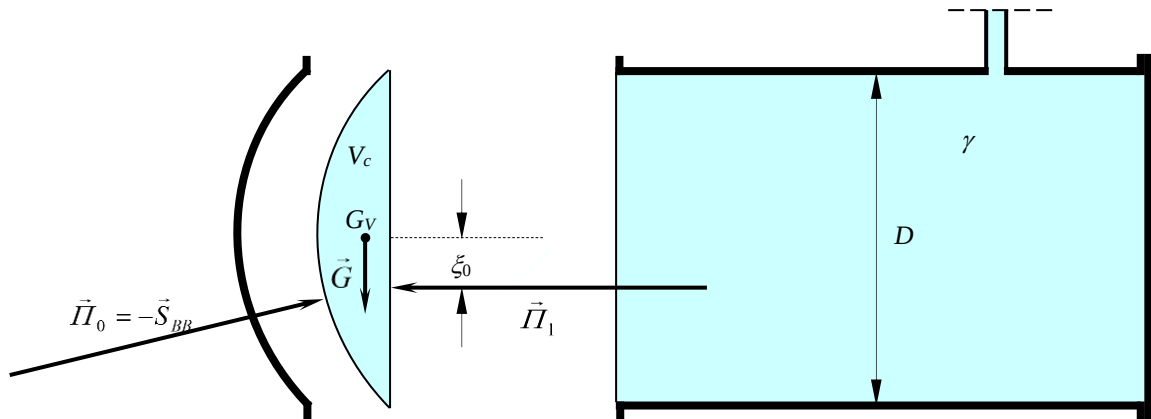


Figura 42. Individuazione del volume di controllo per l'applicazione dell'equazione globale.

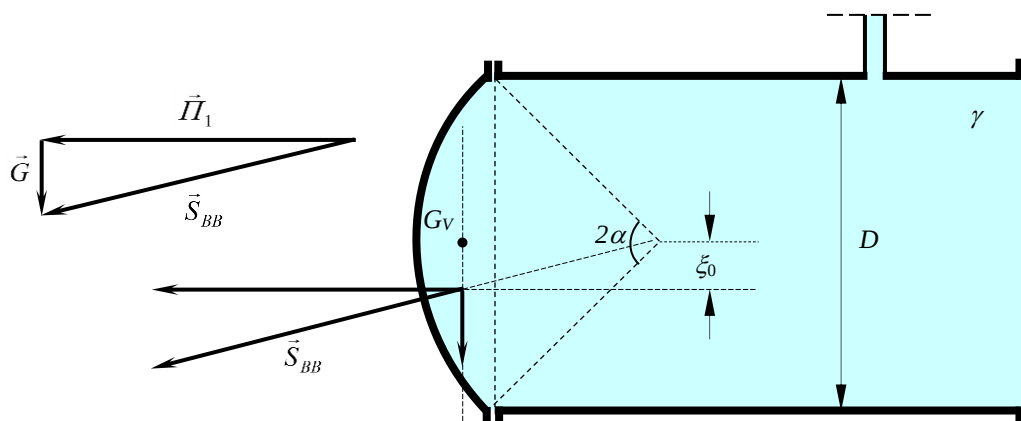


Figura 43. Poligono delle forze e retta d'azione della spinta sulla calotta.

Più semplicemente, la localizzazione della retta d'azione della spinta $\vec{S}_{BB}$ può determinarsi osservando che tale spinta è la risultante di forze di pressione elementari normali alla calotta sferica e perciò aventi tutte rette d'azione rivolte verso il suo centro e, quindi, momento nullo rispetto a tale punto. Per il teorema di Varignon deve quindi essere nullo anche il momento rispetto allo stesso punto della risultante $\vec{S}_{BB}$, la quale deve dunque anch'essa passare per il centro della calotta, come rappresentato in Figura 43.

L'uso di un particolare artificio consente di risolvere, con procedimento per il resto analogo a quello testé esaminato, il problema della determinazione della spinta $\vec{S}'_{BB}$ su una calotta sferica a chiusura dello stesso serbatoio cilindrico di cui al caso precedente, nel caso in cui essa rivolga la propria concavità verso l'esterno del serbatoio, secondo quanto illustrato in Figura 44.

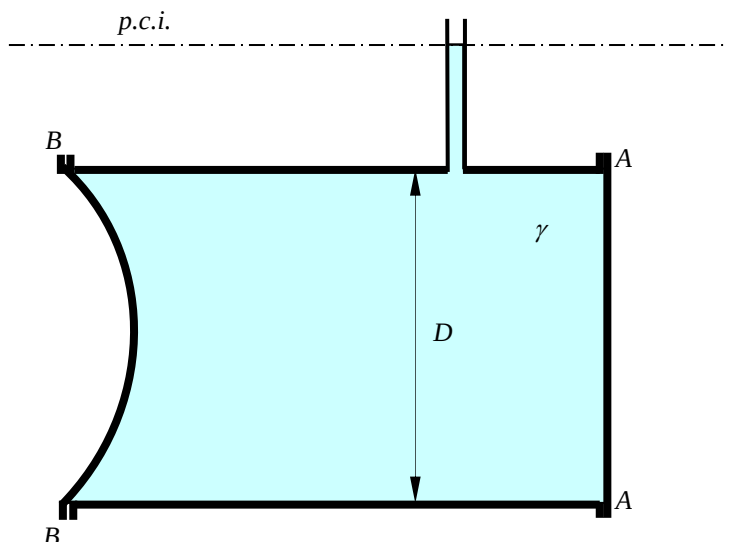


Figura 44. Calcolo della spinta su una calotta sferica avente concavità rivolta verso l'esterno di un serbatoio cilindrico.

A tale scopo si può considerare un caso fittizio, quale quello rappresentato, ad esempio, in Figura 45, nel quale è stato evidenziato un volume di controllo V_c delimitato dalla faccia interna della calotta sferica che, nel caso reale, è soggetta alla spinta incognita, e dalla superficie piana circolare costituente la sezione retta del serbatoio cilindrico. Si tratta, in sostanza, dello stesso volume di controllo utilizzato nell'esempio precedente, ruotato di 180° rispetto a un asse verticale. Il fluido

contenuto nel volume di controllo è certamente in quiete; a esso può quindi applicarsi l'equazione globale dell'idrostatica. D'altro canto, la calotta che separa il fluido interno al volume di controllo da quello esterno, avendo la stessa forma e occupando la medesima posizione della faccia interna della calotta reale rispetto al piano dei carichi idrostatici, è soggetta, sulla sua faccia esterna, punto per punto, alle medesime pressioni e quindi, globalmente, alla medesima spinta. Determinare la spinta sulla superficie fittizia equivale quindi a determinare la spinta sulla superficie reale.

Denominata $\vec{I}'_1$ la spinta agente sulla faccia esterna (sinistra) della superficie piana circolare – uguale e contraria della spinta corrispondente di cui all'esempio precedente ($\vec{I}'_1 = -\vec{I}_1$) – e $\vec{G}$ il peso del volume di controllo – invariato rispetto al caso precedente – l'equazione globale può scriversi:

$$\vec{S}'_{BB} + \vec{I}'_1 + \vec{G} = 0 ,$$

dalla quale si ricava l'espressione vettoriale della spinta cercata:

$$\vec{S}'_{BB} = -\vec{I}'_1 - \vec{G} .$$

Con procedimento analogo a quello seguito nell'esempio precedente, la spinta $\vec{S}'_{BB}$ si determina graficamente mediante il relativo poligono delle forze e si verifica che essa ha retta d'azione passante per il centro della calotta sferica, secondo quanto rappresentato in Figura 45.

Generalizzando, l'artificio testé descritto si può utilizzare ogni qual volta ricorrano le seguenti condizioni: a) si possa individuare un volume di controllo fittizio occupato dallo stesso fluido del caso reale, in quiete; b) tale volume di controllo possieda una parte della propria superficie di contorno identica alla superficie reale sulla quale si vuole determinare la spinta agente; c) tale superficie sia situata nella stessa posizione della superficie reale rispetto al piano dei carichi idrostatici, affinché possano dirsi uguali le spinte agenti sulle due superfici. Per il resto, le configurazioni del caso fittizio possono essere le più disparate. Ad esempio, nell'esempio precedente, il serbatoio avrebbe potuto avere la testata sinistra posta con la sua faccia interna (destra) a contatto con la parte piana della superficie di contorno del volume di controllo, oppure, il volume di controllo essere traslato orizzontalmente fino a far coincidere tale superficie piana con la faccia interna della testata sinistra nella posizione da essa occupata in Figura 45.

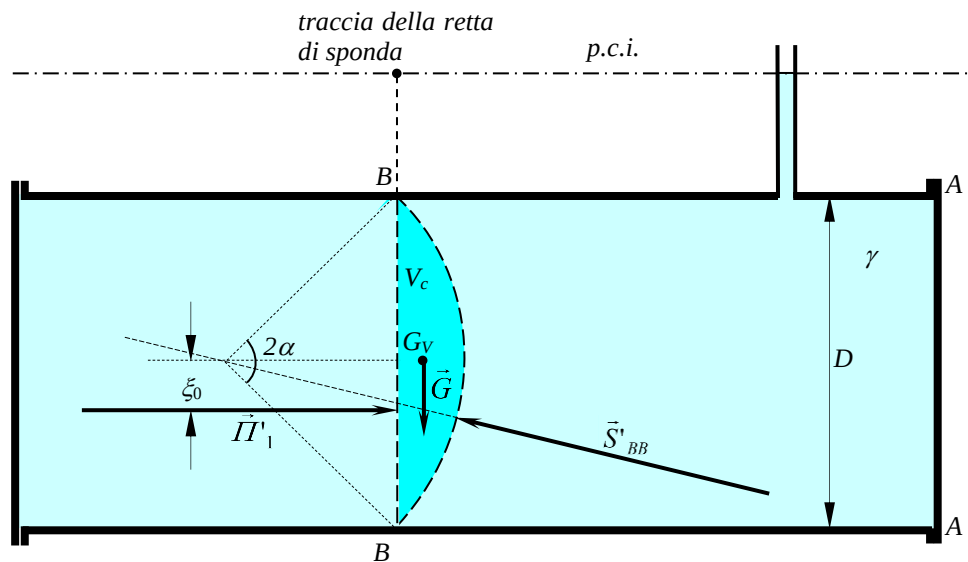
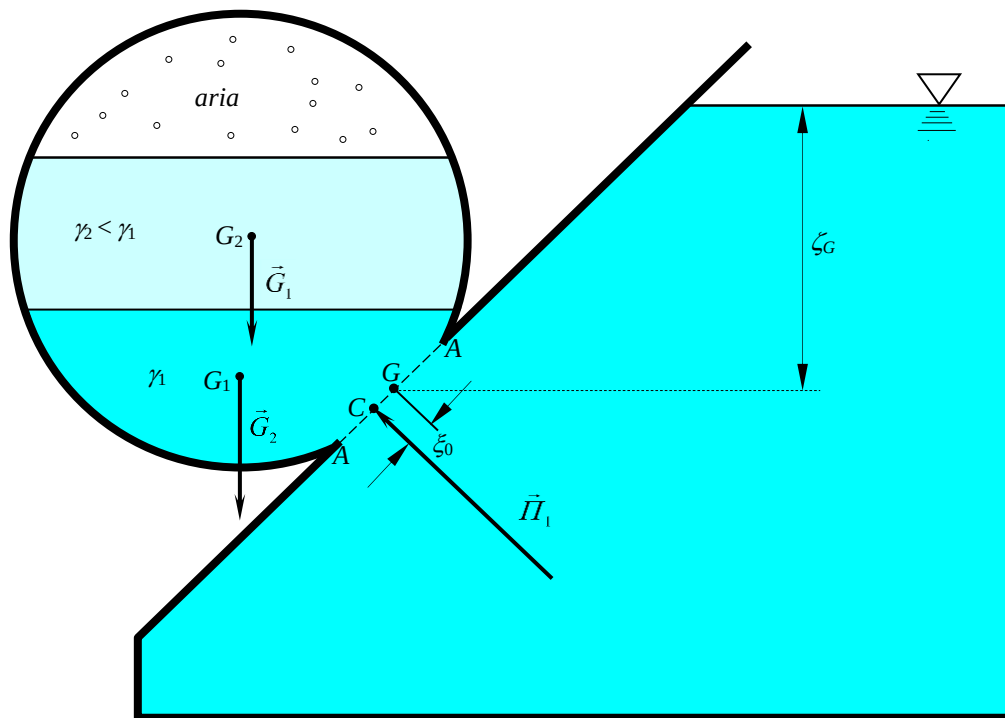


Figura 45. Schema di riferimento fittizio per il calcolo della spinta sulla calotta sferica di Figura 44.

La spinta che i tre fluidi esercitano, complessivamente, sulla superficie interna del secondo comparto può determinarsi agevolmente mediante applicazione dell'equazione globale dell'idrostatica al volume di controllo interno a tale comparto, delimitato dalla superficie piana di traccia A-A. L'equazione si scrive nella forma:


$$\vec{\Pi}_0 + \vec{\Pi}_1 + \vec{G}_1 + \vec{G}_2 = 0 \text{ ,}$$
$$\vec{S} = \vec{P}_1 + \vec{G}_1 + \vec{G}_2 \text{ ,}$$

la valutazione del secondo membro della quale richiede unicamente la determinazione di una spinta su una superficie piana e il calcolo dei pesi di due volumi fluidi, operazioni che non vengono illustrate in maggiore dettaglio perché del tutto analoghe a quelle eseguite negli esempi precedenti. Si rimarca come tali operazioni non richiedano la valutazione separata delle spinte esercitate da ciascuno dei tre fluidi compresi nel volume di controllo sulla superficie interna del secondo comparto, e come la disomogeneità del volume non costituisca alcuna limitazione, né complicazione sostanziale, all'uso dell'equazione globale, il quale, al contrario, non richiede neanche la determinazione del piano dei carichi idrostatici del liquido 2, né della pressione dell'aria.

3.10.2.2 Calcolo di spinte su superfici per componenti

Un secondo metodo generale per il calcolo delle spinte su superfici di forma qualunque si basa sulla determinazione separata delle tre componenti della spinta (*metodo per componenti*) in un sistema di riferimento avente uno dei tre assi verticale. Per questo motivo, nell'illustrazione del metodo verrà fatto riferimento alle coordinate x, y, z e ai corrispondenti versori $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$: i primi due relativi a direzioni del piano orizzontale, il terzo alla verticale (Figura 47).

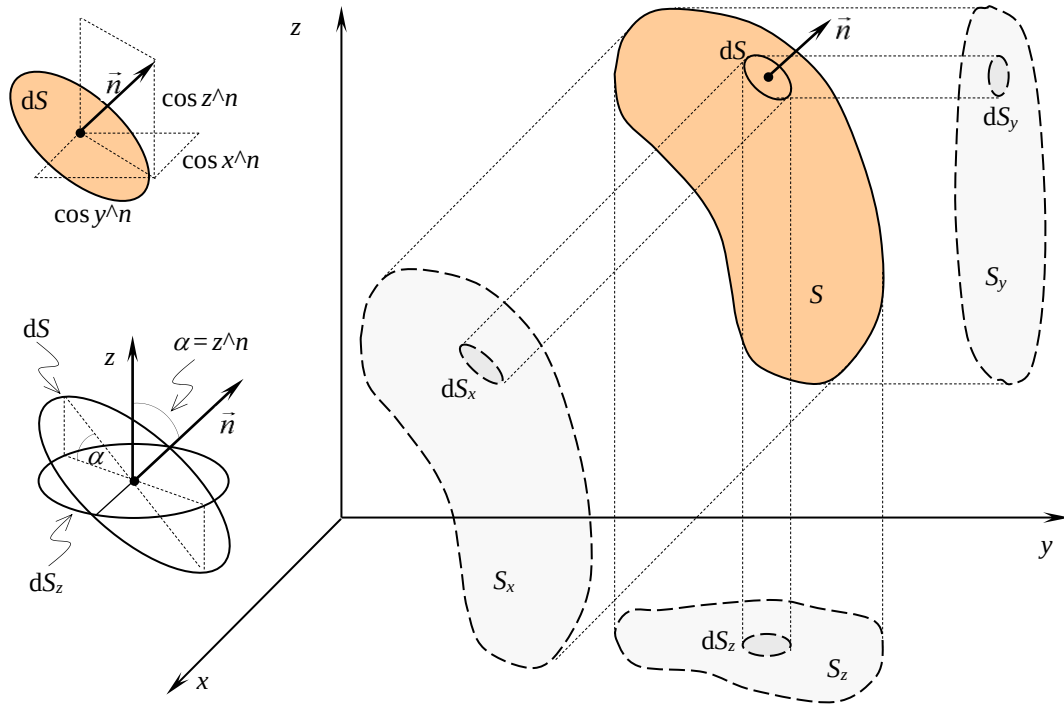


Figura 47. Schema di calcolo per componenti della spinta idrostatica su una superficie.

Le componenti della spinta nelle tre direzioni possono ottenersi facilmente esprimendo la normale contenuta all'interno dell'espressione generale della spinta idrostatica (83) in termini delle sue tre componenti (coseni direttori) e dei relativi versori, scrivendo l'integrale di superficie come somma di tre integrali, ciascuno contenente uno dei tre coseni direttori, e portando fuori dagli integrali i versori degli assi, in quanto costanti:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \int_S -p \vec{n} dS = \int_S -p (\cos x^n \vec{i} + \cos y^n \vec{j} + \cos z^n \vec{k}) dS = \\ &= -\vec{i} \int_S p \cos x^n dS - \vec{j} \int_S p \cos y^n dS - \vec{k} \int_S p \cos z^n dS \end{aligned} \quad (111)$$

A meno del segno, il prodotto dell'areola dS per un coseno direttore fornisce l'area della proiezione della superficie elementare nella direzione della coordinata che compare nel coseno direttore, ossia, su un piano parallelo al piano coordinato denominato con le altre due coordinate (vedi dettaglio di Figura 47, relativo alla proiezione lungo la verticale, su un piano parallelo al piano xy). I tre integrali della (111) possono quindi intendersi estesi alle superfici piane S_x , S_y e S_z , proiezioni della superficie S data nelle tre direzioni coordinate corrispondenti. In definitiva, i tre vettori componenti della spinta sono esprimibili come:

$$\begin{aligned}\vec{H}_x &= -\vec{i} \int_{S_x} p dS_x, \\ \vec{H}_y &= -\vec{j} \int_{S_y} p dS_y, \\ \vec{H}_z &= -\vec{k} \int_{S_z} p dS_z,\end{aligned}\tag{112}$$

nelle quali, beninteso, il valore di pressione è da intendersi relativo ai punti della superficie S piuttosto che ai corrispondenti punti delle superfici proiettate.

Nel caso delle proiezioni lungo le direzioni orizzontali, un punto della superficie proiettata è posto, ovviamente, alla stessa quota del punto corrispondente della superficie S . Pertanto, ovunque siano posti i piani verticali sui quali la superficie S viene proiettata orizzontalmente, e qualunque sia il tipo di fluido (liquido o aeriforme), la pressione in un qualunque suo punto può calcolarsi come pressione nella proiezione del punto stesso – ovviamente appartenente alla corrispondente proiezione della superficie – come se la superficie proiettata fosse a contatto con il liquido. Pertanto, i componenti orizzontali della spinta, $\vec{H}_x$ e $\vec{H}_y$, possono calcolarsi in tutto e per tutto come spinte idrostatiche sulle superfici piane proiezioni della superficie data su piani verticali ortogonali alle direzioni dei componenti stessi. A tale scopo, per ciascun componente, si utilizzano le formule presentate nel §3.10.1 per il calcolo del modulo e del verso della risultante e delle coordinate del centro di spinta sulla superficie premuta, per i casi sia di liquido che di aeriforme.

Da un punto di vista pratico, il verso dei componenti (incluso quello verticale) si stabilisce facilmente esaminando i versi delle spinte elementari corrispondenti³³. In generale, una superficie può presentare orientazioni puntuali tali da determinare la coesistenza di orientazioni opposte dello stesso componente delle spinte elementari locali. In tal caso occorrerà valutare separatamente i componenti relativi a porzioni di superficie cui sono associati versi costanti dei componenti delle spinte elementari³⁴. A chiarimento di quanto affermato, si consideri, per semplicità, la sezione di una superficie cilindrica riportata in Figura 48, avente direttrice contenuta nel piano xz , rappresentata in figura, e per generatrici rette parallele all'asse y , normale al piano del foglio. La superficie sia immersa in un liquido e la spinta cercata sia quella esercitata sulla faccia esterna della superficie. Il componente orizzontale della spinta coincide con il componente parallelo all'asse x , $\vec{H}_x$, dal momento che la superficie ha proiezione nulla in direzione y .

Tale componente si calcola come risultante dei componenti orizzontali $\vec{H}_{1x}$ e $\vec{H}_{2x}$ delle spinte agenti sulle superfici S_1 e S_2 rispettivamente, aventi per sezione su un piano verticale rispettivamente i tratti di curva AB e BC . Tali componenti hanno infatti versi opposti, essendo opposti i versi dei componenti lungo l'asse x delle spinte elementari agenti punto per punto. I componenti $\vec{H}_{1x}$ e $\vec{H}_{2x}$

³³ Da un punto di vista formale, il verso del contributo elementare al componente considerato si ottiene dalle (112). Esso è discorde rispetto al versore dell'asse corrispondente per un angolo minore di 90° , in quanto il relativo coseno è, quindi, anche l'area dell'areola proiettata sono positivi. In caso contrario, coseno e area della proiezione proiettata sono negativi e la forza elementare è concorde con il versore. Ad esempio, il contributo elementare al componente lungo l'asse x risulta essere $-\vec{i}p dS_x = -\vec{i}p |dS_x|$ per un angolo acuto e $\vec{i}p |dS_x|$ per un angolo ottuso.

³⁴ Ovvero segni costanti dei coseni direttori delle normali relativi alla direzione considerata.

si calcolano pertanto come spinte sulle superfici piane verticali proiettate S_{1x} e S_{2x} : la prima rivolta nel senso delle x decrescenti; la seconda nel verso delle x crescenti.

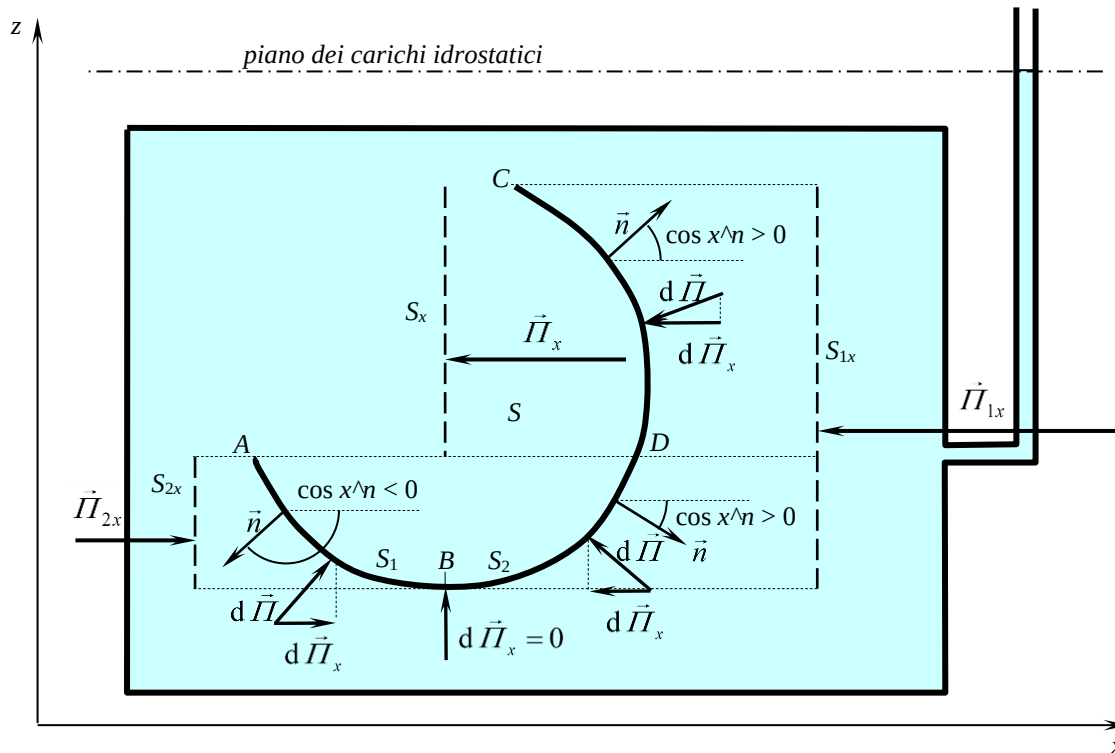


Figura 48. Schema di calcolo del componente lungo l'asse x della spinta su una superficie cilindrica avente direttrice giacente nel piano xz e generatrici parallele all'asse y .

Ai fini della determinazione del componente orizzontale della spinta, si può anche osservare che, avendo le superfici di sezioni AB e BD la medesima proiezione S_{2x} , i corrispondenti contributi al componente orizzontale si elidono. Il componente orizzontale della spinta può pertanto valutarsi con riferimento alla sola superficie di sezione CD , come spinta sulla relativa proiezione S_x , rivolta nel verso delle x decrescenti.

La retta di separazione fra le due superfici S_1 e S_2 , avente per traccia il punto B , è luogo dei punti della superficie S aventi tangente parallela all'asse x . In generale, ai fini del calcolo di un componente orizzontale della spinta su una superficie di forma qualunque, questa dovrà decomporsi in due o più superfici che si congiungono a formare la superficie intera lungo curve luogo dei punti in cui la tangente alla superficie ha la direzione del componente cercato.

Per quanto riguarda il componente verticale della spinta, $\vec{H}_z$, nel caso di un liquido isoterma e omogeneo esso va calcolato tenendo presente che, nella terza delle (112), la pressione nel punto generico può esprimersi in funzione dell'affondamento ζ del punto rispetto al piano dei carichi idrostatici del liquido (vedi Figura 49) come $p = \gamma\zeta$. Il termine $p dS_z = \gamma\zeta dS_z$ è pertanto pari al peso della colonna di liquido di base dS_z e altezza ζ , compreso fra la superficie data e il piano dei carichi idrostatici. L'integrale che compare nella terza delle (112) rappresenta pertanto il peso di un volume dello stesso liquido che sollecita la superficie S , compreso fra la superficie S e il piano dei carichi idrostatici del liquido e determinato per proiezione della superficie in direzione verticale, come mostrato in Figura 49. Il componente verticale è applicato nel baricentro di tale volume liquido. Dal ragionamento esposto risulta evidente come il volume liquido il cui peso uguaglia il modulo del componente verticale possa non essere, nella realtà, interamente esistente, come nel caso di Figura 49, ovvero, la parte di piano dei carichi idrostatici interessata dalla proiezione in verticale non essere posto a una quota alla quale sia presente del liquido. Il carattere in generale astratto del volume il cui

peso uguaglia il modulo del componente verticale dovrebbe essere ben compreso ai fini di una corretta applicazione del metodo.

In definitiva, il metodo di calcolo delle spinte per componenti riconduce al calcolo di due spinte su superfici piane e del peso di un volume liquido.

Come nel caso dei componenti orizzontali, anche per il componente verticale può occorrere frazionare la superficie in oggetto in due o più superfici soggette a componenti verticali della spinta di versi differenti, ciascuna caratterizzata da un verso univoco delle spinte elementari (quindi, da un segno univoco dei coseni direttori della normale relativi alla direzione verticale), che si congiungono a formare la superficie intera lungo curve luogo dei punti nei quali la tangente alla superficie ha direzione verticale.

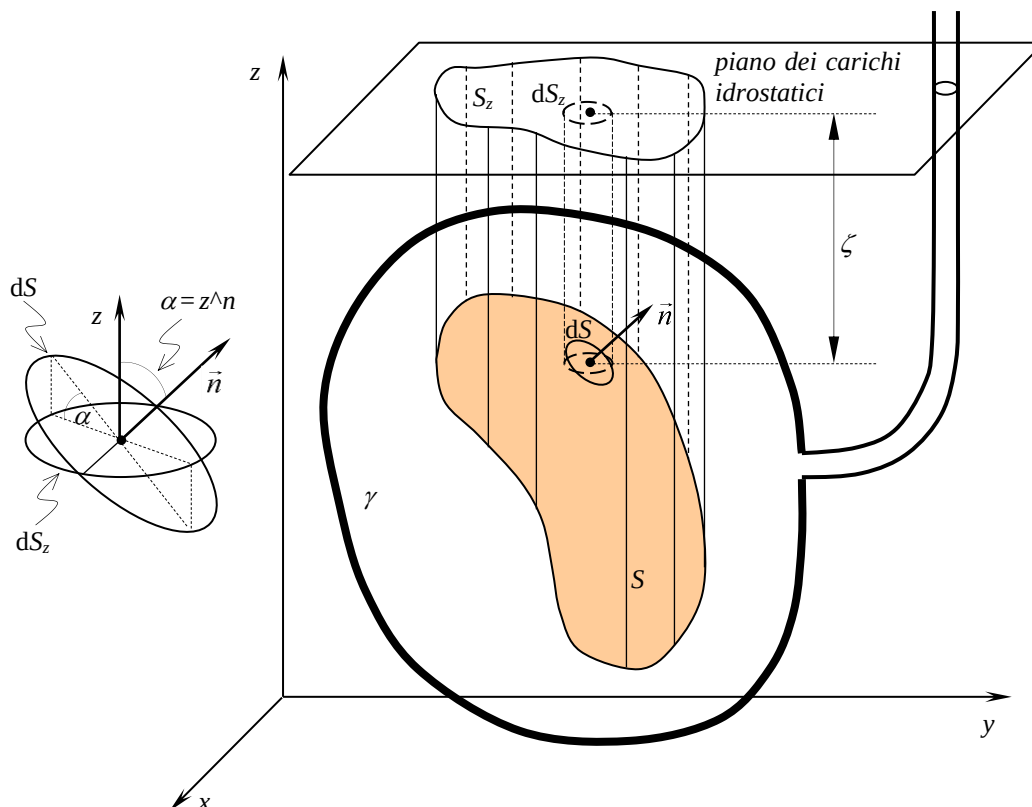


Figura 49. Schema di calcolo della componente verticale della spinta su una superficie di forma qualunque.

Le modalità di determinazione del modulo e del verso del componente verticale della spinta su una superficie di forma qualunque sono esemplificate con riferimento alla Figura 50, raffigurante lo stesso caso di cui alla Figura 48. In questo caso, la superficie cilindrica S va decomposta nelle superfici S_3 e S_4 , caratterizzate dall'avere ovunque coseni direttori relativi alla verticale rispettivamente negativi e positivi, e pertanto componenti verticali delle spinte elementari rivolte rispettivamente verso l'alto e verso il basso. Tali superfici sono a contatto attraverso (e sono quindi separate da) la retta orizzontale luogo dei punti della superficie a tangente verticale, avente per traccia il punto E sul piano della sezione raffigurata nel disegno.

Il componente verticale della spinta agente sulla superficie S_3 , $\vec{I}_{3z}$, ha modulo pari al volume liquido la cui sezione in un piano verticale ha per contorno la curva $AFEILA$ ed è applicata nel relativo baricentro, G_3 . Il componente verticale della spinta agente sulla superficie S_4 , $\vec{I}_{4z}$, ha modulo pari al volume liquido di sezione $EIHCE$ ed è applicata nel baricentro del volume, G_4 . Osservando che tale ultimo volume liquido costituisce parte del volume $AFEILA$, relativo a un componente, $\vec{I}_{3z}$,

rivolto in verso opposto a $\vec{H}_{4z}$, tali due contributi si elidono, per cui il componente verticale della spinta agente sull'intera superficie S è dato da $\vec{H}_z = \vec{H}_{3z} + \vec{H}_{4z}$, applicato nel baricentro G del volume di sezione $AFECHLA$ evidenziato in Figura 50.

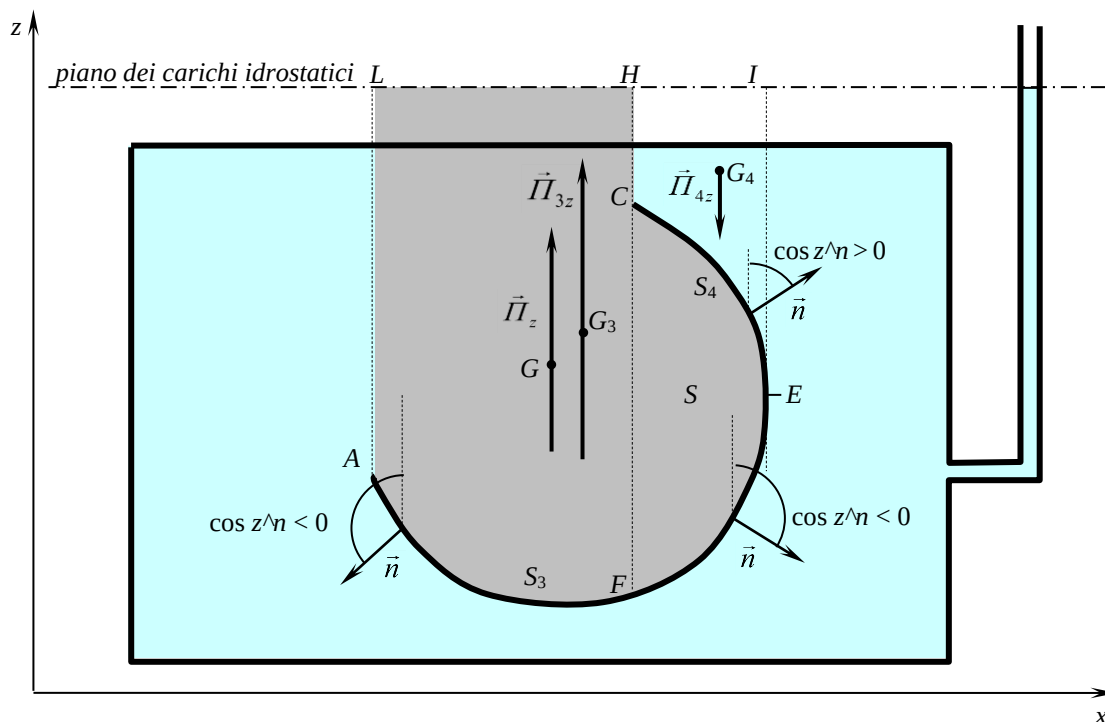


Figura 50. Schema per la determinazione del modulo e del verso del componente verticale della spinta su una superficie di forma qualunque.

Nel caso di una superficie chiusa si ritrova il risultato ottenuto mediante applicazione dell'equazione globale dell'idrostatica. Si consideri, ad esempio, la superficie chiusa di Figura 51, costituente l'involucro di un serbatoio contenente del liquido in pressione, come segnalato dall'indicazione del piezometro. Si vuole determinare la spinta esercitata dal liquido sulla faccia della superficie interna al serbatoio.

Il componente orizzontale in direzione dell'asse x si determina decomponendo la superficie nelle due parti S_{CDEC} e S_{CDFC} , a contatto attraverso la curva CD , luogo dei punti della superficie cui risultano tangenti rette parallele all'asse x . Tali due superfici sono pertanto caratterizzate da componenti x delle spinte elementari $-p\vec{n}dS$ aventi versi discordi. Avendo esse la medesima proiezione su un piano verticale normale alla direzione x , AA' e BB' , risultano identici i moduli dei componenti della spinta lungo l'asse x e i relativi centri di spinta. Poiché quindi il componente della spinta lungo l'asse x equivale a due forze uguali e contrarie agenti lungo la medesima retta d'azione, il loro risultante è un sistema nullo, avente cioè nulli sia il risultante che il momento risultante rispetto a qualunque punto dello spazio. Il modo del tutto analogo si argomenta per il componente in direzione dell'asse y . Pertanto, la spinta sulla superficie ha componente orizzontale nullo. Tale conclusione è generale per il caso di superfici chiuse, costituenti il contorno di volumi.

Analogamente, il componente verticale si determina decomponendo la superficie nelle due parti S_{CEFC} e S_{DEFD} , a contatto attraverso la curva EF , luogo dei punti della superficie aventi per tangenti rette verticali – la quale, in generale, non è contenuta nel piano verticale utilizzato per effettuare la sezione del volume rappresentata in Figura 51. Tali due superfici sono pertanto caratterizzate da componenti verticali delle spinte elementari $-p\vec{n}dS$ discordi, rivolte rispettivamente verso il basso e verso l'alto, così come i relativi risultanti. Il componente verticale della spinta, $\vec{H}_v$, si ottiene dalla composizione dei componenti verticali agenti sulle due superfici. Il componente agente sulla

superficie S_{CEFC} , $\vec{\Pi}_{vCEFC}$, è rivolto verso il basso, ha modulo pari al peso del volume liquido che ha per sezione su un piano verticale la superficie piana $CEIHFC$ ed è applicato nel relativo baricentro; il componente agente sulla superficie S_{DEFD} , $\vec{\Pi}_{vDEFD}$, è rivolto verso l'alto, ha modulo pari al peso del volume liquido che ha per sezione su un piano verticale la superficie piana $EDFHIE$ ed è applicato nel relativo baricentro. Tale ultimo volume costituisce una parte del volume di sezione $CEIHFC$, corrispondente però a un componente verticale rivolto verso il basso. Pertanto, i due contributi al componente verticale della spinta agente sull'intera superficie si elidono, e tale componente, rivolto verso il basso, ha perciò modulo pari al peso del volume liquido contenuto nel serbatoio, di sezione $CEDFC$ ed è applicato nel relativo baricentro.

Nel caso il serbatoio fosse stato immerso in un liquido differente dal liquido contenuto in esso, con ragionamento del tutto analogo la spinta agente sulla superficie esterna del serbatoio sarebbe risultata uguale e contraria al peso del volume liquido *esterno* al serbatoio, come facilmente deducibile mediante applicazione dell'equazione globale dell'idrostatica come da esempio riportato al principio del §3.10.2.

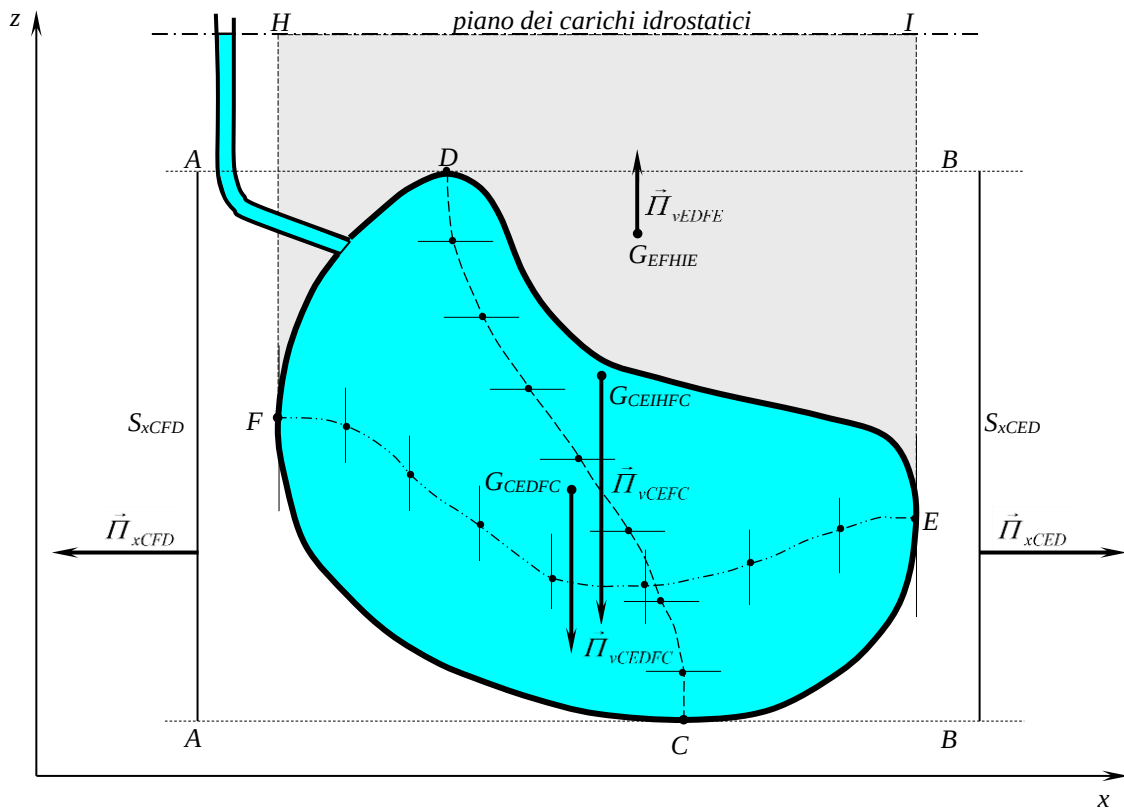


Figura 51. Applicazione del metodo di calcolo delle spinte idrostatiche per componenti a una superficie chiusa.

Come richiamato al §1.3.4.2, in generale, il sistema di forze che dà origine alla spinta su una superficie, comunque essa venga determinata, può essere ridotto a una forza più una coppia o a due forze non complanari (sghembe).

In particolare, nel caso del metodo per componenti, la spinta è equivalente a una forza orizzontale:

$$\vec{\Pi}_o = \vec{\Pi}_x + \vec{\Pi}_y ,$$

di modulo:

$$\Pi_o = \sqrt{\Pi_x^2 + \Pi_y^2}$$

più il componente verticale $\Pi_v = \Pi_z$. In tal modo viene rispettata l'uguaglianza del vettore risultante dei sistemi di forze. I punti di applicazione delle due forze si determinano imponendo l'uguaglianza dei momenti risultanti dei tre componenti Π_x , Π_y e Π_z e dei due vettori Π_o e Π_v rispetto a uno stesso (e qualunque) punto dello spazio.

Nel caso i componenti orizzontali siano complanari, il punto di applicazione di Π_o giace sul piano contenente i componenti e si determina facilmente mediante operazioni di scorrimento e composizione, ovvero esprimendo l'uguaglianza dei momenti risultanti dei due componenti orizzontali e del loro risultante (teorema di Varignon) secondo lo schema illustrato in Figura 9, §1.3.4.2. Il componente verticale è allora applicato nel baricentro del volume liquido il cui peso fornisce il modulo del componente. Nel caso i componenti orizzontali non siano complanari, l'equilibrio dei momenti determina per il componente verticale un punto di applicazione differente dal baricentro del volume liquido di cui sopra.

3.11 Equilibrio di corpi immersi o galleggianti

Come richiamato al §1.3.4.1, condizione necessaria per l'equilibrio di un sistema meccanico, anche deformabile, è l'annullamento del risultante e del momento risultante delle forze esterne applicate: condizioni espresse dalle equazioni cardinali della statica (47) e (48). Inoltre, se il sistema meccanico è un corpo rigido, tali condizioni sono anche sufficienti per l'equilibrio.

Nel caso di un corpo interamente immerso in un fluido (come nella parte destra di Figura 52), esso sarà soggetto al proprio peso $\bar{P}$ e alla spinta di galleggiamento $\bar{I}$ esercitata dal fluido circostante, calcolabile con uno dei metodi esaminati nel §3.10.2, data dal peso di un volume di fluido pari al volume occupato dal corpo (*volume di carena*), cambiato di segno. Il peso del corpo è applicato nel suo baricentro (punto G in Figura 52), mentre la spinta di galleggiamento è applicata nel baricentro del volume di carena (*centro di carena*, punto C). Affinché il corpo si trovi in equilibrio, la spinta di galleggiamento deve risultare uguale in modulo al peso del corpo, determinando così l'annullamento del vettore risultante. Trattandosi di due forze parallele, uguali in modulo e opposte in verso, il corrispondente momento risultante rispetto a un qualunque polo può annullarsi soltanto se le due forze possiedono la medesima retta d'azione verticale, cui devono pertanto appartenere il baricentro del corpo e il centro di carena. Nei casi in cui non sussista l'equilibrio, se il corpo ha peso proprio inferiore alla spinta di galleggiamento (come nell'esempio di Figura 52), la risultante delle due forze è non nulla e rivolta verso l'alto, per cui il corpo tende a mettersi in movimento nella stessa direzione; se invece il corpo ha peso proprio superiore alla spinta di galleggiamento, il corpo precipita verso il basso. Se, infine, il peso proprio uguaglia la spinta di galleggiamento, ma baricentro e centro di carena non sono allineati lungo una verticale, si produce una coppia che induce una rotazione del corpo attorno a un asse orizzontale passante per il suo baricentro, perpendicolare al piano che contiene la forza peso e la spinta di galleggiamento.

Diverso è il caso in cui il corpo non risulti a contatto con il fluido in parte della propria superficie di contorno. Nell'esempio della parte sinistra di Figura 52, il corpo è a contatto con le pareti del recipiente per parte della superficie di contorno, attraverso la quale non viene quindi esercitata sul corpo la pressione del liquido, ma solo sforzi derivanti dalle reazioni vincolari della parete. Se il corpo risulta sufficientemente affondato rispetto al piano dei carichi idrostatici, può accadere che la spinta esercitata dal fluido (risultante dei pesi dei volumi evidenziati in figura con colore grigio scuro, se da considerare rivolti verso il basso, e grigio chiaro se rivolti verso l'alto) possa risultare rivolta verso il basso (come in figura), oppure rivolta verso l'alto, ma di modulo pur sempre inferiore al peso proprio del corpo. In entrambi i casi, il risultante della spinta del fluido e del peso proprio, non nullo, è rivolto verso il basso; il corpo si trova tuttavia ugualmente in condizioni di equilibrio statico per effetto della reazione vincolare della parete, uguale e contraria alla risultante del peso proprio e della spinta del liquido a contatto con il corpo. È anche evidente che, al fine di ottenere lo scollamento del corpo dalla parete, occorrerà esercitare su di esso una forza avente componente verticale almeno pari al modulo della reazione vincolare. Una situazione del tutto analoga può aversi, evidentemente, nel

caso di un corpo di peso proprio superiore al peso del volume di carena, qualora esso risulti a contatto di una parete attraverso la parte superiore della superficie di contorno e risulti affondato a sufficienza rispetto al piano dei carichi idrostatici.

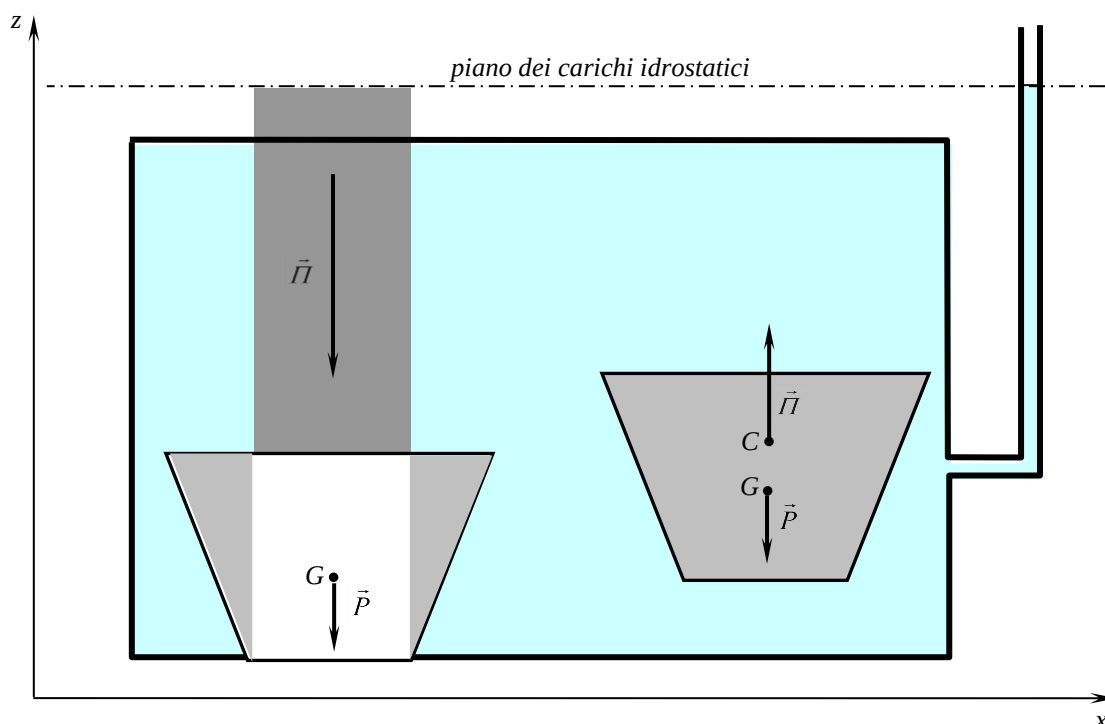


Figura 52. Schema illustrativo della condizione di non equilibrio di un corpo immerso di peso inferiore al peso del volume di carena (a destra) e della condizione di equilibrio dello stesso corpo, qualora una parte della sua superficie di contorno si trovi a contatto con una parete del contenitore e venga perciò sottratta all'azione del fluido.

Considerazioni analoghe si possono svolgere nel caso di corpi galleggianti, purché si consideri come volume di carena la sola parte immersa del corpo. Evidentemente, l'equilibrio del corpo (quindi il suo galleggiamento) si può verificare soltanto se il peso del volume liquido spostato dall'intero corpo risulta maggiore o uguale al peso del corpo.

3.12 Stabilità dell'equilibrio di corpi immersi o galleggianti

In vari problemi di carattere tecnico, risulta di interesse studiare non soltanto la condizione di equilibrio statico di corpi galleggianti o immersi, ma anche la stabilità dell'equilibrio. Casi notevoli in questo senso sono costituiti rispettivamente dai natanti e (caso certamente meno consueto) dai sommergibili. Come ricordato al §1.3.4.4, la stabilità dell'equilibrio di un sistema meccanico è definita sulla base del comportamento del sistema in conseguenza di spostamenti, compatibili con eventuali vincoli, a partire dalla condizione di equilibrio che si desidera studiare. Sebbene dal punto di vista applicativo sia piuttosto importante considerare il caso di corpi contenenti delle parti mobili al loro interno (per esempio, il carico, solido o liquido, di una nave mercantile), in questa sede ci limiteremo a studiare la stabilità dell'equilibrio di corpi rigidi.

Il movimento di un corpo rigido è descrivibile in termini dei suoi sei gradi di libertà, associati alle componenti di spostamento (traslazione) nelle tre direzioni degli assi coordinati di riferimento e alle rotazioni attorno a tre assi mutuamente ortogonali, che assumiamo anch'essi paralleli agli assi coordinati. La condizione di stabilità dell'equilibrio di un corpo rigido verrà pertanto studiata verificando se il sistema tende a ritornare nella posizione iniziale, tende ad allontanarsene, o permane in una nuova condizione di equilibrio, per traslazioni nelle tre direzioni degli assi (due orizzontali e

una verticale) e rotazioni attorno ad assi paralleli agli assi coordinati. È inteso, e non verrà perciò ripetuto, che gli spostamenti avvengano rispetto a condizioni di equilibrio, caratterizzate quindi dall'equilibrio fra peso proprio del corpo e spinta di galleggiamento ($\vec{P} = -\vec{I}$) e dall'allineamento del baricentro del corpo e del centro di carena lungo una verticale.

Nel caso di corpi interamente immersi, l'equilibrio è indifferente rispetto a traslazioni nelle tre direzioni, perché non cambiano né il peso proprio, né il volume di carena, né l'allineamento verticale di baricentro e centro di carena. Per lo stesso motivo, l'equilibrio è indifferente rispetto a rotazioni attorno ad assi verticali. L'equilibrio è stabile rispetto a rotazioni attorno ad assi orizzontali se il baricentro del corpo soggiace al centro di carena, è instabile se il baricentro sovrasta il centro di carena, è indifferente se baricentro e centro di carena coincidono. La motivazione si evince facilmente dallo schema di Figura 53, che rappresenta un caso di equilibrio stabile.

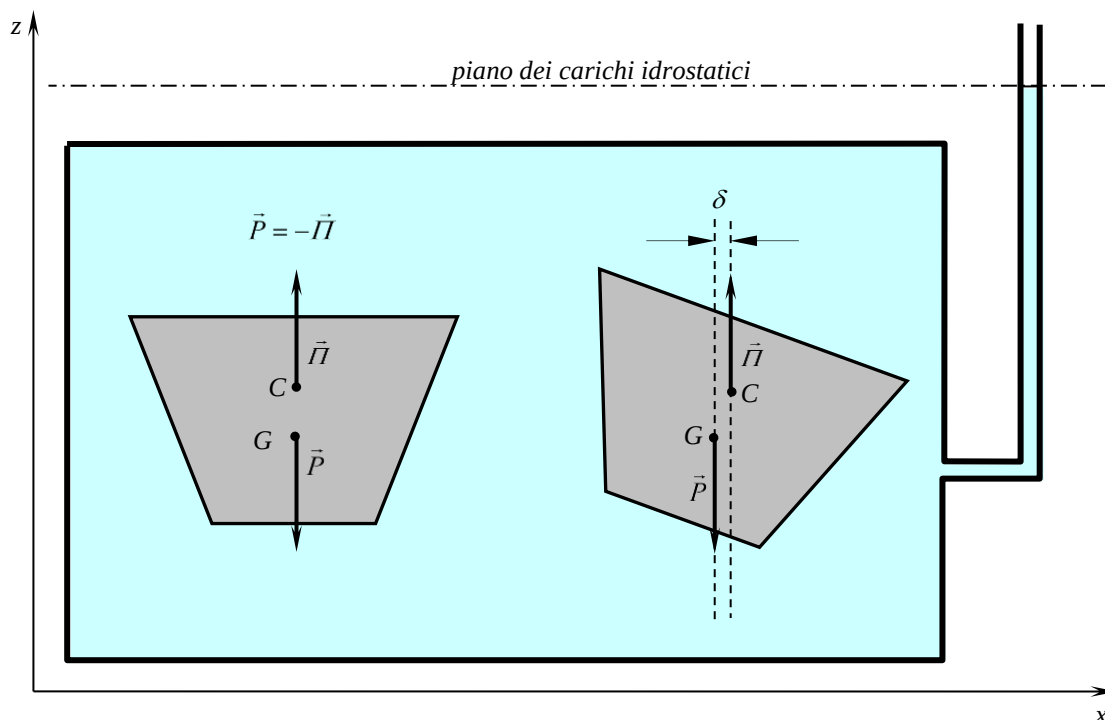


Figura 53. Schema esemplificativo delle condizioni di stabilità dell'equilibrio di corpi immersi.

Poiché il baricentro sottostà al centro di carena nella posizione di equilibrio, per effetto della rotazione attorno a un asse orizzontale si produce una coppia di modulo $|\vec{P}| \delta = |\vec{I}| \delta$, di cui δ rappresenta il braccio, che tende a far ruotare il corpo in verso opposto a quello della rotazione imposta inizialmente e a far perciò tornare il corpo nella condizione di equilibrio iniziale. Viceversa, nel caso in cui il centro di carena soggiacesse al baricentro, la coppia che si verrebbe a produrre determinerebbe una ulteriore rotazione nello stesso verso di quella impressa inizialmente al corpo, facendolo ulteriormente allontanare dalla posizione di equilibrio. In questo caso, per effetto delle resistenze viscosche che insorgono durante il movimento, il corpo raggiungerebbe, dopo una serie di oscillazioni, la posizione di equilibrio stabile, nella quale il baricentro sottostà al centro di carena. Infine, se baricentro e centro di carena coincidono, per qualunque rotazione attorno ad assi orizzontali il peso proprio e la risultante delle spinte di superficie continuano a rimanere allineati lungo una verticale, per cui il momento della coppia è nullo ($\delta=0$) e la posizione (come qualunque altra posizione) è pertanto di equilibrio indifferente.

Nel caso di corpi galleggianti, l'equilibrio è ancora indifferente rispetto a rotazioni attorno ad assi verticali e traslazioni orizzontali, per gli stessi motivi indicati in precedenza per i corpi immersi,

mentre è stabile rispetto a traslazioni verticali. Infatti, traslazioni verso l'alto determinano una riduzione del volume di carena, una conseguente riduzione della spinta di galleggiamento, e quindi una risultante di peso proprio (ovviamente invariato) e spinta di galleggiamento rivolta verso il basso, che tende a riportare il corpo nella posizione originaria. Viceversa, traslazioni verso il basso determinano un aumento del volume di carena e della spinta di galleggiamento, col che il corpo viene riportato verso l'alto. Rimangono quindi da verificare le condizioni di stabilità dell'equilibrio con riferimento a rotazioni attorno ad assi orizzontali.

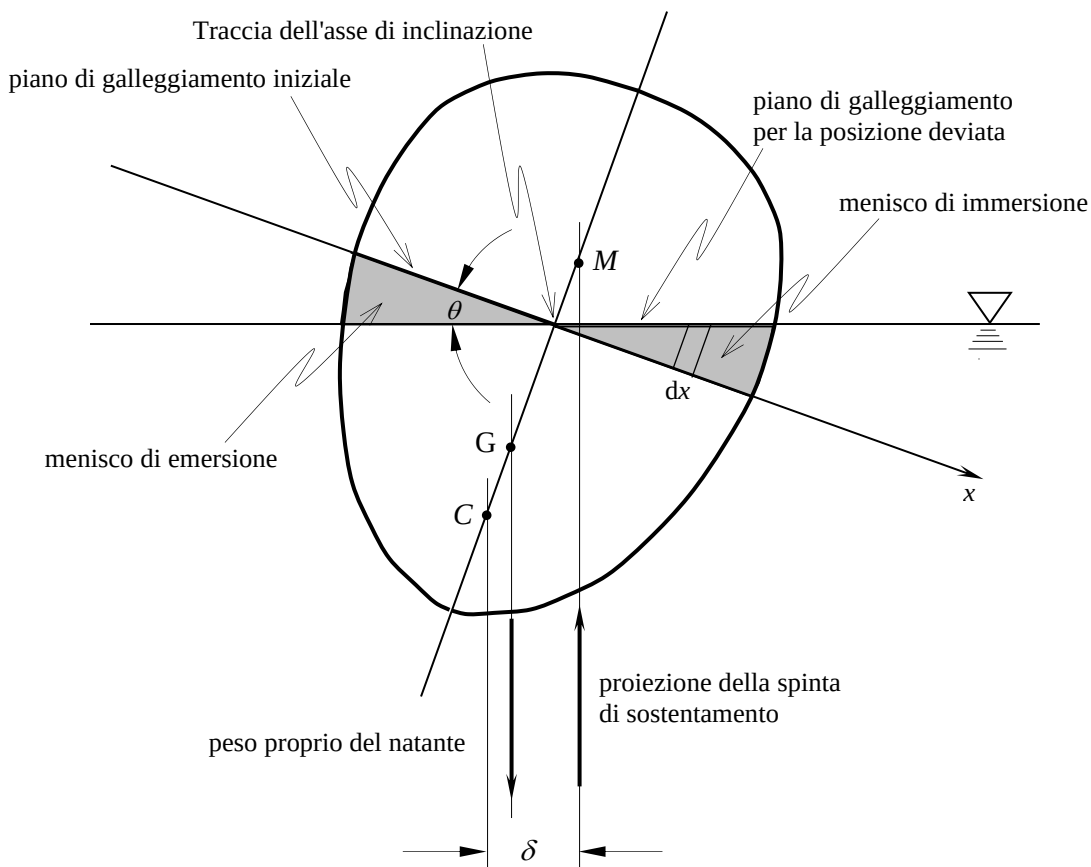


Figura 54. Schema esemplificativo delle condizioni di stabilità dell'equilibrio di corpi galleggianti.

Preventivamente, occorre riconoscere per quali assi orizzontali la verifica sia significativa. Per effetto della rotazione del corpo attorno a un asse orizzontale, si determina una riduzione del volume di carena di una sua parte, inizialmente immersa, che si porta al di sopra del pelo libero (*menisco di emersione*), nonché un aumento, legato all'immersione di un volume inizialmente emerso (*menisco di immersione*), come rappresentato in Figura 54. Nel caso in cui i due menischi non risultino di pari volume, si ricade in una condizione analoga a quella che si verifica per traslazioni verticali, poiché il volume di carena risulta variato. L'equilibrio è pertanto stabile rispetto a rotazioni rispetto ad assi siffatti. Si tratta quindi di riconoscere per quali assi orizzontali si abbia uguaglianza dei menischi di immersione e di emersione, e con riferimento a essi indagare le condizioni di stabilità. Un asse di rotazione siffatto viene detto specificamente *asse di inclinazione*.

Si consideri un asse x ortogonale all'asse di inclinazione, giacente nella superficie piana sezione del corpo con la superficie libera (*piano di galleggiamento*) nella situazione iniziale. Dette Ω_1 e Ω_2 le parti del piano di galleggiamento Ω contenenti i semiassi rispettivamente positivo e negativo, e

ricordando che la verifica di stabilità va eseguita per spostamenti (in questo caso rotazioni) elementari, l'uguaglianza dei volumi V_m dei due menischi può esprimersi mediante la relazione:

$$V_m = \int_{\Omega_1} x \tan \theta d\Omega = \int_{\Omega_2} (-x) \tan \theta d\Omega,$$

in cui l'angolo di rotazione θ è costante. La condizione di uguaglianza può quindi esprimersi come:

$$\tan \theta \left(\int_{\Omega_1} x d\Omega + \int_{\Omega_2} x d\Omega \right) = \tan \theta \int_{\Omega} x d\Omega = 0.$$

Per qualunque rotazione elementare non nulla, deve pertanto risultare nullo il momento statico del piano di galleggiamento rispetto all'asse di inclinazione e, quindi, la coordinata x del relativo baricentro (cfr. §1.3.4.3), che è pertanto contenuto nell'asse stesso. La verifica della stabilità dell'equilibrio per rotazioni attorno ad assi orizzontali va quindi limitata agli assi baricentrici.

Il volume di carena nella configurazione ruotata si ottiene aggiungendo al volume di carena nelle condizioni iniziali il volume del menisco di immersione e sottraendovi il volume del menisco di emersione. La spinta corrispondente, intesa in senso vettoriale, può quindi esprimersi aggiungendo alla spinta di galleggiamento nelle condizioni iniziali, applicata nel corrispondente centro di carena C , il peso di un volume liquido pari al volume del menisco di emersione (forza rivolta verso il basso), e sottraendovi il peso di un volume liquido pari al volume del menisco di immersione (forza rivolta verso l'alto), con le due forze applicate nei baricentri dei rispettivi volumi. In conseguenza dell'uguaglianza dei volumi dei due menischi, le due forze, aventi modulo γV_m e direzione uguali e verso opposto, costituiscono una coppia di momento (inteso vettorialmente) in generale non parallelo all'asse di inclinazione. La componente del momento della coppia nella direzione dell'asse di inclinazione è pari al prodotto del modulo delle forze per la lunghezza della proiezione, su un asse orizzontale e normale all'asse di inclinazione, della congiungente i baricentri dei due menischi. Tale componente è l'unica che interessa ai fini della verifica della stabilità, perché è l'unica in grado di modificare l'entità della rotazione impressa al corpo. Oltre che nel modo detto, il momento della coppia può valutarsi direttamente come momento risultante delle forze elementari associate ai due menischi, di braccio $x \cos \theta \cong x$ per la piccolezza dell'angolo di rotazione.

$$M_c = \int_{\Omega_1} \gamma x^2 \tan \theta d\Omega + \int_{\Omega_2} \gamma x^2 \tan \theta d\Omega = \gamma \tan \theta \int_{\Omega} x^2 d\Omega = \gamma \tan \theta I_{xx},$$

in cui I_{xx} è il momento di inerzia del piano di galleggiamento rispetto all'asse di inclinazione. Tale sistema di forze è equivalente a un'unica forza pari alla spinta di galleggiamento nella situazione iniziale (non ruotata), avente retta d'azione giacente su un piano verticale posto alla distanza δ dal centro di carena C , tale che risulti:

$$\gamma \tan \theta I_{xx} = \delta \gamma V_c.$$

Il sistema di forze applicato al corpo che si produce in conseguenza della rotazione è quindi dato da una coppia costituita dalla nuova spinta di galleggiamento e dal peso proprio, uguali in modulo per l'uguaglianza dei menischi. Proiettando la nuova retta d'azione della spinta nella direzione dell'asse di inclinazione fino al piano ortogonale a tale asse, contenente il baricentro del corpo, la retta proiettata interseca la retta d'azione originaria, ruotata rigidamente con il corpo, in un punto detto *metacentro* (punto M in Figura 54). La coppia agente sul corpo è stabilizzante, destabilizzante o nulla se il metacentro è posto a quota rispettivamente superiore, inferiore o uguale alla quota del baricentro, in forza della discordanza, concordanza o nullità della rotazione originata dalla coppia rispetto alla rotazione impressa. Poiché il metacentro è posto sempre a quota maggiore della quota del centro di carena, la valutazione della posizione reciproca di metacentro e baricentro può eseguirsi

confrontando le distanze di G e M dal centro di carena C . Osservando che, per piccoli angoli θ si ha anche $\tan \theta \cong \sin \theta \cong \theta$, la distanza $\overline{CM}$ (altezza metacentrica) è data da:

$$\overline{CM} = \frac{\delta}{\sin \theta} = \frac{\tan \theta I_{xx}}{V_c \sin \theta} \cong \frac{I_{xx}}{V_c}, \quad (113)$$

in cui l'uguaglianza vale rigorosamente nel limite per $\theta \rightarrow 0$. L'equilibrio è pertanto rispettivamente stabile, indifferente o instabile per una rotazione attorno a un dato asse a seconda che risulti:

$$\overline{CM} \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \overline{CG}.$$

Infine, la stabilità dell'equilibrio del corpo va valutata per l'insieme degli ∞^1 assi orizzontali baricentrici. Evidentemente, sulla base della (113), la verifica va condotta con riferimento all'asse per il quale è minimo il momento di inerzia I_{xx} ³⁵, perché costituente il caso più sfavorevole.

3.13 Capillarità

Sono detti fenomeni di capillarità i fenomeni causati dalla tensione superficiale osservabile nei fluidi. Fenomeni di capillarità possono riscontrarsi sia nei fluidi in quiete (risalita capillare nei terreni fini o in certi materiali da costruzione) che nei fluidi in movimento (onde capillari – rilevanti, ad esempio, nelle prime fasi della generazione del moto ondoso). In questa sede ci limiteremo a trattare, negli aspetti essenziali, i fenomeni di capillarità in ambito idrostatico.

Tutte le proprietà dei fluidi in quiete esaminate finora erano relative a condizioni nelle quali si potessero ritenere trascurabili gli effetti della tensione superficiale. In particolare, si è mostrato che la superficie di separazione di due fluidi soggetti soltanto alla forza peso quale forza di massa è un piano orizzontale. In tali condizioni, la pressione varia con continuità attraverso detta superficie. Si è visto tuttavia al §2.6 come la tensione superficiale si manifesti proprio all'interfaccia fra fluidi differenti. Un effetto della presenza della tensione superficiale è quello di indurre una discontinuità attraverso una superficie di separazione gobba.

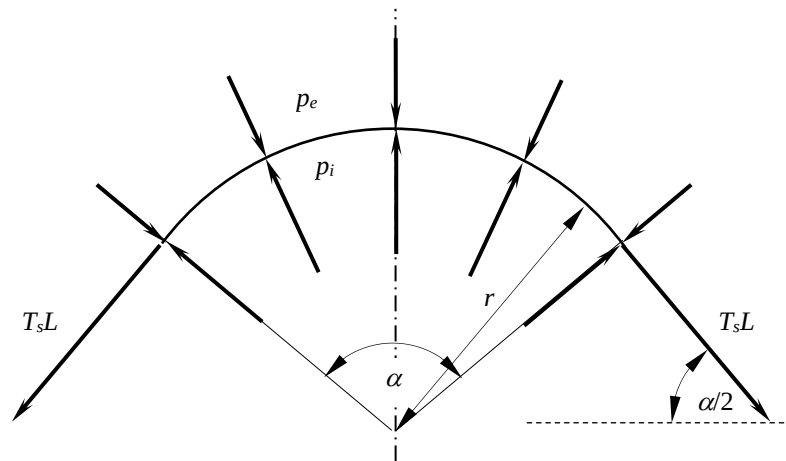


Figura 55. Schema per la derivazione della legge di Laplace nel caso di interfaccia cilindrica tra due fluidi.

³⁵ Un natante è tipicamente più sviluppato nella direzione dell'asse longitudinale di avanzamento piuttosto che in direzione trasversale. Conseguentemente, il momento di inerzia minimo è quello calcolato rispetto all'asse longitudinale, rispetto al quale va condotta la verifica. È del resto abbastanza intuitivo come le rotazioni più pericolose per la stabilità del natante siano quelle associate al *rollio* (rotazione rispetto all'asse longitudinale) piuttosto che al *beccheggio* (rotazioni attorno all'asse trasversale).

Si consideri, per semplicità, un tratto di superficie di separazione cilindrica, avente per sezione retta un arco di cerchio di raggio r e apertura al centro α , di sviluppo in asse L , di cui in Figura 55 è rappresentata una sezione trasversale. Si ammetta anche che sulle facce concava e convessa della superficie vigano pressioni costanti, dette p_i e p_e rispettivamente. La superficie è soggetta, oltre che a tali due distribuzioni uniformi di pressione, alle forze di trazione esercitate ai suoi bordi, ciascuna di modulo $T_s L$. L'equilibrio alla traslazione lungo la direzione del piano di simmetria della superficie fornisce:

$$(p_i - p_e)2r \sin \frac{\alpha}{2} L - 2T_s L \sin \frac{\alpha}{2} = 0 ,$$

in cui la componente delle forze di pressione è stata valutata mediante il metodo presentato al §3.10.2.2, come prodotto della pressione per la superficie piana proiezione della superficie cilindrica nella direzione della componente cercata. Si evince pertanto che deve esistere un salto di pressione, con valore maggiore sulla faccia concava, dato da:

$$\Delta p = (p_i - p_e) = \frac{T_s}{r} ,$$

che è quindi tanto maggiore quanto minore è il raggio di curvatura della superficie.

Per una superficie qualunque, purché priva di singolarità, considerati i raggi di curvatura r_1 e r_2 delle sezioni della superficie fatte con due piani fra loro ortogonali e ortogonali al piano tangente alla superficie, il salto di pressione è dato da (Legge di Laplace):

$$\Delta p = T_s \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) , \quad (114)$$

univocamente determinato perché la quantità entro parentesi si mantiene costante al variare della coppia di piani mutuamente ortogonali. Nel caso di curvature di segno opposto³⁶, nella (114) i raggi di curvatura vanno presi attribuendo segno positivo al raggio minore dei due, segno negativo al raggio maggiore e pressione maggiore sulla faccia rivolta verso il raggio minore.

Nel caso di una calotta sferica di raggio r , la (114) si riduce alla relazione:

$$\Delta p = \frac{2T_s}{r} . \quad (115)$$

A questo caso si può assimilare, almeno in prima approssimazione, il caso di bolle di piccole dimensioni di un gas presente all'interno di un liquido, o di vapore dello stesso liquido, in virtù delle modeste variazioni di pressione sia all'interno che all'esterno della bolla.

La superficie di separazione di due fluidi può ingobbirsi per vari motivi, incluso l'effetto della stessa tensione superficiale. È quanto accade in presenza di tre fasi, delle quali una solida; in altri termini, quando due fluidi (che qui ammetteremo senz'altro un liquido e un aeriforme) sono anche a contatto con una parete solida. In tale situazione, per effetto delle forze di attrazione molecolare all'origine della tensione superficiale, la superficie di separazione liquido-gas forma con la superficie solida un angolo detto *di contatto* (angolo β in Figura 56), di valore compreso fra 0° e 180° , in funzione della natura di liquido, gas e superficie solida. Si dice che il liquido bagna (vedi Figura 56a) o non bagna (vedi Figura 56b) la parete, a seconda che l'angolo di contatto risulti minore o maggiore di 90° rispettivamente; si verifica il primo o il secondo caso a seconda che prevalgano le forze di *adesione* fra liquido e solido o le forze di *coesione* all'interno del liquido. Per aria e vetro, l'angolo di contatto è di circa 0° per l'acqua e di circa 135° per il mercurio.

³⁶ È il caso, ad esempio, del paraboloide iperbolico, o "a sella".

Piuttosto che stabilire la forma che la superficie libera del liquido assume in prossimità della parete³⁷, interessa qui evidenziare l'effetto conseguente – esso stesso talora identificato tout-court con il termine "capillarità" – con riferimento al caso, rappresentato in Figura 56, di un liquido contenuto in un tubo di diametro d , parzialmente immerso in un recipiente, per i due casi di liquido che bagna e che non bagna la parete. La superficie libera ingobbita per effetto del contatto del liquido sull'intera circonferenza della sezione del tubicino viene generalmente indicata con il termine *menisco*, che per semplicità assumeremo a forma di calotta sferica di raggio $r = d/(2 \cos \beta)$.

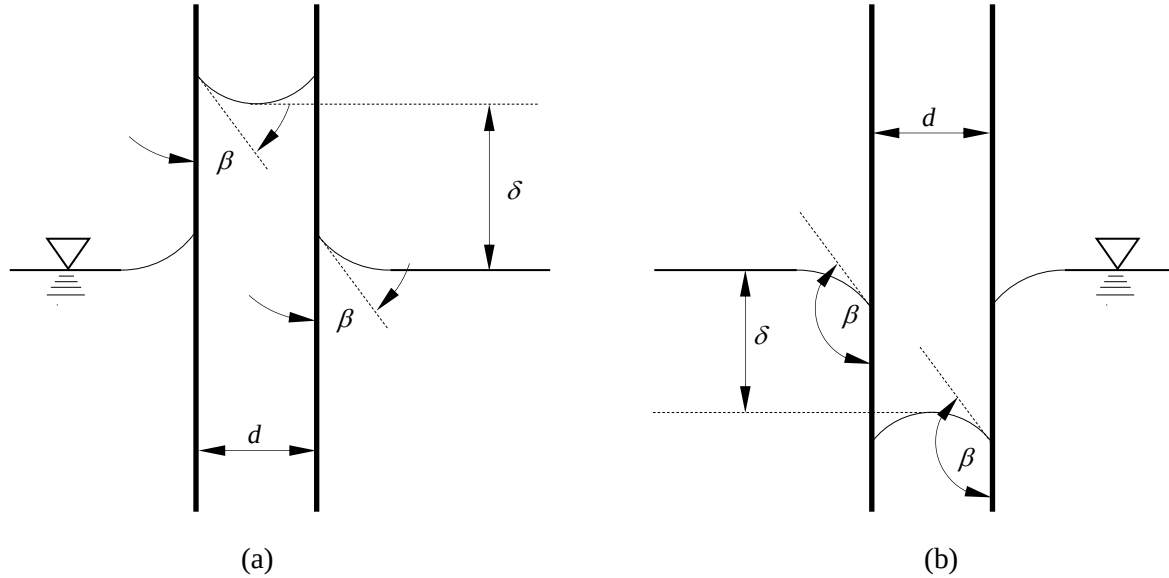


Figura 56. Deviazioni dalla legge di Stevin dovute alla capillarità di un liquido (a) che bagna e (b) che non bagna la parete di un tubo immerso in un recipiente.

La superficie libera si ingobbisce, formando il medesimo angolo di contatto, anche all'esterno del tubo, riacquistando la forma piana orizzontale già a breve distanza dalla parete, ove essa coincide con il piano dei carichi idrostatici così come identificato dalla legge di Stevin.

In forza della legge di Laplace, sul menisco si produce un salto di pressione dato dalla (115). Nel caso di liquido che bagna la parete, sulla faccia interna della superficie libera si ha quindi una depressione di pari valore, che ammetteremo, per semplicità, localizzata nel punto di minima quota. Poiché la tensione superficiale agisce soltanto sulla superficie libera, all'interno del liquido contenuto nel tubo vale la legge di Stevin. Pertanto, il menisco deve trovarsi sollevato rispetto alla superficie libera indisturbata della quantità:

$$\delta = \frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{2T_s}{r\gamma} = \frac{4T_s \cos \beta}{\gamma d}. \quad (116)$$

Tale relazione viene usualmente denominata legge di Jurin o di Borelli. Essa può ottenersi anche imponendo l'equilibrio alla traslazione verticale del volume liquido contenuto nel tubo al di sopra del piano indisturbato, soggetto al peso proprio di modulo:

$$G = \gamma \frac{\pi d^2}{4} \delta$$

³⁷ La relativa trattazione può trovarsi nel Marchi-Rubatta.

e alla forza di trazione per unità di lunghezza T_s che si sviluppa, per effetto della tensione superficiale, sul bordo del menisco a contatto con la parete, avente la direzione di massima pendenza del piano tangente al menisco, la quale ammette pertanto una risultante avente componente verticale pari a

$$F_v = \pi d T_s \cos \beta .$$

Si osservi che la formula di Jurin rappresenta il differente comportamento dei liquidi che bagnano e che non bagnano la parete con il cambiamento di segno del termine $\cos \beta$. A norma della (116), lo spostamento del menisco rispetto alla superficie libera indisturbata è inversamente proporzionale al diametro del tubo. Tubi di diametro estremamente ridotto, nei quali pertanto tale effetto è particolarmente pronunciato, prendono il nome di *capillari*.

Sulla base dei valori di peso specifico e tensione superficiale alle temperature ordinarie, la legge di Jurin fornisce le seguenti semplici relazioni per l'acqua e il mercurio in tubi di vetro:

$$\begin{aligned} \delta d &= 30 \text{ mm}^2 && \text{per l'acqua} \\ \delta d &= -10 \text{ mm}^2 && \text{per il mercurio} \end{aligned} .$$

Nel caso dell'acqua, la risalita capillare è quindi di 3 cm in un tubo di diametro pari a 1 mm.

L'effetto della capillarità deve essere tenuto in conto qualora si eseguano misure di livelli o di pressione con piezometri o manometri a liquido di diametro limitato. Sulla base dei risultati presentati, risulta anche chiaro perché il fenomeno della risalita capillare si riscontri in misura particolarmente marcata in materiali da costruzione o in terreni caratterizzati da minime dimensioni degli interstizi accessibili dall'acqua di risalita. In particolare, in terreni quali le argille si possono riscontrare valori della risalita anche di 50 m. Nel caso dei terreni, la capillarità ha anche un effetto sensibile sulla capacità di infiltrazione nel suolo e, quindi, sul bilancio idrologico di un bacino idrografico.

CAPITOLO QUARTO

4. IDROKINEMATICA

4.1 Generalità.

Analogamente alla Cinematica nell'ambito della Meccanica, l'Idrocinematica si propone di studiare il movimento dei fluidi senza riguardo alle cause che lo provocano, fornendone pertanto una descrizione di tipo puramente geometrico. Tuttavia, alcune delle equazioni che verranno dedotte nel presente capitolo costituiranno, assieme ad altre studiate nell'Idrodinamica, gli strumenti necessari alla corretta posizione e alla conseguente univoca soluzione dei problemi riguardanti il movimento dei fluidi.

Nell'ambito dello schema di mezzo continuo, verranno studiati i campi di grandezze legate al movimento dei fluidi nella forma generale:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(\vec{x}, t) \equiv \mathcal{G}(x_1, x_2, x_3, t), \quad (117)$$

ove $\mathcal{G}$ è una generica grandezza scalare, vettoriale o tensoriale; $\vec{x}$ rappresenta il vettore posizione del punto in cui si valuta la grandezza, avente per componenti scalari le coordinate del punto, x_1, x_2, x_3 ; t è il tempo.

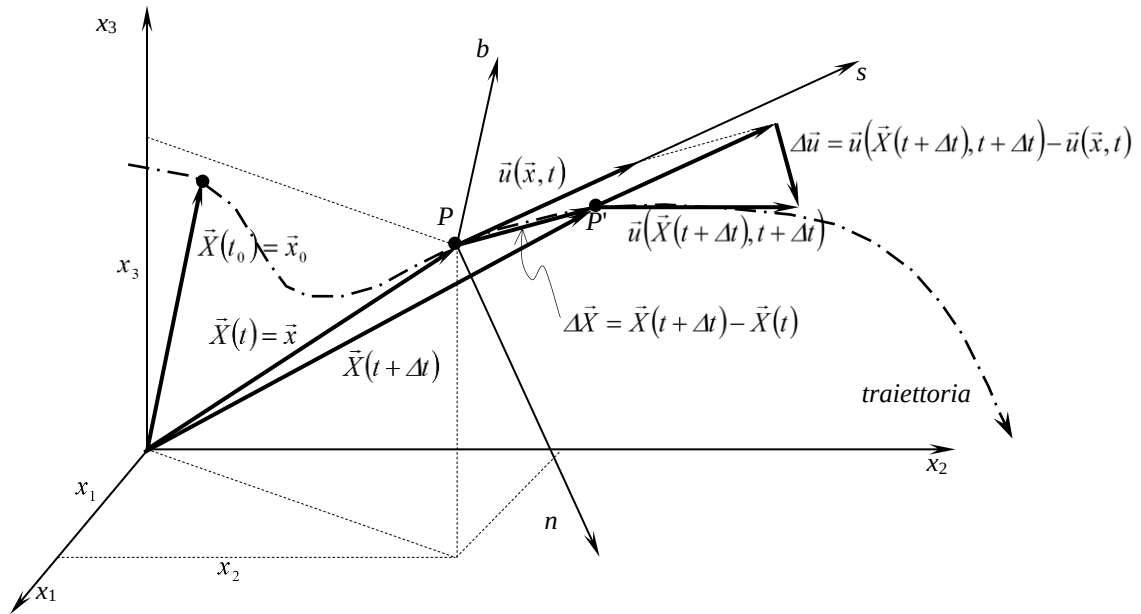


Figura 57. Schema di definizione del campo delle velocità associabile a una massa fluida in movimento.

4.2 Campi di velocità e traiettorie.

Conformemente al significato generale di campo di una grandezza fisica, un campo di velocità è una regione dello spazio interessata da una massa fluida in movimento, sulla quale sia possibile definire, punto per punto e al trascorrere del tempo, un vettore velocità $\vec{u}(\vec{x}, t)$. La velocità del campo di moto al tempo t in un punto P identificato dal vettore posizione $\vec{x}$ è la velocità della particella che transita in P in tale istante di tempo. Sulla scorta della definizione del vettore velocità istantanea di un punto materiale richiamata al §1.3.3 e con riferimento allo schema di Figura 57, tale velocità può essere espressa come di seguito riportato.

Sia $\vec{X}(t)$ il vettore esprime la posizione di una particella al tempo t , di componenti (coordinate della particella) $X_i(t)$, $i = 1, 2, 3$. Al variare di t , $\vec{X}(t)$ rappresenta pertanto il luogo dei punti dello spazio occupati dalla particella, ossia, la sua traiettoria. Si consideri ora la particella che a un tempo t fissato si trova nel punto P di assegnata posizione $\vec{x}$, tale quindi che $\vec{X}(t) = \vec{x}$, ovvero $X_i(t) = x_i$ in termini di componenti scalari del vettore posizione (coordinate del punto P). Sia $\Delta\vec{X} = \vec{X}(t + \Delta t) - \vec{X}(t)$ lo spostamento compiuto dalla particella nel successivo intervallo di tempo Δt per portarsi in un punto P' . La velocità della particella al tempo t è definita dal limite:

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{X}(t + \Delta t) - \vec{X}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{X}}{dt}(t), \quad (118)$$

rappresentante la derivata prima del vettore posizione, e le corrispondenti componenti scalari da:

$$u_i(\vec{x}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X_i(t + \Delta t) - X_i(t)}{\Delta t} = \frac{dX_i}{dt}(t).$$

La velocità così espressa è funzione del vettore posizione e del tempo, perché dedotta con riferimento alla particolare particella che al tempo t transitava nel punto P . La possibilità di determinare, con identico procedimento, un vettore velocità in ogni punto della massa fluida e per ogni istante temporale denota l'esistenza di un campo di velocità, del quale il primo membro della (118) rappresenta pertanto l'espressione formale, ove $\vec{x}$ e t assumono ora il significato di variabili indipendenti. Un campo di velocità è quindi pienamente determinato se si conosce il valore del vettore $\vec{u}(\vec{x}, t)$ in ogni punto della massa fluida e in ogni istante temporale.

Si noti che, da un punto di vista geometrico, il vettore velocità, risultando parallelo al vettore spostamento $\Delta\vec{X}$, costituente un segmento elementare di traiettoria, nel limite per $\Delta t \rightarrow 0$, è tangente alla traiettoria della particella nel punto P .

Noto che sia il campo di velocità per l'intervallo di tempo durante il quale interessa studiarne il moto, ci si può porre il problema di determinare le traiettorie di tutte le particelle. L'equazione differenziale generale che descrive la traiettoria di una particella si desume dalla (118), tenendo presente che la particella si muove, a un dato istante, con la velocità vigente nel punto dello spazio in cui essa si trova in tale istante, ponendo cioè $\vec{x} = \vec{X}(t)$ nell'espressione del campo di velocità:

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{u}(\vec{X}, t). \quad (119)$$

L'integrale della (119) è definito a meno di una costante da determinare sulla base di una condizione iniziale: la posizione occupata dalla particella a un dato istante temporale t_0 :

$$\vec{X}(t_0) = \vec{x}_0.$$

L'espressione generale che descrive tutte le traiettorie del campo di moto in termini di vettore posizione, integrale della (119), è perciò data da $\vec{X}(t; \vec{x}_0)$, di cui $\vec{x}_0$ costituisce un parametro, identificato simbolicamente come tale dal punto e virgola di separazione dalla variabile indipendente t . Specificare in tale espressione un particolare valore di $\vec{x}_0$ significa individuare una particolare particella della massa fluida, come materialmente potrebbe farsi marcandola con una goccia di colorante, instillata al tempo t_0 nel punto $\vec{x}_0$. Seguendo la macchia colorata al trascorrere del tempo si visualizzerebbe perciò la traiettoria della particella marcata. L'immagine della traiettoria che si sviluppa in un dato intervallo di tempo può ottenersi effettuando una fotografia del campo di moto con un tempo di esposizione di pari durata.

Poiché i valori specificabili per il parametro $\vec{x}_0$ sono ∞^3 , tale è il numero di traiettorie individuabili nel campo di moto.

Evidentemente, la struttura della (119) implica la possibilità di determinare le traiettorie in forma analitica soltanto per espressioni del campo di velocità sufficientemente semplici. Ammessa tale possibilità, sulla base dell'equazione della traiettoria in termini scalari, $x_i = X_i(t; \vec{x}_0)$, $i = 1, 2, 3$, le forme delle traiettorie di tutte le particelle possono esprimersi analiticamente eliminando il tempo fra le tre equazioni scalari.

4.3 Punti di vista Euleriano e Lagrangiano.

Il moto di una massa fluida è completamente descritto quando sia descritto il moto di tutte le ∞^3 particelle che la compongono. Le espressioni del campo di moto, $\vec{u}(\vec{x}, t)$, e dell'insieme delle traiettorie di tutte le particelle della massa fluida, $\vec{X}(t; \vec{x}_0)$, suggeriscono la possibilità di esaminare il movimento della massa fluida con due diverse modalità.

Una prima modalità consiste nel porsi in un certo punto dello spazio, cui è associato un valore fissato del vettore posizione $\vec{x}$, e misurare le velocità delle diverse (∞^1) particelle che, al trascorrere del tempo t , transitano per il punto prescelto per l'osservazione. Tale modalità di osservazione del campo di moto prende il nome di *punto di vista euleriano* o *locale*.

La seconda modalità consiste nel seguire il movimento di una certa particella al trascorrere del tempo t , fissando il valore della sua posizione $\vec{x}_0$ al tempo t_0 . Tale modalità costituisce il *punto di vista lagrangiano*, detto anche *materiale* o *sostanziale*.

In entrambi i casi, ciascun osservatore è in grado di eseguire ∞^1 misure. La descrizione completa del campo di moto si ottiene pertanto utilizzando ∞^3 osservatori euleriani che stazionano negli ∞^3 punti dello spazio o ∞^3 osservatori lagrangiani mobili sulle ∞^3 particelle della massa fluida, in entrambi i casi collezionando ∞^4 misure. Tali osservazioni complete del campo di moto sono equivalenti, nel senso che da una rappresentazione è possibile dedurre l'altra. Infatti, noto il campo delle velocità $\vec{u}(\vec{x}, t)$, l'equazione differenziale (119) consente di ricostruire tutte le traiettorie del campo di moto. Viceversa, nota la $\vec{X}(t; \vec{x}_0)$, per ogni istante di tempo t la sua derivata temporale (118) fornisce le velocità in tutti i punti dello spazio $\vec{x} = \vec{X}(t; \vec{x}_0)$ ottenibili considerando le posizioni iniziali $\vec{x}_0$ di tutte le particelle della massa fluida.

Le due modalità di osservazione non sono applicabili unicamente a grandezze caratteristiche del campo di moto in senso stretto, ma a qualunque grandezza fisica misurabile in una massa fluida in movimento: densità, pressione³⁸, viscosità, etc... La descrizione lagrangiana di una qualunque grandezza $\mathcal{G}$ si deduce dalla sua descrizione generale (117) inserendovi le posizioni assunte da una particella lungo la sua traiettoria al trascorrere del tempo $\vec{x} = \vec{X}(t, \vec{x}_0)$:

$$\mathcal{G}(\vec{x}, t) = \mathcal{G}[\vec{X}(t; \vec{x}_0), t] = \mathcal{G}(t; \vec{x}_0),$$

ove $\vec{x}_0$ assume il medesimo significato indicato nel caso dell'equazione delle traiettorie.

A seconda del punto di vista adottato, possono definirsi due tipi di derivate temporali della grandezza $\mathcal{G}$. Si definisce *derivata euleriana* o *locale* nel punto $\vec{x}$ al tempo t il seguente limite:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}(\vec{x}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{G}(\vec{x}, t + \Delta t) - \mathcal{G}(\vec{x}, t)}{\Delta t} = \left. \frac{d \mathcal{G}(\vec{x}, t)}{d t} \right|_{\vec{x} = \text{cost}},$$

la quale riflette le variazioni temporali della grandezza rilevabili da un punto di vista euleriano.

Si definisce *derivata lagrangiana*, o *sostanziale*, o *materiale*, nel punto $\vec{x}$ al tempo t il limite:

$$\frac{D \mathcal{G}}{D t}(\vec{x}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{G}(t + \Delta t; \vec{x}_0) - \mathcal{G}(t; \vec{x}_0)}{\Delta t} = \left. \frac{d \mathcal{G}(t; \vec{x}_0)}{d t} \right|_{\vec{x}_0 = \text{cost}},$$

³⁸ Nel caso di fluidi in movimento, la pressione deve essere opportunamente definita, come si vedrà nel capitolo successivo.

riferito alla particella che transita nel punto $\vec{x}$ al tempo t , individuata scegliendo il parametro $\vec{x}_0$ tale che risulti $\vec{X}(t; \vec{x}_0) = \vec{x}$.

Con procedimento analogo a quello utilizzato per la deduzione dell'espressione (20) della derivata ordinaria di una funzione dipendente da un'unica variabile indipendente attraverso funzioni ausiliarie, il legame esistente fra i due tipi di derivata temporale si deduce facilmente esprimendo il differenziale totale della (117):

$$d\mathcal{G}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_3} dx_3 = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_i} dx_i ,$$

imponendo che le componenti dello spostamento dx_i siano quelle della particella che passa per il punto $\vec{x}$ al tempo t , $dx_i = dX_i(t; \vec{x}_0)$, procedendo alla valutazione della derivata dividendo per il differenziale dt e tenendo presente l'equazione differenziale della traiettoria (119):

$$\frac{D\mathcal{G}}{Dt}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_i} \frac{dX_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_i} u_i . \quad (120)$$

La relazione (120) prende il nome di *regola di derivazione lagrangiana*.

Il procedimento seguito corrisponde, in effetti, alla valutazione del limite:

$$\frac{D\mathcal{G}}{Dt}(\vec{x}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{G}[\vec{X}(t + \Delta t; \vec{x}_0), t + \Delta t] - \mathcal{G}[\vec{X}(t; \vec{x}_0), t]}{\Delta t} .$$

Riconoscendo che $\partial \mathcal{G} / \partial x_i$ è la i -esima componente del gradiente di $\mathcal{G}$, il secondo termine a terzo membro della (120) rappresenta la forma cartesiana del prodotto scalare fra tale gradiente e il vettore velocità e può pertanto esprimersi in notazione vettoriale come:

$$\frac{D\mathcal{G}}{Dt} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \mathcal{G} .$$

Si osservi che, per definizione di derivata parziale, nella (120) il termine $\partial \mathcal{G} / \partial t$ è calcolato mantenendo costante $\vec{x}$ (ovvero le sue tre componenti scalari x_i) ed è quindi, per definizione, proprio la derivata euleriana della grandezza nel dato punto $\vec{x}$ e nel dato istante di tempo t .

Analogamente, l'accelerazione in un punto e a un dato istante di tempo, accelerazione della particella che transita nel punto in quell'istante, è espressa dalla derivata lagrangiana del vettore velocità:

$$\vec{a}(\vec{x}, t) = \frac{D\vec{u}}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{u}[\vec{X}(t + \Delta t; \vec{x}_0), t + \Delta t] - \vec{u}[\vec{X}(t; \vec{x}_0), t]}{\Delta t} , \quad (121)$$

con opportuna scelta del parametro $\vec{x}_0$, secondo quanto menzionato in precedenza.

La presenza della velocità nell'espressione della regola di derivazione lagrangiana (120) rende non lineare la corrispondente espressione dell'accelerazione. In termini di componenti scalari si ha infatti, ponendo $\mathcal{G} = u_i$ nella (120):

$$a_i = \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} , \quad (122)$$

in cui $\partial u_i / \partial t$ è detta *accelerazione locale* e $u_j \partial u_i / \partial x_j$ *accelerazione convettiva* o *istantanea*, corrispondente all'espressione in notazione vettoriale:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + u_j \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_j} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} .$$

L'equivalenza fra gli operatori $(\vec{u} \cdot \nabla)$ e $u_j (\partial/\partial x_j)$ si verifica facilmente eseguendo il prodotto scalare fra la velocità e il vettore simbolico nabla nella forma cartesiana (28).

4.4 Classificazione dei moti.

Si dicono *stazionari* o *permanenti* quei moti per i quali, in qualunque punto dello spazio, tutte le grandezze cinematiche caratteristiche (velocità, accelerazione, etc...) non dipendono dal tempo. La stazionarietà del moto è pertanto espressa dall'annullamento della derivata Euleriana di una qualunque grandezza caratteristica del campo di moto, $\mathcal{G}$:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} = 0 ,$$

in ogni punto della massa fluida. Un moto non stazionario si dice *vario*.

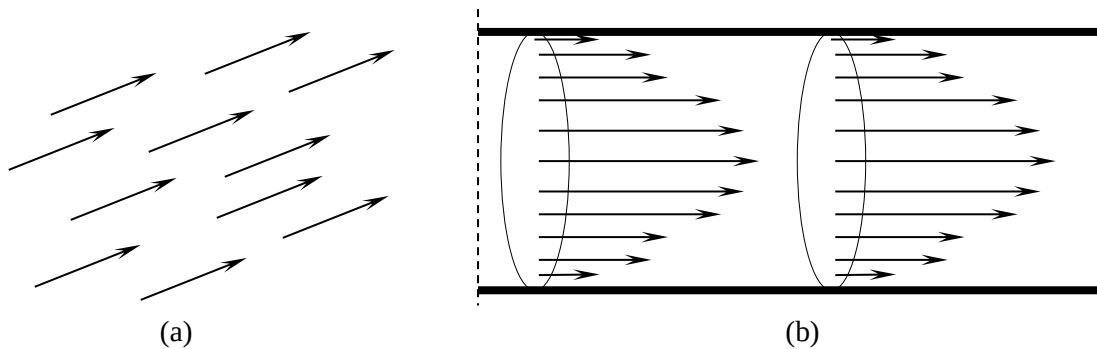


Figura 58. Esempi di campi di velocità uniformi (a) in senso stretto e (b) nell'accezione del termine correntemente utilizzata nella tecnica idraulica.

Si dicono *uniformi* in senso stretto i moti stazionari nei quali il vettore velocità possieda uguali direzione, verso e modulo in tutti i punti della massa fluida e sia, quindi, invariabile anche nello spazio (Figura 58a). A livello tecnico, tuttavia, il termine “moto uniforme” viene utilizzato generalmente per individuare un moto stazionario nel quale tutte le particelle si muovano di moto rettilineo uniforme, anche con velocità differenti l'una dall'altra. Conseguenza da ciò che le traiettorie debbano essere fra loro parallele. Un esempio di tale accezione del termine è quello, significativo, relativo al moto di un fluido in una condotta cilindrica, nel quale la velocità non è uniforme su una sezione piana perpendicolare all'asse della condotta e, nel caso di sezione circolare, possiede una distribuzione a simmetria assiale, con valori nulli alla parete e massimi sull'asse (Figura 58b).

Dal punto di vista delle caratteristiche geometriche, i moti si dicono *tridimensionali* nel caso generale in cui le grandezze caratteristiche del moto varino lungo tutte e tre le dimensioni dello spazio, e dipendano pertanto da tre coordinate, anche non cartesiane; si dicono *bidimensionali* e *unidimensionali* qualora la variabilità spaziale del moto possa essere descritta, rispettivamente, da due o da una coordinata. I flussi unidimensionali, nei quali, a eccezione di alcuni tratti di sviluppo limitato, il moto si svolga, localmente, lungo una direzione preferenziale e le velocità siano perciò sensibilmente parallele, costituisce una *corrente*. La variabile spaziale indipendente è costituita da una ascissa curvilinea stabilita lungo una curva assunta come *asse della corrente*.

Fra i moti bidimensionali possono menzionarsi i moti *a simmetria assiale* e i moti *piani*. Nei primi, le grandezze possono variare al variare di una coordinata rettilinea, x , e, su piani perpendicolari a tale direzione, al variare del raggio spiccato dall'asse x , ma non con l'angolo θ misurato sul piano.

Nei secondi, il campo di moto si ripete identico su piani paralleli, con componente della velocità nulla nella direzione a essi perpendicolare (i vettori velocità giacciono su tali piani).

Sono esempi di corrente i flussi in un canale o in un condotto. Il moto in un condotto a sezione circolare è anche a simmetria assiale. Un esempio di moto piano è quello descritto nel §2.1.

4.5 Analisi del campo di moto nell'intorno di un punto

Nel §2.2 sono state studiate, in un semplice caso di moto piano, le modalità di deformazione dei fluidi e le relative rappresentazioni analitiche. Queste, sono state utilizzate nel §2.5 per caratterizzare il comportamento reologico dei fluidi, riassumibile, per la grande maggioranza di essi, in un legame fra sforzi tangenziali e velocità di deformazione. L'utilità di tale analisi semplificata risiede nella possibilità di definire chiaramente grandezze fondamentali anche a livello puramente tecnico, quali la viscosità dinamica e la viscosità cinematica. Tuttavia, la derivazione delle leggi che regolano il moto più generale possibile di un fluido – quand'anche ci si limiti, come verrà fatto nel prosieguo, al caso dei fluidi Newtoniani – richiede di individuare preliminarmente il corrispondente legame, altrettanto generale, fra gli sforzi e le velocità di deformazione (*legame costitutivo*). Nel presente paragrafo vengono presentati alcuni importanti risultati dell'analisi del campo di moto nell'intorno di un punto, rilevanti particolarmente ai fini della derivazione del legame costitutivo dei fluidi Newtoniani, che verrà presentato nel capitolo successivo dedicato all'Idrodinamica.

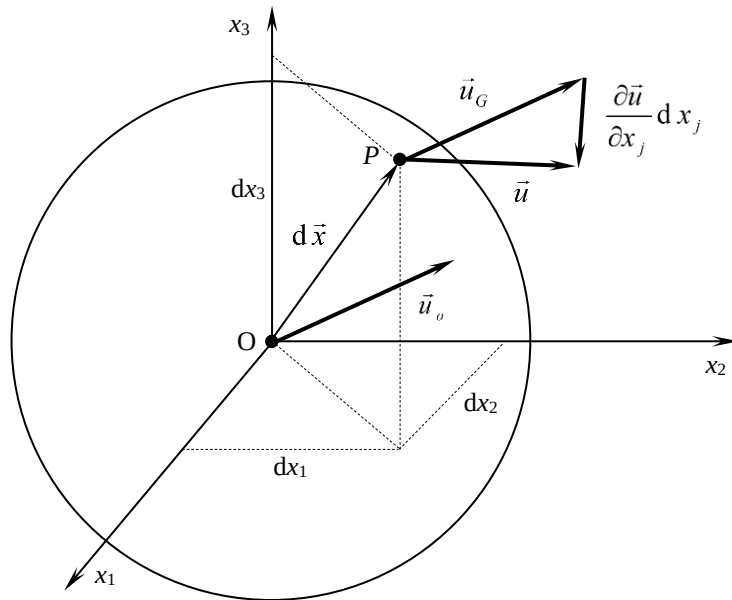


Figura 59. Schema di riferimento per l'analisi del campo di velocità nell'intorno di un punto.

Con riferimento allo schema di Figura 59, si consideri un punto O, scelto quale origine del sistema di riferimento, e un suo intorno di estensione limitata. Detta $\vec{u}_O$ la velocità nel punto O, in considerazioni delle limitate dimensioni dell'intorno, il valore del vettore velocità in qualunque altro suo punto P può ottenersi mediante uno sviluppo in serie arrestato al primo ordine:

$$\vec{u} = \vec{u}_O + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} dx_j \quad (123)$$

essendo dx_1 , dx_2 e dx_3 le componenti del vettore spostamento $d\vec{x}$ dal baricentro G al punto P. Per effetto delle rispettive velocità, il baricentro della particella e il generico punto P compiono i seguenti spostamenti nell'intervallo di tempo elementare dt :

$$d\vec{s}_o = \vec{u}_o dt$$

$$d\vec{s} = \vec{u} dt = \vec{u}_o dt + \left. \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} \right|_o dx_j dt \quad (124)$$

Poiché le relazioni (123) e (124) possono essere utilizzate per descrivere il movimento di qualsiasi punto della particella (e quindi di tutti i suoi punti), il moto della particella può essere decomposto in una pura traslazione, rappresentata dal primo termine a secondo membro della (124), e in una parte rimanente, associata al differenziale della velocità a secondo membro della (123). Di tale spostamento residuo possono evidenziarsi le componenti scalari sugli assi coordinati:

$$d\eta_i = \left. \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|_o dx_j dt, \quad (125)$$

delle quali può essere data una rappresentazione sinottica, esplicitando il prodotto matrice per vettore a secondo membro della (125):

$$\begin{pmatrix} d\eta_1 \\ d\eta_2 \\ d\eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} dt = (\nabla \vec{u})^T d\vec{x} dt. \quad (126)$$

La variazione della velocità nel punto generico rispetto al valore nel baricentro è così rappresentata completamente dalla matrice avente per elementi le derivate spaziali delle componenti del vettore velocità nel baricentro (il cui pedice identificativo si è ommesso per brevità, come d'ora in avanti). A tale matrice è associato il tensore *gradiente di velocità trasposto*, $(\nabla \vec{u})^T$ ³⁹, di componenti scalari $(\nabla \vec{u})_{ij}^T = \partial u_i / \partial x_j$. La matrice può essere riguardata come la somma di una matrice simmetrica e di una antisimmetrica, associate a corrispondenti tensori, $\underline{\underline{D}}$ e $\underline{\underline{R}}$, di componenti scalari d_{ij} e r_{ij} , tali che:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = d_{ij} + r_{ij}, \quad (127)$$

per i quali si verificano facilmente le condizioni di simmetria e antisimmetria:

$$\begin{aligned} d_{ij} &= d_{ji} \\ r_{ij} &= -r_{ji} \end{aligned}$$

In forma estesa, la decomposizione (127) si presenta nel modo seguente:

³⁹ Si ricordi che l'operatore gradiente restituisce un tensore di grado superiore (applicato ad uno scalare – tensore di ordine zero – restituisce un vettore; applicato ad un vettore – tensore di ordine uno – un tensore doppio, e così via), mentre la divergenza restituisce un tensore di grado inferiore.

$$\begin{aligned}
(\nabla \vec{u})^T &\equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & 0 \end{pmatrix} \equiv \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{R}}
\end{aligned}$$

Allo scopo di illustrare il significato fisico di tali tensori, conviene considerarne i singoli termini con riferimento a condizioni di moto ideali, per i quali essi siano gli unici termini non nulli: nel moto più generale possibile gli effetti fisici dedotti mediante tale tipo di analisi potranno essere sovrapposti linearmente (e, complessivamente, sovrapposti alla componente di movimento traslatoria). In particolare, per ciascuna delle condizioni di moto, se ne considerino gli effetti su un volume fluido elementare di forma parallelepipedica, di lati δx_1 , δx_2 e δx_3 paralleli agli assi coordinati, questi ultimi aventi origine nel vertice del parallelepipedo di coordinate minime.

Si consideri dapprima un moto piano per il quale gli unici termini non nulli siano $d_{12} = d_{21}$, che ammetteremo, per fissare le idee e senza perdita di generalità, positivi. In un moto siffatto, le sezioni del parallelepipedo fatte con piani paralleli al piano $x_1 x_2$ sono tutte uguali, per cui la rappresentazione della variazione di una qualunque sezione, riportata in Figura 60a, è rappresentativa delle modifiche subite dall'intero volume.

Gli spostamenti dei vertici del parallelepipedo in un intervallo di tempo dt si ottengono dalla (126), ove al tensore $(\nabla \vec{u})^T$ si sostituisca il tensore $\underline{\underline{D}}$ avente le caratteristiche ipotizzate:

$$\begin{pmatrix} d\eta_1 \\ d\eta_2 \\ d\eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d_{12} & 0 \\ d_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} d_{12} dx_2 dt \\ d_{21} dx_1 dt \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto, compiono spostamenti nella direzione dell'asse x_1 soltanto i punti che non giacciono sulla faccia del solido contenuta nel piano $x_1 x_3$, mentre compiono spostamenti nella direzione dell'asse x_2 soltanto i punti che non giacciono sulla faccia del solido contenuta nel piano $x_2 x_3$. In particolare, dopo un intervallo di tempo dt , il vertice avente in origine coordinate $(\delta x_1, 0)$ ha compiuto uno spostamento in direzione x_2 pari a $d_{21} \delta x_1 dt$; il punto avente originariamente coordinate $(0, \delta x_2)$ ha compiuto uno spostamento in direzione x_1 pari a $d_{12} \delta x_2 dt$; il vertice opposto all'origine ha compiuto uno spostamento $d_{12} \delta x_2 dt$ in direzione x_1 e $d_{21} \delta x_1 dt$ in direzione x_2 . Inoltre, tutti gli altri punti dei quattro lati della sezione compiono spostamenti proporzionali alle rispettive coordinate originarie. In definitiva, dopo l'intervallo dt i lati della sezione hanno ruotato rigidamente come mostrato in Figura 60a, per la ammessa positività di d_{12} e d_{21} .

Trattandosi di un intervallo di tempo elementare, gli angoli di rotazione sono, anch'essi, molto piccoli e possono perciò esprimersi come segue:

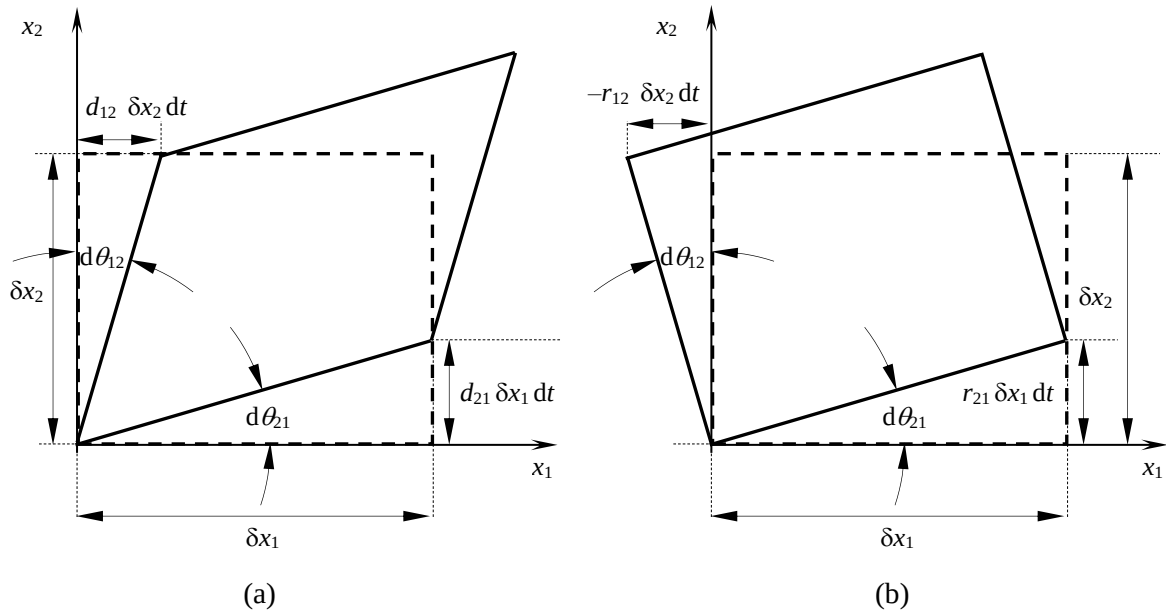


Figura 60. Modifiche subite da un volume fluido parallelepipedo per effetto dei campi di moto rappresentati dai termini extra-diagonali dei tensori (a) $\underline{\underline{D}}$ e (b) $\underline{\underline{R}}$.

$$d\theta_{21} = \arctan\left(\frac{d_{21}\delta x_1 dt}{\delta x_1}\right) \cong d_{21} dt$$

$$d\theta_{12} = \arctan\left(\frac{d_{12}\delta x_2 dt}{\delta x_2}\right) \cong d_{12} dt$$

da cui, essendo $d_{12} = d_{21}$, consegue anche $d\theta_{12} = d\theta_{21}$. Pertanto, la velocità di variazione dell'angolo interno $d\theta_3$, il cui pedice rappresenta la direzione dell'asse coordinato attorno alla quale avviene la rotazione, è negativa e pari, in valore assoluto, a:

$$\frac{d\theta_3}{dt} = d_{12} + d_{21} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1},$$

Analogamente a quanto fatto nel §2.2, e a generalizzazione della trattazione ivi presentata, identifichiamo tale grandezza come una velocità di deformazione angolare. Mediante una analisi degli ordini di grandezza delle varie porzioni di superficie che compongono la sezione deformata, si può mostrare facilmente che, anche in questo caso, la deformazione avviene a volume costante. In modo del tutto analogo, si definiscono le velocità di deformazione relative a rotazioni attorno ad assi paralleli a x_1 e x_2 , in generale coesistenti in un moto reale. Si ritrova quindi, per il caso di moto tridimensionale il più generale possibile, che le velocità di deformazione a volume costante sono espresse da derivate spaziali delle componenti di velocità a pedici disuguali, ossia, i termini extra-diagonali del tensore $\underline{\underline{D}}$. Ovviamente, i risultati ottenuti al §2.2 si ritrovano come caso particolare.

Il significato delle derivate spaziali delle componenti della velocità a pedici uguali, costituenti gli elementi della diagonale di $\underline{\underline{D}}$, si comprende considerando un secondo tipo di moto ideale, in cui tali termini siano gli unici non nulli. Sempre per fissare le idee, assumiamo positivi tutti e tre i termini. In questo caso, sulla base della (126), i lati del parallelepipedo subiscono unicamente estensioni nelle rispettive direzioni:

$$\begin{pmatrix} d\eta_1 \\ d\eta_2 \\ d\eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} d_{11} dx_1 dt \\ d_{22} dx_2 dt \\ d_{33} dx_3 dt \end{pmatrix},$$

come rappresentato in Figura 61. Nell'esempio in questione, la massa fluida, di volume iniziale:

$$V_0 = \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3,$$

si dilata, andando a occupare, dopo un tempo dt , il volume:

$$V = \left(\delta x_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \delta x_1 dt \right) \left(\delta x_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \delta x_2 dt \right) \left(\delta x_3 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \delta x_3 dt \right),$$

con una variazione di volume data, a meno dei termini infinitesimi di ordine superiore, da:

$$dV = \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) dt = V_0 (\nabla \cdot \vec{u}) dt,$$

nella quale compare la divergenza del vettore velocità. La corrispondente velocità di deformazione, questa volta puramente assiale, per unità di volume iniziale, è data quindi da:

$$\frac{1}{V_0} \frac{dV}{dt} = \nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_j}{\partial x_j},$$

ossia, dalla divergenza del vettore velocità.

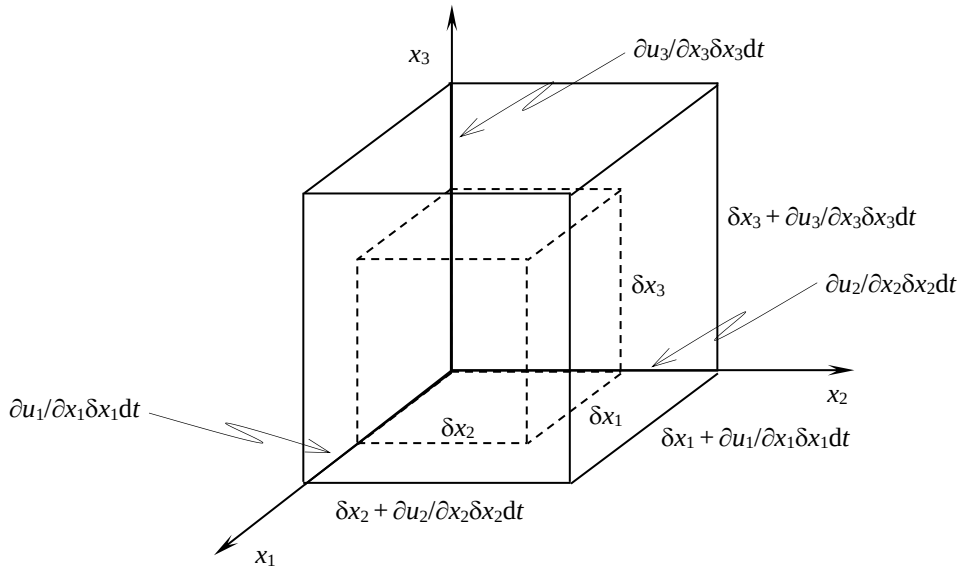


Figura 61. Modifiche subite da un volume fluido parallelepipedo per effetto dei campi di moto rappresentati dai termini diagonali del tensore $\underline{\underline{D}}$.

Il risultato è del tutto generale e include anche i casi in cui parte dei lati si dilati e parte si contragga. Dalla presente analisi, di tipo lagrangiano, la divergenza assume quindi il significato di velocità di

variazione volumetrica specifica (per unità di volume iniziale). Nel caso di un fluido incomprimibile, isoterma e omogeneo, che non possa quindi variare il proprio volume specifico (e, quindi, la sua densità) deve quindi risultare:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0,$$

come si mostrerà ulteriormente nel prosieguo, in sede di deduzione dell'equazione di continuità. Un tale tipo di moto si dice *isocoro*⁴⁰.

La divergenza della velocità rappresenta la somma degli elementi diagonali di $\underline{\underline{D}}$. Tale quantità caratteristica di un tensore è denominata, in generale, *traccia o invariante lineare* del tensore, in quanto, per l'appunto, invariante per cambiamento del sistema di riferimento. Come appare del resto abbastanza intuitivo, la velocità di variazione volumetrica specifica è quindi una grandezza intrinseca del campo di moto, non dipendendo dal particolare sistema di riferimento adottato.

Il tensore $\underline{\underline{D}}$ rappresenta pertanto tutte le possibili modalità di deformazione del volume fluido, con i termini diagonali ed extra-diagonali esprimenti velocità di deformazione a volume rispettivamente variabile e costante, e prende perciò il nome di *tensore velocità di deformazione*.

Il significato del tensore $\underline{\underline{R}}$ si deduce con ragionamento analogo a quello condotto per i termini extra-diagonali di $\underline{\underline{D}}$, con riferimento allo schema di Figura 60b, ove si assume $r_{21} > 0$ e, quindi, $r_{12} = -r_{21} < 0$. In questo caso, gli spostamenti dei vertici dei lati paralleli agli assi x_1 e x_2 sono di segno opposto, mentre gli angoli di rotazione sono ancora identici: $d\theta_{12} = d\theta_{21}$. Pertanto, non variano gli angoli retti fra i lati della sezione; il volume è quindi animato da un moto di rotazione rigida con verso antiorario attorno all'asse x_3 , con velocità angolare:

$$\Omega_3 = \frac{d\theta_{21}}{dt} = r_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right).$$

Analoghe conclusioni si ottengono con riferimento alle altre due coppie di termini extra-diagonali di $\underline{\underline{R}}$, che assume, per evidenti motivi, il nome di *tensore velocità di rotazione rigida*.

Si osservi che il moto piano trattato nel §2.2 ha anche una componente rotatoria rigida di movimento in senso orario, con velocità angolare:

$$\Omega_3 = r_{12} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

Il tensore velocità di rotazione rigida è strettamente legato al *rotore* (o *rotazione*) del vettore velocità, definito mediante il seguente prodotto vettoriale simbolico:

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{u} = \nabla \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \begin{aligned} & \vec{b}_1 (\partial u_3 / \partial x_2 - \partial u_2 / \partial x_3) \\ & + \vec{b}_2 (\partial u_1 / \partial x_3 - \partial u_3 / \partial x_1) , \\ & + \vec{b}_3 (\partial u_2 / \partial x_1 - \partial u_1 / \partial x_2) \end{aligned}$$

che prende il nome di *vorticità*. La vorticità ha per componenti scalari il doppio delle velocità di rotazione rigida attorno alle direzioni degli assi corrispondenti, talché può anche scriversi⁴¹:

⁴⁰ Il termine viene utilizzato in Termodinamica per designare le trasformazioni dei gas a volume costante.

⁴¹ A dispetto delle apparenze, la disposizione dei segni obbedisce ad una regola precisa: una componente r_{ij} ha segno più o meno a seconda che i pedici siano disposti in ordine rispettivamente inverso ed equiverso alla sequenza ciclica 1, 2, 3, 1. Componenti positive della vorticità corrispondono a rotazioni sempre antiorarie osservate dalla "punta" del versore corrispondente; valori positivi delle componenti subdiagonali di $\underline{\underline{R}}$ corrispondono a rotazioni antiorarie rispetto agli assi x_1 e x_3 e rotazioni orarie rispetto a x_2 .

$$\underline{\underline{R}} \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riassumendo, il movimento di un volume fluido elementare può essere visto come risultante dalla composizione di un moto puramente traslatorio, di una rotazione rigida e di una deformazione, queste ultime rappresentate dai relativi tensori, di cui il tensore velocità di deformazione rappresentativo di deformazioni a volume costante e a volume variabile, corrispondenti rispettivamente ai termini extra-diagonali e diagonali. Tale rappresentazione costituisce l'estensione a un moto tridimensionale della espressione della velocità di deformazione, già riconosciuta per il moto piano descritto al §2.2. Anche per un moto il più generale possibile di un fluido newtoniano, lo stato di sforzo è legato unicamente alla velocità di deformazione, come già riconosciuto nel §2.5 con riferimento ai soli sforzi tangenziali e a casi particolari di moto⁴².

4.6 Linee di corrente e linee di fumo.

Oltre alle traiettorie, in un campo di moto possono essere definite altre due famiglie di curve caratteristiche: *linee di corrente* e *linee di fumo* o *di emissione*.

Le linee di corrente sono le linee di flusso del campo di velocità e sono pertanto definite, a un dato istante di tempo, come curve tangenti, punto per punto, al vettore velocità. Esse forniscono quindi una rappresentazione istantanea del moto. Con riferimento allo schema semplificato, bidimensionale, di Figura 62, detto $d\hat{x}$ il vettore spostamento elementare lungo una linea di corrente, costituente un segmento elementare della linea, di componenti $d\hat{x}_i$ ($i=1,2,3$), il parallelismo fra tale vettore e il vettore velocità è espresso dalla proporzionalità fra le componenti omologhe dei due vettori:

$$\frac{d\hat{x}_i}{d\hat{x}_j} = \frac{u_i(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3; t)}{u_j(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3; t)}, \quad (128)$$

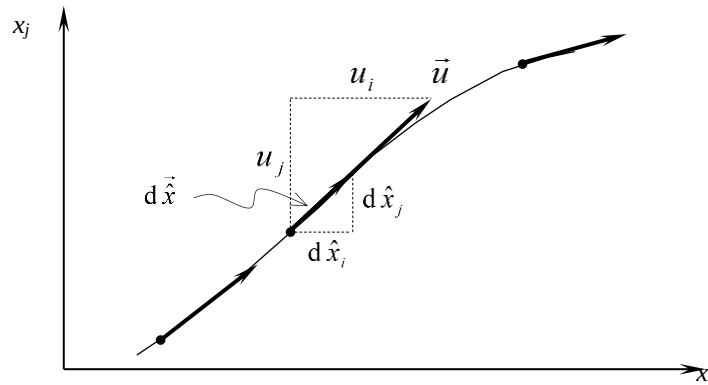


Figura 62. Schema illustrativo della deduzione delle equazioni delle linee di corrente.

scritte per due coppie qualunque di valori dei pedici i e j (la terza equazione che può essere scritta è ottenibile dalle prime due dividendo membro a membro e non ne è perciò indipendente), nella quale t rappresenta un parametro. Mediante imposizione di una condizione al contorno esprimente il passaggio della linea di corrente per un dato punto, per integrazione della (128) può dedursi

⁴² Ove si sostituiscano rotazioni e deformazioni alle velocità di rotazione e di deformazione, i risultati esposti sono del tutto analoghi a quelli che si ottengono nella Scienza delle Costruzioni per un solido. Similmente, lo stato di sforzo in un solido elastico si riconosce dipendere unicamente dal suo stato di deformazione.

l'equazione della linea di flusso. Poiché possono essere tracciate ∞^2 linee di corrente in ciascuno degli ∞^1 istanti contenuti in un dato intervallo temporale, in tale intervallo sono definibili complessivamente ∞^3 linee di corrente, tante quante le traiettorie.

Una particella fluida, esaminata nella posizione occupata a un certo istante temporale, percorrerà in un intervallo di tempo elementare un segmento comune alla traiettoria e alla linea di corrente definite sulla base della posizione iniziale della particella. Tuttavia, se il moto è vario, nell'istante successivo la particella si troverà soggetta a una velocità differente da quella esistente, nello stesso punto, all'istante iniziale. La prima velocità, propria della particella, è quella sulla base della quale si determina la sua traiettoria, mentre la seconda è quella che occorre considerare per il tracciamento della linea di corrente all'istante iniziale. Pertanto, in generale, linee di corrente e traiettorie non coincidono. Le due famiglie di curve coincidono, però, se in moto è stazionario. Infatti, in tal caso, in qualunque posizione la particella si trovi, essa è soggetta alla stessa velocità sulla base della quale si tracciano le linee di corrente relative a qualunque istante.

Per quanto esposto, una famiglia di linee di corrente a un dato istante di tempo può visualizzarsi iniettando una goccia di tracciante in un certo numero di punti del campo di moto ed eseguendo una fotografia con un tempo di esposizione sufficiente a visualizzare i relativi segmenti di traiettoria. Quanto più i punti di immissione del tracciante sono ravvicinati, tanto più i segmenti si prestano a essere collegati da curve a essi tangenti costituenti le linee di corrente istantanee.

Le linee di fumo, o di emissione, sono definite come luogo dei punti occupati, a un dato istante, da tutte le particelle transitate, o che devono ancora transitare, per un fissato punto dello spazio. L'origine del nome è evidente: nel caso ideale di un camino puntiforme emittente fumo, la corrispondente linea di fumo è l'immagine stessa del pennacchio di fumo, come mostrato nella Figura 63. In essa, le linee tratteggiate rappresentano le traiettorie seguite da diverse particelle uscite dal camino negli istanti indicati, da t_1 a t_6 . La linea di fumo al tempo t , al quale la figura è riferita, è la linea continua congiungente le posizioni delle particelle in tale istante, indicate con dei cerchietti. Ovviamente, in tale caso la linea di fumo rappresenta soltanto le posizioni delle particelle che sono passate per (uscite da) la bocca puntiforme del camino⁴³.

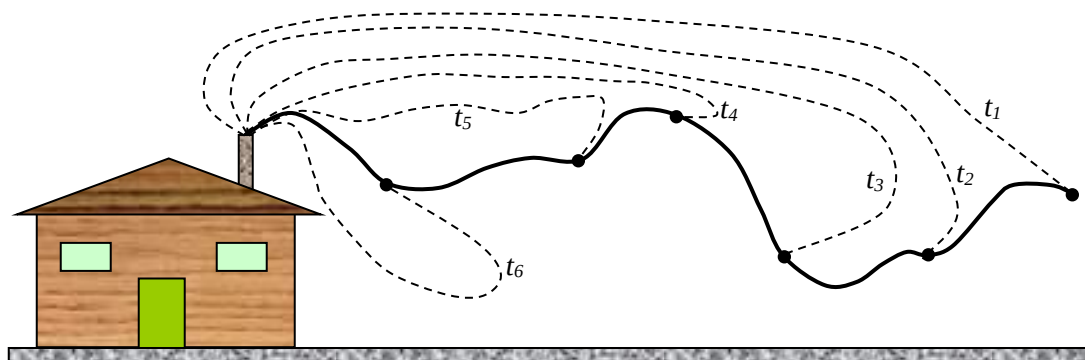


Figura 63. Schema per la definizione di una linea di fumo.

A ogni istante sono determinabili ∞^3 linee di fumo, relative agli ∞^3 punti di riferimento per il passaggio delle particelle (per definizione di linea di fumo, a un dato istante ciascuna particella appartiene a tutte le linee di fumo riferite a ciascuno dei punti della sua traiettoria). In un dato intervallo di tempo, costituito da ∞^1 istanti, le linee di fumo rappresentabili sono pertanto ∞^4 .

Le linee di fumo relative a uno stesso punto di emissione e a diversi istanti di tempo possono essere visualizzate osservando, al trascorrere del tempo, la disposizione delle particelle di un tracciante iniettato continuamente nel punto di emissione. Nel caso stazionario, le linee di fumo coincidono con le traiettorie e le linee di corrente.

⁴³ Per una deduzione delle equazioni delle linee di fumo vedi C.A. Fassò – Dispense di Idraulica.

4.7 Flussi attraverso superfici.

Si consideri la massa fluida rappresentata in Figura 64 e la superficie S in essa contenuta. Si consideri, inoltre, il vettore velocità in un punto P qualunque della superficie S e un'areola dS che contenga tale punto. Avendo la superficie dS dimensioni infinitesime, a meno di termini infinitesimi il valore della velocità in ciascuno dei suoi punti è lo stesso che nel punto P . In un intervallo di tempo elementare dt , le particelle inizialmente poste sull'areola dS compiono quindi tutte lo stesso spostamento $\vec{u}dt$ nella direzione e nel verso del vettore velocità. Pertanto, l'insieme delle particelle che, in tale intervallo, ha attraversato la superficie elementare dS occupa un volume cilindrico costituito dalla proiezione di tale superficie nella direzione e per una distanza pari allo spostamento $\vec{u}dt$.

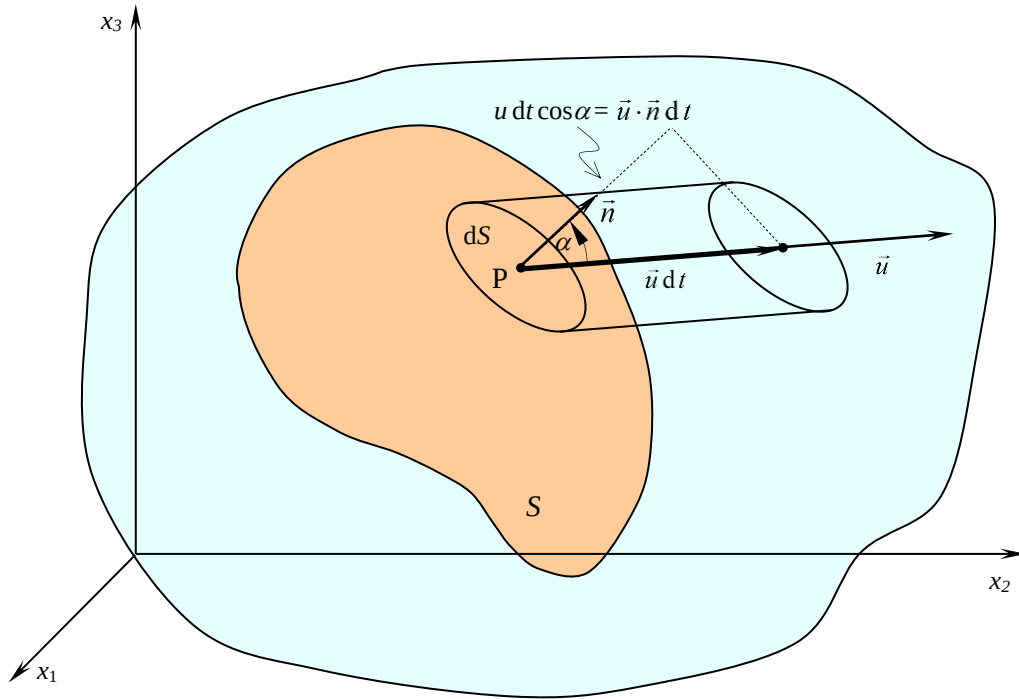


Figura 64. Schema di definizione del flusso attraverso una superficie.

Il volume di tale solido è dato dal prodotto della superficie di base dS per l'altezza a del cilindro, misurata in direzione normale alla superficie di base. Essendo quest'ultima data dalla proiezione dello spostamento $\vec{u}dt$ lungo la direzione della normale alla superficie dS , detto α l'angolo formato dallo spostamento e dalla normale, si ha $a = udt \cos \alpha = \vec{u} \cdot \vec{n} dt$. Il volume di tale cilindro elementare è dato quindi da:

$$dV = dS \vec{u} \cdot \vec{n} dt.$$

Detta ρ la densità nel punto P , tale volume elementare possiede massa pari a:

$$dm = \rho dV = \rho dS \vec{u} \cdot \vec{n} dt$$

e quantità di moto:

$$d\vec{q} = \vec{u} dm = \rho \vec{u} dS \vec{u} \cdot \vec{n} dt.$$

Tali quantità costituiscono rispettivamente il volume, la massa e la quantità di moto che hanno attraversato la superficie elementare dS nell'intervallo di tempo elementare dt . Dividendo per dt

possono quindi definirsi le corrispondenti quantità che attraversano la superficie elementare nell'unità di tempo:

$$dQ = \frac{dV}{dt} = \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS$$

$$dQ_m = \frac{dm}{dt} = \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS \quad ,$$

$$d\vec{M} = \frac{d\vec{q}}{dt} = \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS$$

dette rispettivamente *flusso volumetrico* o *portata volumetrica* o semplicemente *portata*, *flusso di massa* o *portata di massa* e *flusso di quantità di moto* elementari. Si rimarca come, ai fini dell'attraversamento della superficie, sia efficace unicamente la componente della velocità in direzione a essa normale. Un valore positivo del flusso corrisponde all'attraversamento della superficie nel verso della normale; un valore negativo a un attraversamento in verso opposto.

La portata volumetrica, la portata di massa e il flusso di quantità di moto relativi all'intera superficie S , pari alle corrispondenti quantità che attraversano la superficie nell'unità di tempo, sono date dagli integrali:

$$Q = \int_S \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS \quad . \quad (129)$$

$$Q_m = \int_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS \quad . \quad (130)$$

$$\vec{M} = \int_S \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS \quad . \quad (131)$$

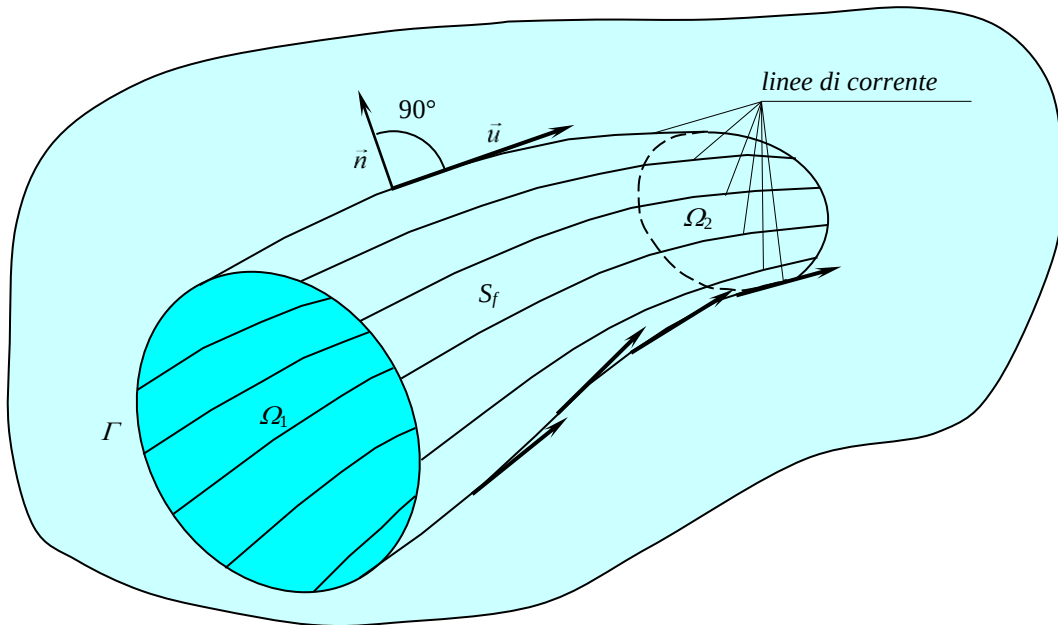


Figura 65. Tubo di flusso in un volume fluido in movimento.

Si consideri una linea chiusa all'interno di una massa fluida in movimento, Γ , che non sia una linea di corrente e l'insieme delle ∞^1 linee di flusso che passano per i punti di detta curva (Figura 65). La superficie tubolare S_f così definita è detta *tubo di flusso*. Essendo nullo in ogni punto di tale superficie

il prodotto scalare fra il vettore velocità e la normale alla superficie, attraverso un tubo di flusso risultano nulli i flussi volumetrico, di massa e di quantità di moto.

Considerando il volume delimitato dal tubo di flusso, da una superficie Ω_1 avente per contorno la curva Γ e da analoga superficie Ω_2 avente per contorno una curva cui si appoggiano le stesse linee di corrente che compongono il tubo di flusso, potranno aversi portata, portata di massa e flusso di quantità di moto non nulli, al più, attraverso tali due sezioni del tubo di flusso.

4.8 Teorema del trasporto

Nel §4.3 era stato dimostrato il legame fra derivata lagrangiana e derivata euleriana per una grandezza puntuale. Sulla base della definizione di flusso data nel §4.7 è ora possibile esprimere la derivata lagrangiana di una quantità definita come integrale di una grandezza della quale sia noto il campo, esteso a un *volume materiale* di dimensioni finite. Si dice volume materiale un volume fluido costituito sempre dalle stesse particelle, individualmente considerate, visualizzabili, durante il loro movimento, mediante marcatura con un tracciante. Seguire un volume materiale nel suo movimento – durante il quale esso può deformarsi nei modi più vari – richiede pertanto di seguire le traiettorie di tutte le ∞^3 particelle che lo compongono. Si comprende quindi, ancor più che nel caso della regola di derivazione lagrangiana trattata nel §4.3, l'utilità di una relazione che consenta di esprimere la derivata lagrangiana di una siffatta grandezza mediante una formulazione riferita a una analisi del campo della grandezza in posizioni indipendenti dal moto delle particelle.

Data la quantità:

$$\Theta = \int_{V_m} \mathcal{G}(\vec{x}, t) dV_m ,$$

in cui $\mathcal{G}(\vec{x}, t)$ è una generica grandezza della quale è noto il campo, il problema consiste nell'esprimerne la derivata lagrangiana, definita dal limite:

$$\frac{D\Theta}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{V_m} \mathcal{G}(\vec{x}, t) dV_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_m(t+\Delta t)} \mathcal{G}(t+\Delta t) dV_m - \int_{V_m(t)} \mathcal{G}(t) dV_m}{\Delta t} , \quad (132)$$

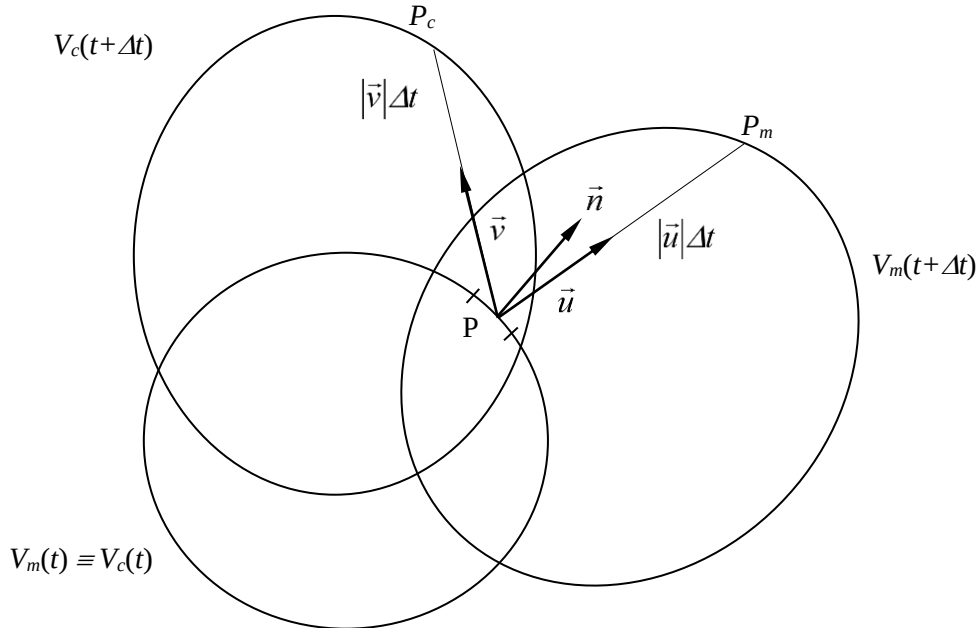


Figura 66. Volumi di controllo e volumi materiali ai tempi t and $t+\Delta t$.

in cui $V_m(t)$ e $V_m(t+\Delta t)$ sono i volumi materiali ai tempi t , per il quale si vuole esprimere la derivata lagrangiana, e $t+\Delta t$ (Figura 66). Si consideri un volume di controllo V_c , coincidente al tempo t con il volume materiale $V_m(t)$, le cui forma e posizione possano variare nel tempo con legge nota. Si può quindi scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{V_m} \mathcal{G} dV_m &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_m(t+\Delta t)} \mathcal{G}(t+\Delta t) dV_m - \int_{V_m(t)} \mathcal{G}(t) dV_m}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_m(t+\Delta t)} \mathcal{G}(t+\Delta t) dV_m - \int_{V_c(t)} \mathcal{G}(t) dV_c}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_m(t+\Delta t)} \mathcal{G}(t+\Delta t) dV_m - \int_{V_c(t+\Delta t)} \mathcal{G}(t+\Delta t) dV_c + \int_{V_c(t+\Delta t)} \mathcal{G}(t+\Delta t) dV_c - \int_{V_c(t)} \mathcal{G}(t) dV_c}{\Delta t} \end{aligned}$$

Il limite del rapporto incrementale formato dal terzo e quarto termine a ultimo membro rappresenta la derivata temporale della grandezza $\mathcal{G}$ riferita alla variazione del volume di controllo, calcolata da un osservatore che segue il movimento di tutti i suoi punti (*non associati a particelle*). Questo limite verrà denotato mediante il simbolo di derivata ordinaria, non potendo essere definito né come derivata euleriana né come derivata lagrangiana:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \mathcal{G} dV_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_c(t+\Delta t)} \mathcal{G}(t+\Delta t) dV_c - \int_{V_c(t)} \mathcal{G}(t) dV_c}{\Delta t}$$

Il resto dell'espressione della derivata lagrangiana può scriversi come:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_m(t+\Delta t)} \mathcal{G}(t+\Delta t) dV_m - \int_{V_c(t+\Delta t)} \mathcal{G}(t+\Delta t) dV_m}{\Delta t} &= \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_m(t)} \mathcal{G}(t+\Delta t) dV_m + \int_{\Delta V_m(t)} \mathcal{G}(t+\Delta t) dV_m - \int_{V_c(t)} \mathcal{G}(t+\Delta t) dV_c - \int_{\Delta V_c(t)} \mathcal{G}(t+\Delta t) dV_c}{\Delta t} &= \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_m(t)} \mathcal{G}(t+\Delta t) dV_m - \int_{V_c(t)} \mathcal{G}(t+\Delta t) dV_c}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{S_m(t)} \mathcal{G}(t+\Delta t) \vec{u} \cdot \vec{n} \Delta t dS_m - \int_{S_c(t)} \mathcal{G}(t+\Delta t) \vec{v} \cdot \vec{n} \Delta t dS_c}{\Delta t} \end{aligned}$$

in cui $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono le velocità locali delle particelle e dei punti del volume di controllo sulla superficie di quest'ultimo al tempo t , $S_c(t)$.

Poiché $V_m(t) = V_c(t)$, il primo rapporto incrementale (e quindi anche il suo limite) è identicamente nullo, mentre il secondo limite si esprime con riferimento a un unico integrale esteso alla superficie del volume di controllo al tempo t , giacché è anche $S_m(t) = S_c(t)$:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{S_m(t)} \mathcal{G}(t+\Delta t) \vec{u} \cdot \vec{n} \Delta t dS_m - \int_{S_c(t)} \mathcal{G}(t+\Delta t) \vec{v} \cdot \vec{n} \Delta t dS_c}{\Delta t} = \int_{S_m(t)} \mathcal{G}(t) (\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{n} dS_c$$

Pertanto, si ottiene il flusso della grandezza $\mathcal{G}$ attraverso la superficie di controllo $S_c(t)$, calcolato con riferimento alla velocità della particella, misurata in un sistema di riferimento locale che si muove con la velocità (nota) del punto del volume di controllo (velocità relativa $\vec{u}_r = \vec{u} - \vec{v}$).

In definitiva si perviene alla seguente forma generale del *teorema del trasporto* (o di Reynolds):

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} \mathcal{G}(\vec{x}, t) dV_m = \frac{d}{dt} \int_{V_c} \mathcal{G} dV_c + \int_{S_c(t)} \mathcal{G}(t) \vec{u}_r \cdot \vec{n} dS_c . \quad (133)$$

Nel caso in cui il volume di controllo sia fisso ($V_c(t+\Delta t) = V_c(t) = V_c$, $\vec{v} \equiv 0$), si potrà scrivere:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} \mathcal{G}(\vec{x}, t) dV_m = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \mathcal{G} dV_c + \int_{S_c} \mathcal{G} \vec{u} \cdot \vec{n} dS_c = \int_{V_c} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} dV_c + \int_{S_c} \mathcal{G} \vec{u} \cdot \vec{n} dS_c , \quad (134)$$

in cui è stato introdotto il simbolo di derivata euleriana. Tale operatore può, inoltre, essere portato all'interno del segno di integrale, poiché il dominio di integrazione V_c non dipende dal tempo.

4.9 Principio di conservazione della massa. Equazioni di continuità.

Nel prosieguo ci si limiterà alla descrizione di moti di una singola specie fluida, la cui massa complessiva, così come quella di una qualunque sua porzione, costituente un volume materiale, si mantiene costante al trascorrere del tempo (*Principio di conservazione della massa*).

4.9.1 Equazione di continuità in forma globale

La conservazione della massa di un volume materiale V_m richiede che risulti identicamente nulla la sua derivata lagrangiana:

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{V_m} \rho dV = 0 .$$

Sulla base del teorema del trasporto riferito a un volume di controllo fisso, si può scrivere:

$$\int_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV_c + \int_{S_c} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS_c , \quad (135)$$

in cui gli integrali di volume e di superficie rappresentano rispettivamente la variazione nell'unità di tempo della massa contenuta nel volume di controllo e il flusso netto di massa uscente attraverso la superficie di contorno del volume di controllo: flusso uscente perché riferito alla normale esterna; netto perché risultante dalla somma di flussi elementari, in parte entranti – di segno negativo – e in parte uscenti – di segno positivo – a seconda dell'angolo formato dal vettore velocità e dalla normale (rispettivamente maggiore o minore di 180°) nei diversi punti della superficie S_c , come mostrato nel §4.7. La (135) rappresenta la forma globale dell'*equazione di continuità*.

Portando a secondo membro il flusso attraverso la superficie di controllo, il cambiamento di segno denoterebbe la quantità a secondo membro come flusso netto di massa entrante nel volume, perché riferibile alla normale interna $\vec{n}' = -\vec{n}$. Pertanto, l'equazione globale esprime un bilancio di massa elementare: il flusso di massa netta entrante nel volume di controllo (massa netta entrante nell'unità di tempo) uguaglia la variazione nell'unità di tempo della massa contenuta in esso.

Nel caso di moto stazionario ($\partial \rho / \partial t = 0$), risulta nullo, istante per istante, il flusso netto di massa attraverso la superficie di contorno del volume di controllo, essendo nullo l'integrale di volume.

Nel caso di fluido incomprimibile, isoterma e omogeneo ($\rho = \text{cost}$), per semplificazione della forma generale dell'equazione globale (135) si ottiene:

$$\int_{S_c} \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0 , \quad (136)$$

che esprime l'annullamento del flusso volumetrico netto istantaneo.

Applicando l'equazione (135) al volume di controllo definito dal tubo di flusso di superficie laterale S_f e sezioni di estremità Ω_1 e Ω_2 di Figura 65, il flusso attraverso la superficie di contorno S_c si scrive come somma dei flussi attraverso le tre superfici in cui S_c può essere scomposto:

$$\int_{S_c} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Omega_1} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS + \int_{\Omega_2} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_f} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS$$

in cui il terzo integrale a secondo membro è nullo per essere le velocità tangenti alla superficie laterale. Nel caso di moto stazionario l'equazione si riduce pertanto alla:

$$\int_{\Omega_1} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS + \int_{\Omega_2} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0 ,$$

col che risultano uguali in modulo e di segno opposto, istante per istante, i flussi di massa attraverso le sezioni di estremità. Di più, se il fluido è incomprimibile, isoterma e omogeneo, anche in caso di moto vario, risultano uguali in modulo i flussi volumetrici (portate) attraverso le due sezioni.

4.9.2 Equazione di continuità in forma locale

La forma locale dell'equazione di continuità si può esprimere in due modi: a partire dalla forma globale, attraverso una serie di passaggi formali, ovvero, come verrà fatto in questa sede, esprimendo il principio di conservazione della massa direttamente in forma euleriana, mediante il medesimo bilancio di massa rappresentato dalla forma globale, riferito a un volume di controllo, puramente geometrico, considerato fisso e invariabile al trascorrere del tempo e pertanto occupato, in generale, da porzioni di fluido sempre diverse.

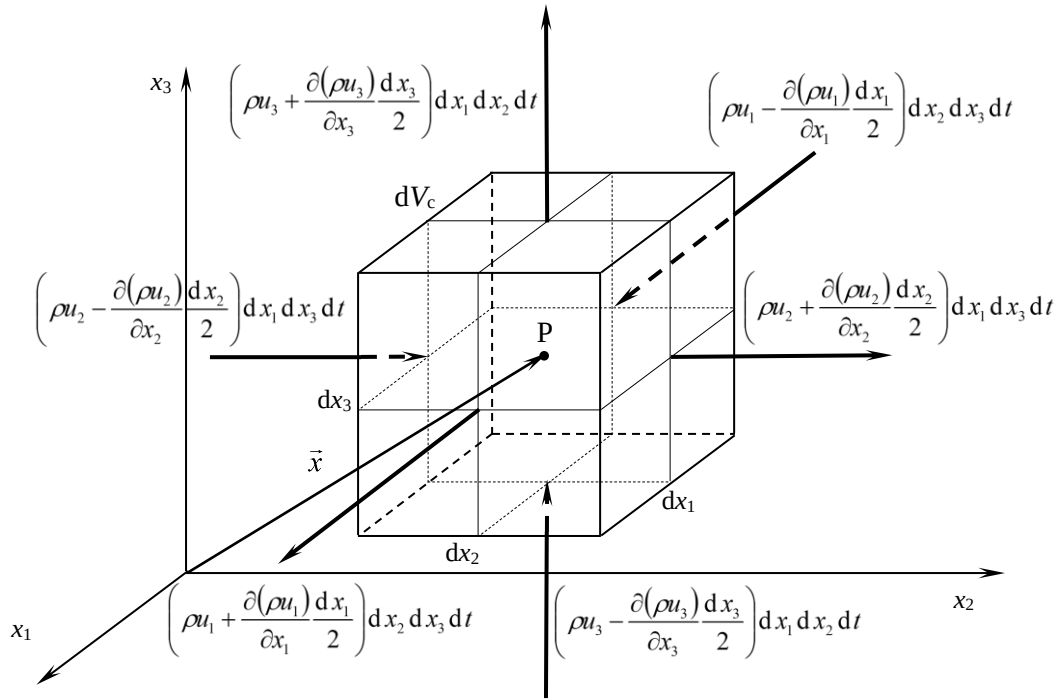


Figura 67. Schema di impostazione dell'equazione di continuità in forma locale.

Con riferimento al volume di controllo elementare rappresentato in Figura 67, si tratta di esprimere che la variazione della massa contenuta all'interno del volume di controllo in un intervallo di tempo elementare dt è pari alla massa netta entrante nel volume, nello stesso intervallo di tempo, attraverso la sua superficie di contorno costituita dalle sei superfici rettangolari parallele ai piani coordinati.

Come mostrato nel §4.7, ai fini della valutazione del flusso è rilevante la componente della velocità normale alla superficie considerata. Essendo le sei facce rettangolari del parallelepipedo normali ad assi coordinati, per ciascuna di esse il flusso di massa si esprime con riferimento alla componente della velocità lungo l'asse coordinato normale alla faccia. Ad esempio, il flusso di massa

elementare dQ_{m1} attraverso la superficie elementare dS_1 normale all'asse x_1 , sezione del volume di controllo con un piano contenente il baricentro P del volume di controllo, di coordinate x_1, x_2, x_3 (quindi, una superficie non coincidente con alcuna delle sei facce del parallelepipedo, ma parallela a due di esse), riferito alla faccia rivolta verso le x_1 crescenti, è dato da:

$$dQ_{m1} = \int_{dS_1} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS_1 = \rho \vec{u} \cdot \vec{b}_1 d x_2 d x_3 = \rho u_1 d x_2 d x_3 , \quad (137)$$

in cui ρ e u_1 sono rispettivamente la densità e la componente della velocità lungo l'asse x_1 nel punto P . Lo sviluppo dell'integrale è eseguito tenendo conto delle seguenti considerazioni: a) la superficie è infinitesima, per cui (a meno di termini infinitesimi) la funzione integranda può ritenersi costante sulla superficie dS_1 e l'integrabile può valutarsi come prodotto della funzione integranda per l'area della superficie; b) la normale esterna alla faccia di una superficie piana normale all'asse x_1 , rivolta nel senso delle x_1 crescenti è il versore dell'asse x_1 , $\vec{b}_1$; il prodotto scalare fra il vettore velocità e il versore dell'asse x_1 rappresenta la componente scalare della velocità sull'asse x_1 , u_1 ; d) la superficie è un rettangolo di area $dS_1 = dx_2 dx_3$.

In Figura 67 sono indicate le masse che attraversano nell'intervallo di tempo dt le sei superfici rettangolari del parallelepipedo con il relativo verso di attraversamento, rappresentato dalle frecce, assumendo, con scelta del tutto arbitraria e irrilevante sui risultati cui si perverrà, componenti scalari del vettore velocità tutte positive⁴⁴.

La massa entrante nell'intervallo di tempo dt all'interno del volume di controllo, attraverso la faccia del parallelepipedo normale all'asse x_1 posta alla coordinata $x_1 - dx_1/2$, si esprime sulla base dell'espressione (137), mediante uno sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine del flusso di massa per unità di superficie, ρu_1 , rispetto al valore che il termine assume nel punto P :

$$\left(\rho u_1 - \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2} \right) dx_2 dx_3 dt ,$$

con il segno meno corrispondente a uno spostamento $-dx_1/2$ ($dx_1/2$ nel verso della x_1 decrescente) a partire dal punto P .

Analogamente, nello stesso intervallo di tempo, attraverso la faccia parallela posta alla coordinata $x_1 + dx_1/2$ (spostamento $+dx_1/2$ rispetto a P) esce dal volume di controllo la massa:

$$\left(\rho u_1 + \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2} \right) dx_2 dx_3 dt .$$

La massa *netta entrante* nel volume di controllo è data dalla somma algebrica delle due, pari a:

$$-\frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 dt = -\frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} dV_c dt .$$

Analogamente si ragiona per le facce normali agli altri due assi coordinati.

La variazione nell'intervallo dt della massa m contenuta nel volume di controllo dV_c è data da:

$$\frac{\partial m}{\partial t} dt = \frac{\partial(\rho dV_c)}{\partial t} dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dV_c dt ,$$

essendo il volume di controllo fisso e invariabile nel tempo.

Il bilancio di massa complessivo sul volume di controllo si scrive pertanto, in notazione sintetica:

⁴⁴ Le frecce hanno quindi direzione e verso dei componenti (al maschile) del vettore velocità.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dV_c dt = - \left[\frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho u_3)}{\partial x_3} \right] dV_c dt = - \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} dV_c dt ,$$

da cui, semplificando e ordinando i termini, si ottiene l'equazione di continuità in forma locale o indefinita:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 , \quad (138)$$

in cui il secondo termine a primo membro costituisce la divergenza del vettore $\rho \vec{u}$. L'equazione di continuità si può quindi anche esprimere in notazione vettoriale come:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 . \quad (139)$$

Sviluppando la divergenza del prodotto $\rho \vec{u}$ e ricordando la regola di derivazione lagrangiana (120) si ottiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} ,$$

da cui la forma lagrangiana:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

che in notazione vettoriale si scrive:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 . \quad (140)$$

Nel caso particolare di fluido incompressibile e isoterma (per cui la densità non può variare per effetto di variazioni di temperatura), avendosi per la singola particella $D\rho/Dt = 0$ e non potendo essere nulla la densità del fluido si ottiene:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 , \quad (141)$$

la quale – si badi – vale anche nel caso di moto vario ($\partial \rho / \partial t \neq 0$) e fluido non omogeneo. A più forte ragione, la (141) vale nel caso di moto isocoro ($\rho = \text{cost}$).

Si osservi anche che, ripetendo il ragionamento sviluppato per impostare il bilancio di massa sul volume di controllo dV_c , la divergenza del vettore velocità rappresenta il flusso netto uscente dal volume di controllo, diviso per il volume⁴⁵. L'equazione (141) esprime pertanto che il flusso volumetrico netto attraverso la superficie di contorno del volume di controllo elementare – che, come si è più volte specificato, è da intendersi fisso nel tempo – deve essere nullo; pertanto, la somma dei volumi entranti in un dato intervallo di tempo deve essere pari alla somma dei volumi uscenti.

L'equazione (141) era stata anticipata nel §4.3 sulla base del significato della divergenza del vettore velocità quale velocità di variazione di volume specifica di un volume materiale elementare. Tale significato, basato su una descrizione lagrangiana della deformazione del volume materiale, è, come si vede, del tutto congruente con quello testé evidenziato dal bilancio sul volume di controllo, su base pertanto euleriana.

⁴⁵ Proprio questo significato è all'origine del termine "divergenza".

La forma globale dell'equazione di continuità (135) può anche dedursi integrando la forma euleriana dell'equazione indefinita di continuità (139) su un volume di controllo finito V_c . Applicando il teorema della divergenza (39), §1.2.4, si ha infatti:

$$\int_{V_c} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \right] dV = \int_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{V_c} \nabla \cdot (\rho \vec{u}) dV = \int_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{S_c} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0 .$$

Nel caso di fluido incomprimibile e isoterma ma non omogeneo, eseguendo l'integrazione sul volume di controllo della forma (141) dell'equazione di continuità, si otterrebbe ancora la forma globale (136), già mostrata valida per il caso più restrittivo di liquido a densità costante.

CAPITOLO QUINTO

5. EQUAZIONI FONDAMENTALI DELLA DINAMICA DEI FLUIDI

5.1 Generalità

L'idrodinamica studia il movimento dei fluidi in relazione alle cause che lo determinano. Come per il moto di un qualunque sistema meccanico, il moto dei fluidi si basa, oltre che sul principio di conservazione della massa utilizzato nell'idrocinematica, sui principi di *bilancio della quantità di moto* e di *bilancio del momento della quantità di moto*, espressi nel §1.3.5 rispettivamente dalle *equazioni cardinali del moto* (60) e (61) con riferimento a sistemi meccanici discreti, deducibili dalle leggi di Newton.

Nel caso dei sistemi continui, la quantità di moto di un volume elementare dV di massa $dm = \rho dV$ animato dalla velocità $\vec{u}$ è data da:

$$d\vec{q} = \rho \vec{u} dV .$$

La quantità di moto di un volume materiale V_m , come precedentemente definito al § 4.7, è quindi data da:

$$\vec{q} = \int_{V_m} \rho \vec{u} dV .$$

Il principio di bilancio della quantità di moto afferma che la derivata lagrangiana (variazione nell'unità di tempo) della quantità di moto di un volume materiale è pari alla risultante delle forze esterne applicate al volume. Distinguendo tali forze nella risultante delle forze di volume:

$$\vec{G} = \int_{V_m} \rho \vec{f}_m dV$$

in cui $\vec{f}_m$ è la forza agente sull'unità di massa, e nella risultante delle forze di superficie:

$$\vec{H} = \int_{S_m} \vec{\tau}_n dS ,$$

in cui S_m è la superficie di contorno del volume materiale e $\vec{\tau}_n$ lo sforzo agente sull'elemento di superficie dS di normale $\vec{n}$, l'espressione di tale principio assume la forma (*prima equazione cardinale del moto*, § 1.3.5, eq. (60)):

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} \rho \vec{u} dV = \int_{V_m} \rho \vec{f}_m dV + \int_{S_m} \vec{\tau}_n dS . \quad (142)$$

Analogamente, il principio di bilancio del momento della quantità di moto afferma che la derivata lagrangiana del momento della quantità di moto di un volume materiale valutato rispetto a un qualunque punto dello spazio uguaglia il momento risultante delle forze esterne (*seconda equazione cardinale del moto*, § 1.3.5, eq. (61)):

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} \vec{r} \times \rho \vec{u} dV = \int_{V_m} \vec{r} \times \rho \vec{f}_m dV + \int_{S_m} \vec{r} \times \vec{\tau}_n dS , \quad (143)$$

in cui $\vec{r}$ è il raggio vettore congiungente il polo rispetto al quale si calcolano i momenti e il punto generico del volume materiale o della sua superficie di contorno (vedi Figura 68).

Tali due principi fondamentali verranno utilizzati dapprima per dedurre le caratteristiche dello stato di sforzo in un punto nel caso generale di fluido in movimento, quindi per dedurre le equazioni che, più specificamente, governano il moto di una massa fluida, con particolare riferimento al caso dei fluidi newtoniani.

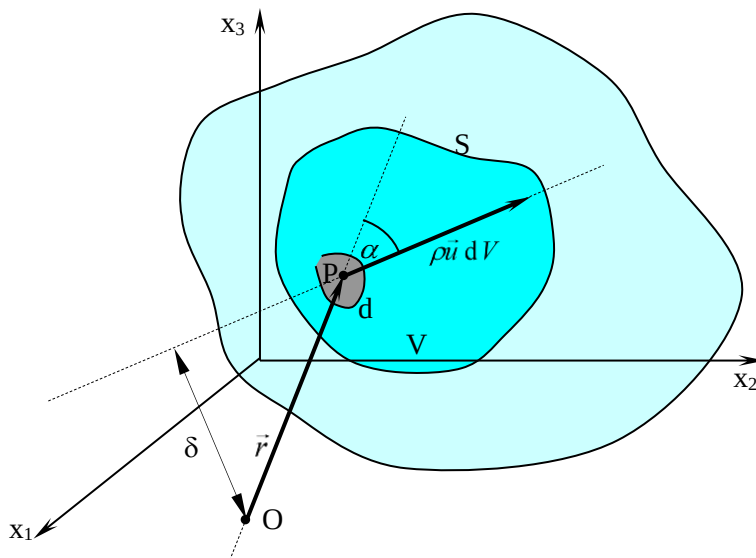


Figura 68. Schema di calcolo del momento della quantità di moto di un volume materiale.

5.2 Stato di sforzo in un punto. Teorema di Cauchy.

Nei capitoli precedenti si è visto come, in generale, lo stato di sforzo in un punto consista di ∞^2 valori di tensione, $\vec{\tau}_n$, associati a tutte le possibili giaciture di superfici elementari contenenti il punto in esame. Inoltre, nel caso idrostatico, si è mostrato come lo stato di sforzo assuma caratteri di particolare semplicità, essendo costituito unicamente da una componente normale – la pressione – di valore indipendente dalla giacitura della superficie considerata: $\vec{\tau}_n = -p\vec{n}$.

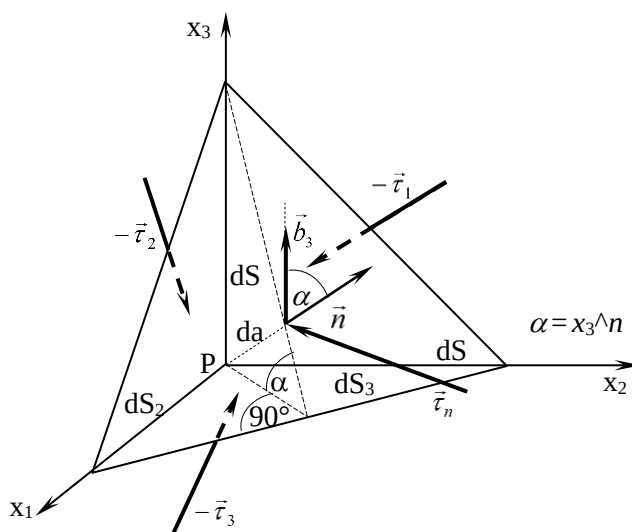


Figura 69. Tetraedro di Cauchy.

Nel caso generale di un fluido in movimento, la rappresentazione dello stato di sforzo in un punto si ottiene agevolmente applicando il principio di bilancio della quantità di moto a un volume elementare tetraedrico, avente tre facce parallele ai piani coordinati e la quarta faccia posta alla distanza da dal punto comune alle prime tre, che viene per comodità assunto come origine del sistema di riferimento (*tetraedro di Cauchy*, vedi Figura 69). Si consideri la distanza caratteristica da tendente a zero per una generica giacitura della quarta faccia del tetraedro, individuata dalla sua normale $\vec{n}$, mantenuta costante nel limite per $da \rightarrow 0$. Le superfici delle facce del tetraedro contenute nei piani coordinati, dS_i ($i = 1, 2, 3$), e la superficie della quarta faccia del solido, dS_n , sono pertanto infinitesimi di ordine 2 rispetto alla dimensione caratteristica da ($dS_i, dS_n = O(da^2)$), mentre il volume del tetraedro, $dV = 1/3 da dS_n$, risulta infinitesimo di ordine 3 ($dV = O(da^3)$).

Per la proprietà additiva degli integrali (23), l'integrale di superficie che compare nella (142) è pari alla somma dei corrispondenti integrali estesi alle quattro facce del tetraedro. Avendo quest'ultimo dimensioni infinitesime, tanto le forze di superficie quanto le forze di volume (ivi inclusa la forza d'inerzia legata alla derivata lagrangiana della quantità di moto) risultano, a meno di termini infinitesimi, uniformemente distribuite sui rispettivi domini di integrazione e, pertanto, applicate nei relativi baricentri. Gli integrali possono quindi esprimersi, più semplicemente, come prodotto delle funzioni integrande per i corrispondenti domini di integrazione.

Indicati con $\vec{\tau}_i$ gli sforzi agenti sulle facce delle superfici dS_i rivolte nel senso delle coordinate x_i crescenti, con $-\vec{\tau}_i$, per il principio di azione e reazione, gli sforzi agenti sul volume materiale attraverso le sue facce esterne e osservato che, in virtù del principio di conservazione della massa, la massa del volume materiale, ρdV , non varia nel tempo, la prima equazione cardinale del moto, eq. (142), può riscriversi nella forma:

$$\rho dV \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f}_m dV + \vec{\tau}_n dS_n - \vec{\tau}_i dS_i ,$$

nella quale la regola della sommatoria si applica ai termini delle forze di superficie legate alle superfici dS_i , in quanto i costituisce un pedice variabile, ma non al termine associato alla quarta faccia, il pedice n essendo identificativo di una fissata, ancorché generica, direzione.

Essendo la densità e l'accelerazione della particella e la forza di massa agente su di essa quantità finite nel limite per $da \rightarrow 0$, i termini proporzionali al volume dV risultano essi stessi infinitesimi di ordine superiore rispetto ai termini proporzionali alle aree delle quattro facce del tetraedro, dS_i e dS_n e pertanto trascurabili rispetto a questi ultimi. In definitiva, al limite per $da \rightarrow 0$ devono farsi equilibrio le sole forze di superficie:

$$\vec{\tau}_n dS_n - \vec{\tau}_i dS_i = 0$$

e lo sforzo agente sulla faccia di normale $\vec{n}$ può quindi esprimersi come:

$$\vec{\tau}_n = \frac{dS_i}{dS_n} \vec{\tau}_i .$$

L'angolo fra due piani è dato dall'angolo fra le due rette sezioni dei due piani con un terzo piano perpendicolare a entrambi, indicate in tratteggio in Figura 69 con riferimento alle facce S_n e S_3 e a un terzo piano appartenente alla stella di piani avente per asse l'asse coordinato x_3 . L'angolo fra i piani contenenti le facce dS_n e dS_i è inoltre uguale all'angolo $(x_i \wedge n)$ fra le rispettive normali, $\vec{n}$ e $\vec{b}_i$. La generica superficie dS_i è pertanto esprimibile come $dS_i = dS_n \cos(x_i \wedge n) = dS_n n_i$, avendo utilizzato il simbolo n_i per indicare i coseni direttori quali componenti della normale.

Lo sforzo agente sulla faccia di normale $\vec{n}$ è quindi esprimibile come:

$$\vec{\tau}_n = \cos(x_i \wedge n) \vec{\tau}_i = n_i \vec{\tau}_i , \quad (144)$$

costituente l'espressione del *Teorema di Cauchy*.

Come richiamato al §1.2.3, tale relazione denota la natura tensoriale dello stato di sforzo in un punto. La relazione (144) è di importanza fondamentale in quanto consente di conoscere lo sforzo agente su una superficie elementare passante per un dato punto avente una qualunque delle ∞^2 giaciture possibili, noti che siano i valori dello sforzo relativo alle tre giaciture dei piani coordinati. Come già si è avuto modo rilevare, in quanto esposto la scelta del sistema di riferimento è del tutto arbitraria; pertanto, lo stato di sforzo in un punto è pienamente conosciuto quando si conoscano gli sforzi corrispondenti a tre giaciture mutuamente ortogonali qualunque. Tali sforzi costituiscono le componenti vettoriali del *tensore degli sforzi* , che verrà indicato con il simbolo $\underline{\underline{\tau}}$ ⁴⁶.

Ai fini dello sviluppo del discorso, si adotti d'ora in avanti il simbolo j , in luogo di i , per il pedice identificativo della normale al piano considerato e dello sforzo agente su di esso⁴⁷:

$$\vec{\tau}_n = \cos(x_j \wedge n) \vec{\tau}_j = n_j \vec{\tau}_j .$$

Volendo conoscere le componenti scalari dello sforzo agente sulla faccia di normale $\vec{n}$, occorre proiettare lo sforzo $\vec{\tau}_n$ nelle tre direzioni, mediante prodotto scalare con i versori degli assi. Detta τ_{ij} la componente lungo l'asse x_i dello sforzo agente sulla faccia (interna) del tetraedro normale all'asse x_j , si ha quindi $\tau_{ij} = \vec{\tau}_j \cdot \vec{b}_i$. Le componenti scalari dello sforzo $\vec{\tau}_n$ si ottengono pertanto dalla:

$$\tau_{in} = \vec{\tau}_n \cdot \vec{b}_i = n_j \vec{\tau}_j \cdot \vec{b}_i = \tau_{ij} n_j , \quad (145)$$

la quale rappresenta in forma scalare (e contratta mediante la regola della sommatoria) il risultato del seguente prodotto matrice per vettore (vedi §1.2.3):

$$\begin{pmatrix} \tau_{1n} \\ \tau_{2n} \\ \tau_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11}n_1 + \tau_{12}n_2 + \tau_{13}n_3 \\ \tau_{21}n_1 + \tau_{22}n_2 + \tau_{23}n_3 \\ \tau_{31}n_1 + \tau_{32}n_2 + \tau_{33}n_3 \end{pmatrix} ,$$

ove la matrice quadrata a secondo membro è associata al tensore $\underline{\underline{\tau}}$ e ne costituisce la rappresentazione in termini delle sue nove componenti scalari, le quali lo identificano compiutamente. I vettori colonna estraibili da tale matrice corrispondono alle componenti vettoriali del tensore, $\vec{\tau}_j$. La stessa operazione si esprime, nella notazione vettoriale:

$$\vec{\tau}_n = \underline{\underline{\tau}} \vec{n} , \quad (146)$$

da scrivere senza alcun segno di operazione fra i termini a secondo membro.

Oltre al già menzionato importante significato legato alla completa conoscibilità dello stato di sforzo in un punto sulla base della conoscenza di tre soli valori, la relazione (146) risulta utile nella deduzione di equazioni esprimenti il principio di bilancio della quantità di moto in forma integrale.

Nel caso idrostatico, l'analisi condotta nel §3.2 mediante applicazione della prima equazione cardinale della statica a un prisma elementare aveva consentito di verificare che lo stato di sforzo è isotropo, caratterizzato cioè da un valore univoco della componente normale indipendente dalla giacitura considerata, cui era stato attribuito il nome di pressione, p . Introducendo il tensore (e

⁴⁶ Con l'unica differenza costituita dalla presenza del termine inerziale nella prima equazione cardinale del moto, il procedimento seguito è del tutto analogo a quello che, riferito alla prima equazione cardinale della statica, conduce nella Scienza delle Costruzioni al medesimo risultato.

⁴⁷ La precisazione è fatta per maggiore chiarezza. Si ricorda tuttavia come l'uso di un simbolo piuttosto che un altro per un pedice, come pure il cambio di tale simbolo nel corso degli sviluppi non debba costituire motivo di confusione, dovendosi prestare attenzione unicamente al fatto che un pedice sia ripetuto (nel qual caso si applica la regola della sommatoria) o meno (nel qual caso esso si intende rappresentare un valore generico e può pertanto assumerne uno particolare – 1, 2 o 3 – per volta).

corrispondente matrice associata) identità, $\underline{I}$ (§1.2.3), di componenti date dal *delta di Kronecker*, δ_{ij} ($\delta_{ij} = 1$ per $i = j$; $\delta_{ij} = 0$ $i \neq j$), per le convenzioni assunte (normale esterna e pressioni positive di compressione) il relativo tensore degli sforzi può essere rappresentato come:

$$\underline{\tau} = -p\underline{I} \equiv \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}, \quad (147)$$

di componenti:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij},$$

da cui, applicando la relazione (146), si ritrova l'espressione (82) dello stato di sforzo idrostatico.

Nel caso ideale di un fluido privo di viscosità (*fluido ideale o perfetto*⁴⁸), per il quale risultano pertanto identicamente nulli gli sforzi tangenziali (§2.5.1), l'applicazione del principio di bilancio della quantità di moto (142) allo stesso prisma elementare considerato nel § 3.2 per l'analisi dello stato di sforzo in condizioni idrostatiche – per il quale, ancora, le forze di volume (comprendenti questa volta anche la forza d'inerzia) possono trascurarsi rispetto alle forze di superficie – conduce alle medesime condizioni di equilibrio delle sole forze di superficie e, quindi, alle medesime conclusioni: anche nel caso di un fluido ideale in movimento, lo stato di sforzo è isotropo, caratterizzato da un valore univoco di pressione, indipendente dalla giacitura considerata.

Nel caso del moto più generale possibile di un fluido reale, le tre componenti normali del tensore degli sforzi, corrispondenti agli elementi della diagonale della matrice associata, hanno invece, in generale, valori differenti.

5.3 Simmetria del tensore degli sforzi.

La rappresentazione dello stato di sforzo in un punto è suscettibile di ulteriore semplificazione mediante applicazione del principio di bilancio del momento della quantità di moto.

Si consideri il parallelepipedo di lati infinitesimi dx_1 , dx_2 e dx_3 riportato in Figura 70 e i componenti degli sforzi agenti sulla sua superficie di contorno, i cui moduli sono pure indicati in figura. Con riferimento a tale volume, si scriva la seconda equazione cardinale del moto (143), facendo tendere a zero le dimensioni del parallelepipedo mantenendone invariati i rapporti $dx_1 : dx_2 : dx_3$. Analogamente a quanto osservato nella deduzione del teorema di Cauchy, i termini definiti come integrali di volume (momenti risultanti delle forze d'inerzia e delle forze di massa) risultano infinitesimi di ordine superiore rispetto al termine definito come integrale di superficie (momento risultante delle forze di superficie). Deve pertanto risultare nullo il momento risultante delle sole forze di superficie:

$$\int_{S_m} \vec{r} \times \vec{\tau}_n dS = 0.$$

Tale espressione vettoriale equivale a tre equazioni scalari esprimenti l'annullamento delle tre componenti del vettore momento delle forze di superficie. Ricordando che la scelta del polo per il calcolo dei momenti è del tutto arbitraria, e che, al limite per $dx_i \rightarrow 0$, a meno di termini infinitesimi i componenti di sforzo sono distribuiti uniformemente sulle facce del prisma e le rette d'azione delle corrispondenti forze elementari passano quindi per il baricentro della faccia su cui agiscono, assumendo come polo O per il calcolo dei momenti il baricentro del parallelepipedo, ciascuno dei 18

⁴⁸ La condizione è ideale sia nel senso di non rigorosamente verificabile in natura che nel senso di condizione desiderabile, in quanto da essa discende la conservazione dell'energia meccanica totale come conseguenza dell'assenza di dissipazioni interne al fluido, come si avrà modo di vedere nel prosieguo.

componenti delle forze elementari agenti sulle facce del parallelepipedo ha momento o nullo (è il caso dei componenti assiali, la cui retta d'azione passa per il polo O) o parallelo a uno dei tre assi coordinati (è il caso dei componenti tangenziali).

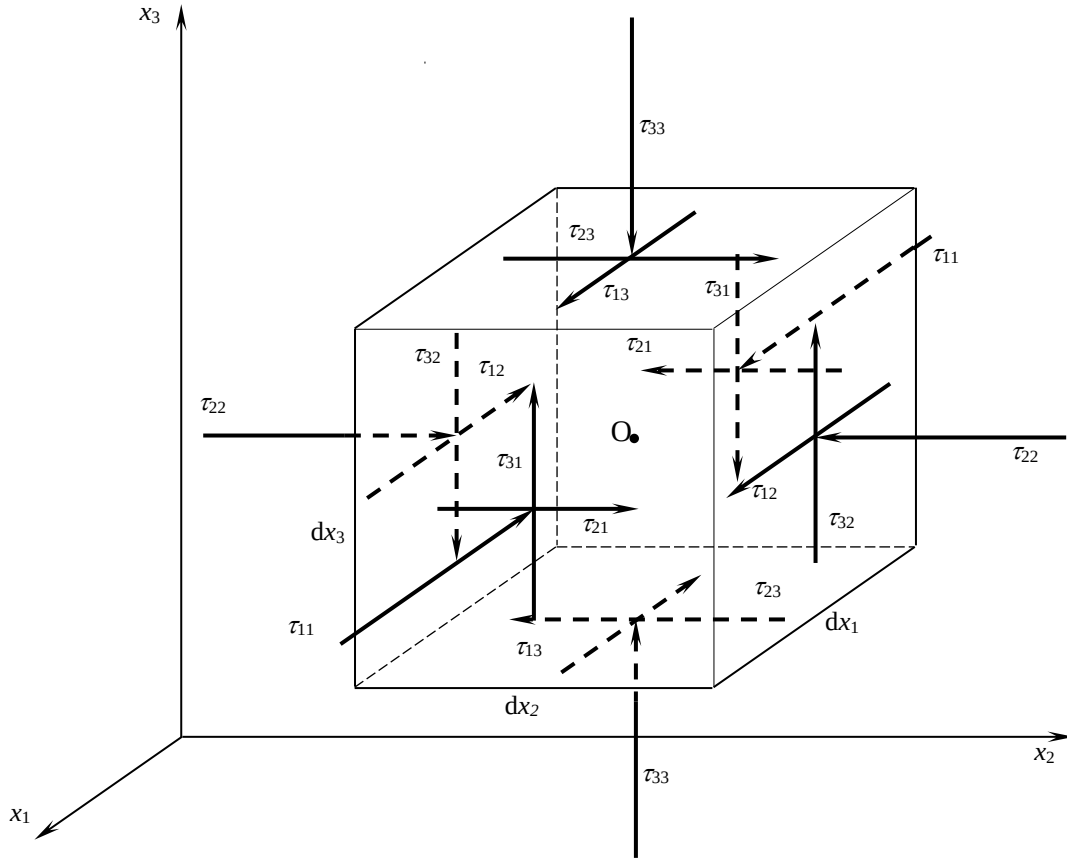


Figura 70. Parallelepipedo elementare di fluido e componenti di sforzo agenti sulla sua superficie di contorno.

Esprimendo l'annullamento di uno qualunque dei tre componenti del momento risultante senza introdurre alcuna ipotesi specifica relativamente alla direzione scelta, le conclusioni che verranno tratte saranno valide anche per le altre due direzioni coordinate.

I componenti delle forze agenti sulle facce del parallelepipedo che generano momenti diretti come l'asse x_1 sono i componenti tangenziali contenuti su un piano parallelo al piano coordinato $x_2 x_3$ (normale a x_1), passante per il polo O , di moduli $\tau_{23} dx_1 dx_2$ e $\tau_{32} dx_1 dx_3$. Per il principio di azione e reazione, a meno di termini infinitesimi, su facce parallele del parallelepipedo, in quanto poste a distanza infinitesima, agiranno sforzi uguali e contrari⁴⁹. Le forze corrispondenti di moduli $\tau_{23} dx_1 dx_2$ e $\tau_{32} dx_1 dx_3$ costituiscono pertanto coppie aventi rispettivamente bracci dx_3 e dx_2 (vedi § 1.2.2 e 1.3.4.2). Assumendo positivi i momenti corrispondenti a una rotazione antioraria delle forze (vettore momento rivolto concordemente all'asse x_1), l'annullamento del componente del momento risultante diretto come l'asse x_1 si scrive:

$$\tau_{32} dx_1 dx_3 \cdot dx_2 - \tau_{23} dx_1 dx_2 \cdot dx_3 = 0 ,$$

da cui, semplificando il termine comune costituito dal volume del parallelepipedo, $dx_1 dx_2 dx_3$:

⁴⁹ I termini infinitesimi per i quali gli sforzi agenti su facce parallele differiscono sono desumibili da uno sviluppo in serie arrestato al primo ordine. È facile mostrare che il contributo al momento risultante di coppie di tali termini infinitesimi relative a componenti di sforzi corrispondenti è rigorosamente nullo.

$$\tau_{32} = \tau_{23} .$$

Ripetendo lo stesso ragionamento per i componenti del momento risultante paralleli agli assi x_2 e x_3 , si perviene alla conclusione di carattere generale:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} , \quad (148)$$

la quale esprime la simmetria del tensore delle tensioni. Conseguentemente, le componenti indipendenti incognite del tensore degli sforzi si riducono da nove a sei. Un altro aspetto importante del risultato ottenuto è che la considerazione della simmetria del tensore delle tensioni implica automaticamente il soddisfacimento del principio di bilancio del momento della quantità di moto, che non è quindi necessario esprimere esplicitamente nell'analisi dei fenomeni di moto.

5.4 Equazione indefinita del moto.

L'applicazione del principio di bilancio della quantità di moto, equazione (142), al volume materiale parallelepipedo elementare riportato in Figura 71, consente di dedurre una equazione in forma locale detta *equazione indefinita del moto*.

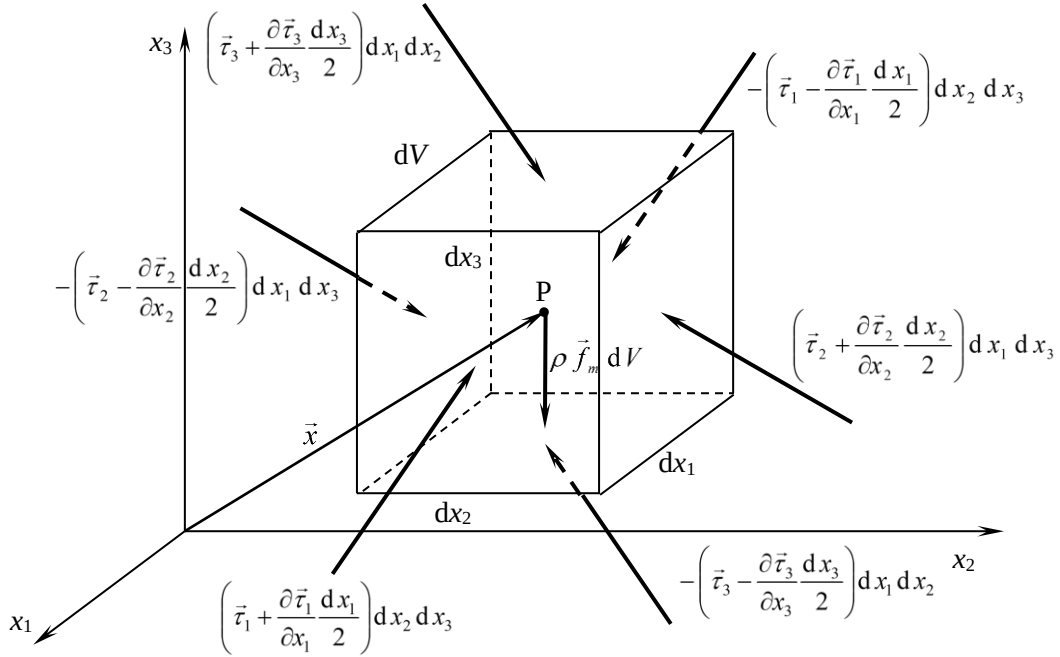


Figura 71. Schema di impostazione dell'equazione indefinita del moto.

Analogamente al caso della derivazione del teorema di Cauchy, §5.2, le dimensioni infinitesime del volume materiale e la conseguente costanza, a meno di termini infinitesimi, delle forze di massa e del termine inerziale a primo membro della (142) entro esso, unitamente al principio di conservazione della massa, consentono di esprimere il principio di bilancio della quantità di moto nella forma

$$\rho dV \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f}_m dV + d\vec{I} , \quad (149)$$

in cui l'ultimo termine rappresenta il risultante delle forze di superficie. Il procedimento differisce, a questo punto, da quello che ha condotto alla formulazione del teorema di Cauchy, per il fatto di avere considerato un volume materiale di forma parallelepipeda, anziché tetraedrica. Esprimendo gli sforzi

agenti sulle facce del volume mediante sviluppo in serie rispetto ai corrispondenti valori esistenti nel baricentro del volume, P , individuato dal suo vettore posizione $\vec{x}$ – in modo del tutto analogo a quanto fatto nella derivazione dell'equazione indefinita dell'idrostatica – si ottiene la seguente espressione del risultante delle forze di superficie:

$$\begin{aligned} d\vec{H} = & -\left(\bar{\tau}_1 - \frac{\partial \bar{\tau}_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2}\right) dx_2 dx_3 + \left(\bar{\tau}_1 + \frac{\partial \bar{\tau}_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2}\right) dx_2 dx_3 + \\ & -\left(\bar{\tau}_2 - \frac{\partial \bar{\tau}_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{2}\right) dx_1 dx_3 + \left(\bar{\tau}_2 + \frac{\partial \bar{\tau}_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{2}\right) dx_1 dx_3 + \\ & -\left(\bar{\tau}_3 - \frac{\partial \bar{\tau}_3}{\partial x_3} \frac{dx_3}{2}\right) dx_1 dx_2 + \left(\bar{\tau}_3 + \frac{\partial \bar{\tau}_3}{\partial x_3} \frac{dx_3}{2}\right) dx_1 dx_2 = \\ & \left(\frac{\partial \bar{\tau}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{\tau}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{\tau}_3}{\partial x_3}\right) dx_1 dx_2 dx_3 = (\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}) dV \end{aligned} \quad (150)$$

in cui è stato introdotto il vettore divergenza del tensore degli sforzi⁵⁰ (vedi §1.2.4):

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} = \frac{\partial \bar{\tau}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{\tau}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{\tau}_3}{\partial x_3} ,$$

indicato con la medesima notazione utilizzata per la divergenza di un vettore.

Inserendo l'espressione del risultante delle forze di superficie nella (149) e semplificando il volume del parallelepipedo elementare, si perviene alla cercata equazione indefinita, talora identificata anche con il nome di *equazione di Cauchy*:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f}_m + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} , \quad (151)$$

esprimibile nella notazione per componenti:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_{mi} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} . \quad (152)$$

5.5 Legge costitutiva dei fluidi newtoniani.

Allo stato degli sviluppi fin qui conseguiti, il bilancio fra funzioni scalari incognite descrittive del moto di un fluido ed equazioni utilizzabili per la loro determinazione si riassume come segue:

Incognite		N°	Equazioni		N°
ρ	Densità	1	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0$	Eq. di continuità	1
u_i	Velocità	3	$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_{mi} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$	Eq. del moto	3
τ_{ij}	Sforzi (linearmente indipendenti)	6			
Totale		10	Totale		4

⁵⁰ Si ricorda che, in generale, l'operatore divergenza applicato ad un tensore (in senso lato, §1.2.3) fornisce un tensore di ordine inferiore, mentre l'operatore gradiente fornisce un tensore di ordine superiore.

Avendosi dieci incognite e quattro equazioni, la possibilità di soluzione del problema rimane legata alla esistenza di ulteriori sei relazioni fra le variabili incognite.

Nel §2.5 si è trattato delle caratteristiche reologiche dei fluidi con riferimento all'esperimento, in certa misura ideale, descritto nel §2.2, volto a mettere in luce il legame fra lo sforzo tangenziale agente sulle superfici contenenti il vettore velocità e la velocità di deformazione di volumi materiali individuabili all'interno della massa fluida in movimento. Su tale base, il comportamento reologico dei vari tipi di fluidi è stato ammesso rappresentabile in termini delle proprietà del coefficiente di viscosità dinamica μ , definito dalla:

$$\tau = \mu \frac{d\theta}{dt} , \quad (74)$$

nella quale la derivata temporale dell'angolo θ rappresenta la velocità di deformazione angolare dell'elemento materiale considerato. In particolare, con riferimento alla (74) sono stati definiti newtoniani quei fluidi a comportamento indipendente dal tempo nei quali, inoltre, il coefficiente di viscosità non dipende dallo sforzo tangenziale e risulta pertanto costante per fissati valori di pressione e di temperatura. Sebbene tale modalità di rappresentazione delle proprietà reologiche risulti efficace ai fini della caratterizzazione del comportamento dei vari tipi di fluidi (newtoniani e non newtoniani), la relazione (74) è pur tuttavia rappresentativa di un tipo di moto alquanto particolare: piano, unidirezionale e caratterizzato dall'assenza di variazioni volumetriche del fluido. Anche volendo limitare il discorso, come senz'altro verrà fatto, al caso dei fluidi newtoniani, il legame fra lo stato di sforzo e le caratteristiche di un campo di moto più generale (detto *legame* o *legge costitutiva*) non può essere ricompreso in una formula della semplicità della (74), dovendo rappresentare le sei componenti di sforzo indipendenti del tensore $\bar{\tau}$ e l'insieme dei gradi di libertà che concorrono alle modalità di deformazione di un volume materiale nelle tre dimensioni dello spazio, illustrate nel §4.5. Rinunciando senz'altro a una trattazione più generale del problema della determinazione del legame costitutivo di un fluido newtoniano, per la quale il lettore interessato è rimandato ai riferimenti indicati in nota⁵¹, si intende qui presentare, in forma anche in parte euristica, e avvalendosi delle considerazioni presentate nel §2.5, una giustificazione della forma che tale legame costitutivo assume nel caso di un fluido newtoniano comprimibile. Si conserva l'ipotesi di processo isotermo, necessaria all'uniformità della viscosità nella massa fluida.

Essenzialmente, un fluido newtoniano è caratterizzato da un legame fra sforzi e velocità di deformazione lineare, omogeneo (identico in tutti i punti del fluido), isotropo (il cui comportamento sia il medesimo lungo tutte le direzioni dello spazio) e indipendente dal particolare sistema di riferimento adottato. Una ulteriore condizione che viene richiesta è che, nel caso idrostatico, il legame costitutivo si riduca alla forma sferica⁵² (82) o (147), caratterizzata da un valore univoco di sforzo: la pressione p . Si noti come tale ultima proprietà sia facilmente deducibile, come mostrato nel §3.2, sulla base della sola ipotesi che, in condizioni di quiete, risultino nulli gli sforzi tangenziali – piuttosto naturale sulla base della nozione elementare di fluido comunemente posseduta, prima ancora che della conoscenza delle esperienze descritte nel §2.5. Nel §5.2 si è anche osservato come tale stato di sforzo sia sempre proprio di un fluido ideale, anche quando esso sia in movimento.

⁵¹ Trattazioni più complete del legame costitutivo di un fluido newtoniano si trovano nel Marchi-Rubatta, nel Cenedese e nelle Dispense di Idraulica – C.A. Fassò. Tali trattazioni conducono a stabilire l'influenza di *due* coefficienti di viscosità. Tuttavia, nel caso degli aeriformi, nei quali, sperimentalmente, la velocità di variazione volumetrica è stata accertata indipendente dalla viscosità, il legame costitutivo dipende dal solo coefficiente di viscosità μ fin qui considerato. Alla medesima conclusione si perviene per i liquidi, giacché per essi, in quanto praticamente incompressibili, la velocità di variazione volumetrica, e quindi il suo contributo allo stato di sforzo, risultano trascurabili. Tali considerazioni costituiscono solide giustificazioni della validità a scopi tecnici della caratterizzazione delle proprietà reologiche dei fluidi mediante l'equazione (74).

⁵² Lo stato di sforzo sferico è detto anche "isotropo". In questo caso, l'attributo "isotropo" attiene alla invarianza del tensore per cambiamento di sistema di riferimento. L'isotropia del fluido attiene invece alla forma della *relazione* fra tensore delle tensioni e tensore delle velocità di deformazione.

Sulla base di tali considerazioni preliminari, lo stato di sforzo in un fluido in movimento, rappresentato dalla matrice delle nove componenti scalari del tensore $\underline{\underline{\tau}}$, può pensarsi come derivante dalla sovrapposizione di una parte statica e di una parte legata al movimento:

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{11} + p & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} + p & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} + p \end{pmatrix}. \quad (153)$$

Le rappresentazioni tensoriale e per componenti della decomposizione (153) sono rispettivamente:

$$\underline{\underline{\tau}} = -p\underline{\underline{I}} + (\underline{\underline{pI}} + \underline{\underline{\tau}})$$

e:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + (p\delta_{ij} + \tau_{ij})$$

Il tensore rappresentativo della parte dinamica dello stato di sforzo è detto *deviatore*. Sulla base di tale decomposizione, si ricercano due relazioni che consentano di esprimere componente statica e componente dinamica: la prima, in funzione delle variazioni volumetriche (quindi, della densità del fluido); la seconda, in funzione delle velocità di deformazione. Il deviatore differisce dal tensore $\underline{\underline{\tau}}$ soltanto nei termini diagonali, relativi a sforzi normali. Pertanto, un legame per i termini tangenziali del deviatore è valido anche per i termini tangenziali di $\underline{\underline{\tau}}$.

Limitando dapprima il discorso al caso di fluidi incompressibili (liquidi), per quanto riguarda le componenti tangenziali degli sforzi si può argomentare nel modo seguente. Per uno stato di moto quale quello descritto nel § 2.2, la (74) si scrive, più specificamente:

$$\tau_{12} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

Per la simmetria del tensore degli sforzi, deve aversi anche:

$$\tau_{21} = \tau_{12} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

Nel caso in cui esista anche una variabilità della componente di velocità u_2 in direzione x_1 , il conseguente sforzo $\mu \partial u_2 / \partial x_1$ dovrà aggiungersi alla componente τ_{21} per la linearità del legame e, per la simmetria del tensore degli sforzi, anche alla componente τ_{12} . La variabilità della componente u_3 , come pure la variabilità di u_1 e u_2 lungo la direzione x_3 non hanno invece influenza sulle componenti τ_{12} e τ_{21} , poiché relative a velocità di deformazione angolare riferite a rotazioni delle facce del parallelepipedo elementare attorno a un asse parallelo all'asse x_3 . Pertanto, per quanto riguarda le componenti tangenziali ($i \neq j$), il legame costitutivo di un liquido incompressibile e isoterma può scriversi:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Assumendo il medesimo legame lineare e isotropo anche per i termini assiali del deviatore, il legame costitutivo cercato può scriversi, in forma completa, come:

$$\tau_{ij} + p\delta_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

ovvero:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (154)$$

corrispondente alla forma tensoriale:

$$\underline{\underline{\tau}} = -p\underline{\underline{I}} + 2\mu\underline{\underline{D}}, \quad (155)$$

in cui $\underline{\underline{D}}$ è il tensore delle velocità di deformazione introdotto nel § 4.5.

Si osservi che, come richiesto, lo stato di sforzo si riduce a uno isotropo (sferico) per i casi di fluido in quiete ($\vec{u} \equiv 0$) o fluido ideale ($\mu=0$). Inoltre, la pressione costituisce una incognita aggiuntiva del problema rispetto al bilancio incognite-equazioni delineato in precedenza.

Per il caso trattato nel § 2.2, in cui il moto si svolge unicamente in direzione dell'asse x_1 , per la componente τ_{12} si ottiene, dalla (154):

$$\tau_{12} = -p\delta_{12} + \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right),$$

da cui, essendo $\delta_{12} = 0$ e $u_2 = 0$ ovunque, si perviene alla (74):

$$\tau_{12} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \mu \frac{d\theta}{dt},$$

in cui la seconda uguaglianza è stata dimostrata nel § 2.2.

Nel caso di un fluido comprimibile, occorre preventivamente operare una decomposizione del tensore velocità di deformazione, simile a quella operata sul tensore degli sforzi, allo scopo di separare la parte legata a variazioni volumetriche, di forma sferica, e la parte deviatoria rimanente, legata alla velocità di deformazione a volume costante. Ricordando dal §4.5 il significato della divergenza del vettore velocità (velocità di variazione volumetrica specifica) e di traccia (o invariante lineare) del tensore $\underline{\underline{D}}$, l'annunciata decomposizione può scriversi:

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{u} \underline{\underline{I}} + \left(\underline{\underline{D}} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{u} \underline{\underline{I}} \right).$$

Poiché la parte dinamica dello stato di sforzo è rappresentata dal deviatore $p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}$, il legame lineare fra stato di sforzo dinamico e velocità di deformazione si esprime, per un fluido newtoniano, come proporzionalità dei deviatori dei tensori $\underline{\underline{\tau}}$ e $\underline{\underline{D}}$:

$$\underline{\underline{\tau}} + p\underline{\underline{I}} = 2\mu \left(\underline{\underline{D}} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{u} \underline{\underline{I}} \right). \quad (156)$$

ovvero, nella forma per componenti:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \quad (157)$$

Nel caso di fluido incomprimibile si ritrova la (155).

La parte statica dello stato di sforzo, $-p\delta_{ij}$, è descritta da una equazione di stato, costituente un legame fra la pressione e altre variabili termodinamiche rilevanti nel caso specifico in esame (vedi § 2.4); in particolare, possiamo qui limitarci a considerare la densità e la temperatura:

$$F(p, \rho, T) = 0 .$$

Un noto esempio di equazione di stato è costituito, per gli aeriformi, dalla legge dei gas perfetti. Nel caso di un liquido – per definizione praticamente incompressibile – in condizioni isoterme, l'equazione si scrive nella forma più semplice possibile:

$$\rho = \text{cost} .$$

Il legame costitutivo (156) determina un'importante proprietà della pressione, che finora, come s'è detto, ha svolto il ruolo di mera incognita ausiliaria, introdotta per la congruenza del legame costitutivo con le condizioni idrostatiche o di fluido ideale. Tenendo presente che la traccia del deviatore del tensore velocità di deformazione è nulla per definizione, si ottiene:

$$p = -\frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\tau}) = -\frac{\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}}{3} = -\frac{\tau_{ii}}{3} , \quad (158)$$

Poiché la traccia di un tensore è invariante per cambiamento di sistema di riferimento, l'espressione (158) indica che la pressione costituisce una grandezza intrinsecamente rappresentativa della componente idrostatica dello stato di sforzo in un punto, perché non dipendente dal particolare sistema di riferimento adottato.

In forza della simmetria del tensore degli sforzi (e del tensore velocità di deformazione), la (156) equivale a sei equazioni scalari indipendenti relative alle sei componenti indipendenti del tensore. Con le sei equazioni (156), l'equazione di stato e l'introduzione della pressione come incognita aggiuntiva, il computo incognite scalari/equazioni si presenta ora in pareggio: undici equazioni (una equazione di continuità, tre equazioni del moto, sei equazioni indipendenti del legame costitutivo, una equazione di stato) per undici incognite (densità, pressione, tre componenti della velocità, sei componenti indipendenti del tensore degli sforzi). Il problema della determinazione del moto di una massa fluida è pertanto ora formalmente ben posto e risolubile.

5.6 Equazione di Navier-Stokes

Ancorché formalmente ammessa dalla disponibilità di tante equazioni quante sono le incognite, la soluzione del problema rappresentato dalla determinazione del moto di una massa fluida si presenta tuttavia estremamente complessa per via dell'elevato numero di incognite. Inoltre, se l'aspetto di interesse è costituito dal solo campo di velocità, la determinazione dello stato di sforzo costituisce unicamente una scomoda necessità imposta dalle relazioni intercorrenti con le componenti della velocità. È pertanto di notevole interesse, anche pratico, determinare una forma dell'equazione del moto che, al contrario della equazione indefinita (151), non contenga esplicitamente gli sforzi come incognite. Tale equazione si determina in maniera agevole sostituendo agli sforzi contenuti nell'equazione indefinita del moto le relative espressioni fornite dal legame costitutivo, per il caso di fluido isoterma e omogeneo ($\mu = \text{cost}$).

A tale scopo, conviene operare sulle forme scalari dell'equazione indefinita del moto, (152), e del legame costitutivo (157). Si ottiene in tal modo, per la generica (i -esima) componente della velocità:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_{mi} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \rho f_{mi} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[-p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] ,$$

il cui sviluppo si esegue osservando, innanzitutto, che, una volta sviluppata la derivata rispetto a x_j dei singoli termini contenuti entro parentesi quadre, il pedice j risulta ripetuto in tutti i termini e implica pertanto, sulla base della convenzione assunta per l'indicizzazione, la sommatoria delle

grandezze sui tre valori $j = 1, 2, 3$, conformemente al significato del termine $\partial \tau_{ij} / \partial x_j$ così come dedotto dal procedimento esposto nel § 5.4.

Esaminiamo separatamente i vari termini. Per uno qualunque dei tre valori del pedice i si ha:

$$\frac{\partial(p\delta_{ij})}{\partial x_j} = \frac{\partial(p\delta_{i1})}{\partial x_1} + \frac{\partial(p\delta_{i2})}{\partial x_2} + \frac{\partial(p\delta_{i3})}{\partial x_3}.$$

Qualunque sia il valore di i , l'unico dei tre delta di Kronecker non nulli e pari all'unità sarà, per definizione, quello per cui $j = i$. L'unica delle tre derivate non nulla sarà quindi quella fatta rispetto alla x_j con $j = i$: ossia, la derivata fatta rispetto a x_i della pressione, essendo il delta corrispondente unitario. Si ha quindi:

$$\frac{\partial(p\delta_{ij})}{\partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

Analogamente, si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) = \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (159)$$

Si ha poi:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j},$$

in cui il secondo termine a secondo membro, per l'invertibilità dell'ordine di derivazione di funzioni regolari (§ 1.1.4), può scriversi come:

$$\mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} = \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right),$$

identico, a meno di un fattore numerico, al termine a secondo membro della (159), giacché nell'espressione della divergenza, $\nabla \cdot \vec{u} = \partial u_m / \partial x_m$, è rilevante unicamente che il pedice sia ripetuto, ma non il particolare simbolo usato per il pedice.

Riordinando l'equazione indefinita del moto con gli sviluppi illustrati si ottiene quindi:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_{mi} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right), \quad (160)$$

costituente la forma per componenti della *equazione di Navier-Stokes*.

Ricordando la definizione di gradiente di uno scalare (38), §1.2.4, e introducendo il simbolo dell'*operatore di Laplace* (o *laplaciano*), $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$, inteso come divergenza di un gradiente, per esprimere il primo dei due termini viscosi⁵³, l'equazione di Navier-Stokes si scrive nella sua forma vettoriale come:

⁵³ Più precisamente, $\nabla^2 \vec{u} = \nabla \cdot (\nabla \vec{u})^T$, derivabile a partire dal tensore gradiente di velocità trasporto analogamente alla divergenza del tensore degli sforzi, $\nabla \cdot \vec{\tau}$. È del resto sufficiente osservare che il vettore che ha $\partial^2 u_i / \partial x_j \partial x_j$ (termine dell'equazione di Navier-Stokes) come componente scalare sull'asse x_i è dato da:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f}_m - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) , \quad (161)$$

ovvero, dividendo membro a membro per la densità e introducendo la viscosità cinematica ν :

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \vec{f}_m - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) .$$

Sviluppando la derivata lagrangiana, si ottengono la forma scalare:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_{mi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)$$

e la forma vettoriale:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\nabla \vec{u})^T \vec{u} = \vec{f}_m - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \vec{u})$$

Come casi particolari, si possono menzionare: il caso di un fluido incomprimibile:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \vec{f}_m - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} ;$$

il caso di un fluido soggetto unicamente alla forza peso fra le forze di massa, $\vec{f}_m = -g \nabla z$:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -g \nabla z - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) ;$$

il caso di un fluido pesante, incomprimibile, isoterma, omogeneo e ideale ($\mu = \nu = 0$), per il quale, in forza della condizione $\rho = \text{cost}$, si può scrivere (*equazione di Eulero*):

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -g \nabla \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) ,$$

Nel caso, abbastanza comune, di un fluido pesante, incomprimibile, isoterma e omogeneo, il moto può studiarsi risolvendo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{D\vec{u}}{Dt} = -g \nabla z - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 \end{cases} ,$$

corrispondente a sole quattro equazioni scalari per le quattro incognite u_i, p .

Si osservi che, quand'anche fosse di interesse conoscere lo stato di sforzo all'interno della massa liquida, l'uso dell'equazione di Navier-Stokes risulta comunque più efficiente rispetto alla risoluzione delle undici equazioni originarie del problema generale, potendosi dapprima risolvere un numero

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 (\partial^2 u_1 / \partial x_j \partial x_j) + \vec{b}_2 (\partial^2 u_2 / \partial x_j \partial x_j) + \vec{b}_3 (\partial^2 u_3 / \partial x_j \partial x_j) &= \partial^2 (u_1 \vec{b}_1) / \partial x_j \partial x_j + \partial^2 (u_2 \vec{b}_2) / \partial x_j \partial x_j + \partial^2 (u_3 \vec{b}_3) / \partial x_j \partial x_j = \\ &= \partial^2 (u_1 \vec{b}_1 + u_2 \vec{b}_2 + u_3 \vec{b}_3) / \partial x_j \partial x_j = \partial^2 \vec{u} / \partial x_j \partial x_j = \partial^2 \vec{u} / \partial x_1^2 + \partial^2 \vec{u} / \partial x_2^2 + \partial^2 \vec{u} / \partial x_3^2 \end{aligned}$$

ossia, da un termine simile, contenente il vettore velocità al posto della generica componente scalare u_i .

ridotto di equazioni non comprendenti gli sforzi viscosi, deducibili successivamente dal legame costitutivo (156) o (157) sulla base dei campi di velocità e di pressione determinati.

5.7 Equazione globale del moto

Con procedimento del tutto analogo a quello utilizzato nel §3.4 per derivare l'equazione globale dell'idrostatica, si può pervenire a una formulazione integrale del principio di bilancio della quantità di moto.

5.7.1 Forma generale

Una prima forma può dedursi integrando su un volume di controllo l'equazione indefinita del moto (151) o, per maggiore convenienza, la sua forma per componenti scalari (152), previo sviluppo della derivata lagrangiana della velocità mediante la relativa regola di derivazione (122):

$$\int_{V_c} \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dV = \int_{V_c} \left(\rho f_{mi} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) dV . \quad (162)$$

Tenendo presente l'equazione di continuità (138) e lo sviluppo (8) della derivata di un prodotto di due funzioni, la funzione integranda dell'integrale a primo membro si sviluppa come segue:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = \\ \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} &= \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Utilizzando le formule di Gauss, il corrispondente integrale di volume si sviluppa nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \int_{V_c} \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dV &= \int_{V_c} \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} dV + \int_{V_c} \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} dV = \\ \int_{V_c} \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} dV + \int_{S_c} \rho u_i u_j \cos(x_j \wedge n) dS &= \int_{V_c} \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} dV + \int_{S_c} \rho u_i (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS \end{aligned}$$

in cui il primo integrale contiene la derivata euleriana della generica (i -esima) componente della quantità di moto per unità di volume; il secondo termine è la corrispondente componente del flusso di quantità di moto attraverso la superficie di contorno del volume di controllo, S_c , equazione (131). In termini vettoriali, le due quantità sono date da:

$$\begin{aligned} \vec{I} &= \int_{V_c} \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} dV \\ \vec{M} &= \int_{S_c} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS \end{aligned}$$

Entrambe le grandezze sono di origine inerziale, perché derivanti dall'accelerazione lagrangiana presente nella (151). Esprimendo la variazione temporale della quantità di moto contenuta nel volume di controllo mediante una derivata euleriana, o locale, al termine $\vec{I}$ viene dato il nome di *inerzia locale*⁵⁴.

⁵⁴ Nel Citrini lo stesso simbolo è utilizzato per identificare la stessa grandezza cambiata di segno, ossia, più propriamente, una forza d'inerzia (vedi §1.3.5).

Utilizzando ancora le formule di Gauss e tenendo presente l'espressione (145) delle componenti dello sforzo in un punto in termini delle componenti del tensore degli sforzi, il secondo membro della (162) si sviluppa come segue:

$$\int_{V_c} \rho f_{mi} dV + \int_{V_c} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dV = \int_{V_c} \rho f_{mi} dV + \int_{S_c} \tau_{ij} \cos(x_j \wedge n) dS = \int_{V_c} \rho f_{mi} dV + \int_{S_c} \tau_{in} dS ,$$

di cui il primo integrale rappresenta la generica componente del risultante delle forze di massa; il secondo, la corrispondente componente del risultante delle forze esercitate sulla superficie di contorno del volume di controllo. In termini vettoriali, le due quantità sono date da:

$$\vec{G} = \int_{V_c} \rho \vec{f}_m dV$$

$$\vec{H} = \int_{S_c} \vec{\tau}_n dS$$

Nel caso le forze di massa siano date unicamente dalla forza peso, $f_m = -g\nabla z$, $\vec{G}$ non rappresenta altro che il peso del fluido contenuto nel volume di controllo.

L'equazione globale del moto, o dell'equilibrio dinamico, o del bilancio di quantità di moto, si scrive pertanto nella forma generale⁵⁵:

$$\vec{I} + \vec{M} = \vec{G} + \vec{H} . \quad (163)$$

Nel caso particolare di fluido in quiete, la (163) si riduce, com'era logico attendersi, all'equazione globale dell'idrostatica (89).

L'equazione globale del moto consente di determinare le spinte esercitate da fluidi in movimento in modo particolarmente efficiente, in quanto tipicamente non è richiesta, a tal fine, la determinazione della distribuzione degli sforzi sulla superficie premuta, sia essa piana o gobba, ma soltanto su superfici per le quali, come si vedrà nel prosieguo, la determinazione degli sforzi risulta del tutto agevole. Inoltre, come già osservato a proposito dell'equazione globale dell'idrostatica, la formulazione integrale rende le equazioni globali suscettibili di applicazione anche a casi caratterizzati da discontinuità della distribuzione delle grandezze.

5.7.2 Forma per un fluido viscoso

Una forma alternativa dell'equazione globale può ottenersi a partire dall'equazione di Navier-Stokes, in modo da distinguere, fra le forze di superficie, le componenti dovute alle forze di pressione e alle forze viscosi.

I termini di inerzia locale, flusso di quantità di moto e risultante delle forze di massa rimangono inalterati rispetto alle espressioni derivate per la forma (163) dell'equazione globale. Si tratta pertanto di sviluppare l'integrale di volume:

$$\int_{V_c} \left[-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \right] dV$$

facendo uso, ancora, delle formule di Gauss. Si ottiene così:

⁵⁵ La differente forma generale dell'equazione globale del moto riportata nel Citrini deriva, oltre che dalla differente definizione del termine di inerzia locale $\vec{I}$, dall'adozione della convenzione di normale interna. Anche nel Marchi-Rubatta il flusso di quantità di moto è ottenuto sotto la convenzione di normale interna.

$$\begin{aligned}
& \int_{V_c} \left[-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \right] dV = \\
& - \int_{V_c} \frac{\partial p}{\partial x_i} dV + \mu \int_{V_c} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dV + \frac{1}{3} \mu \int_{V_c} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) dV = \\
& - \int_{S_c} p \cos(x_i \wedge n) dS + \mu \int_{S_c} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cos(x_j \wedge n) dS + \frac{1}{3} \mu \int_{S_c} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \cos(x_i \wedge n) dS = \\
& - \int_{S_c} p n_i dS + \mu \int_{S_c} \frac{\partial u_i}{\partial n} dS + \frac{1}{3} \mu \int_{S_c} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} n_i dS
\end{aligned}$$

ove il primo integrale a ultimo membro rappresenta la componente lungo l'asse x_i del risultante delle sole forze di pressione; il secondo, dedotto sulla base dell'espressione (19) della derivata di una funzione lungo una direzione generica (in questo caso, la direzione della normale alla superficie di contorno), e il terzo, risultante di forze elementari localmente normali alla superficie di contorno, rappresentano il risultante delle forze di origine viscosa.

In termini vettoriali si ha quindi⁵⁶:

$$\int_{V_c} \left[-\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) \right] dV = \int_{S_c} -p \vec{n} dS + \mu \int_{S_c} \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} dS + \frac{1}{3} \mu \int_{S_c} (\nabla \cdot \vec{u}) \vec{n} dS = \vec{I}'_p + \vec{I}'_\mu + \vec{I}''_\mu.$$

La corrispondente forma dell'equazione globale si scrive pertanto:

$$\vec{I} + \vec{M} = \vec{G} + \vec{I}'_p + \vec{I}'_\mu + \vec{I}''_\mu, \quad (164)$$

il cui ultimo termine è nullo nel caso di fluido incompressibile e isoterma, per l'equazione di continuità (141).

5.8 Analisi locale del moto di una particella lungo la sua traiettoria

Le accelerazioni di una particella fluida lungo la propria traiettoria possono essere convenientemente analizzate con riferimento ai risultati ottenuti, nella Meccanica Razionale, per il moto di un punto materiale (richiamati al §1.3.3), al fine di ricavare importanti risultati di interesse specifico nello studio del moto dei fluidi.

Con riferimento allo schema di Figura 72, l'accelerazione di una particella in una data posizione P lungo la sua traiettoria risulta contenuta nel *piano osculatore del moto*, contenente la tangente alla traiettoria nel punto P e il centro di curvatura locale O della traiettoria, punto di intersezione delle normali alla traiettoria nei punti P e P' , nel limite per $\Delta t \rightarrow 0$ considerato per la definizione della velocità e dell'accelerazione nel punto (Figura 57 ed equazioni (118) e (121) rispettivamente). Il segmento OP di lunghezza r , normale alla tangente alla traiettoria, rappresenta il *raggio di curvatura locale*. Ai fini dell'analisi locale del moto è pertanto conveniente riferirsi alla *terna intrinseca al moto*, avente origine in P e formata, nell'ordine, da un primo asse s di versore $\vec{s}$ parallelo ed equiverso al vettore velocità (*tangente*, in quanto tangente alla traiettoria come osservato al §4.2), da un secondo asse n (versore $\vec{n}$) rivolto verso il centro di curvatura (*normale interna*) e da un terzo asse b perpendicolare ai primi due (*binormale*), costituente una terna destra (ovvero, tangente, normale e binormale sono posti rispettivamente come gli assi x_1 , x_2 e x_3 dei sistemi di riferimento

⁵⁶ Anche in questo caso, nel Citrini e nel Marchi-Rubatta i termini hanno segni opposti perché dedotti con riferimento alla normale interna anziché esterna.

considerati sinora). Per quanto detto, la tangente e la normale giacciono sul piano osculatore del moto; la normale e la binormale giacciono invece sul piano normale al vettore velocità nel punto P .

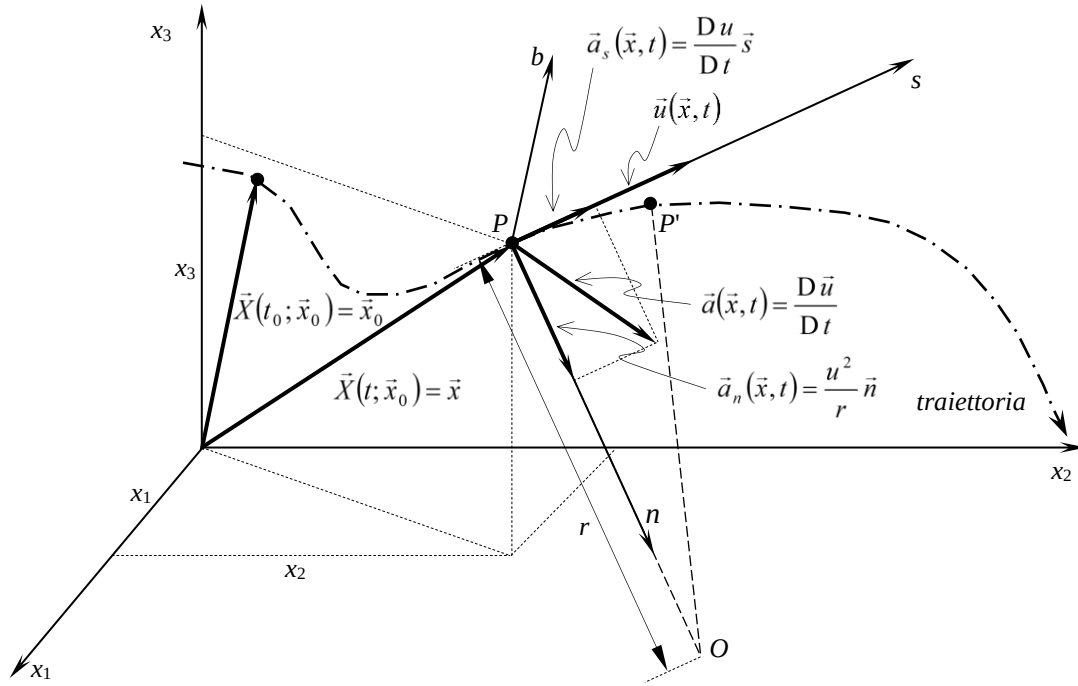


Figura 72. Terna intrinseca alla traiettoria di una particella in un punto.

Le componenti scalari dell'accelerazione lungo gli assi della terna intrinseca sono date da:

$$\begin{aligned} a_s &= \frac{Du}{Dt} \\ a_n &= \frac{u^2}{r} \quad , \\ a_b &= 0 \end{aligned} \quad (46)$$

in cui $u = |\vec{u}|$ è il modulo della velocità nel punto P e la componente dell'accelerazione lungo la normale interna è necessariamente sempre positiva. Conseguenza di ciò che il corrispondente componente vettoriale dell'accelerazione è sempre rivolto verso il centro di curvatura (*accelerazione centripeta*). Inoltre, trattandosi dell'analisi del moto di una particella di un mezzo continuo piuttosto che di un corpo isolato, la derivata temporale che compare nell'espressione della componente tangenziale è stata specificamente indicata come derivata lagrangiana.

Con riferimento al caso di un fluido pesante, incompressibile, isoterma e omogeneo, tali espressioni possono essere uguagliate alle corrispondenti espressioni ricavate proiettando sugli assi della terna intrinseca la forma che l'equazione di Navier-Stokes assume per tale tipo di fluido:

$$-\frac{1}{g} \frac{D\vec{u}}{Dt} = \nabla \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) - \frac{\nu}{g} \nabla^2 \vec{u} \quad .$$

Ricordando che le componenti del gradiente di una funzione scalare (nel caso specifico, la quota piezometrica $h = z + p/\gamma$) sono le derivate parziali della funzione rispetto agli assi corrispondenti (eq. (38), § 1.2.4), si ottiene:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{g} \frac{Du}{Dt} &= \frac{\partial h}{\partial s} - \frac{\nu}{g} (\nabla^2 \vec{u})_s \\
-\frac{1}{g} \frac{u^2}{r} &= \frac{\partial h}{\partial n} - \frac{\nu}{g} (\nabla^2 \vec{u})_n \quad . \\
0 &= \frac{\partial h}{\partial b} - \frac{\nu}{g} (\nabla^2 \vec{u})_b
\end{aligned} \tag{165}$$

5.8.1 Distribuzione della quota piezometrica nel piano normale alla traiettoria

Nel caso di un fluido ideale ($\nu=0$), per il quale si annullano i termini contenenti la viscosità cinematica, in forza della seconda delle equazioni (165), nel caso in cui la traiettoria abbia raggio di curvatura r abbastanza grande (e sia quindi piccola la sua curvatura), a uno spostamento elementare nella direzione della normale corrisponderebbe una variazione della quota piezometrica trascurabile rispetto alla posizione iniziale. A uno spostamento in direzione della binormale corrisponderebbe invece una variazione identicamente nulla della quota piezometrica. Pertanto, per uno spostamento elementare sul piano normale alla velocità locale, contenente la normale interna e la binormale, la corrispondente variazione di quota piezometrica, data dal differenziale:

$$dh = \frac{\partial h}{\partial n} dn + \frac{\partial h}{\partial b} db$$

risulterebbe pure trascurabile. In tale intorno piano del punto P si avrebbe pertanto una distribuzione della pressione che, essendo caratterizzata da un valore costante della quota piezometrica, sarebbe identica a quella vigente in una massa liquida in equilibrio idrostatico (Legge di Stevin, eq (90)).

Considerando la superficie di estensione finita contenente il punto P , punto per punto normale al vettore velocità (*sezione normale* o *retta*) e attraversata da traiettorie tutte aventi raggio di curvatura abbastanza elevato, anche su tale sezione normale si avrebbe una distribuzione di pressione idrostatica. In generale, tale sezione normale può non essere piana; tuttavia, raggi di curvatura elevati per tutte le traiettorie comportano necessariamente curvature modeste della superficie.

Per la singola traiettoria, la distribuzione di pressione locale nel piano normale sarebbe rigorosamente identica a quella idrostatica in caso di traiettoria localmente rettilinea, ossia, a raggio di curvatura infinito (curvatura nulla). Se, inoltre, l'intero flusso fosse caratterizzato da traiettorie tutte rettilinee e parallele fra loro (moto uniforme), si avrebbe un valore costante della quota piezometrica sull'intera sezione normale, la quale sarebbe in tal caso piana. Una tale sezione (piana, normale, sulla quale la pressione è distribuita con legge idrostatica) è detta *regolare*⁵⁷. In via approssimata, si assume lo schema di sezione regolare anche per le sezioni di una corrente gradualmente variata non uniforme.

5.8.2 Teorema di Bernoulli

La prima delle (165) può svilupparsi mediante la regola di derivazione lagrangiana (120), tenendo presente che, nella terna intrinseca, l'unica delle tre componenti della velocità non nulla è quella lungo la tangente, coincidente con il modulo u della velocità. Il primo membro può quindi scriversi:

$$-\frac{1}{g} \frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{g} u \frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial(u^2/2g)}{\partial s} ,$$

da cui, raccogliendo tutti i termini derivati rispetto alla coordinata tangenziale s sotto un unico segno e rielaborando, si ottiene:

⁵⁷ Si osservi che, in quest'ultimo caso, la distribuzione di pressione è idrostatica anche per un fluido viscoso, perché risultano nulle le proiezioni del termine viscoso nelle direzioni normali al moto.

$$\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) - \frac{\nu}{g} (\nabla^2 \vec{u})_s = 0 . \quad (166)$$

La quantità $z + p/\gamma + u^2/2g$ è detta *carico totale* e viene usualmente indicata con il simbolo H . Si è mostrato nel §3.5 che la quota piezometrica $h = z + p/\gamma$ rappresenta un'energia potenziale totale (somma dell'energia del campo delle forze peso e dell'energia di pressione) per unità di peso di liquido (fluido incompressibile). Dato un volume V di liquido di densità ρ , peso specifico $\gamma = \rho g$, massa ρV e peso γV , in moto traslatorio con la velocità u , la sua energia cinetica è data da:

$$E_c = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2} \rho V u^2 = \gamma V \frac{u^2}{2g} .$$

Pertanto, il terzo termine del carico totale rappresenta l'energia cinetica per unità di peso di liquido (conclusione analoga si era tratta nel §1.3.5 per il caso di un punto materiale, equazione (67)). Il carico totale H rappresenta quindi l'*energia meccanica totale per unità di peso di liquido*.

La (166) descrive la variazione del carico totale lungo la traiettoria della particella di un liquido viscoso, percorsa in moto vario. Nel caso del moto stazionario ($\partial u / \partial t = 0$) di una particella di un liquido ideale ($\nu = 0$), la (166) si riduce alla relazione:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) = 0 ,$$

la quale esprime che il carico totale di una particella di un liquido ideale in moto stazionario si mantiene costante lungo la traiettoria (che in tal caso coincide con una linea di corrente, vedi §4.6), costituente l'enunciato del celebre *Teorema o Legge di Bernoulli*:

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = \text{cost} . \quad (167)$$

Il carico totale prende perciò anche il nome di *trinomio di Bernoulli*. Essendo il carico totale, come le grandezze che lo compongono, una lunghezza, si può dare del teorema di Bernoulli la rappresentazione grafica presentata in Figura 73.

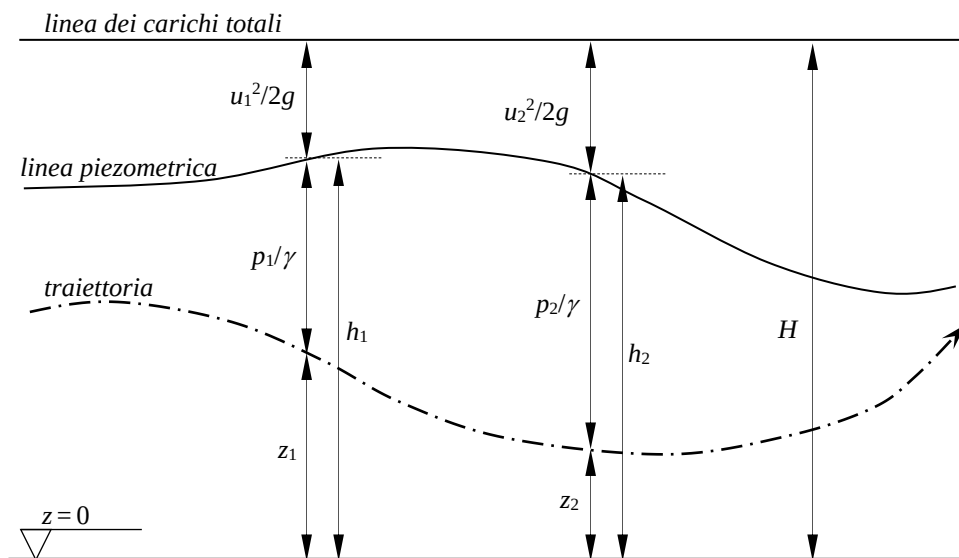


Figura 73. Rappresentazione grafica del teorema di Bernoulli.

Si definiscono *linea piezometrica* e *linea dei carichi totali* di una particella le curve dello spazio luogo dei punti posti sulla verticale dei punti della traiettoria della particella, aventi quote pari rispettivamente alla quota piezometrica e al carico totale della particella. A norma del teorema di Bernoulli, la quota della linea dei carichi totali rimane costante. Pertanto, a un aumento della velocità corrisponde una diminuzione della quota piezometrica. In particolare, nel caso di una traiettoria orizzontale ($z = \text{cost}$), a un aumento della velocità della particella deve corrispondere una diminuzione della pressione (*effetto Venturi*).

Nel caso del moto di un fluido viscoso in regime stazionario, la variazione del carico totale lungo la traiettoria è descritta dalla:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = \frac{\nu}{g} (\nabla^2 \vec{u})_s . \quad (168)$$

In particolare, nel caso del moto uniforme in un condotto a sezione costante di cui alla Figura 74 – caso abbastanza ricorrente nelle applicazioni – nel quale le traiettorie sono tutte rettilinee e parallele all'asse del condotto, i centri di curvatura locali di tutte le traiettorie sono, ovunque, indeterminati, perché posti all'infinito; conseguentemente, gli assi normale e binormale della terna intrinseca possono essere scelti arbitrariamente e, pertanto, anche tutti paralleli in tutti i punti della massa liquida. Essendo perciò costanti i versori degli assi di tutte le terne intrinseche, è agevole dedurre il segno del termine viscoso. Si ha infatti:

$$(\nabla^2 \vec{u})_s = \vec{i}_s \cdot \nabla^2 (u \vec{i}_s) = \vec{i}_s \cdot \vec{i}_s \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial b^2}$$

perché $\partial u / \partial s = 0$ per particelle animate da moto rettilineo uniforme, da cui anche $\partial^2 u / \partial s^2 = 0$.

Poiché vige la condizione di aderenza del liquido alle pareti del condotto, il solido delle velocità (rappresentazione geometrica dell'insieme dei vettori velocità nella sezione della condotta) è un solido di rotazione (a simmetria assiale) che rivolge la propria convessità nella direzione del moto. La medesima proprietà vale anche, pertanto, per qualunque sezione della superficie del solido fatta con piani paralleli all'asse della condotta (due esempi sono riportati in Figura 74: uno per il punto P della sezione sull'asse; un altro per un punto Q generico). In particolare, le sezioni con i piani sn e sb forniscono i profili di velocità lungo n e b rispettivamente. Poiché tali profili rivolgono la convessità nel senso del moto, la derivata seconda delle corrispondenti funzioni $u(n)$ e $u(b)$ è negativa (vedi §1.1.1). Risulta pertanto negativo, per tutte le particelle, il termine a secondo membro della (168), il che denota la sistematica diminuzione dell'energia (*perdita di carico*) delle particelle – così come, evidentemente, del flusso nel suo complesso – nel senso del moto.

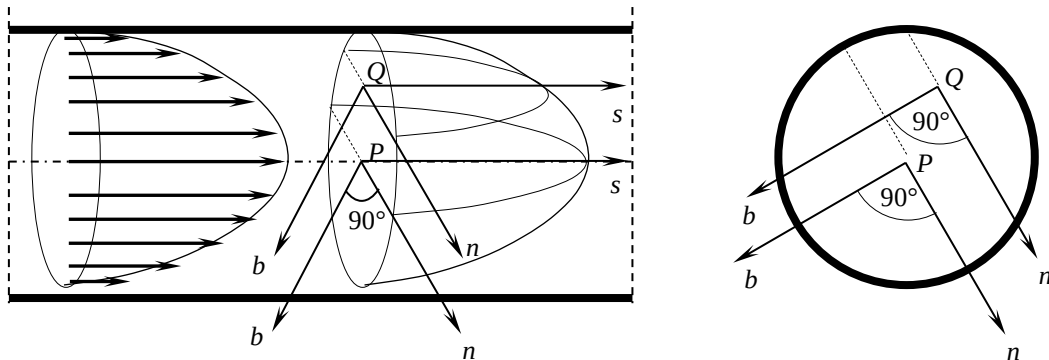


Figura 74. Terne intrinseche alle traiettorie nel moto uniforme.

Si è menzionato in precedenza come l'ipotesi di fluido non viscoso sia, in termini assoluti, non riscontrabile nella realtà. Tuttavia, l'applicabilità di tale schematizzazione per la soluzione di

problemi pratici può giustificarsi con le specifiche caratteristiche del problema in studio. Integrando la (168) fra due punti della traiettoria, P_1 e P_2 , si ottiene infatti la relazione:

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial H}{\partial s} ds = H_2 - H_1 = \int_{s_1}^{s_2} \frac{v}{g} (\nabla^2 \vec{u})_s ds, \quad (169)$$

la quale denota come un aspetto importante nella valutazione della applicabilità dell'ipotesi di fluido non viscoso all'analisi di un dato problema di flusso sia legato, fra gli altri, allo sviluppo del tratto di traiettoria considerato, la differenza di carico totale agli estremi del tratto essendo tanto minore quanto minore è tale sviluppo.

L'ipotesi di fluido ideale è pertanto accettabile per descrivere, per esempio, fenomeni quali i processi di efflusso da *luci* (aperture praticate sulle pareti di serbatoi o contenitori), ove le distanze caratteristiche L da considerare sono dell'ordine dei metri (vedi Figura 75a), eventualmente apportando alle formule che possono in tal modo facilmente dedursi, correzioni, peraltro di modesta entità, determinate sperimentalmente. Di tali applicazioni del teorema di Bernoulli si tratterà nel successivo capitolo 6, dedicato alla branca dell'Idraulica che si occupa dello studio di tali fenomeni di efflusso (*Foronomia*).

L'ipotesi di liquido perfetto non è invece appropriata nel caso della condotta di adduzione idrica rappresentata in Figura 75b, ove l'azione delle forze viscosse si esplica su lunghezze caratteristiche dell'ordine, grosso modo, variabile dalle centinaia di metri alle decine di chilometri.

Il problema della valutazione delle dissipazioni energetiche (perdite di carico) in una massa fluida in movimento verrà approfondito con riferimento alle correnti nei successivi capitoli 11 e 12.

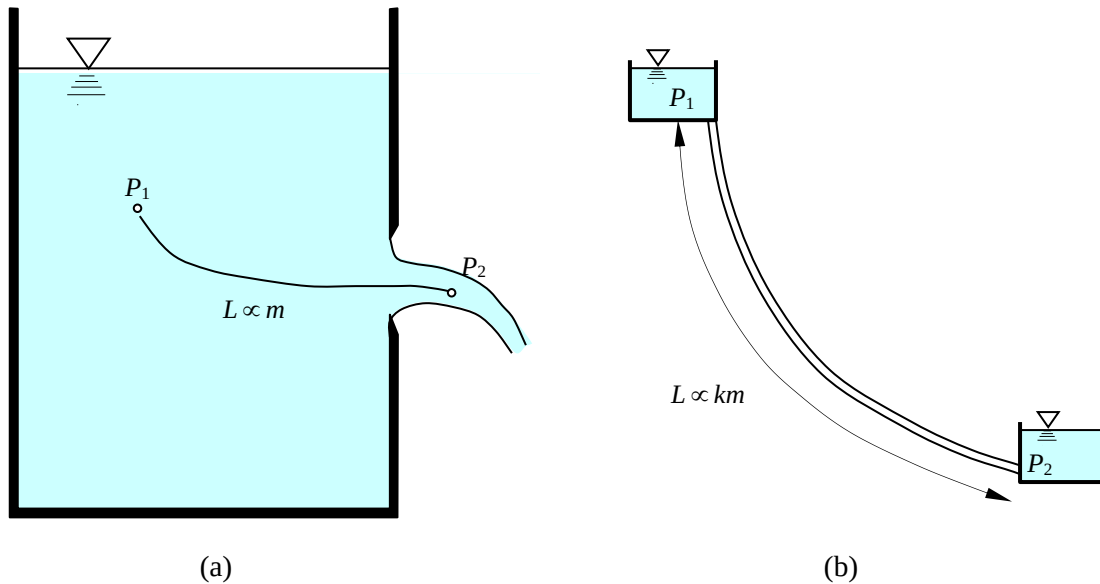


Figura 75. (a) efflusso da luce in parete sottile; (b) condotta di adduzione idrica.

5.9 Estensione del Teorema di Bernoulli ai fluidi comprimibili

In Idrostatica è stato mostrato che è lecito trascurare la comprimibilità degli aeriformi fintantoché essi risultano di estensione limitata in altezza. D'altro canto, la formulazione del Teorema di Bernoulli per i fluidi incompressibili, e le sue conseguenze in termini dell'effetto Venturi, suggeriscono che tale approssimazione non sia più lecita qualora si consideri il moto di un gas in un condotto. Nel presente paragrafo viene dedotta l'estensione del Teorema di Bernoulli al caso dei fluidi comprimibili, fra i quali i gas rappresentano certamente l'esempio più significativo anche agli scopi pratici, limitatamente al caso di fluidi ideali in moto stazionario.

Rinunciando all'ipotesi di fluido incompressibile, il moto di una particella fluida di un fluido pesante ideale è descritto dalla seguente forma dell'equazione di Navier-Stokes:

$$-\frac{1}{g} \frac{D\vec{u}}{Dt} = \nabla z + \frac{\nabla p}{\rho g},$$

la cui proiezione sull'asse tangente della terna intrinseca fornisce:

$$-\frac{1}{g} \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial s}$$

nella quale ora non è lecito portare la densità all'interno del segno di gradiente, perché non più costante, mentre lo sviluppo della derivata lagrangiana è identico al caso di fluido incompressibile. Si scrive quindi:

$$-\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial(u^2/2g)}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{u^2}{2g} \right) + \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial s}.$$

Integrando lungo la traiettoria (ossia, rispetto a s), sotto l'ulteriore ipotesi di moto stazionario, si ottiene:

$$z + \frac{u^2}{2g} + \frac{1}{g} \int \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} ds = \text{cost}$$

ovvero:

$$z + \frac{u^2}{2g} + \frac{1}{g} \int \frac{dp}{\rho} = \text{cost}, \quad (170)$$

o anche:

$$\left(z + \frac{u^2}{2g} \right)_2 - \left(z + \frac{u^2}{2g} \right)_1 + \frac{1}{g} \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} = 0$$

avendo indicato con p_1 e p_2 le pressioni vigenti alle ascisse s_1 e s_2 rispettivamente.

Nel caso di flussi ad alta velocità attorno a superfici poco estese in altezza, nella (170) può trascurarsi la quota geodetica⁵⁸:

$$\frac{u^2}{2g} + \frac{1}{g} \int \frac{dp}{\rho} = \text{cost}$$

L'integrale può essere valutato sulla base della trasformazione termodinamica subita dal fluido. In termini generali, ciò può eseguirsi sulla base della equazione di stato (legge dei gas perfetti):

$$\frac{p^*}{\rho} = nRT,$$

⁵⁸ La velocità di crociera di un aereo di linea è dell'ordine di 800 km/h, pari a circa 220 m/s, corrispondente a una altezza cinetica $u^2/2g \cong 2467$ m. Le variazioni di altezza cinetica subite da una particella fluida, quand'anche fossero di un ordine grandezza inferiore ai valori massimi della grandezza, risulterebbero comunque dell'ordine delle centinaia di metri, e pertanto molto maggiori delle variazioni di quota della particella nel suo movimento attorno all'ala del velivolo, dell'ordine del metro.

in cui l'inverso della densità è uguale al volume specifico del gas (volume dell'unità di massa), p^* è la pressione assoluta, R è la costante universale dei gas, T è la temperatura assoluta e n è il numero di moli contenute in una massa unitaria di gas⁵⁹. In pratica, le trasformazioni di un gas sono spesso ben approssimabili da trasformazioni quasi-statiche *politropiche*, ossia, che avvengono a calore specifico costante, rappresentate dalla relazione:

$$\frac{p^*}{\rho^k} = \text{cost} ,$$

in cui:

$$k = \frac{c - c_p}{c - c_v} ,$$

dove c è il calore specifico costante della particolare trasformazione politropica; c_p e c_v sono i calori specifici rispettivamente a pressione e a volume costante. Nel caso del moto di un gas in una condotta, si considerano tipicamente trasformazioni isoterme ($k=1$) o adiabatiche ($k=1,4$ nel caso dell'aria), le prime nei casi in cui il moto sia abbastanza lento da consentire al fluido di scambiare il calore necessario a mantenersi a temperatura costante; le seconde nel caso opposto, in cui la rapidità della trasformazione (legata alla brevità del percorso) consenta di trascurare gli scambi termici.

Per una trasformazione isoterma si ha:

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{p_1^*}{\rho_1} \int \frac{dp^*}{p^*} = \frac{p_1^*}{\rho_1} \ln(p^*) + \text{cost} ,$$

in cui il pedice "1" rappresenta le condizioni iniziali, da cui

$$\left(z + \frac{u^2}{2g} \right)_2 - \left(z + \frac{u^2}{2g} \right)_1 + \frac{p_1^*}{g\rho_1} \ln \left(\frac{p_2^*}{p_1^*} \right) = 0 . \quad (171)$$

Per una trasformazione adiabatica si ha invece:

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{p_1^{*1/k}}{\rho_1} \int \frac{dp^*}{p^{*1/k}} = \frac{k}{k-1} \frac{p_1^{*1/k}}{\rho_1} p^{*(1-1/k)} + \text{cost} ,$$

da cui:

$$\left(z + \frac{u^2}{2g} \right)_2 - \left(z + \frac{u^2}{2g} \right)_1 + \frac{k}{k-1} \frac{p_1^{*1/k}}{g\rho_1} \left(p_2^{*(1-1/k)} - p_1^{*(1-1/k)} \right) = 0 . \quad (172)$$

⁵⁹ $R = 8,314 \text{ J}^\circ\text{K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$. Una mole è un *numero di Avogadro* ($6,030 \times 10^{23}$) di molecole di gas, contenuto in un volume di gas di peso in grammi numericamente pari al peso molecolare (*grammolecola*). Il peso molecolare è il rapporto fra la massa della molecola considerata e 1/12 della massa dell'atomo ^{12}C (carbonio 12).

CAPITOLO SESTO

6. FORONOMIA

6.1 Generalità

La Foronomia è la branca dell'Idraulica che studia i processi di efflusso dei fluidi attraverso aperture di qualsivoglia natura (praticate nelle pareti di serbatoi, determinate da organi di regolazione, etc...), dette *luci*. Più in particolare, obiettivo dello studio dei vari tipi di luci è costituito dalla determinazione della *legge di efflusso*, ossia, della relazione che lega la portata defluente dalla luce, tipicamente in condizioni stazionarie, ai parametri caratteristici del caso in studio: il livello all'interno di un serbatoio su una cui parete la luce è praticata; le caratteristiche dimensionali della luce, etc...

Tipicamente, le modalità dell'efflusso sono tali per cui le sezioni sulle quali è possibile imporre le condizioni che consentono di dedurre l'espressione della legge di efflusso sono poste a breve distanza, talché è possibile, almeno in prima approssimazione, studiare il fenomeno mediante la formulazione del Teorema di Bernoulli per un fluido ideale, equazione (167), sulla base delle considerazioni esposte nel §5.8.2. Determinazioni della portata più precise di quelle ottenibili nell'ambito dello schema di fluido ideale si ottengono mediante correzioni delle formule basate su rilievi di laboratorio, le quali tuttavia non ne modificano la struttura. Come si vedrà nel prosieguo, tali correzioni risultano, oltretutto, di modesta entità.

Naturalmente, l'uso del Teorema di Bernoulli implica anche le ulteriori ipotesi ammesse nella sua derivazione: fluido incomprimibile, isoterma e omogeneo, che ammetteremo quindi valide per tutti i casi che verranno di seguito illustrati.

6.2 Efflusso da luce di fondo in parete sottile

Una luce in parete sottile ha un bordo acuminato che, determinando un distacco netto della vena fluida, consente un efflusso regolare, al contrario di ciò che accade in una luce in parete grossa, caratterizzata da un funzionamento intermittente generalmente indesiderato.

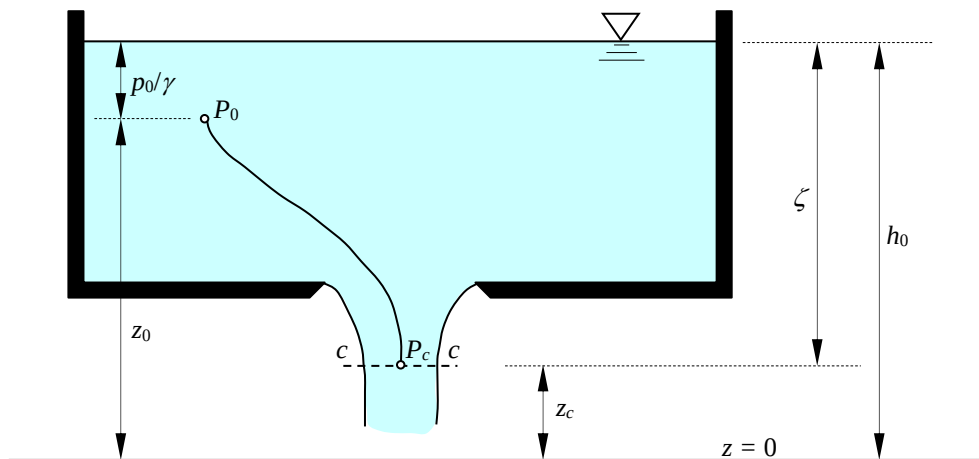


Figura 76. Schema di efflusso da luce di fondo in parete sottile.

Nel caso di una luce in parete sottile praticata sul fondo di un serbatoio la posizione della cui superficie libera a contatto con l'atmosfera si mantiene costante nel tempo, rappresentata nella Figura 76, il flusso, dopo aver subito una contrazione rispetto alle dimensioni della luce, assume, a una distanza da questa dell'ordine delle sue dimensioni lineari ($\sim 2,5D$ per una sezione circolare), le caratteristiche di una corrente gradualmente variata ad asse verticale, la cui sezione (*sezione*

contratta), indicata come sezione *c-c* in figura, di area Ω_c , è quindi regolare. Il Teorema di Bernoulli si applica al tratto di traiettoria di una generica particella compreso fra un punto P_0 interno al serbatoio, sufficientemente lontano dalla luce perché vi si possa trascurare la velocità della particella, u_0 , e un punto P_c posto sulla sezione contratta. Assumendo un efflusso in atmosfera, essendo la sezione contratta piana, orizzontale ed esposta al contorno alla pressione atmosferica (pressione relativa nulla), tale valore di pressione vige anche in ogni punto interno della sezione: $p_c = 0$.

Con le condizioni indicate ($u_0 = 0$; $p_c = 0$), l'espressione generale del teorema di Bernoulli:

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{u_0^2}{2g} = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{u_c^2}{2g}$$

si può scrivere nella forma:

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} = z_c + \frac{u_c^2}{2g} ,$$

in cui, appartenendo il punto P_0 a un volume fluido in quiete, la sua quota piezometrica coincide con la quota del piano dei carichi idrostatici del liquido h_0 e, quindi, del suo pelo libero. La velocità della generica particella nella sezione contratta è quindi espressa da:

$$u_c = \sqrt{2g(h_0 - z_c)} .$$

Introdotta l'affondamento della sezione contratta rispetto al pelo libero del serbatoio, $\zeta = h_0 - z_c$ (*carico sulla luce*⁶⁰), la velocità assume la classica espressione di *velocità Torricelliana*:

$$u_c = \sqrt{2g\zeta} ,$$

che è identico per tutte le particelle che transitano in tale sezione. Pertanto, l'espressione della portata, che si ottiene, in generale, dall'integrazione della distribuzione di velocità sulla sezione contratta Ω_c :

$$Q = \int_{\Omega_c} u_c \, d\Omega ,$$

si può, in questo caso, esprimere semplicemente come prodotto della velocità costante per l'area della sezione contratta:

$$Q = u_c \Omega_c .$$

L'area della sezione contratta si esprime in funzione dell'area della luce, Ω , attraverso il coefficiente di contrazione:

$$C_c = \frac{\Omega_c}{\Omega} .$$

In pratica, il valore del coefficiente di contrazione dipende dal massimo valore dell'angolo di deviazione che le traiettorie devono subire fra l'interno e l'esterno del serbatoio. Nel caso in questione, si tratta delle traiettorie più vicine al fondo del serbatoio, quindi orizzontali all'interno di esso, che devono deviare di 90° per portarsi in direzione verticale sulla sezione contratta, cui corrisponde un

⁶⁰ Utilizziamo tale denominazione per consuetudine sebbene il carico ζ indicato nel procedimento sia piuttosto da intendersi sulla sezione contratta. Naturalmente, nel caso il battente sulla luce (profondità del liquido nel serbatoio) risultasse molto maggiore delle dimensioni lineari della luce, sarebbe lecito, in via approssimata, fare riferimento al battente (carico sulla luce) anziché al carico sulla sezione contratta.

valore del coefficiente di contrazione pari a circa $C_c = 0,61$. Si rimarca come tale valore sia associato all'angolo di deviazione e assuma pertanto il medesimo valore in casi di efflusso diversi, come quelli che verranno illustrati successivamente, ma caratterizzati sempre da una deviazione di 90° , come del resto già rilevato trattando di perdite di imbocco nel § 12.5.3.

Come si è detto, l'ipotesi di fluido non viscoso comporta un errore nella valutazione della velocità nella sezione contratta, di cui si può tenere conto correggendo la velocità torricelliana mediante un *coefficiente di velocità* C_v , dell'ordine di $C_v = 0,98$. Tale valore denota l'esiguità dell'errore, dell'ordine del 2%. Sulla base di tale valore, nel § 12.5.3 è stata valutata la componente della perdita localizzata di imbocco dovuta alla viscosità.

In definitiva, la legge di efflusso della luce di fondo in parate sottile si scrive:

$$Q = C_v C_c \Omega \sqrt{2g\zeta} ,$$

ovvero, conglobando il coefficiente di contrazione e il coefficiente di velocità in un unico coefficiente di efflusso, prodotto dei due, $\mu = C_v C_c \cong 0,6$, nella forma canonica:

$$Q = \mu \Omega \sqrt{2g\zeta} . \quad (173)$$

Nel caso l'efflusso avvenisse, anziché nell'atmosfera, in un ambiente a pressione relativa non nulla, il cui valore dovrebbe essere pertanto imposto nella sezione contratta, con elementari modifiche al ragionamento fin qui seguito la legge di efflusso si modificherebbe nella seguente espressione:

$$Q = \mu \Omega \sqrt{2g(\zeta - p_c/\gamma)} . \quad (174)$$

Pertanto, una pressione relativa positiva determinerebbe una diminuzione della portata rispetto al caso dell'efflusso in atmosfera; una pressione relativa negativa (depressione) un aumento della portata.

6.3 Efflusso da luce in parete sottile verticale

Un caso apparentemente simile a quello della luce di fondo, ma in realtà abbastanza differente dal punto di vista fisico, è costituito dall'efflusso attraverso una luce in parete sottile verticale, illustrato in Figura 77.

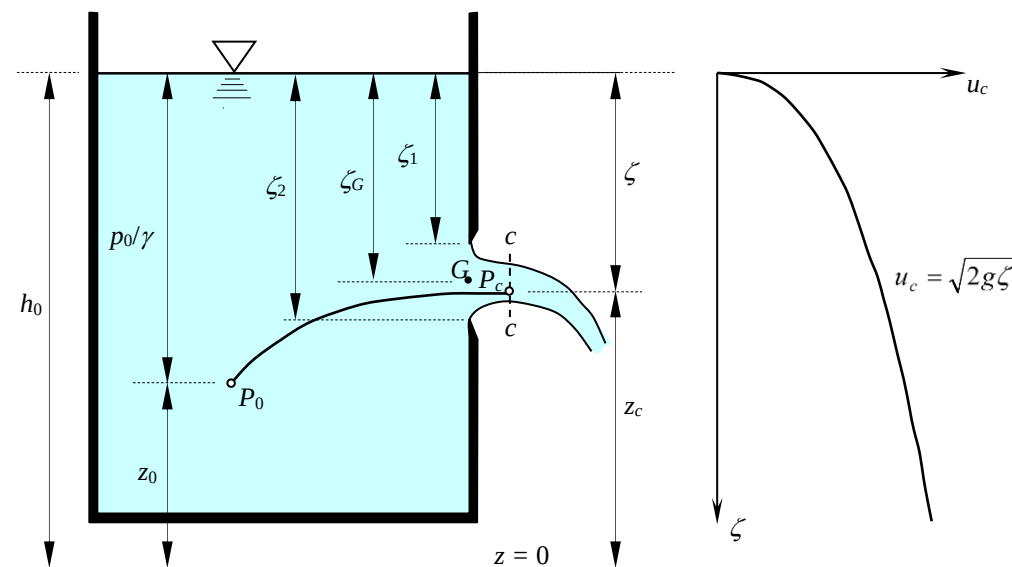


Figura 77. Schema di efflusso da luce in parete sottile verticale.

Anche in questo caso, la vena effluente si contrae, con deviazioni massime delle traiettorie pari a 90° , per disporsi con tangente pressoché orizzontale nella sezione contratta che caratterizza questo tipo di luce. Evidentemente, la sezione contratta è in questo caso verticale. Poiché, nel caso di efflusso in atmosfera, al suo contorno la pressione relativa è identicamente nulla, avendo i diversi punti del contorno quota differente ma pressione identica, la distribuzione delle pressioni non è idrostatica e la sezione contratta non può quindi essere regolare, né la corrente lineare. In effetti, in tale sezione le singole particelle sono, in buona approssimazione, soggette unicamente alla accelerazione di gravità, che è quanto dire che ciascuna si muove, indipendentemente dalle altre (cioè, senza esercitare mutue azioni tramite sforzi esercitati attraverso le superfici di contatto), seguendo la legge di caduta dei gravi. Si può dimostrare⁶¹ che tali condizioni implicano un gradiente verticale di pressione nullo. Pertanto, anche in questa sezione contratta la pressione è, punto per punto, pari a quella atmosferica, quindi nulla in termini di pressione relativa⁶².

Il ragionamento che occorre sviluppare per pervenire all'espressione della velocità della particella nella sezione contratta è quindi del tutto identico a quello seguito nel caso della luce di fondo, con identico risultato formale:

$$u_c = \sqrt{2g\zeta} \quad .$$

Tuttavia, in questo caso il carico ζ (differenza fra le quote del pelo libero del serbatoio e della particella nella sezione contratta) non è una costante, giacché la sezione contratta è verticale e in essa le varie particelle non hanno quindi tutte la stessa quota. Pertanto, in questo caso la determinazione della legge di efflusso richiede effettivamente l'integrazione della velocità sulla sezione contratta:

$$Q = \int_{\Omega_c} u_c \, d\Omega \quad ,$$

che risulta tutt'altro che agevole eseguire in termini rigorosi.

Il problema è suscettibile di semplificazione qualora il battente sulla luce sia molto maggiore delle dimensioni lineari di questa, di qualunque forma essa sia. Infatti, considerando l'andamento della velocità riportato a margine della Figura 77, essendo esso proporzionale alla radice quadrata del carico ζ ha anche curvatura decrescente al crescere di questo. Pertanto, per grandi valori del rapporto fra il battente sulla luce e le dimensioni lineari di questa, il tratto di diagramma di velocità che interessa la sezione contratta è approssimativamente lineare. Il problema del calcolo dell'integrale di una funzione lineare nella variabile di integrazione è esattamente il medesimo incontrato in Idrostatica relativamente al calcolo delle spinte su superfici piane (§3.10.1), la cui soluzione era data dal valore della funzione integranda lineare (in quel caso, la pressione) valutata nel baricentro della superficie, moltiplicata per l'area della superficie. Identicamente, nel caso in questione la portata è calcolabile come prodotto della velocità nel baricentro della sezione contratta per l'area di quest'ultima. L'ipotesi di dimensioni lineari della luce relativamente piccole comporta anche che si possa a tale scopo considerare il baricentro della luce piuttosto che della sezione contratta. Qualora ricorrano le condizioni espresse in precedenza, esprimendo ancora l'area della sezione contratta in funzione del coefficiente di contrazione e tenendo conto degli effetti viscosi, la legge di efflusso assume pertanto la forma:

$$Q = \mu\Omega\sqrt{2g\zeta_G} \quad . \quad (175)$$

Nel caso in cui le dimensioni della luce non possano dirsi molto minori del battente su di essa, una soluzione al problema di pratica validità, anche se risultante da un procedimento tutt'altro che rigoroso, si può ottenere per il caso di una luce rettangolare di altezza $a = \zeta_2 - \zeta_1$ (vedi Figura 78) e larghezza b , pari alla larghezza del serbatoio, cosicché la vena non subisca una contrazione laterale.

⁶¹ Vedi Citrini – Idraulica, §5.5.

⁶² Si tratta in sostanza delle medesime condizioni discusse nel § 12.6 con riferimento allo sbocco in aria di una condotta in pressione.

Il procedimento consiste nel considerare la sezione contratta composta di parti elementari $b d\zeta_c = b d\zeta C_c$, derivanti per contrazione di parti elementari della superficie della luce $b d\zeta$, e attribuire alle particelle che transitano per tale parte elementare della sezione contratta una velocità calcolata con riferimento al carico ζ sulla corrispondente parte elementare della superficie della luce, invece che al carico ζ_c sulla sezione contratta. Così facendo l'espressione dell'integrale che fornisce la portata Q assume la forma:

$$Q = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} C_v C_c b \sqrt{2g\zeta} d\zeta = C_v C_c b \sqrt{2g} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \sqrt{\zeta} d\zeta .$$

Ricordando che la primitiva (§1.1.2) di $\sqrt{\zeta} = \zeta^{1/2}$ è data da $2/3 \zeta^{3/2}$, l'integrale si sviluppa come segue:

$$Q = C_v C_c b \sqrt{2g} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \sqrt{\zeta} d\zeta = C_v C_c b \sqrt{2g} \frac{2}{3} \left[\zeta^{3/2} \right]_{\zeta_1}^{\zeta_2} = \mu b \sqrt{2g} \left(\zeta_2^{3/2} - \zeta_1^{3/2} \right) , \quad (176)$$

in cui ora il coefficiente di efflusso, a parità di valori del coefficiente di contrazione e del coefficiente di velocità rispetto al caso della luce in parete sottile di fondo, vale $\mu \approx 0,4$.

È anche abbastanza facile dare una spiegazione del perché, nonostante il procedimento sia privo di qualunque giustificazione rigorosa, esso fornisca un risultato quantitativo del tutto accettabile: ciò è dovuto alla compensazione della sovrastima della velocità nelle parti della sezione contratta poste al di sotto del suo baricentro (perché in esse si considera un carico sulla luce maggiore del carico sulla sezione contratta) con sottostime nelle parti al di sopra del baricentro della sezione contratta (per il motivo opposto).

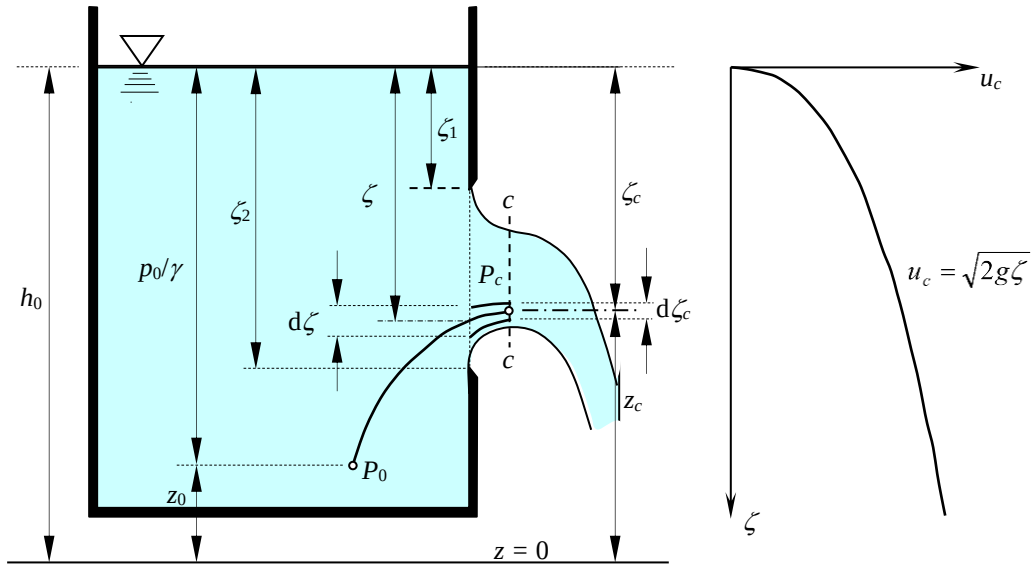


Figura 78. Schema di efflusso da luce in parete sottile verticale di dimensioni comparabili con il battente sulla luce.

6.4 Efflusso da luci con tubo addizionale

La portata effluente da luci a battente in parete sottile può variare rispetto ai casi precedentemente esaminati, qualora lo sbocco in atmosfera (o in un aeriforme in pressione) avvenga al termine di un breve tratto di tubazione, rivolto verso l'interno (*luce di Venturi*) o verso l'esterno (*luce di Borda*).

6.4.1 Luce di Venturi

Nella luce di Venturi, il tubo addizionale esterno deve avere sviluppo sufficiente a far sì che, successivamente alla contrazione della corrente, questa possa aderire nuovamente alle pareti del tubo, di modo che lo sbocco avvenga a sezione piena. Allo stesso tempo, il tubo deve avere sviluppo sufficientemente limitato, affinché risultino trascurabili, almeno in prima approssimazione, le perdite di carico legate alla viscosità.

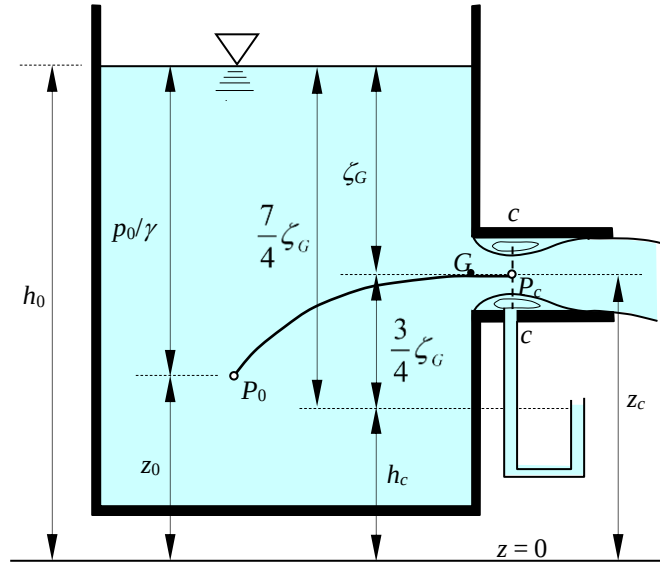


Figura 79. Luce di Venturi.

Assumendo che il carico sul baricentro della luce sia molto maggiore del diametro del tubo, si può ammettere che sia la pressione sia pressoché uniforme su ogni sezione e che la velocità nel baricentro della sezione possa considerarsi rappresentativa della velocità media della corrente, per le considerazioni esposte in precedenza. Sperimentalmente, nella sezione contratta si rileva una depressione pari, in valore assoluto e in termini di altezza piezometrica p_c/γ , ai $3/4$ del carico sulla luce, ζ_G . Il teorema di Bernoulli riferito alla particella passante per il baricentro della sezione contratta, assumendone, come già per i casi precedenti, una posizione inizialmente sufficientemente lontana dalla luce perché la si possa ritenere praticamente in quiete, fornisce la relazione:

$$h_0 = h_c + \frac{u_c^2}{2g},$$

da cui si ottiene:

$$u_c = \sqrt{2g(h_0 - h_c)} = \sqrt{2g \cdot \frac{7}{4} \zeta_G}.$$

Introducendo, come in precedenza, il coefficiente di contrazione, $C_c = 0,61$, e il coefficiente di velocità, $C_v = 0,98$, la portata si esprime come:

$$Q = \Omega_c u_c = C_c C_v \Omega \sqrt{2g \cdot \frac{7}{4} \zeta_G}.$$

Sostituendo i valori numerici dei coefficienti e raccogliendo tutti i fattori numerici in un unico termine, la legge di efflusso assume la forma:

$$Q \cong 0,8 \Omega \sqrt{2g\zeta_G} , \quad (177)$$

corrispondente a un valore del coefficiente di efflusso $\mu \cong 0,8$, superiore di oltre il 30% al valore $\mu \cong 0,6$ ottenuto per la luce in parete sottile, nelle medesime condizioni di rapporto fra carico sulla luce e diametro della stessa. Si osservi che allo stesso risultato si potrebbe pervenire considerando la perdita di carico, di tipo cosiddetto *localizzato*, che si determina a valle della sezione contratta per effetto della brusca espansione della vena, come del resto all'imbocco di una qualunque condotta. Di tale tipo di perdite di carico si dirà nel §12.5.

Tale espressione non ha tuttavia validità per qualunque valore del carico sulla luce. Si è visto infatti nel §2.7 che per valori della pressione assoluta inferiori alla tensione di vapore si verifica il fenomeno della cavitazione, per cui il flusso diventa instabile e, comunque, la pressione non può diminuire ulteriormente. Trascurando il piccolo valore della tensione di vapore alle temperature ordinarie, si può affermare intanto che la legge di efflusso (177) vale fintantoché $\frac{3}{4} \zeta_G \leq p_{atm}^*/\gamma$, quindi, se il liquido è acqua, essendo $p_{atm}^*/\gamma = 10,33$ m con riferimento ai valori medi di pressione atmosferica e peso specifico, per $\zeta_G \leq 13,8$ m. Per valori maggiori del carico sulla luce, l'espressione del Teorema di Bernoulli si modifica imponendo che nella sezione contratta si verifichi la massima depressione ammissibile, di modo che la quota piezometrica nella sezione contratta valga:

$$h_c = h_0 - \zeta_G - 10,33,$$

la velocità corrispondente valga:

$$u_c = \sqrt{2g(h_0 - h_c)} = \sqrt{2g(\zeta_G + 10,33)}$$

e la portata sia quindi data da:

$$Q = C_c C_v \Omega \sqrt{2g(\zeta_G + 10,33)} .$$

In definitiva, la legge di efflusso della luce Venturi è data, per l'acqua, da:

$$Q \cong 0,8 \Omega \sqrt{2g\zeta_G} \quad \text{per } \zeta_G \leq 13,8 \text{ m}$$

$$Q \cong 0,6 \Omega \sqrt{2g(\zeta_G + 10,33)} \quad \text{per } \zeta_G > 13,8 \text{ m}$$

Si osservi, infine, che gli esempi pratici di luce di Venturi più frequenti non sono costituiti tanto da tubi addizionali esterni, ma piuttosto da luci in parete grossa, quali quelle determinate da un foro nel muro perimetrale di un serbatoio, purché di spessore sufficiente a consentire il riattacco della vena. Nel caso in cui, però, l'imbocco fosse ben raccordato, in modo da impedire il distacco di vena e la conseguente depressione, ripetendo il ragionamento fatto nel primo caso, in assenza di contrazione si dovrebbe porre $C_c = 1$, per cui la portata uscente verrebbe ulteriormente incrementata al valore:

$$Q \cong 0,98 \Omega \sqrt{2g\zeta_G} .$$

6.4.2 Luce di Borda

Il valore del coefficiente di contrazione dipende essenzialmente dall'angolo di deviazione massimo delle traiettorie delle particelle nel processo di efflusso: nel caso delle luci viste finora, i 90° della deviazione relativa alle particelle a contatto con la parete all'interno del serbatoio. Nel caso di tubo addizionale interno, la deviazione massima è pari a 180°, cui corrisponde un valore del coefficiente di contrazione $C_c = 0,5$. In effetti, la luce di Borda riveste un interesse più che altro teorico, legato al

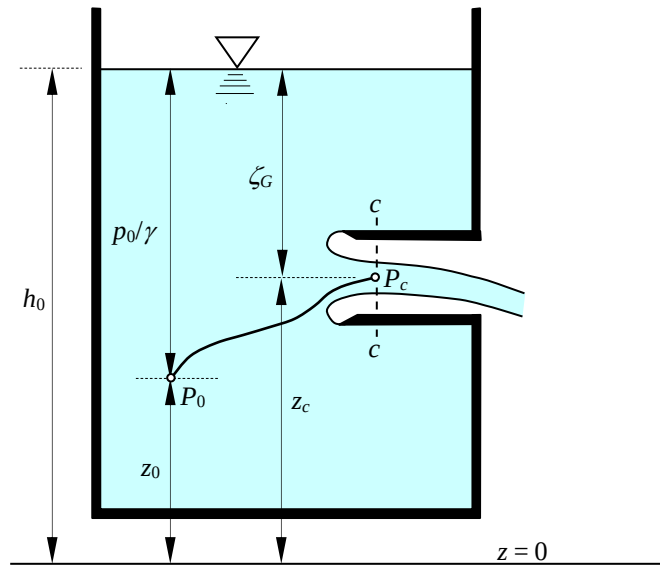


Figura 80. Luce di Borda.

Seguendo il procedimento utilizzato nel §6.3 per la luce in parete sottile con carico grande in confronto al diametro della luce, o nel §6.2 per la luce di fondo in parete sottile, qualora la luce di Borda sia disposta in tal modo, si perviene infine all'espressione della portata:

$$Q \cong 0,5 \Omega \sqrt{2g\zeta_G} \text{ ,}$$

corrispondente a un valore del coefficiente di efflusso $\mu \cong 0,5$.

6.5 Efflusso da luce in parete sottile rigurgitata

In questo caso, l'efflusso avviene da un serbatoio A all'interno di un volume liquido contenuto in un serbatoio B e la sezione contratta che si viene anche in questo caso a formare è quindi sotto battente (vedi Figura 81). Il liquido circostante la sezione contratta può considerarsi, in buona approssimazione, in quiete. Pertanto, la distribuzione delle pressioni al contorno della sezione contratta è idrostatica: dunque, compatibile con le condizioni di corrente gradualmente variata, che sono infatti verificate in tale sezione. Poiché al suo contorno vi deve essere equilibrio delle pressioni per il principio di azione e reazione, la quota piezometrica uniformemente distribuita sulla sezione contratta deve uguagliare la quota piezometrica del liquido in quiete nel quale essa è immersa, ossia, la quota del pelo libero di quest'ultimo⁶⁴.

Assumendo, come già per i casi precedenti, una posizione iniziale della particella nel serbatoio A sufficientemente lontana dalla luce perché la si possa ritenere praticamente in quiete, l'espressione generale del teorema di Bernoulli:

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{u_0^2}{2q} = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{u_c^2}{2q}$$

si riduce alla forma:

⁶³ Per una dimostrazione a tale riguardo vedi Citrini, §11.1.

⁶⁴ Si tratta della stessa considerazione utilizzata nella soluzione del problema della condotta con sbocco sotto battente di cui al §12.6.

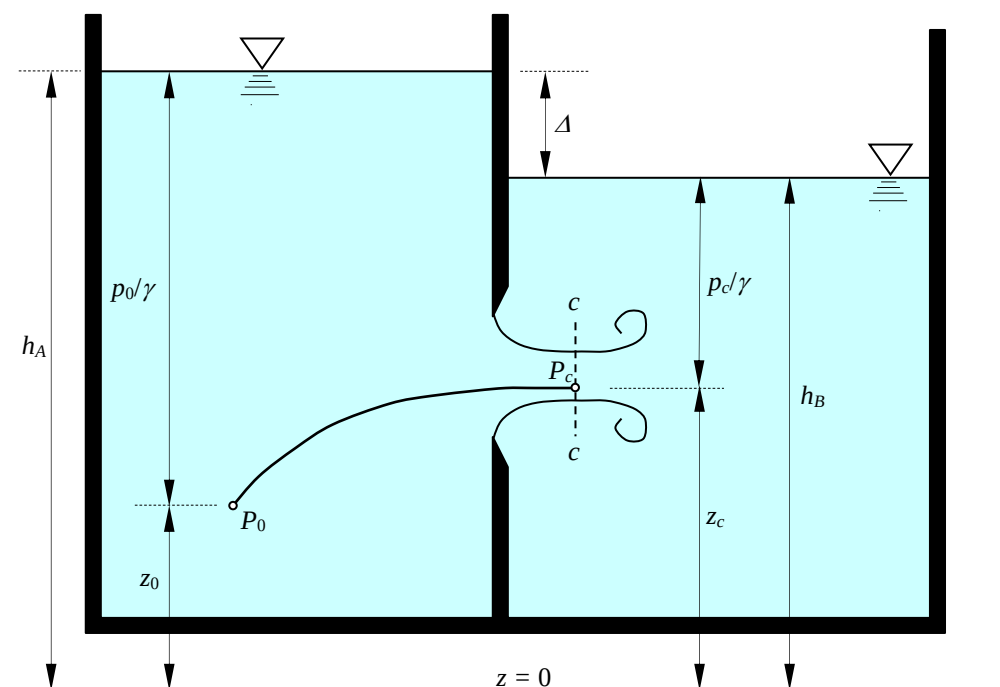


Figura 81. Schema di efflusso da luce in parete sottile rigurgitata.

$$h_A = h_B + \frac{u_c^2}{2g} ,$$

dalla quale si ottiene l'espressione della velocità della particella nella sezione contratta, esprimibile in funzione della differenza dei livelli dei peli liberi nei due serbatoi, $\Delta = h_A - h_B$:

$$u_c = \sqrt{2g\Delta} ,$$

che risulta dunque costante sulla sezione contratta. L'espressione della portata si ottiene quindi semplicemente moltiplicando tale valore costante per l'area della sezione contratta. Introducendo, come in precedenza, il coefficiente di contrazione, il coefficiente di velocità e il coefficiente di efflusso, prodotto dei due, si ottiene infine la legge di efflusso:

$$Q = \mu \Omega \sqrt{2g\Delta} , \quad (178)$$

nella quale, avendosi anche in questo caso una deviazione massima delle traiettorie pari a 90° , si ha ancora $C_c = 0,61$ e, dunque, per $C_v = 0,98$, $\mu \approx 0,6$.

6.6 Efflusso da una paratoia piana verticale in parete sottile

Una paratoia è una lastra, piana o ricurva, regolabile in modo da lasciare, fra il suo bordo inferiore e il fondo sottostante, una luce libera attraverso il quale avviene l'efflusso. Le paratoie sono usualmente utilizzate come organi di regolazione della portata nei canali. In questa sede ci limiteremo a illustrare il funzionamento di una paratoia piana verticale in parete sottile, sulla base dello schema di Figura 82.

Si assume che la larghezza della luce sia pari alla larghezza sia del serbatoio, o del canale, a monte, che del canale a valle di essa, col che non si ha contrazione laterale della vena e, come già nel caso dell'efflusso da luce rettangolare in parete sottile verticale, il moto è piano.

Il procedimento è essenzialmente il medesimo utilizzato per gli altri tipi di luci, la particolarità di ciascun tipo essendo legata alla specificazione delle condizioni da imporre nella sezione contratta.

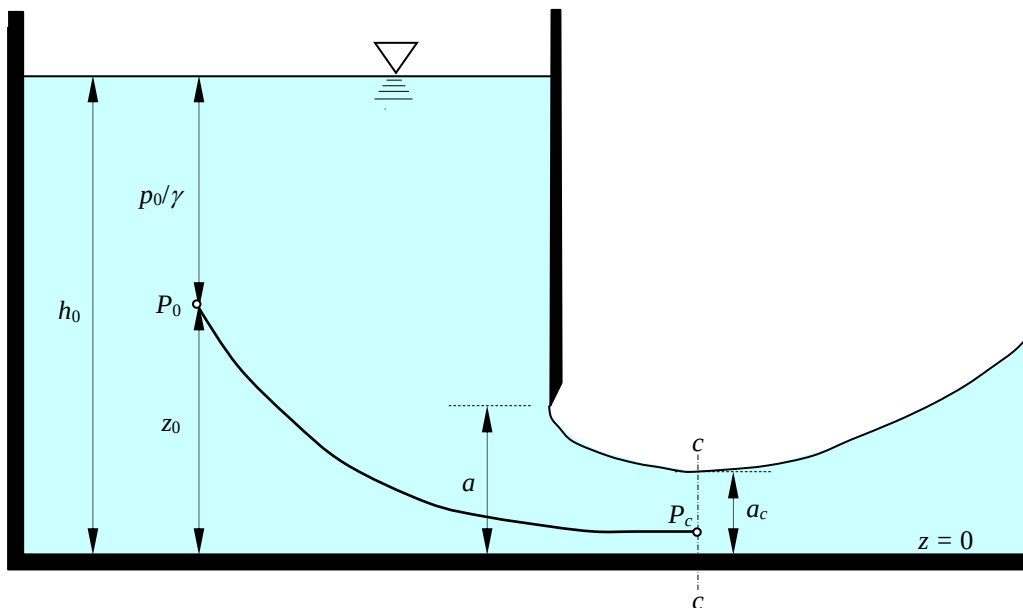


Figura 82. Schema di efflusso da paratoia piana verticale in parete sottile.

Nel caso della paratoia piana, la sezione contratta è regolare, per cui è costante su essa la quota piezometrica. Assumendo come piano di riferimento il fondo, dette a , $a_c = a C_c$ e b rispettivamente l'altezza della luce, l'altezza della sezione contratta e la larghezza della luce (nonché, per l'assenza di contrazione laterale, della sezione contratta), l'espressione generale del teorema di Bernoulli:

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{u_0^2}{2g} = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{u_c^2}{2g}$$

si semplifica nella forma:

$$h_0 = a_c + \frac{u_c^2}{2g} = C_c a + \frac{u_c^2}{2g},$$

da cui l'espressione della velocità nella sezione contratta:

$$u_c = \sqrt{2g(h_0 - C_c a)},$$

la quale, come in tutti i casi visti in cui la sezione contratta era regolare, risulta costante. Moltiplicando quindi la velocità per l'area della sezione contratta, $\Omega_c = C_c a b$, e introdotto il coefficiente di velocità C_v e il coefficiente di efflusso μ , la legge di efflusso assume l'espressione:

$$Q = \mu a b \sqrt{2g(h_0 - C_c a)}, \quad (179)$$

ove il coefficiente di efflusso vale $\mu = 0,6$ per essere le massime deviazioni delle traiettorie pari ancora a 90° . Il coefficiente di contrazione risulterebbe maggiore di 0,61 nel caso di una paratoia piana declive verso valle (formante un angolo diedro acuto con il fondo del serbatoio), minore di 0,61 nel caso di paratoia declive verso monte (angolo diedro ottuso); le portate corrispondenti sarebbero quindi anch'esse rispettivamente maggiori e minori di quella relativa alla paratoia verticale. Il primo caso si verifica anche nel caso di *paratoie a settore*, nelle quali l'elemento di tenuta è una superficie cilindrica la cui sezione retta è un arco di cerchio.

L'efflusso da una paratoia può anche avvenire con la sezione contratta sotto battente. In questo caso, le caratteristiche dimensionali della sezione contratta sono le medesime del caso di efflusso libero, ma la quota piezometrica da considerare è il livello del pelo libero sovrastante la sezione, come nel caso dell'efflusso da luce in parete sottile rigurgitata. Detta ancora Δ la differenza dei livelli a monte e a valle della paratoia, la legge di efflusso assume in questo caso la forma:

$$Q = \mu ab \sqrt{2g\Delta} \quad (180)$$

La condizione di velocità trascurabile a una debita distanza a monte della paratoia è spesso adeguata, particolarmente nel caso di efflussi da serbatoi. In generale, la validità di tale condizione è legata a sezioni di efflusso a monte (l'area della sezione orizzontale di un serbatoio, o la sezione verticale di un canale a monte di una paratoia) molto maggiore dell'area della luce. Nel caso di una paratoia posta su un canale, la condizione può essere non completamente soddisfacente. A titolo di esempio, illustriamo di seguito come si modifica la legge di efflusso libero da una paratoia verticale in parete sottile nel caso si debba rinunciare a tale ipotesi semplificativa.

Assumendo, in via approssimata, che la velocità a monte della paratoia sia distribuita in modo pressoché uniforme, e perciò esprimibile come rapporto fra la portata della corrente e l'area della sezione liquida, $u_0 = Q/(bh_0)$, esprimendo in modo analogo anche la velocità nella sezione contratta e tenendo presente che la corrente a monte della paratoia è gradualmente variata, l'espressione generale del teorema di Bernoulli:

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{u_0^2}{2g} = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{u_c^2}{2g}$$

assume la forma:

$$h_0 + \frac{Q^2}{2gb^2h_0^2} = C_c a + \frac{Q^2}{2gC_v^2 C_c^2 a^2 b^2} ,$$

da cui l'espressione della portata:

$$Q = \sqrt{\frac{2g(h_0 - C_c a)}{\frac{1}{\mu^2 a^2 b^2} - \frac{1}{b^2 h_0^2}}} \quad (181)$$

6.7 Stramazzi in parete sottile

Gli *stramazzi* sono dei manufatti per la misura della portata in canali a pelo liberi, costituiti da una barriera posta trasversalmente all'asse del canale a occuparne l'intera larghezza (*petto dello stramazzo*), attraverso i quali l'efflusso avviene per tracimazione della *cresta*, occupante in tutto o in parte la larghezza del petto. Si distinguono *stramazzi in parete sottile* da stramazzi in parete grossa o a *larga soglia*, che verranno descritti nel paragrafo successivo.

I primi possono essere realizzati in forme diverse, rappresentate in Figura 83: nello *stramazzo Bazin*, il più semplice di tutti, la cresta occupa l'intera larghezza del canale e su di esso l'efflusso avviene perciò senza contrazione laterale; lo *stramazzo Francis* (detto anche *stramazzo Hégly*), nel quale la lama sfiorante occupa soltanto una parte della larghezza del canale, il che comporta una contrazione laterale e una diminuzione della portata effluente rispetto a uno stramazzo Bazin di pari larghezza della cresta; gli *stramazzi triangolari*, dalla forma della lama sfiorante, il cui uso è limitato ai laboratori, per la misurazione di piccole portate; lo *stramazzo Cipolletti*, avente una lama sfiorante a forma trapezia di larghezza inferiore alla larghezza del canale, di modo che la minore portata legata alla contrazione laterale della vena effluente è compensata dall'aumento dovuto alle aree triangolari laterali e per esso possa perciò utilizzarsi la legge di efflusso dello stramazzo Bazin, di larghezza pari alla larghezza della base della lama sfiorante (base minore del trapezio).

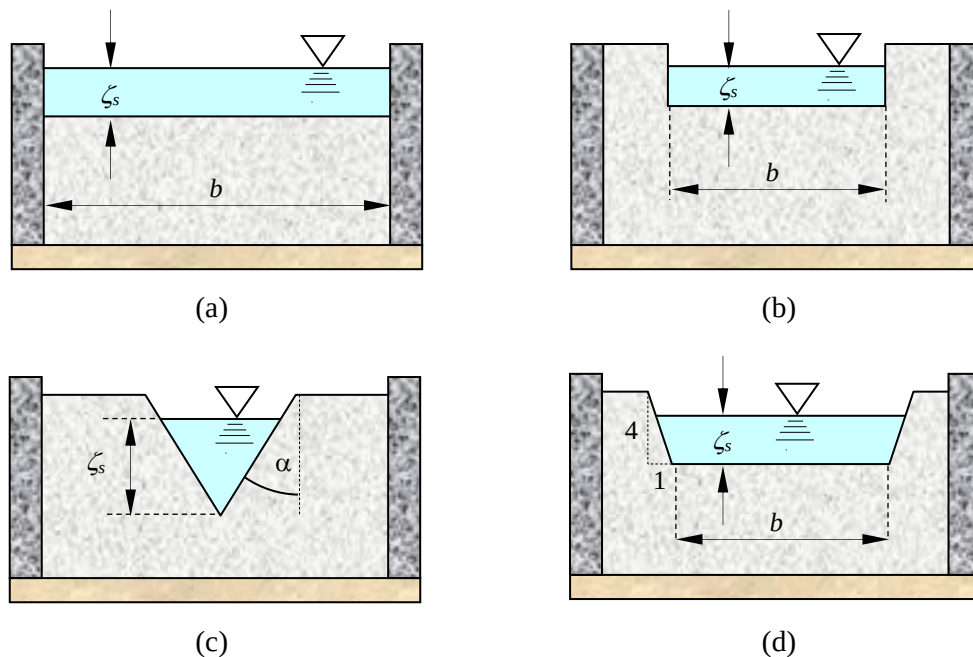


Figura 83. Stramazzi (a) Bazin, (b) Francis, (c) triangolare, (d) Cipolletti.

In prima approssimazione, la legge di efflusso dello stramazzo Bazin si deduce con riferimento alla trattazione della luce in parete sottile verticale rettangolare di dimensioni confrontabili con il battente sulla luce, per il caso in cui quest'ultimo sia nullo (vedi Figura 84). Ponendo pertanto $\zeta_1 = 0$ e $\zeta_2 = \zeta_s$ nella formula (176), si ottiene la legge di efflusso dello stramazzo Bazin:

$$Q = \mu b \sqrt{2g} \zeta_s^{3/2} = \mu b \zeta_s \sqrt{2g \zeta_s} \quad , \quad (182)$$

con $\mu = 0,4$. Tuttavia, al contrario del caso della luce in parete sottile verticale, tutte le traiettorie della lama sfiorante rivolgono la concavità verso il basso e possiedono marcata curvatura; non è quindi possibile individuare una sezione contratta sensibilmente piana con linee di corrente rettilinee, in tutti i punti della quale si possa ammettere nulla la pressione. Misure di laboratorio suggeriscono l'uso di un, più accurato, valore del coefficiente di efflusso $\mu = 0,415$. Per quanto detto, la stessa legge di efflusso vale per lo stramazzo Cipolletti avente la base della cresta di sviluppo b .

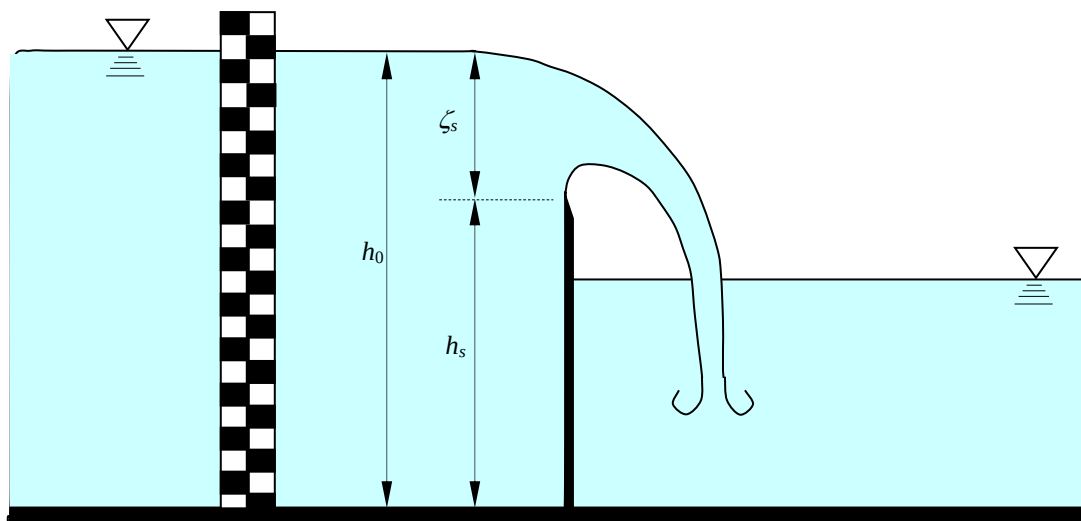


Figura 84. Schema di efflusso da stramazzo Bazin.

Per via dell'effetto di richiamo in prossimità della cresta dello stramazzo, il carico sullo stramazzo ζ_s andrà valutato a breve distanza dal manufatto, ove tale effetto risulta trascurabile, per differenza fra la lettura del livello h_0 mediante una stadia graduata e l'altezza nota del petto dello stramazzo h_s .

Si osservi che, a eccezione della formula (176), tutte le formule fin qui ottenute per il caso di velocità trascurabili a monte della luce sono espresse dal prodotto di un coefficiente di efflusso, dell'area di una sezione caratteristica e di una velocità torricelliana, del tipo $\sqrt{2g\delta}$, dove δ è un'altezza caratteristica, che assume un'espressione specifica da caso a caso⁶⁵.

Come per le luci sotto battente, anche nel caso degli stramazzi si possono ottenere relazioni che mettono in conto esplicitamente la velocità di arrivo della corrente, che è però funzione della portata, incognita nell'uso dello stramazzo quale strumento di misura. Per questo motivo, sono di uso più frequente formule (di Bazin, della S.S.I.A., di Rehbock) che consentono di tenere in conto l'energia della corrente a monte pur senza evidenziare esplicitamente la velocità di arrivo.

Ci limitiamo qui a illustrare la formula di Rehbock. Introdotto un carico efficace dato da:

$$\zeta_e = \zeta_s + 0,0011 \text{ (m)}$$

in cui l'addendo correttivo, dimensionale, tiene conto dell'effetto della tensione superficiale⁶⁶ (apprezzabile, peraltro, in laboratorio più che sul campo), il coefficiente di efflusso è dato da:

$$\mu_R = 0,402 + 0,054 \frac{\zeta_e}{h_s},$$

col che la portata assume la forma:

$$Q = \left(0,402 + 0,054 \frac{\zeta_e}{h_s} \right) b \zeta_e \sqrt{2g\zeta_e}.$$

La legge di efflusso dello stramazzo Francis è molto simile a quella dello stramazzo Bazin, differendo da questa per la considerazione di una larghezza utile pari alla larghezza della lama sfiorante diminuita di $0,2 \zeta_s$. Nel caso di velocità di arrivo trascurabile si ha pertanto:

$$Q = \mu (b - 0,2\zeta_s) \zeta_s \sqrt{2g\zeta_s}.$$

con $\mu = 0,415$, per lo stesso motivo esposto nel caso degli stramazzi Bazin e Cipolletti.

Per quanto riguarda gli stramazzi triangolari, la relativa legge di efflusso si può ottenere facilmente sulla base del procedimento utilizzabile per lo stramazzo Bazin, a differenza del quale la larghezza b dell'elemento di sezione contratta, $b d\zeta = b d\zeta C_c$, non è costante ma varia linearmente con l'affondamento ζ . Seguendo tale procedimento, per uno stramazzo triangolare avente angolo di apertura 2α e velocità di arrivo trascurabile si ottiene la legge di efflusso:

$$Q = \frac{8}{15} \mu \tan \alpha \sqrt{2g\zeta_s}^{5/2},$$

con $\mu = 0,62 \div 0,64$, maggiorato rispetto al valore teorico di 0,6. In particolare, per $\alpha = 45^\circ$ si parla di *stramazzo Thomson*. Nel caso frequente di uso dello stramazzo triangolare in laboratorio, in cui può essere richiesta elevata precisione, può essere opportuno effettuare una taratura specifica del coefficiente di efflusso.

⁶⁵ Tale osservazione può facilitare la memorizzazione delle varie formule, peraltro tutte dedotte sostanzialmente mediante lo stesso ragionamento e quindi piuttosto semplici da ricavare qualora si sia compresa la modalità di specificazione dei due tipi possibili di condizioni sulla sezione contratta.

⁶⁶ Per qualche maggiore ragguaglio vedi Citrini, §11.2.

6.8 Stramazzo a larga soglia

Anche lo stramazzo a larga soglia è un manufatto per la misura delle portate nei canali. Nella sua conformazione più essenziale, si tratta di una soglia sfiorante avente la stessa larghezza del canale su cui è realizzata, di sviluppo longitudinale sufficiente a che la vena liquida possa adagiarsi in condizioni di corrente gradualmente variata e di altezza sufficiente a far sì che, su di essa, la vena assuma la *profondità critica*, concetto che verrà illustrato nel cap.14 (vedi Figura 85).⁶⁷

Assumendo un piano di riferimento posto alla quota della soglia sfiorante, ammessa l'ipotesi di piccole velocità a monte dello stramazzo, ove la corrente è pure gradualmente variata, ed espressa la profondità della corrente sulla soglia come profondità critica Y_c della corrente, il teorema di Bernoulli si esprime nella forma:

$$\zeta_s = Y_c + \frac{u_c^2}{2g}.$$

Per le ipotesi di piccole velocità a monte della soglia e di conservazione dell'energia, espressa dal teorema di Bernoulli, la linea dei carichi totali, pressoché orizzontale, è posta alla quota della superficie libera della corrente a monte della soglia, a una distanza da questa dove l'effetto di richiamo non sia sensibile. Pertanto, il carico sullo stramazzo ζ_s costituisce anche il valore di energia rispetto al fondo della corrente sulla soglia, che è minimo per la portata fluente giacché la corrente è in condizioni critiche. Avendo la sezione forma rettangolare, per quanto riportato al §14.3 si ha:

$$Y_c = \frac{2}{3} E_{\min} = \frac{2}{3} \zeta_s.$$

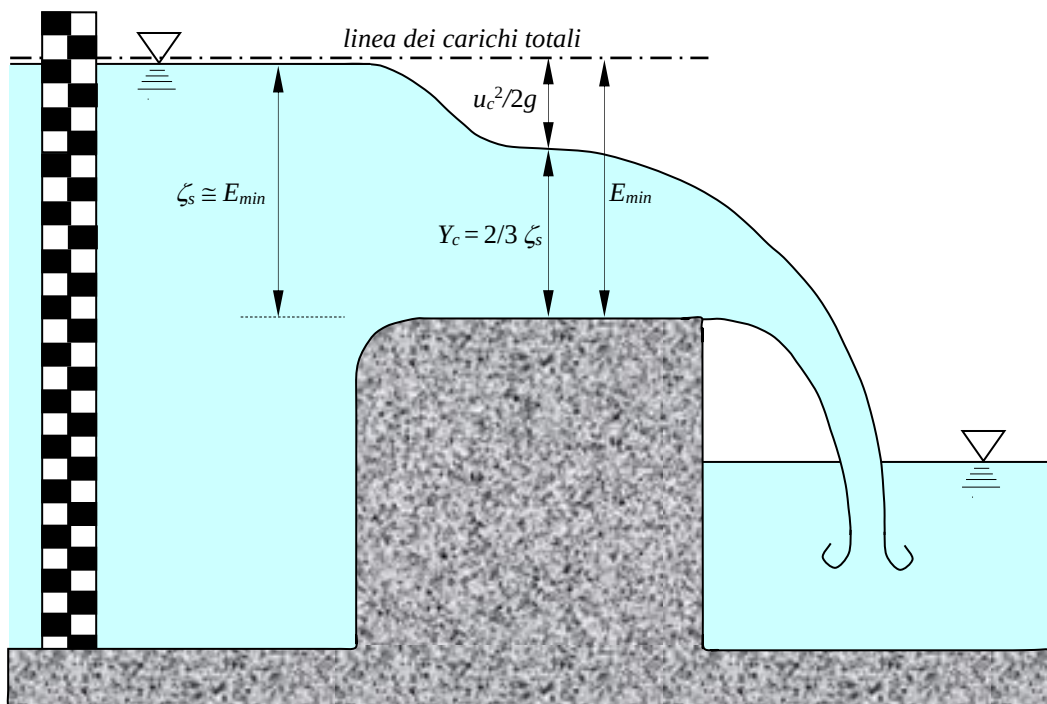


Figura 85. Schema di efflusso da stramazzo a larga soglia.

⁶⁷ Altri manufatti di misura delle portate basati su questo principio (*modellatori a risalto*) sfruttano anche l'effetto di un restringimento della larghezza del canale nei confronti dell'induzione della transizione per lo stato critico; sono quindi realizzati sia con un innalzamento del fondo che con un restringimento della sezione.

La velocità sulla soglia u_c assume pertanto l'espressione:

$$u_c = \sqrt{2g \frac{\zeta_s}{3}} ,$$

costante sulla sezione di area $\Omega_c = bY_c$. L'espressione della portata è data pertanto da:

$$Q = bY_c \sqrt{2g \frac{\zeta_s}{3}} = b \frac{2}{3} \zeta_s \sqrt{2g \frac{\zeta_s}{3}} = b \frac{2}{3\sqrt{3}} \zeta_s \sqrt{2g\zeta_s} ,$$

da cui infine la legge di efflusso:

$$Q = \mu b \zeta_s \sqrt{2g\zeta_s} ,$$

formalmente identica a quella dello stramazzo Bazin, ma caratterizzata da un valore del coefficiente di efflusso $\mu = 2/(3\sqrt{3}) = 0,385$, inferiore al valore teorico relativo allo stramazzo Bazin, $\mu = 0,4$.

Anche in questo caso, la misura della portata richiede la misura del livello a una distanza sufficiente a monte della soglia mediante una stadia. Va osservato come la transizione della corrente per lo stato critico sia essenziale perché la portata dipenda unicamente dal livello a monte della soglia. Identica osservazione vale per lo stramazzo in parete sottile, che richiede di non essere rigurgitato. In caso contrario, la portata dipende dai livelli sia a monte che a valle ed è misurabile, oltre che in modo meno agevole, con scarsa precisione.

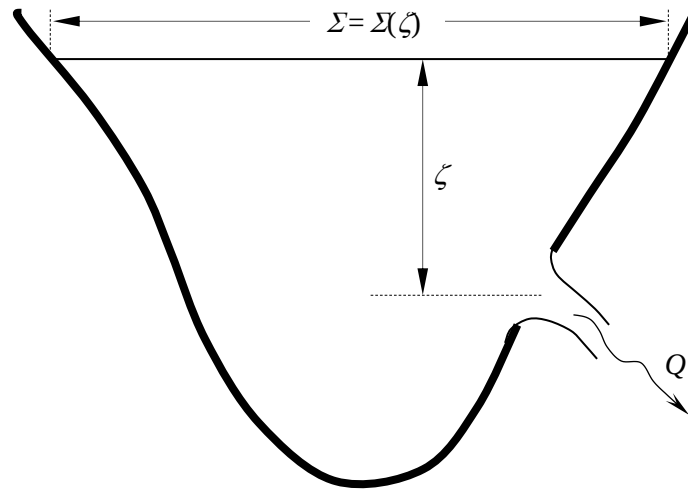


Figura 86. Svuotamento di un serbatoio mediante luce a battente.

6.9 Transitori

Le leggi studiate nei paragrafi precedenti possono essere utilizzate anche per analizzare processi di efflusso nei quali non si possano considerare condizioni stazionarie: ad esempio, lo svuotamento di un recipiente per effetto dell'efflusso da una luce praticata su una sua parete. Tuttavia, poiché a rigore si tratta di un fenomeno di moto vario, mentre le leggi di efflusso sono state dedotte per moti stazionari, queste possono essere utilizzate soltanto se il fenomeno di efflusso è sufficientemente lento da poterlo considerare come una successione di stati stazionari. Ciò è lecito se il tempo caratteristico dato dal rapporto fra volume del serbatoio e portata della luce è abbastanza grande. Detto ζ il carico sulla luce (Figura 86), la portata Q sarà quindi in generale una sua funzione:

$$Q = Q(\zeta),$$

la cui particolare espressione dipenderà dal tipo di luce considerata. Sia il carico che la portata sono funzione incognite del tempo. Il problema è perciò determinato se si può scrivere una seconda relazione fra le due incognite.

Per effetto della portata effluente, il carico sulla luce diminuisce progressivamente e così il volume contenuto nel serbatoio. Per la conservazione della massa, in un intervallo di tempo elementare dt il volume $Q dt$ defluito dalla luce deve uguagliare la diminuzione del volume contenuto nel recipiente (equazione di continuità):

$$Q dt = -\Sigma d\zeta,$$

nella quale Σ è l'area della superficie del pelo libero, al più funzione del livello del pelo libero e, quindi, del carico sulla luce; il segno meno rende conto del fatto che a un dato volume effluito dalla luce (positivo) corrisponde una diminuzione del carico, e pertanto una sua variazione $d\zeta$ negativa.

Il sistema costituito dalla legge di efflusso e dall'equazione di continuità, corredato delle condizioni iniziali, rappresenta compiutamente il processo di moto vario, la cui rappresentazione in termini finiti potrà ottenersi mediante integrazione del sistema. A seconda della complessità delle espressioni della legge di efflusso e della relazione $\Sigma(\zeta)$, l'integrazione potrà eseguirsi analiticamente o per via numerica, con un procedimento alle differenze finite. In questo secondo caso, conviene seguire il seguente procedimento, di carattere piuttosto generale, suscettibile al più di qualche modesto adattamento a seconda del tipo di luce.

Con riferimento all'esempio della luce sotto battente di cui alla Figura 87, si consideri innanzitutto che la luce risulterà sotto battente fino a che il pelo libero non raggiungerà il bordo superiore della luce, al di sotto del quale il funzionamento della luce, e quindi la legge di efflusso, muteranno. In ciascuna delle due fasi del funzionamento della luce, il procedimento di integrazione va impostato come di seguito illustrato, a titolo esemplificativo, con riferimento alla prima fase in cui la luce è sotto battente.

Si suddivide la differenza di quota fra il livello iniziale del pelo libero e il bordo superiore della luce in N parti uguali $\Delta\zeta$ e si considerino quindi i corrispondenti $N+1$ valori del battente (dal valore iniziale ζ_0 al valore finale ζ_N). Per la generica coppia di battenti, ζ_{i-1} e ζ_i , si consideri il valore medio:

$$\zeta_{mi} = \frac{1}{2}(\zeta_{i-1} + \zeta_i).$$

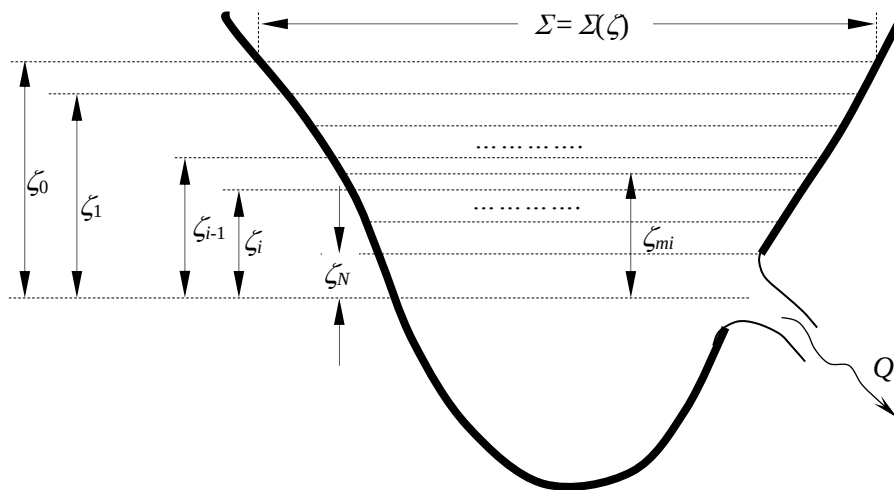


Figura 87. Schema di impostazione dell'integrazione alle differenze finite del sistema di equazioni rappresentatrici del processo di svuotamento.

Detto Δt l'intervallo di tempo incognito nel quale il livello del pelo libero si abbassa di $\Delta \zeta$, con un certo grado di approssimazione⁶⁸ l'equazione di continuità può essere riscritta sostituendo tali incrementi finiti $\Delta \zeta$ (costante e positivo) e Δt_i (in generale variabile) ai corrispondenti differenziali, valutando la portata, tramite la legge di efflusso, e la superficie $\Sigma(\zeta)$, in funzione del carico medio:

$$Q(\zeta_{m_i}) \Delta t_i = \Sigma(\zeta_{m_i}) \Delta \zeta ,$$

così da poter esplicitare l'intervallo di tempo incognito:

$$\Delta t_i = \frac{\Sigma(\zeta_{m_i}) \Delta \zeta}{Q(\zeta_{m_i})} .$$

Evidentemente, l'intervallo di tempo necessario perché il pelo libero raggiunga il bordo superiore della luce è dato da:

$$t_s = \sum_{i=1}^N \Delta t_i .$$

Volendo determinare il tempo necessario affinché il pelo libero raggiunga il bordo inferiore della luce, il procedimento andrà ripetuto con riferimento alla legge di efflusso adatta al nuovo funzionamento, essenzialmente da stramazzo. In proposito, è utile una puntualizzazione riguardante il differente comportamento di una luce a battente e di uno stramazzo, che verrà illustrato con riferimento a un serbatoio cilindrico ad asse verticale, per il quale si ha quindi $\Sigma = \text{cost}$ e l'equazione di continuità può essere integrata analiticamente.

Si consideri dapprima il caso di una luce di fondo in parete sottile, per la quale la portata assume l'espressione (173), con $\mu = 0,6$. In tal caso l'equazione di continuità assume l'espressione:

$$\mu \Omega \sqrt{2g\zeta} \, dt = -\Sigma \, d\zeta ,$$

da cui, separando le variabili:

$$\frac{\mu \Omega \sqrt{2g}}{\Sigma} \, dt = -\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} ,$$

che, integrata, fornisce:

$$\frac{\mu \Omega \sqrt{2g}}{\Sigma} t = -2\sqrt{\zeta} + c ,$$

in cui c è una costante di integrazione, da determinare imponendo le condizioni iniziali: $\zeta = \zeta_0$ per $t = 0$. Si ottiene così la legge di svuotamento:

⁶⁸ L'analisi numerica tratta il problema della valutazione dell'errore degli schemi di discretizzazione, di cui quello qui illustrato è uno dei più elementari e purtuttavia del tutto adeguato agli scopi pratici. Come del resto è abbastanza intuitivo, l'errore decresce al diminuire del passo di integrazione $\Delta \zeta$, che deve quindi essere scelto opportunamente. Volendosi togliere ogni dubbio sulla adeguatezza del valore scelto, conviene eseguire il calcolo ripetutamente assumendo valori del passo sempre minori, finché la variazione del risultato finale (il tempo di svuotamento) degli ultimi due calcoli è inferiore ad una prefissata tolleranza. Tale verifica non è particolarmente onerosa, giacché modesto è l'impegno computazionale e di implementazione dello schema illustrato, eseguibile su un foglio elettronico.

$$\frac{\mu\Omega\sqrt{2g}}{\Sigma} t = 2(\sqrt{\zeta_0} - \sqrt{\zeta}).$$

A serbatoio svuotato il carico sulla luce si riduce alla differenza di quota a fra la luce e la sezione contratta: $\zeta = a$. Il tempo necessario al completo svuotamento è quindi:

$$t = \frac{2\Sigma(\sqrt{\zeta_0} - \sqrt{a})}{\mu\Omega\sqrt{2g}}.$$

Nel caso in cui la luce sia uno stramazzo Bazin di larghezza b , la legge di efflusso è la (182) ($\mu = 0,4$), la quale, inserita nell'equazione di continuità fornisce:

$$\mu b \zeta_s \sqrt{2g \zeta_s} dt = -\Sigma d\zeta,$$

ovvero, separando le variabili:

$$\frac{\mu b_s \sqrt{2g_s}}{\Sigma} dt = -\frac{d\zeta}{\zeta^{3/2}}.$$

Integrando e imponendo la medesima condizione al contorno del caso precedente, si ha infine:

$$\frac{\mu b_s \sqrt{2g_s}}{\Sigma} t = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{\zeta}} - \frac{1}{\sqrt{\zeta_0}} \right). \quad (183)$$

In questo caso, il completo svuotamento si verifica per $\zeta = 0$, che, a norma della (183), si ottiene soltanto asintoticamente per $t \rightarrow \infty$. Si osservi che se il tempo di svuotamento fosse calcolato alle differenze finite, si otterrebbe un valore finito per qualsiasi valore del passo di integrazione $\Delta\zeta$, tanto maggiore quanto minore è il passo (ottenendo la soluzione corretta soltanto per $\Delta\zeta \rightarrow 0$). In tal caso, è opportuno riferirsi a condizioni di quasi totale svuotamento, corrispondente all'efflusso di una frazione minima della portata iniziale, o a un valore minimo del carico sullo stramazzo.

Sempre per esemplificare l'approccio a questo tipo di problemi, nel caso la luce fosse praticata su una parete verticale, in una prima parte del processo si potrebbe utilizzare, se ne ricorrono le condizioni, la legge (175) per battenti molto maggiori delle dimensioni caratteristiche della luce; al di sotto di un certo valore del carico tale ipotesi non sarebbe certamente più verificata e occorrerebbe utilizzare una legge di tipo (176) (se formulabile per la particolare forma della luce considerata), fino a che il pelo libero non raggiunge il bordo superiore della luce; dopodiché occorrerà considerare un efflusso da stramazzo.

CAPITOLO SETTIMO

7. ANALISI DIMENSIONALE

7.1 Introduzione

Nell'Idraulica, come più in generale nella Fisica, molte leggi possono essere ricavate per via puramente deduttiva: è il caso delle varie forme dell'equazione di continuità studiate nel §4.9, o delle equazioni di congruenza della Scienza delle Costruzioni. Altre leggi possono essere formulate esclusivamente sulla base di prove sperimentali, ossia, per via empirica: è il caso delle proprietà reologiche dei fluidi, di cui al §2.5, delle leggi della Dinamica (§1.3.5), o del legame costitutivo dei solidi elastici (legge di Hooke), anche questa studiata in Scienza delle Costruzioni. Naturalmente, gli esperimenti forniscono degli insiemi di misure, le quali, in sé, non costituiscono una legge fisica, ma costituiscono l'evidenza cui la legge fisica ricercata nel caso specifico deve adattarsi, a meno degli errori sperimentali. A tale fine, è comunque necessario ipotizzare una qualche forma generale della legge, eventualmente definita a meno di coefficienti numerici da determinare sulla base delle misure.

Anche ammesso di conoscere quali siano le grandezze fisiche rilevanti nel dato fenomeno in studio (il che sarà comunque un risultato preliminare di prove sperimentali), l'assenza di una regola per la formulazione della legge da sottoporre al confronto con i dati sperimentali può rendere la soluzione del problema veramente ardua. Un aiuto prezioso per la formulazione di leggi fisiche per via empirica è offerto dall'analisi dimensionale, la quale, dallo studio delle dimensioni fisiche delle grandezze interessate nel fenomeno, deduce le relazioni cui deve sottostare la forma di qualunque relazione fra le variabili stesse. Nei paragrafi seguenti verranno presentati i principali risultati dell'analisi dimensionale, successivamente a una estensione dei concetti presentati nel §1.3.1.

7.2 Omogeneità dimensionale

Per misura di una grandezza fisica si intende il rapporto fra essa e un'altra grandezza della stessa specie scelta come unità, da eseguire con modalità determinate. Si richiede, inoltre, che variando la grandezza campione assunta a unità di misura si mantenga inalterato il rapporto delle misure di due grandezze della stessa specie, in modo da poter attribuire un *valore oggettivo* a tale rapporto. Le grandezze campione devono essere inalterabili e riproducibili.

Sulla base della definizione di misura, una grandezza fisica, ad esempio l'energia cinetica E_c di un corpo di massa m in movimento traslatorio con velocità u :

$$E_c = \frac{1}{2} m u^2 \quad (184)$$

può scriversi nel modo seguente⁶⁹:

$$E_c = E_c^* E_{cu} \quad , \quad (185)$$

in cui E_c^* rappresenta la misura e E_{cu} l'unità di misura della grandezza, o grandezza campione. Nella Meccanica, tutte le grandezze fisiche possono essere espresse in funzione di tre *grandezze fondamentali*; le altre grandezze si dicono *derivate*. Si dice *coerente* un sistema di unità di misura (*sistema di misurazione*) che soddisfi le seguenti due condizioni: a) che tutte le grandezze fisiche della medesima specie siano misurate con la medesima unità di misura; b) che le equazioni fra le

⁶⁹ Qui il termine "grandezza fisica" è utilizzato con riferimento ad uno specifico fenomeno: l'energia cinetica del dato corpo; la forza applicata a una leva; la lunghezza del braccio di un pendolo; la velocità di rotazione di una giostra. Nel §1.3.1 lo stesso termine era stato utilizzato in senso generale o, se si vuole, ad identificare la *specie* della grandezza fisica: la grandezza lunghezza, la grandezza velocità angolare, etc..., indicate con il simbolo della grandezza maiuscolo, racchiuso fra parentesi quadre.

misure siano formalmente identiche alle equazioni fra le grandezze. Per quanto riguarda la seconda condizione, e con riferimento all'esempio dell'energia cinetica, si deve quindi avere:

$$E_c^* = \frac{1}{2} m^* u^{*2}.$$

Scrivendo la (184) esprimendo tutte le grandezze ivi presenti nella forma (185) si ha:

$$E_c^* E_{cu} = \frac{1}{2} m^* m_u (u^* u_u)^2 = \frac{1}{2} m^* m_u u^{*2} u_u^2,$$

per cui la medesima relazione formale deve valere fra le unità di misura, a meno di eventuali coefficienti numerici:

$$E_{cu} = m_u u_u^2. \quad (186)$$

Il Sistema Internazionale di misurazione, le cui unità fondamentali sono il metro (m), il secondo (s) e il chilogrammo massa (kg), è coerente. Un sistema che differisse dal SI per l'uso del chilopond (o chilogrammo forza, kp) come unità di misura delle forze, conservando il chilogrammo massa come unità delle masse, non sarebbe coerente. La seconda legge della dinamica si scriverebbe:

$$f = ma$$

fra le grandezze, ma:

$$f^* = \frac{1}{g} m^* a^*$$

fra le misure, essendo $1 \text{ kp} = 9,80665 \text{ N}$. È invece coerente il sistema pratico, in uso a livello tecnico fino a pochi decenni or sono, nel quale il kp è l'unità di misura della forza e il $\text{kp m}^{-1} \text{ s}^2$ è l'unità di misura della massa.

Espressioni dell'unità di misura di una grandezza fisica in funzione di unità di altre grandezze del tipo (186) prendono il nome di *equazioni dimensionali*. In particolare, esse consentono di esprimere l'unità di misura di una grandezza fisica in funzione delle tre grandezze fondamentali. Nell'attuale uso scientifico, le equazioni dimensionali hanno i secondi membri costituiti da prodotti di potenze delle unità di misura delle grandezze fondamentali. Si chiamano *dimensioni fisiche* di una grandezza derivata rispetto alle grandezze fondamentali gli esponenti delle potenze che figurano nel prodotto di potenze della rispettiva equazione dimensionale.

Così, sulla base della definizione della velocità di moto traslatorio uniforme:

$$u = \frac{l}{t},$$

in cui l è la lunghezza percorsa nell'intervallo di tempo t , nonché della corrispondente equazione dimensionale:

$$u_u = l_u t_u^{-1},$$

l'unità di misura dell'energia cinetica rimane definita dalla seguente equazione dimensionale, in funzione delle unità di misura di lunghezza, tempo e massa:

$$E_{cu} = m_u l_u^2 t_u^{-2} \quad (187)$$

In generale, scelte tre grandezze fondamentali $\mathcal{G}_{u1}$, $\mathcal{G}_{u2}$ e $\mathcal{G}_{u3}$, una generica grandezza $\mathcal{G}$ ha equazione dimensionale della forma:

$$\mathcal{G}_u = \mathcal{G}_{u_1}^\alpha \mathcal{G}_{u_2}^\beta \mathcal{G}_{u_3}^\gamma,$$

in cui α, β e γ sono le dimensioni fisiche di $\mathcal{G}$. Introdotta la misura $\mathcal{G}^*$, la grandezza si esprime come:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}^* \mathcal{G}_u = \mathcal{G}^* \mathcal{G}_{u_1}^\alpha \mathcal{G}_{u_2}^\beta \mathcal{G}_{u_3}^\gamma.$$

Assumendo un nuovo sistema di unità di misura $\mathcal{G}'_{u_1}$, $\mathcal{G}'_{u_2}$ e $\mathcal{G}'_{u_3}$, della stessa specie delle precedenti, tale quindi che

$$\mathcal{G}_{u_1} = r_1 \mathcal{G}'_{u_1} \quad ; \quad \mathcal{G}_{u_2} = r_2 \mathcal{G}'_{u_2} \quad ; \quad \mathcal{G}_{u_3} = r_3 \mathcal{G}'_{u_3},$$

si ha:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}^* \mathcal{G}_{u_1}^\alpha \mathcal{G}_{u_2}^\beta \mathcal{G}_{u_3}^\gamma = \mathcal{G}^* (r_1 \mathcal{G}'_{u_1})^\alpha (r_2 \mathcal{G}'_{u_2})^\beta (r_3 \mathcal{G}'_{u_3})^\gamma = \mathcal{G}^* r_1^\alpha r_2^\beta r_3^\gamma \mathcal{G}'_{u_1}^\alpha \mathcal{G}'_{u_2}^\beta \mathcal{G}'_{u_3}^\gamma,$$

per cui la misura della grandezza nel nuovo sistema di unità è data da:

$$(\mathcal{G}^*)' = \mathcal{G}^* r_1^\alpha r_2^\beta r_3^\gamma, \quad (188)$$

Una grandezza avente dimensioni zero rispetto a tutte le grandezze fondamentali è detta *adimensionale* o *numero puro*. Questa categoria di grandezze assume particolare rilievo nell'analisi dimensionale, poiché, a norma della (188), *una grandezza adimensionale non varia per cambiamento del sistema di unità di misura*.

Da quanto sopra esposto, discende un importante principio, che a questo punto può forse apparire banale, ma che conviene evidenziare: nella (184) il primo e il secondo membro posseggono, evidentemente, le medesime dimensioni fisiche; sono, cioè, *dimensionalmente omogenei*. Sul principio della omogeneità dimensionale, che vale ovviamente per i due membri di una legge fisica, così come per i vari termini sommati fra loro di uno dei membri, si basa sostanzialmente l'analisi dimensionale.

L'omogeneità dimensionale è condizione necessaria, ma non sufficiente, per la validità di una legge fisica. Pertanto, ove una espressione, che si pretende esprimere una legge fisica, non risulti dimensionalmente omogenea, essa è certamente errata (di più: *non è una legge fisica!*). Questa constatazione dovrebbe sempre essere tenuta a mente per un rapido controllo delle formule. Naturalmente, l'omogeneità dimensionale di una formula non ne garantisce automaticamente anche la correttezza, in quanto tale verifica non consente di accertare la correttezza di coefficienti numerici eventualmente presenti nella formula, né di riscontrare errori legati alla presenza di grandezze di diversa specie aventi le medesime unità di misura (quali lavoro e momento di una forza, entrambi esprimibili in Nm).

Va infine rilevato che la scelta delle grandezze fondamentali presenta margini di discrezionalità, ma non è del tutto arbitraria. Limitando il discorso alla Meccanica, esse devono infatti consentire di esprimere, mediante una equazione dimensionale, le grandezze di tipo sia geometrico, che cinematico, che dinamico, ed essere dimensionalmente indipendenti⁷⁰. Dette $\mathcal{G}_{u_1}$, $\mathcal{G}_{u_2}$ e $\mathcal{G}_{u_3}$ le unità di misura delle grandezze fondamentali, esse sono dimensionalmente indipendenti se la grandezza

$$\mathcal{G}_{u_1}^\alpha \mathcal{G}_{u_2}^\beta \mathcal{G}_{u_3}^\gamma$$

può essere resa un numero puro soltanto imponendo $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ossia, se nessuna delle tre può essere ottenuta dalle altre due.

⁷⁰ I termini utilizzati richiamano concetti di algebra lineare quali "dimensione di uno spazio vettoriale" e "indipendenza lineare". In effetti, l'analisi dimensionale è suscettibile di rappresentazione mediante i concetti e gli strumenti dell'algebra lineare. Una simile impostazione è seguita nel Marchi-Rubatta.

7.3 Teorema del pigreco

Si consideri un fenomeno fisico nel quale intervengano n grandezze $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n$ dotate di dimensioni fisiche, inclusive di eventuali costanti, quale, ad esempio, l'accelerazione di gravità. Si indichi la legge fisica che governa il fenomeno come una relazione funzionale fra le n grandezze:

$$F(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n) = 0. \quad (189)$$

Ancorché sulla relazione (189) si possa non avere alcun tipo di informazione, gli addendi che la compongono devono essere dimensionalmente omogenei. Analoga considerazione deve farsi per la forma equivalente, esprimente una delle grandezze in funzione delle rimanenti:

$$\mathcal{G}_i = f_i(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_{i-1}, \mathcal{G}_{i+1}, \dots, \mathcal{G}_n). \quad (190)$$

A seconda del tipo di fenomeno in studio, si considerino m grandezze fondamentali ($m=3$ nella Meccanica), dimensionalmente indipendenti, scelte fra le n grandezze che intervengono nel fenomeno e che, senza perdita di generalità, indicheremo con i pedici da 1 a m . Le rimanenti $n-m$ grandezze potranno essere espresse come grandezze derivate in funzione delle prime. In generale, la i -esima grandezza avrà l'equazione dimensionale del tipo:

$$\mathcal{G}_{iu} = \mathcal{G}_1^{\alpha_i} \mathcal{G}_2^{\beta_i} \mathcal{G}_3^{\gamma_i},$$

in cui α_i, β_i e γ_i sono le dimensioni fisiche di $\mathcal{G}_i$ rispetto alle grandezze fondamentali. La relazione precedente vale per tutte le n grandezze. Evidentemente, comunque siano state scelte le grandezze fondamentali, purché indipendenti, risulta $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1$ e $\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

In un sistema di misurazione coerente, la corrispondente equazione fra le grandezze dimensionali del tipo (184) differirà al più per un coefficiente numerico:

$$\mathcal{G}_i = \pi_i \mathcal{G}_1^{\alpha_i} \mathcal{G}_2^{\beta_i} \mathcal{G}_3^{\gamma_i}, \quad (191)$$

nella quale il fattore numerico π_i , detto *numero indice*, adimensionale, è indipendente dal sistema di misurazione prescelto (purché coerente). In particolare, si ha sempre $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 1$, trattandosi delle misure di ciascuna delle grandezze fondamentali rispetto a sé stessa.

Inserendo le n relazioni del tipo (191) nella (189), si ottiene una relazione del tipo:

$$\Phi(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \pi_4, \pi_5, \dots, \pi_{n-1}, \pi_n) = 0. \quad (192)$$

che, sempre per la coerenza del sistema di misurazione, può essere scritta, in modo formalmente identico, sostituendo alle grandezze le corrispondenti misure. Qualunque sia il sistema di misurazione coerente scelto, le misure delle grandezze fondamentali sono unitarie, mentre i numeri indice, in quanto adimensionali, sono univocamente identificati perché non dipendenti dal sistema di misurazione. La legge fisica, per quanto incognita, può quindi certamente scriversi nella forma:

$$\Phi(1, 1, 1, \pi_4, \pi_5, \dots, \pi_{n-1}, \pi_n) = 0, \quad (193)$$

ovvero:

$$\varphi(\pi_4, \pi_5, \dots, \pi_{n-1}, \pi_n) = 0, \quad (194)$$

ossia, in funzione dei soli $n-m$ numeri indice:

$$\pi_i = \frac{\mathcal{G}_i}{\mathcal{G}_1^{\alpha_i} \mathcal{G}_2^{\beta_i} \mathcal{G}_3^{\gamma_i}}$$

Tale relazione costituisce la formulazione analitica del Teorema del pigreco⁷¹, secondo il quale in un sistema di misurazione coerente composto da m grandezze fondamentali, una legge fisica fra n grandezze dimensionali può essere ricondotta a una relazione fra $n-m$ numeri indice. È importante ribadire che tale conclusione prescinde da qualunque conoscenza preliminare sulla legge fisica, né, d'altro canto, fornisce (salvo il caso in cui risulti un unico numero indice) alcuna indicazione sulla forma della legge cercata o sulle grandezze fisiche che intervengono nel fenomeno in studio; tale conoscenza deriva essenzialmente dall'evidenza sperimentale. Ciononostante, il teorema è di grandissima utilità pratica, in quanto consente di ridurre il numero delle variabili che governano il fenomeno in studio. Il vantaggio è notevole particolarmente nel caso della ricerca su base empirica, in quanto la diminuzione del numero delle variabili riduce enormemente la mole del lavoro sperimentale necessario.

7.4 Grandezze scala. Adimensionalizzazione di equazioni.

Analizzando una legge fisica, può capitare di riconoscere la possibilità di semplificazione della stessa trascurando certi termini in essa contenuti, in quanto di ridotta entità. Di norma, una tale analisi per ordini di grandezza va eseguita su grandezze adimensionali, perché, per quanto mostrato in precedenza, le conclusioni sono indipendenti dal particolare sistema di misurazione scelto. Più in generale, l'analisi degli ordini di grandezza può essere effettuata non soltanto su leggi espresse in forma finita, ma anche sulle equazioni differenziali che reggono il fenomeno in studio. Tali considerazioni possono portare non solo a una semplificazione delle equazioni, ma anche alla definizione di differenti modalità di comportamento del sistema, anche di grande rilevanza sul piano sia fisico che pratico e, in generale, a una più completa comprensione del fenomeno. Con il termine "analisi dimensionale" si intende talora un utilizzo specifico dei concetti presentati in precedenza nell'analisi di una legge fisica in qualsivoglia forma (differenziale o finita) per ordini di grandezza. Nell'ambito del corso, riveste un particolare interesse l'analisi della forma adimensionalizzata dell'equazione di Navier-Stokes e dell'equazione di continuità, che viene di seguito illustrata.

Si consideri la formulazione dell'equazione di Navier-Stokes per il caso di un fluido pesante, comprimibile, viscoso, in moto vario:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\nabla \vec{u})^T \vec{u} = -g \nabla z - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \vec{u})$$

Ai fini della derivazione di una forma adimensionale dell'equazione, è sufficiente scegliere tre grandezze fondamentali indipendenti, rispetto alle quali esprimere tutte le altre; per esempio, una velocità U , una lunghezza L e una densità ρ_0 caratteristiche del particolare fenomeno idrodinamico che si intende studiare. Se, ad esempio, si intendesse studiare un moto ondoso, a seconda del particolare aspetto di interesse nell'ambito del fenomeno, come velocità si potrebbe considerare la velocità di avanzamento delle creste dell'onda, oppure la velocità propria delle particelle appena sotto la cresta (in generale differenti); come lunghezza caratteristica potrebbe utilizzarsi l'altezza dell'onda (differenza di quota fra cresta e cavo) o la lunghezza dell'onda (distanza fra due creste successive), e così via.

Sulla base delle grandezze fondamentali scelte, si definiscano le seguenti grandezze adimensionali, indicate con un asterisco:

$$x_i^* = \frac{x_i}{L}; \quad \vec{u}^* = \frac{\vec{u}}{U}; \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}; \quad p^* = \frac{p}{\rho_0 U^2}; \quad t^* = \frac{t}{L/U},$$

le quali definiscono implicitamente una pressione caratteristica $P = \rho_0 U^2$ e un tempo caratteristico $T = L/U$. Per quanto riguarda gli operatori differenziali, si ha:

⁷¹ Denominazione di origine "diplomatica", visto il numero di autori che la derivarono indipendentemente (Vaschy, Riabouckinsky, Buckingham), o utilizzarono implicitamente concetti di analisi dimensionale (Fourier).

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial(t^*L/U)} = \frac{1}{L/U} \frac{\partial}{\partial t^*}$$

$$\nabla \equiv \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial/\partial(x_1^*L) \\ \partial/\partial(x_2^*L) \\ \partial/\partial(x_3^*L) \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1^* \\ \partial/\partial x_2^* \\ \partial/\partial x_3^* \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \nabla^* .$$

Sostituendo nell'equazione di Navier-Stokes si ha:

$$\frac{U^2}{L} \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + \frac{U^2}{L} (\nabla^* \vec{u}^*)^T \vec{u}^* = -g \nabla^* z^* - \frac{U^2}{L} \frac{1}{\rho^*} \nabla^* p^* + \frac{U}{L^2} \nu \nabla^{*2} \vec{u}^* + \frac{U}{L^2} \frac{1}{3} \nu \nabla^* (\nabla^* \cdot \vec{u}^*) ,$$

da cui, dividendo per U^2/L :

$$\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + (\nabla^* \vec{u}^*)^T \vec{u}^* = -\frac{gL}{U^2} \nabla^* z^* - \frac{1}{\rho^*} \nabla^* p^* + \frac{\nu}{UL} \nabla^{*2} \vec{u}^* + \frac{\nu}{UL} \frac{1}{3} \nabla^* (\nabla^* \cdot \vec{u}^*) ,$$

nella quale si riconoscono due gruppi adimensionali:

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu} \quad (\text{numero di Reynolds})$$

$$\text{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gL}} \quad (\text{numero di Froude}) .$$

L'equazione di Navier-Stokes adimensionalizzata si può quindi scrivere:

$$\frac{D \vec{u}^*}{Dt^*} = -\frac{1}{\text{Fr}^2} \nabla^* z^* - \frac{1}{\rho^*} \nabla^* p^* + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^{*2} \vec{u}^* + \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{3} \nabla^* (\nabla^* \cdot \vec{u}^*) .$$

L'equazione è suscettibile di ulteriore analisi se le grandezze fondamentali sono state scelte dello stesso ordine di grandezza delle corrispondenti variabili dimensionali. Tali grandezze caratteristiche vengono dette *grandezze scala*. Ad esempio, nel moto ondoso, in prima approssimazione, le particelle percorrono delle orbite ellittiche con velocità variabile con legge sinusoidale. A un certo istante, le componenti orizzontali della velocità sono massime sotto la cresta dell'onda e nulle nel punto in cui la superficie libera assume il livello medio idrostatico. Le velocità hanno l'ordine di grandezza del valore massimo durante l'oscillazione, U_{max} , con variazione spaziale da zero al valore massimo in un quarto della lunghezza dell'onda ℓ . Scegliendo U_{max} , e ℓ come velocità e lunghezza caratteristica, $U = U_{max}$, $L = \ell$, il termine convettivo della forma dimensionale dell'equazione di Navier-Stokes è dell'ordine⁷²:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \approx U \frac{U}{L/4} \propto \frac{U^2}{L}$$

e quindi il termine adimensionale corrispondente di ordine uno:

⁷² L'ordine di grandezza del termine non cambia per effetto del fattore 4. Il simbolo $\propto$ si usa correntemente per indicare l'ordine di grandezza di un termine, ovvero proporzionalità. Se utilizzato con riferimento a grandezze vettoriali, si conviene di intendere le relative espressioni riferite ai moduli.

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \propto 1.$$

Analogamente, i termini viscosi sono di ordine $\nu U/L^2$ e il termine gravitazionale di ordine g . Se le grandezze caratteristiche dei tempi e delle pressioni, rispettivamente $T=L/U$ e $P=\rho_0 U^2$, sono anche grandezze scala, ossia se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \propto \frac{U}{L/U} = \frac{U^2}{L} \quad ; \quad \frac{1}{\rho} \nabla p \propto \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho_0 U^2}{L} = \frac{U^2}{L}$$

allora anche la derivata euleriana della velocità e il termine contenente il gradiente di pressione sono dello stesso ordine di grandezza del termine convettivo. Risulta quindi evidente il significato fisico dei numeri di Reynolds e di Froude. Il primo ha il significato di ordine di grandezza del rapporto fra forze di inerzia, legate alla derivata lagrangiana della velocità, e forze viscosi:

$$\frac{(\nabla \vec{u})^T \vec{u}}{\nu \nabla^2 \vec{u}} \propto \frac{U^2 / L}{\nu U / L^2} = \frac{UL}{\nu} = \text{Re} ;$$

il quadrato del secondo rappresenta l'ordine di grandezza del rapporto fra forze di inerzia e gravità:

$$\frac{(\nabla \vec{u})^T \vec{u}}{g \nabla z} \propto \frac{U^2 / L}{gL / L} = \frac{U^2}{gL} = \text{Fr}^2 ;$$

Se T e P sono grandezze scala per i tempi e le pressioni, tutti i termini adimensionali sono di ordine uno. Pertanto, moti a numero di Reynolds molto alto sono poco influenzati dalla viscosità, perché i termini viscosi della forma adimensionale dell'equazione di Navier-Stokes sono trascurabili rispetto ai rimanenti; viceversa, moti a numero di Reynolds molto basso sono dominati dalla viscosità. Il numero di Reynolds gioca un ruolo fondamentale nell'analisi della turbolenza, la quale, come si vedrà nel Capitolo 9, è generata per effetto dei termini convettivi non lineari e trova un'azione di contrasto nelle forze viscosi. Similmente, per $\text{Fr} \rightarrow \infty$ è trascurabile l'effetto della gravità; è questo il caso di flussi ad alta velocità quali si hanno attorno a un'automobile o a un profilo alare. Nei moti a superficie libera (quali correnti fluviali o moti ondosi di varia natura) la gravità è invece sempre importante.

Da quanto sopra riportato, è però evidente che le grandezze $T=L/U$ e $P=\rho_0 U^2$ potrebbero non interpretare correttamente l'ordine di grandezza dei tempi e delle pressioni rispettivamente, perché definite sulla base di grandezze scala ρ , U e L scelte secondo altri criteri. Tre è, in effetti, soltanto il numero minimo di grandezze indipendenti utilizzabili unicamente per adimensionalizzare un'equazione della meccanica. In generale, nell'equazione di Navier-Stokes si possono introdurre grandezze scala specifiche anche per le pressioni e i tempi, col che l'equazione adimensionalizzata assumerebbe la forma:

$$\text{St} \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + (\nabla^* \vec{u}^*)^T \vec{u}^* = -\frac{1}{\text{Fr}^2} \nabla^* z^* - \text{Eu} \frac{1}{\rho^*} \nabla^* p^* + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^{*2} \vec{u}^* + \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{3} \nabla^* (\nabla^* \cdot \vec{u}^*)$$

in cui compaiono due ulteriori gruppi adimensionali:

$$\begin{aligned} \text{St} &= \frac{L}{UT} & (\text{numeri di Strouhal}) \\ \text{Eu} &= \frac{P}{\rho_0 U^2} & (\text{numeri di Eulero}) \end{aligned} ,$$

dati rispettivamente dal rapporto fra gli ordini di grandezza delle forze di inerzia locale e convettiva, e tra forze di pressione e forze di inerzia convettive, nonché uguali ai rapporti fra le scale dei tempi

e delle pressioni scelte appositamente, T e P , e i corrispondenti termini definiti univocamente in funzione delle grandezze fondamentali L/U e ρU^2 . Tali gruppi, unitamente a Re e Fr , rappresenterebbero i rapporti degli ordini di grandezza di tutti i termini dell'equazione di Navier-Stokes⁷³.

Procedendo in modo del tutto analogo per l'equazione di continuità, si perviene alla forma adimensionalizzata:

$$St \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\rho^* \vec{u}^*) = 0,$$

dipendente unicamente dal numero di Strouhal. Nel caso di fluido incompressibile, isoterma e omogeneo (moto isocoro), o di moto stazionario, l'equazione non dipende da alcun gruppo adimensionale:

$$\nabla^* \cdot (\rho^* \vec{u}^*) = 0.$$

7.5 Similitudine e modelli fisici

Sebbene l'impetuoso sviluppo dei mezzi di calcolo abbia reso la soluzione numerica delle equazioni dell'Idraulica sempre più accessibile anche a livello tecnico, la difficoltà di rappresentare compiutamente tutti i fenomeni fisici che avvengono in un fluido, o per la necessità di un dettaglio tuttora incompatibile con le risorse di calcolo, o, più spesso, per una conoscenza ancora incompleta di vari fenomeni, fra i quali in primo luogo la turbolenza, impongono di condurre lo studio di problemi di particolare rilevanza mediante *modelli fisici*. Essi consistono in riproduzioni in scala del manufatto, struttura o infrastruttura in oggetto (un'automobile, un aeroplano, un bacino portuale, etc..., detto *prototipo*), sul quale eseguire misure delle grandezze di interesse progettuale, da riportare poi alle dimensioni reali. Si pone quindi il problema di come specificare i parametri da imporre nel modello, noti i corrispondenti valori alla scala del prototipo e come, viceversa, riportare i risultati ottenuti dal modello alla scala del prototipo. Anche se i modelli fisici si realizzano tipicamente in scala ridotta rispetto al prototipo, si tratta pur sempre di analisi onerose sotto il profilo finanziario, almeno nel caso dell'Ingegneria Civile, che proprio per questo motivo vengono riservate a opere di particolare importanza. In relazione ai costi del modello, crescenti con le dimensioni dello stesso, è importante sapere quanto il modello può essere ridotto in scala perché possa ancora fornire risultati quantitativamente accettabili, ossia, rappresentare accuratamente il prototipo.

Un modello in scala ridotta riproduce un fenomeno in scala naturale, secondo certe leggi di scala che verranno illustrate di seguito, se risultano verificate le seguenti similitudini:

- geometrica: il rapporto λ_L tra dimensioni lineari corrispondenti, nel modello in scala ridotta e nel prototipo (detta *scala geometrica*, *scala delle lunghezze*, o, semplicemente, *scala del modello*), è costante;
- cinematica: i vettori velocità in punti corrispondenti devono avere uguali direzione e verso e moduli nel rapporto λ_U (*scala delle velocità*) costante; dall'equazione dimensionale della velocità in funzione di spazio e tempo, discende anche che i tempi corrispondenti debbano stare nel rapporto costante $\lambda_T = \lambda_L / \lambda_U$; la similitudine geometrica costituisce condizione necessaria per la similitudine cinematica;
- dinamica: il rapporto λ_F tra forze agenti in due punti corrispondenti è costante. La similitudine cinematica costituisce condizione necessaria per la similitudine dinamica.

⁷³ Si badi che le denominazioni e le definizioni stesse dei gruppi adimensionali sono tutt'altro che univoche. Così, il numero di Eulero viene talora indicato quale numero di Newton (Marchi-Rubatta) ed il numero di Strouhal definito come $St = UT/L$ (Cenedese). Ancora, il numero di Eulero reca talora a numeratore la differenza $p_0 - p_\infty$ fra una pressione caratteristica ed un valore asintotico di riferimento (Çengel-Cimbala). Inoltre, in luogo del numero di Eulero si usa talora il suo inverso, detto *numero di Rouark* (Cenedese).

L'analisi mediante un modello fisico non richiede l'uso dell'equazione di Navier-Stokes. Tuttavia, ove si considerino casi di studio descrivibili completamente per mezzo di essa⁷⁴, la sua soluzione fornirebbe, ovviamente, gli stessi parametri che vengono ricercati per mezzo del modello fisico. La costanza dei rapporti fra grandezze corrispondenti, richiesta per l'esistenza delle similitudini, implica che le grandezze adimensionalizzate del prototipo e del modello debbano essere identiche. Infatti, dette, ad esempio, u_p e u_m le velocità in due punti corrispondenti del prototipo e del modello rispettivamente, U_p e U_m le grandezze scala utilizzate per l'adimensionalizzazione nel prototipo e nel modello, u_p^* e u_m^* le corrispondenti grandezze adimensionali, essendo $u_p = u_p^* U_p$ e $u_m = u_m^* U_m$, si ha:

$$\frac{u_m}{u_p} = \frac{u_m^*}{u_p^*} \frac{U_m}{U_p}.$$

Poiché $u_m/u_p = U_m/U_p = \lambda_U$ per la similitudine, deve essere anche $u_m^*/u_p^* = 1$. Conseguentemente, le forme adimensionalizzate dell'equazione che si possono scrivere per il prototipo e per il modello in scala devono essere identiche, così come le relative condizioni iniziali e al contorno. Poiché le equazioni dipendono dai quattro parametri adimensionali St , Fr , Eu e Re , questi dovranno essere identici per il prototipo e per il modello (fatta salva la possibilità che alcuni di essi risultino trascurabili rispetto agli altri e la forma stessa delle equazioni possa quindi essere semplificata).

L'uguaglianza dei numeri di Strouhal nel modello e nel prototipo, $L_m/U_m T_m = L_p/U_p T_p$ implica:

$$\lambda_T = \frac{T_m}{T_p} = \frac{U_p L_m}{U_m L_p} = \frac{\lambda_L}{\lambda_U},$$

ossia la legge di scala dei tempi già riconosciuta necessaria per la similitudine cinematica.

L'uguaglianza dei numeri di Eulero fornisce la legge di scala per riportare le pressioni misurate nel modello ai valori della scala del prototipo, col che si realizza la similitudine dinamica⁷⁵:

$$\lambda_p = \frac{P_m}{P_p} = \frac{\rho_{0m} U_m^2}{\rho_{0p} U_p^2} = \lambda_\rho \lambda_U^2.$$

Inversamente, imporre le similitudini cinematica e dinamica implica la totale identità delle forme adimensionali delle equazioni di Navier-Stokes fra modello e prototipo.

Per quanto riguarda il numero di Froude, supponiamo dapprima di poter assumere, sulla base di una conoscenza preliminare del fenomeno, che il numero di Reynolds a scala di prototipo risulti sufficientemente grande da consentire addirittura di trascurare completamente i termini viscosi dell'equazione⁷⁶. Assumendo, inoltre, che ciò avvenga anche nel modello, risulterebbe in tal caso necessaria soltanto l'identità dei numeri di Froude del modello e del prototipo. Indicate quindi con i pedici p e m le grandezze scala rispettivamente del prototipo e del modello, corrispondenti alla medesima grandezza, deve risultare:

$$Fr_p = \frac{U_p}{\sqrt{gL_p}} = \frac{U_m}{\sqrt{gL_m}} = Fr_m,$$

da cui si ricava il legame fra la scala delle lunghezze λ_L e la scala delle velocità λ_U :

⁷⁴ Il discorso si complica ove si volesse considerare, ad esempio, il trasporto di sedimenti in un corso d'acqua.

⁷⁵ Volendo ottenere dal modello informazioni sulle forze, come più spesso accade in pratica, il relativo fattore di scala è dato da $\lambda_F = \lambda_p \lambda_U^2$.

⁷⁶ Trattasi, come si vedrà nei capitoli successivi, di condizioni di turbolenza *pienamente sviluppata*, verificate di frequente alla scala di prototipo.

$$\lambda_U = \frac{U_m}{U_p} = \sqrt{\frac{L_m}{L_p}} = \sqrt{\lambda_L}.$$

Si dirà che tale modello fisico è realizzato *in similitudine di Froude*. Se il modello è realizzato in scala 1:100 ($\lambda_L = 0,01$), una data velocità nota a priori in una parte del prototipo (per esempio, da imporre come condizione al contorno) dovrà essere realizzata nel modello in scala ridotta di un fattore 10 ($\lambda_U = (\lambda_L)^{1/2} = 0,1$) e i tempi caratteristici di eventuali fenomeni periodici o transitori ridotti di un fattore $\lambda_T = \lambda_L / \lambda_U = 10$, in modo da imporre l'uguaglianza del numero di Strouhal. Per converso, la velocità in una certa altra parte del modello, costituente uno dei risultati di interesse, dovrà essere riportata alle dimensioni del prototipo moltiplicandola per 10, le grandezze lineari (ad esempio, il livello in un dato punto) dovranno essere moltiplicate per 100 e i tempi per 10.

Nel caso generale, poiché è comunque richiesta l'identità dei numeri di Froude di modello e prototipo, verifichiamo come varia il numero di Reynolds a parità di numero di Froude. Si ha:

$$\text{Re}_m = \frac{U_m L_m}{\nu_m} = \frac{U_p \sqrt{L_m / L_p} L_m}{\nu_m} = \frac{\nu_p}{\nu_m} \left(\frac{L_m}{L_p} \right)^{3/2} \frac{U_p L_p}{\nu_p} = \frac{\nu_p}{\nu_m} \lambda_L^{3/2} \text{Re}_p.$$

Nel caso normale in cui nelle prove su modello venga utilizzato il medesimo fluido presente nel prototipo ($\nu_m / \nu_p = 1$), il numero di Reynolds del modello risulta diminuito rispetto al valore nel prototipo nel rapporto della potenza tre mezzi della scala geometrica; la diminuzione di Re_m è quindi anche abbastanza rapida al diminuire della scala. In un caso quale quello illustrato in precedenza, saremmo quindi nelle condizioni di valutare se il numero di Reynolds del modello, certamente ridotto rispetto a quello del prototipo, sia comunque grande abbastanza da poter considerare ugualmente trascurabili gli effetti viscosi e applicare la similitudine di Froude. Frequentemente questo non accade nella pratica. L'inconveniente sarebbe rimediabile soltanto utilizzando un liquido avente viscosità cinematica tale che $\nu_m / \nu_p \lambda_L^{3/2} = 1$, il che è irrealizzabile nella maggior parte dei casi. In pratica, si costruisce il modello in similitudine di Froude, accettando delle deviazioni dalla perfetta similitudine che vanno sotto il nome di *effetti di scala*, che si può cercare di valutare, almeno qualitativamente, per altra via.

Nel caso di modelli a superficie libera, quali un fiume, un bacino portuale, etc, l'eccessiva riduzione del numero di Reynolds nel modello in similitudine è particolarmente penalizzante nei confronti della riproduzione delle resistenze al moto. Come si vedrà nei capitoli successivi, queste sono legate al profilo di velocità lungo la verticale e, quindi, alla profondità, tipicamente molto minore delle dimensioni orizzontali, oltre che alla scabrezza del fondo. Allo scopo di limitare tale inconveniente, si rinuncia alla perfetta similitudine geometrica, adottando scale differenti per le dimensioni orizzontali e verticali (*modello distorto*).

Ulteriori deviazioni dalle condizioni di similitudine in modelli di dimensioni eccessivamente ridotte sono legate all'insorgenza di effetti legati alla tensione superficiale.

CAPITOLO OTTAVO

8. MOTI IRROTAZIONALI

8.1 Generalità

Nell'ambito dell'analisi della struttura del campo di moto nell'intorno di un punto, condotta nel §4.5, si è mostrato che il moto di una particella fluida in un intervallo elementare di tempo può essere visto come composizione di una traslazione, di una rotazione rigida e di una deformazione. In particolare, si è mostrato che la componente rotatoria è rappresentata da un tensore antisimmetrico $\underline{R}$, detto tensore velocità di rotazione rigida, le cui componenti, non nulle soltanto nei termini extra-diagonali per l'antisimmetria, costituiscono le velocità di rotazione rigida attorno ad assi paralleli agli assi coordinati. Ad esempio, la grandezza:

$$\Omega_3 = \frac{d\theta_{21}}{dt} = r_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$$

rappresenta la velocità di rotazione della particella attorno all'asse x_3 .

Si è inoltre mostrato che il tensore velocità di rotazione rigida è strettamente legato al rotore (o rotazione) del vettore velocità, definito dal prodotto vettoriale simbolico:

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{u} = \nabla \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{b}_1(\partial u_3/\partial x_2 - \partial u_2/\partial x_3) \\ + \vec{b}_2(\partial u_1/\partial x_3 - \partial u_3/\partial x_1) \\ + \vec{b}_3(\partial u_2/\partial x_1 - \partial u_1/\partial x_2) \end{vmatrix},$$

che prende il nome di vorticità. La vorticità ha per componenti scalari il doppio delle velocità di rotazione rigida attorno alle direzioni degli assi corrispondenti, talché può anche scriversi:

$$\underline{R} \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nell'Idraulica, riveste una particolare importanza la classe di moti caratterizzata dall'essere nulla la vorticità del campo di moto. Un tale tipo di moto viene definito, come il rispettivo campo di velocità, *irrotazionale*.

8.2 Moti irrotazionali e potenziale di velocità

Si consideri un moto il cui campo di velocità è dato dal gradiente di una funzione scalare $\phi(\vec{x})$, detta *potenziale di velocità*:

$$\vec{u} = \nabla \phi, \quad (195)$$

di componenti:

$$u_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}. \quad (196)$$

Il moto si dice in tal caso *moto a potenziale di velocità* o, semplicemente, *moto a potenziale*. Sotto ipotesi di regolarità del campo di moto risulta in tal caso:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} = 0, \quad (197)$$

per cui il moto è irrotazionale. Sotto ipotesi leggermente più restrittive, ma sempre di generale regolarità, si dimostra anche che un moto irrotazionale ammette un potenziale di velocità⁷⁷. Pertanto, un moto irrotazionale è un moto a potenziale e viceversa.

Un primo elemento di interesse legato alla possibilità di rappresentare un campo di moto mediante lo schema di moto a potenziale risulta, evidentemente, l'unica funzione incognita ϕ del problema, in luogo delle tre componenti scalari della velocità: u_1, u_2 e u_3 .

Si dimostra che un moto irrotazionale a un certo istante di tempo rimane tale al trascorrere del tempo se ricorrono le seguenti condizioni (Teorema di Lagrange)⁷⁸:

- fluido ideale (le particelle non possono essere messe in rotazione da azioni tangenziali);
- fluido barotropico: $\rho = \rho(p)$ (vedi §3.3);
- forze di massa dotate di potenziale (campo conservativo): $\vec{f}_m = \nabla U$.

In particolare, il moto di un fluido ideale, pesante, incompressibile, isoterma e omogeneo ($\rho = \text{cost}$, moto isocoro, §4.5) che parte da condizioni di quiete è irrotazionale, essendo tale lo stato idrostatico. Trattandosi di condizioni piuttosto comuni, a esse si farà riferimento esclusivo nel prosieguo.

⁷⁷ Dati un vettore regolare $\vec{u}$ definito su un dominio Ω a connessione lineare semplice (ogni curva chiusa in Ω è contraibile in un punto ancora appartenente a Ω), una qualunque linea chiusa ℓ appartenente a Ω e una qualunque superficie S di normale $\vec{n}$ di cui ℓ costituisca il bordo, l'integrale di superficie del rotore del vettore $\vec{u}$ è pari alla *circuitazione* di $\vec{u}$ lungo la curva ℓ (Teorema di Kelvin-Stokes o della circuitazione):

$$\int_S (\nabla \times \vec{u}) \cdot \vec{n} \, dS = \oint_{\ell} \vec{u} \cdot d\vec{\ell}.$$

Pertanto, se il moto è irrotazionale risulta nulla la circuitazione di $\vec{u}$. Presi allora due punti P_1 e P_2 sulla curva ℓ si ha anche:

$$\oint_{\ell} \vec{u} \cdot d\vec{\ell} = \int_1^2 (\vec{u} \cdot d\vec{\ell})_A + \int_2^1 (\vec{u} \cdot d\vec{\ell})_B = \int_1^2 (\vec{u} \cdot d\vec{\ell})_A - \int_1^2 (\vec{u} \cdot d\vec{\ell})_B = 0,$$

in cui A e B rappresentano le due parti della curva ℓ . Gli integrali di linea relativi ai due percorsi sono pertanto identici:

$$\int_1^2 (\vec{u} \cdot d\vec{\ell})_A = \int_1^2 (\vec{u} \cdot d\vec{\ell})_B.$$

Per l'arbitrarietà della curva ℓ , si conclude che l'integrale di linea non dipende dal percorso seguito, ma soltanto dai punti estremi del percorso. Come per i campi di forze conservativi (§1.3.5), si ha pertanto:

$$\int_1^2 \vec{u} \cdot d\vec{\ell} = \phi(P_2) - \phi(P_1).$$

La quantità $\vec{u} \cdot d\vec{\ell}$ è quindi un differenziale esatto:

$$\vec{u} \cdot d\vec{\ell} = d\phi = \nabla \phi \cdot d\vec{\ell},$$

da cui discende che $\vec{u} = \nabla \phi$, che è quanto si voleva dimostrare.

⁷⁸ Vedi Marchi-Rubatta, §7.3 o Cenedese, §3.

8.3 Moti irrotazionali isocori.

Nel caso di moto isocoro, l'equazione di continuità assume la forma:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (141)$$

Se il moto è irrotazionale, si ha quindi:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi,$$

per cui l'equazione di continuità assume la forma (equazione di Laplace):

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (198)$$

ovvero:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_j} = 0$$

e il potenziale è quindi *armonico*.

Le condizioni di densità costante, fluido ideale e forze di massa conservative ($\vec{f}_m = \nabla U$) fanno sì che l'equazione di Navier-Stokes si riduca alla seguente forma dell'equazione di Eulero (§5.6):

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \nabla U - \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right), \quad (199)$$

per scrivere la quale si è portata la densità costante all'interno del segno di gradiente.

Poiché però i fluidi reali sono viscosi, è utile riconoscere, così come è stato fatto nel §5.8.2, l'esistenza di condizioni di moto nelle quali il comportamento sia pur sempre quello di fluido ideale, di modo che la fenomenologia descritta dal teorema sulla conservazione dell'irrotazionalità costituisca una ragionevole approssimazione della realtà fisica. A tale scopo, si osservi innanzi tutto che, data una funzione armonica, per l'invertibilità dell'ordine di derivazione sono armoniche anche le sue derivate di qualunque ordine: in particolare, le derivate prime, costituenti le componenti della velocità a norma della (196)⁷⁹. In forza di tale proprietà, nell'equazione di Navier-Stokes scritta per il caso di campo di forze di massa conservativo:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \nabla U - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u}$$

il termine viscoso risulta identicamente nullo. Utilizzando l'invertibilità degli operatori gradiente (di componenti pari alle derivate prime rispetto alle coordinate omologhe) e Laplaciano si ha infatti:

$$\nabla^2 \vec{u} = \nabla^2 (\nabla \phi) = \nabla (\nabla^2 \phi) = 0.$$

Pertanto, un liquido viscoso animato di moto irrotazionale si comporta come un fluido ideale⁸⁰.

⁷⁹ Tale proprietà comporta anche che, sia il potenziale che le componenti della velocità, non possano presentare punti di massimo o minimo relativi all'interno del campo di moto e che pertanto essi assumono i loro valori massimi e minimi sulla frontiera. Si può inoltre mostrare (Marchi-Rubatta, §5.7) che il modulo della velocità non possa presentare punti di massimo interni al dominio, mentre può presentare punti di minimo relativo – in particolare, punti in cui la velocità si annulla.

⁸⁰ Potrebbe sembrare che tale conclusione renda inutile l'ipotesi di fluido ideale ammessa nel §8.2 per poter affermare che un moto irrotazionale si mantenga tale al trascorrere del tempo, dal momento che risulta comunque nullo l'effetto della viscosità. In realtà, come si mostrerà nel capitolo 10, l'ipotesi di moto irrotazionale non può ammettersi mai verificata in prossimità di una parete che confini il campo di moto, ma soltanto ad una certa distanza da essa. Pertanto, ai fini della dimostrazione del teorema in questione, il

Il fatto che l'equazione del moto sia ora del primo ordine comporta importanti conseguenze riguardo le condizioni al contorno. Infatti, in una equazione del secondo ordine possono imporsi condizioni sulle componenti della velocità sia normale che tangenziale a un contorno; se il contorno rappresenta una parete solida, tali condizioni sono, rispettivamente, di impenetrabilità della parete e di aderenza alla stessa: la prima comporta l'uguaglianza delle componenti della velocità del fluido e della parete normali a quest'ultima – in particolare, l'annullamento della componente normale della velocità del fluido se la parete è ferma; la seconda, l'uguaglianza anche delle componenti tangenziali. Viceversa, per l'equazione di Eulero è possibile imporre soltanto una condizione: in pratica, si impone sempre la condizione sulla componente normale.

L'equazione di Laplace (198) ammette soluzione univocamente definita, a meno di una costante additiva, imponendo condizioni al contorno sul potenziale (*condizioni di Dirichlet*) o sulla sua derivata normale al contorno (*condizioni di Neumann*). Il primo tipo di condizioni si può imporre quando al potenziale sia possibile associare una determinata grandezza fisica. Ad esempio, nei moti di filtrazione (Cap. 15) si riconosce che il potenziale risulta proporzionale alla quota piezometrica; conseguentemente, appartengono a curve a potenziale costante i punti di frontiera del mezzo poroso a contatto con liquido avente superficie libera orizzontale. Il significato del secondo tipo di condizioni al contorno risulta evidente ove si osservi che la derivata direzionale del potenziale rappresenta la componente della velocità lungo la stessa direzione; esprimendo la derivata direzionale in termini di gradiente della funzione (§1.2.4) si ha infatti:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \nabla \phi \cdot \vec{n} = \vec{u} \cdot \vec{n} = u_n,$$

per cui la specificazione della derivata del potenziale normale al contorno è in sostanza una condizione sui flussi volumetrici attraverso il contorno.

Dalla linearità dell'equazione di Laplace (198) discende che una combinazione lineare di soluzioni dell'equazione è anch'essa una soluzione. Tale constatazione consente di costruire soluzioni di problemi caratterizzati da condizioni al contorno di vario tipo in differenti zone del campo di moto mediante l'introduzione di flussi fittizi (*metodo delle immagini*).

8.4 Teorema di Bernoulli

Le condizioni di irrotazionalità consentono di derivare una formulazione particolare del Teorema di Bernoulli. L'equazione di Eulero si scrive nella forma per componenti:

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p}{\rho} \right).$$

Utilizzando le condizioni di irrotazionalità, (196) e (197), e le regole sulla derivazione delle funzioni, la derivata lagrangiana della velocità può svilupparsi nel seguente modo:

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{\partial (u_j u_j / 2)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} \right),$$

in cui u è il modulo della velocità⁸¹.

comportamento da fluido ideale deve necessariamente discendere dall'ipotesi di viscosità nulla, cosicché il moto irrotazionale possa essere considerato esteso all'intero campo di moto. In caso contrario, anche ammesso che il moto irrotazionale si svolga ad una certa distanza dalla parete, non si potrebbe garantire che, al trascorrere del tempo, lo sviluppo dello strato limite viscoso non giunga ad interessare aree inizialmente sede di moto irrotazionale. Ciò non di meno, come già osservato nel §5.8.2, è utile riconoscere l'esistenza di condizioni di moto nelle quali il comportamento di un fluido viscoso sia lo stesso di un fluido ideale, di modo che la fenomenologia descritta dal teorema costituisca una ragionevole approssimazione della realtà fisica.

⁸¹ Sulla base della regola di Einstein si ha infatti $u_j u_j = u_1 u_1 + u_2 u_2 + u_3 u_3 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = u^2$.

Dividendo membro a membro per g e riordinando, l'equazione di Eulero può quindi scriversi:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{U}{g} + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} \right) = 0 ,$$

il che comporta l'annullamento del gradiente e, quindi, l'uniformità spaziale della funzione entro parentesi. Trattandosi di una funzione sia del posto che del tempo, si deve ammettere che il valore uniforme della funzione possa variare al trascorrere del tempo, per cui si scrive:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{U}{g} + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = f(t) .$$

in cui $f(t)$ è una funzione arbitraria. Nel caso di fluido pesante ($U = -gz$) l'equazione si scrive:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} + z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = f(t) ,$$

La presenza del trinomio di Bernoulli rende tale equazione una forma particolare della legge di Bernoulli, valida per liquidi pesanti in moto irrotazionale, anche vario⁸². Nel caso di regime stazionario ($\partial \phi / \partial t = 0$), si ottiene:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = \text{cost}$$

Tale equazione, formalmente identica alla formulazione del Teorema di Bernoulli (167) stabilita nel §5.8.2, ne differisce per il fatto che, nel caso di moto irrotazionale, il trinomio di Bernoulli si mantiene costante *sull'intero campo di moto*, invece che su ogni singola linea di corrente.

8.5 Moti irrotazionali piani

D'ora innanzi verrà considerato unicamente il caso dei moti irrotazionali piani⁸³. Preliminarmente alla presentazione delle soluzioni per alcuni problemi di moto stazionario, verrà illustrata la rappresentazione dei moti irrotazionali piani in termini di funzione di corrente e rete idrodinamica. Ammetteremo che il moto si svolga nel piano x_1x_2 .

8.5.1 Funzione di corrente. Rete idrodinamica.

Nel caso di moto piano è possibile introdurre una *funzione di corrente* ψ tale che:

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \quad ; \quad u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} . \quad (200)$$

Le curve del piano x_1x_2 lungo le quali la funzione di corrente risulta costante sono linee di corrente del campo di velocità. Infatti, a spostamenti effettuati lungo tali curve deve corrispondere una variazione nulla della funzione ψ :

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 = 0 ,$$

per cui si ottiene:

⁸² Sulla base di tale forma possono derivarsi varie teorie per la descrizione del moto ondoso.

⁸³ La trattazione dei casi tridimensionali non comporta complicazioni sostanziali. La scelta risponde unicamente a ragioni di sintesi. La trattazione di casi di moti irrotazionali tridimensionali può trovarsi nel Marchi-Rubatta e nel Cenedese.

$$\frac{\partial \psi / \partial x_2}{-\partial \psi / \partial x_1} = \frac{dx_1}{dx_2} = \frac{u_1}{u_2},$$

ossia, l'equazione (128) della linea di corrente ricavata nel §4.6.

La funzione di corrente soddisfa l'equazione di Laplace. Si ha infatti:

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = \frac{\partial(-u_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(u_1)}{\partial x_2} = (\nabla \times \vec{u})_3 = \omega_3 = 0.$$

Inoltre, per le (196) e (200) la funzione di corrente è legata al potenziale dalle relazioni:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = -\frac{\partial \phi}{\partial x_2} \quad ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}.$$

Per la (195) e le proprietà del vettore gradiente (§1.2.4) il vettore velocità deve risultare, punto per punto, normale alle curve a potenziale costante, oltre che tangente alle linee di corrente. Pertanto, le due famiglie di curve, $\phi = \text{cost}$ e $\psi = \text{cost}$, sono ortogonali. Inoltre, sulla base della definizione (200), il gradiente della funzione di corrente, ortogonale alle linee di corrente e orientato nel senso delle ψ crescenti, è uguale al vettore velocità ruotato di 90° in senso antiorario.

Trattandosi di fluido a densità costante, il flusso volumetrico attraverso la superficie di contorno di un volume di controllo deve risultare nullo, eq. (136). Con riferimento allo schema di Figura 88, detta $dq = u dn$ la portata elementare attraverso la sezione di sviluppo dn , imponendo l'annullamento del flusso volumetrico attraverso il contorno chiuso ABCA, costituito dai lati dx_1 , dx_2 e dn , si ottiene:

$$dq + u_1 dx_2 - u_2 dx_1 = 0,$$

da cui:

$$dq = -u_1 dx_2 + u_2 dx_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 = -d\psi$$

per uno spostamento nel senso di dx_1 e dx_2 positivi. Per uno stesso spostamento dn nel senso opposto, lungo il quale ψ è crescente, si ha invece $dq = d\psi$ e $u = d\psi/dn$.

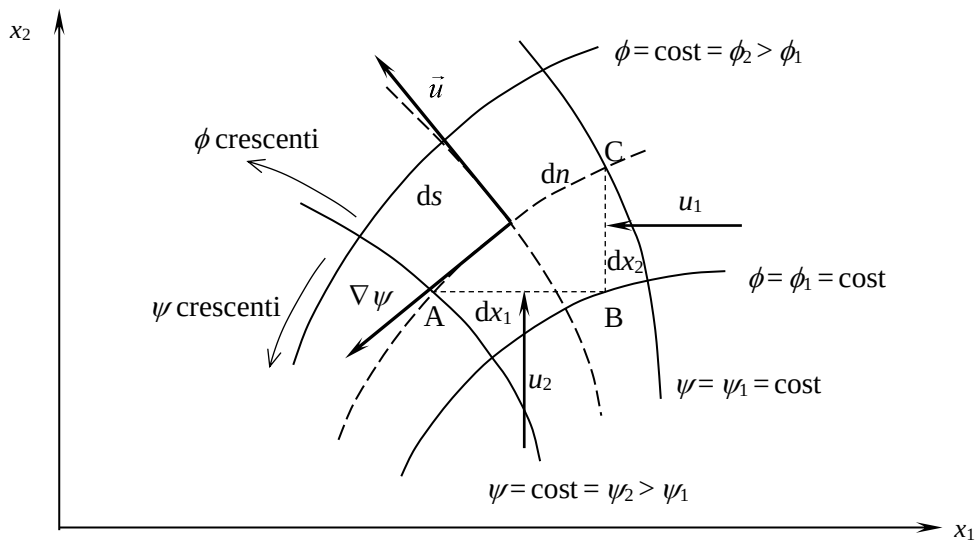


Figura 88. Reticolo di linee di corrente e linee equipotenziali (rete idrodinamica).

Integrando lungo un tratto di linea equipotenziale compreso fra due linee di corrente, nel senso delle ψ crescenti, la differenza fra i valori che la funzione di corrente assume sulle due linee di corrente è pari alla portata fluente fra le due linee. Qualora il campo di moto sia delimitato da una parete solida, risulterà conveniente assegnare convenzionalmente al profilo della parete, costituente certamente una linea di flusso per la condizione di impenetrabilità, il valore di portata nulla. In tal modo, il valore della funzione di corrente associata a una data linea di corrente corrisponderà alla portata fluente fra la linea di corrente e la parete solida.

Se, inoltre, si tracciano nel piano del moto le famiglie di linee equipotenziali e linee di corrente con incrementi costanti e uguali, $d\psi = d\phi = \text{cost}$, dovendo risultare:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial q}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial n},$$

si ha anche $ds = dn$, e il reticolo che così si ottiene ha quindi maglie quadrate. Tale reticolo assume il nome di *rete idrodinamica*. Il tracciamento della rete idrodinamica per incrementi finiti delle funzioni potenziale e di corrente, $\Delta\psi = \Delta\phi = \text{cost}$, dà luogo a maglie soltanto approssimativamente quadrate, con approssimazione tanto maggiore quanto minore è l'incremento costante delle funzioni. Un procedimento di calcolo di moti potenziali piani si basa sulla costruzione di una rete idrodinamica dalle caratteristiche descritte (a $\Delta\psi = \Delta\phi = \text{cost}$ e a maglie approssimativamente quadrate), rispettosa delle condizioni al contorno: i profili di pareti solide costituiscono linee di corrente, mentre, a seconda del tipo di moto, la conoscenza della natura fisica del potenziale di velocità consente di individuare una o più linee equipotenziali.

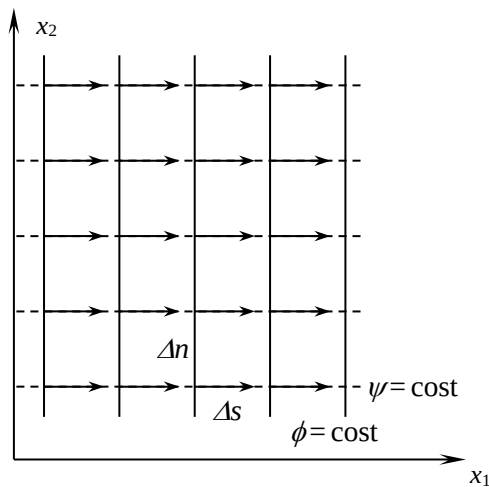
8.5.2 Moto uniforme

Il caso più semplice possibile di moto irrotazionale è il moto uniforme in senso stretto (§4.4), nel quale il vettore velocità è costante nello spazio (in modulo, direzione e verso, Figura 89a). Il potenziale di velocità e la funzione di corrente:

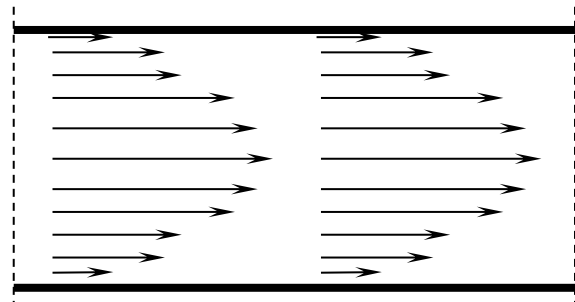
$$\phi = u_{\infty} x_1 \quad ; \quad \psi = u_{\infty} x_2$$

definiscono un campo di moto irrotazionale piano con vettore velocità uniforme e parallelo all'asse x_1 , di modulo u_{∞} :

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = u_{\infty} \quad ; \quad u_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0$$



(a)



(b)

Figura 89. campi di velocità uniformi (a) in senso stretto (moto irrotazionale), e (b) nell'accezione di flusso parallelo (moto rotazionale).

Le linee equipotenziali e le linee di corrente della rete idrodinamica sono rette parallele, equispaziate e mutuamente ortogonali ($\Delta n = \Delta \psi / u_\infty$; $\Delta s = \Delta \phi / u_\infty$).

Viceversa, un moto uniforme, nell'accezione comunemente utilizzata in Idraulica di mero flusso parallelo (Figura 89b), non è un moto irrotazionale. Infatti, essendo i vettori velocità paralleli le linee equipotenziali dovrebbero essere rette parallele ortogonali alle velocità. Non sarebbe però possibile ottenere i moduli delle velocità, variabili in direzione di tali linee, come derivate in direzione normale alle stesse, poiché a valori fissati dei potenziali relativi a due linee equipotenziali parallele corrisponderebbero valori costanti della derivata direzionale. Non sarebbe del resto neanche possibile tracciare linee di corrente a intervalli costanti di portata che determinassero, con le linee equipotenziali ortogonali, maglie quadrate della rete idrodinamica.

8.5.3 Corrente che investe ortogonalmente una parete piana impermeabile

Un moto irrotazionale piano generato da una corrente nel semipiano $x_1 \leq 0$ che investe ortogonalmente una parete piana impermeabile disposta lungo l'asse x_2 (Figura 90) è rappresentato dalle seguenti espressioni del potenziale e della funzione di corrente:

$$\phi = -\frac{C}{2}(x_1^2 - x_2^2) \quad ; \quad \psi = -C x_1 x_2 .$$

Il vettore velocità ha infatti componenti:

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = -C x_1 \quad ; \quad u_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = C x_2 ,$$

per cui la componente u_1 si annulla identicamente per $x_1 = 0$. Il modulo della velocità si annulla nell'origine del sistema di riferimento, costituente un *punto di ristagno*.

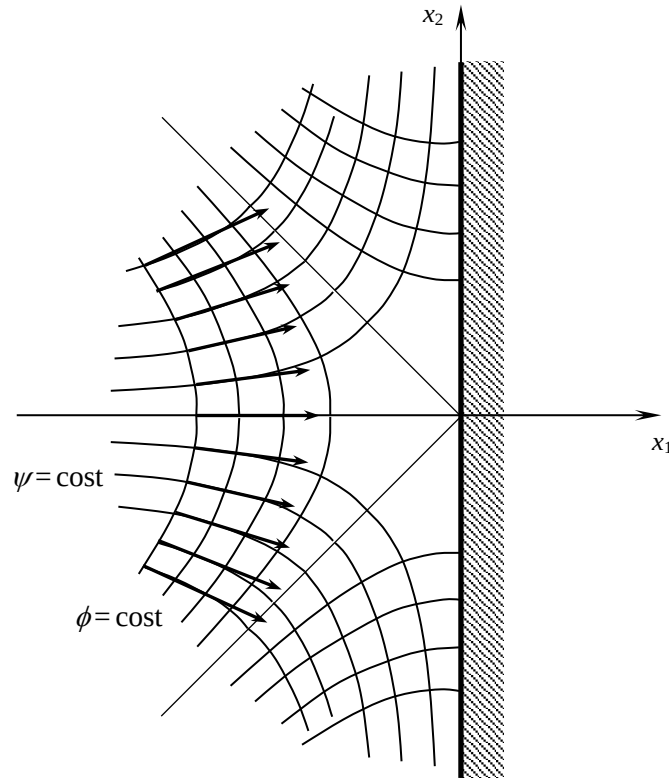


Figura 90. Rete idrodinamica di una corrente piana irrotazionale che investe ortogonalmente una parete piana.

Si osservi che la rete idrodinamica tracciata in Figura 90 presenta maglie di forma quadrata soltanto approssimativamente e dove le linee equipotenziali e di corrente sono sufficientemente ravvicinate, mentre l'approssimazione decade notevolmente altrove. Ciò è in accordo con le menzionate caratteristiche della rete idrodinamica, poiché sono di forma quadrata soltanto le maglie di dimensioni infinitesime.

8.5.4 Vortice irrotazionale

Un campo di moto irrotazionale le cui linee di corrente sono circonferenze concentriche, i moduli delle velocità sono funzione soltanto di una coordinata radiale r , $u = u(r)$, e le linee equipotenziali sono costituite da semirette radiali con origine nel centro delle linee di corrente (vortice irrotazionale, Figura 91), è descritto in un sistema di riferimento polare con coordinata angolare ϑ da una funzione di corrente e una funzione potenziale del tipo:

$$\phi = \phi(\vartheta) \quad ; \quad \psi = \psi(r).$$

I segmenti elementari di linee di corrente e linee equipotenziali nel verso delle ϕ e delle ψ crescenti sono dati rispettivamente da:

$$ds = r d\vartheta \quad ; \quad dn = -dr.$$

Il modulo della velocità è dato dalla derivata del potenziale nella direzione delle linee di corrente, o dalla derivata della funzione di corrente nella direzione della tangente alle linee equipotenziali:

$$u(r) = \frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi}{r d\vartheta} = \frac{d\psi}{dn} = -\frac{d\psi}{dr}. \quad (201)$$

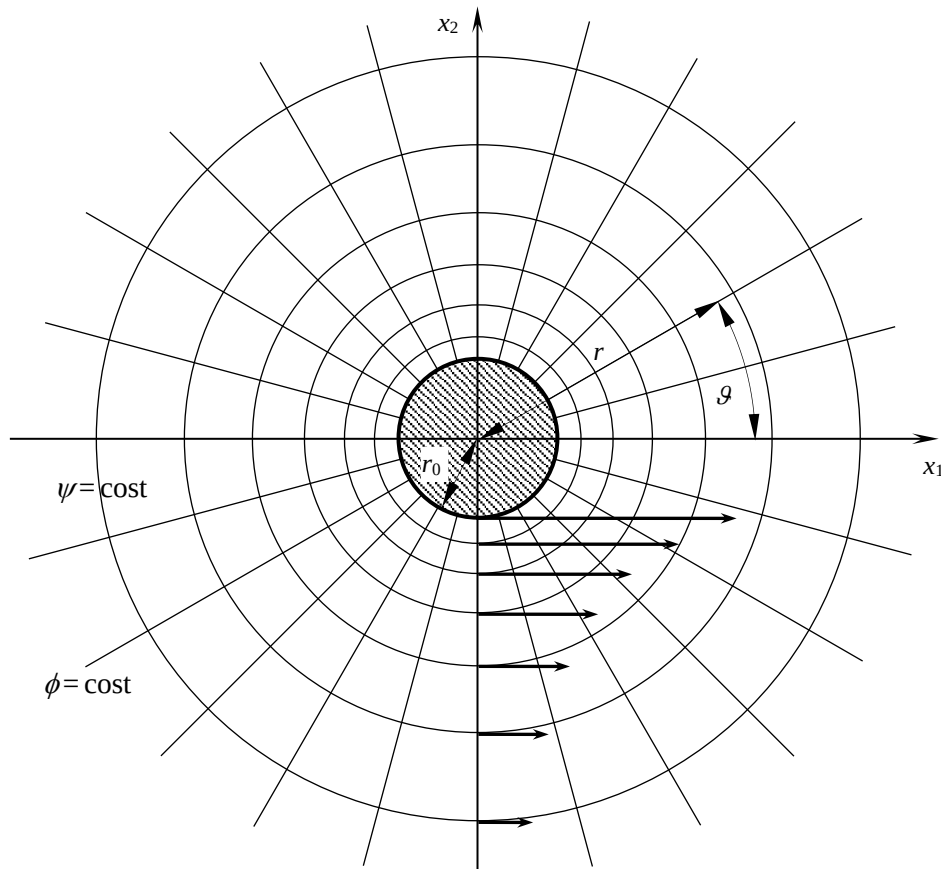


Figura 91. rete idrodinamica di un vortice irrotazionale.

Si ha quindi necessariamente:

$$u(r)r = \frac{d\phi(\mathcal{G})}{d\mathcal{G}} = C ,$$

in cui C rappresenta una costante⁸⁴. Dalle due relazioni di uguaglianza si ha quindi:

$$u = \frac{C}{r} , \quad (202)$$

nonché, integrando l'equazione differenziale in ϕ e imponendo la costante di integrazione $\mathcal{G}_0$:

$$\phi = C(\mathcal{G} - \mathcal{G}_0) ,$$

nella quale può porsi $\mathcal{G}_0 = 0$ senza perdita di generalità.

Dalla (201) si ha anche:

$$-\frac{d\psi}{dr} = \frac{C}{r}$$

da cui, separando le variabili:

$$\frac{d\psi}{C} = -\frac{dr}{r} .$$

Integrando si ottiene l'espressione della funzione di corrente:

$$\psi = -C \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) ,$$

in cui r_0 è una costante di integrazione.

La circuitazione del vettore velocità riferita a una linea di corrente, cui il vettore è tangente:

$$\oint_{\psi=\text{cost}} \vec{u}(r) \cdot d\vec{s} = \oint_{\psi=\text{cost}} u(r) ds = \oint_{\psi=\text{cost}} u(r)r d\mathcal{G} = \int_0^{2\pi} C d\mathcal{G} = 2\pi C = I_v$$

rappresenta una costante indipendente dalla linea di corrente considerata, detta *intensità del vortice*⁸⁵.

Il potenziale di velocità e la funzione di corrente possono quindi essere espressi come:

$$\phi = \frac{I_v}{2\pi} \mathcal{G} \quad ; \quad \psi = -\frac{I_v}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) ,$$

ovvero, in coordinate cartesiane ($x_1 = r \cos \mathcal{G}$; $x_2 = r \sin \mathcal{G}$)

$$\phi = \frac{I_v}{2\pi} \arctan(x_2 / x_1) \quad ; \quad \psi = -\frac{I_v}{2\pi} \ln\left(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{r_0}\right) ,$$

⁸⁴ L'uguaglianza di due funzioni di diverse variabili indipendenti può aversi per qualunque valore delle variabili soltanto se le funzioni sono costanti.

⁸⁵ Si osservi che tale conclusione non è in contraddizione con il Teorema di Kelvin-Stokes richiamato nella nota 70. Infatti, il vettore velocità, il cui modulo è dato dalla (192), non è definito nell'origine degli assi, ove $r = 0$. In altri termini, il dominio ove è definito il vettore velocità non risulta a connessione lineare semplice.

dalle quali si ottengono le espressioni delle componenti della velocità:

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = -\frac{I_v}{2\pi} \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \quad ; \quad u_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = \frac{I_v}{2\pi} \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} .$$

Il vortice ruota in senso antiorario o orario a seconda che l'intensità I_v sia rispettivamente positiva o negativa.

Si osservi che nel caso di un cilindro di raggio r_0 rotante con velocità periferica:

$$u_0 = \frac{I_v}{2\pi r_0}$$

il campo di velocità del vortice rispetterebbe la condizione di aderenza alla parete del cilindro.

8.5.5 Sorgente e pozzo

Le seguenti espressioni del potenziale e della funzione di corrente:

$$\phi = \frac{q}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad ; \quad \psi = \frac{q}{2\pi} \vartheta$$

rappresentano un moto irrotazionale radiale, avente circonferenze concentriche per linee equipotenziali e semirette con origine nel centro comune per linee di corrente (Figura 92), di modulo dato ancora da:

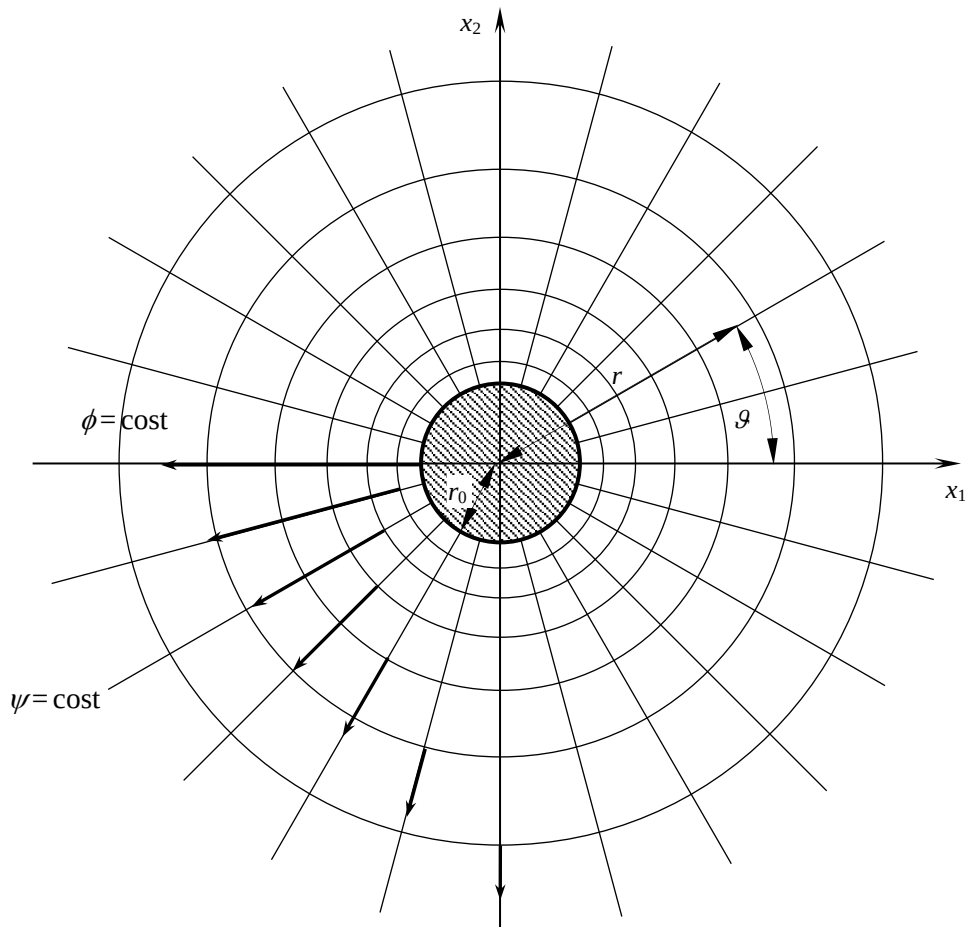


Figura 92. Rete idrodinamica di un moto irrotazionale originato da una sorgente.

$$u(r) = \frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi}{dr} = \frac{q}{2\pi r}.$$

in cui l'intensità q rappresenta la portata per unità di spessore del campo di moto che attraversa le circonferenze centrate nell'origine, essendo⁸⁶:

$$\oint_{\phi=\text{cost}} \vec{u} \cdot \vec{r} \, dn = \int_0^{2\pi} u r \, d\vartheta = \int_0^{2\pi} \frac{q}{2\pi} \, d\vartheta = q.$$

Il flusso si dirama verso l'esterno (sorgente) o verso l'origine del sistema di riferimento (pozzo) a seconda che risulti rispettivamente $q > 0$ o $q < 0$.

In coordinate cartesiane si ha:

$$\phi = \frac{q}{2\pi} \ln \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{r_0} \right) \quad ; \quad \psi = \frac{q}{2\pi} \arctan(x_2 / x_1),$$

dalle quali si ottengono le espressioni delle componenti della velocità:

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \frac{q}{2\pi} \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \quad ; \quad u_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = \frac{q}{2\pi} \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Nel caso di una parete circolare di raggio r_0 con velocità di espansione (o contrazione) radiale:

$$u_0 = \frac{q}{2\pi r_0}$$

il campo di velocità rispetterebbe la condizione cinematica di impenetrabilità della parete.

8.5.6 Sovrapposizione di corrente uniforme e sorgente (semicorpo)

La linearità dell'equazione di Laplace (198) fa sì che anche una combinazione lineare di soluzioni dell'equazione sia una soluzione. Pertanto, dalla combinazione lineare di potenziali di velocità, rappresentativi di particolari moti irrotazionali, si ottiene ancora un potenziale rappresentativo di un moto irrotazionale (principio di sovrapposizione degli effetti).

In particolare, il moto generato dalla sovrapposizione di una moto uniforme e di una sorgente è rappresentato dalle seguenti espressioni del potenziale di velocità e della funzione di corrente:

$$\phi = u_\infty x_1 + \frac{q}{2\pi} \ln r \quad ; \quad \psi = u_\infty x_2 + \frac{q}{2\pi} \vartheta,$$

ovvero, in coordinate interamente cartesiane⁸⁷:

$$\phi = u_\infty x_1 + \frac{q}{2\pi} \ln \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) \quad ; \quad \psi = u_\infty x_2 + \frac{q}{2\pi} \arctan(x_2 / x_1).$$

Le componenti della velocità sono date da:

⁸⁶ Si badi che, al contrario del caso del vortice, l'integrale non rappresenta la circuitazione del vettore velocità, in quanto il prodotto scalare è fatto rispetto al versore normale alla linea chiusa (equipotenziale nel caso specifico) piuttosto che al vettore tangente.

⁸⁷ Per definizione, la funzione arcotangente restituisce valori nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$. Nell'espressione della funzione di corrente l'arcotangente va tuttavia valutata avendo riguardo per il quadrante di appartenenza del punto (x_1, x_2) , in modo da ottenere valori nell'intero angolo giro. Si ha quindi, ad esempio: $\arctan(1/1) = \pi/4$; $\arctan(-1/1) = -\pi/4$; $\arctan(1/-1) = 3/4\pi$; $\arctan(-1/-1) = -3/4\pi$.

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = u_\infty + \frac{q}{2\pi} \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} = u_\infty + \frac{q}{2\pi} \frac{r \cos \vartheta}{r^2} = u_\infty + \frac{q}{2\pi} \frac{\cos \vartheta}{r}$$

$$u_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = \frac{q}{2\pi} \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{q}{2\pi} \frac{r \sin \vartheta}{r^2} = \frac{q}{2\pi} \frac{\sin \vartheta}{r}$$

La componente u_2 si annulla sull'asse x_1 ($x_2=0$, ovvero $\vartheta=0$ – semiasse positivo – o $\vartheta=\pm\pi$ – semiasse negativo). Sui semiasse positivo e negativo la funzione di corrente assume quindi i valori $\psi=0$ e $\psi=\pm q/2$ rispettivamente. Sul semiasse negativo ($\cos\pi=\cos(-\pi)=-1$) la componente u_1 si annulla a una distanza dall'origine:

$$r_0 = \frac{q}{2\pi u_\infty},$$

ove è quindi localizzato un punto di ristagno. Per il punto di ristagno passano due linee di corrente, corrispondenti ai valori $\psi=\pm q/2$. Le due linee, rappresentate in Figura 93, hanno in comune due rami giacenti sull'asse x_1 , di equazioni:

$$x_2 = 0 \quad \text{per} \quad x_1 \in [-\infty, r_0] \quad ; \quad x_2 = 0 \quad \text{per} \quad x_1 \in [-r_0, 0]$$

e due rami distinti di equazioni:

$$u_\infty x_2 + \frac{q}{2\pi} \vartheta = \pm \frac{q}{2}$$

ossia, in coordinate interamente polari:

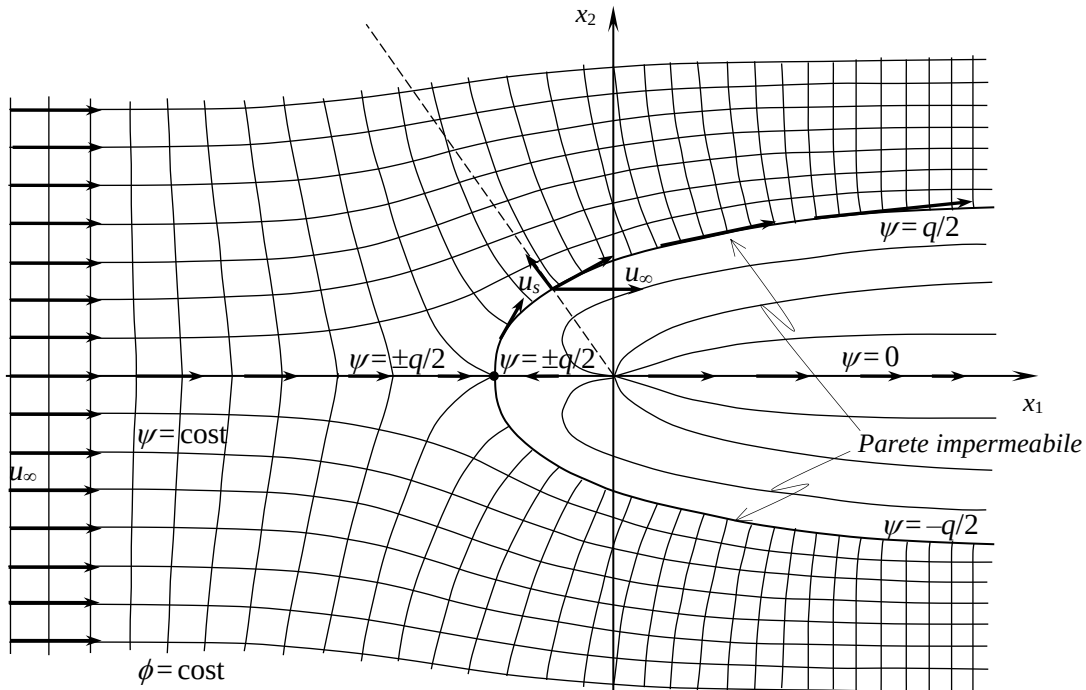


Figura 93. Rete idrodinamica di un moto irrotazionale generato dalla sovrapposizione di un flusso uniforme e di una sorgente, equivalente ai moti generati dalla corrente uniforme e dalla sorgente, confinati da una parete curva seminfinita (semicorpo).

$$r = \frac{q}{2\pi u_\infty} \frac{\pm \pi - \vartheta}{\sin \vartheta} = \frac{q}{2\pi u_\infty} \frac{\pi - |\vartheta|}{|\sin \vartheta|}.$$

in cui si prende il segno più per angoli positivi nell'intervallo $[0, \pi]$ e il segno meno per angoli negativi nell'intervallo $[-\pi, 0]$.

L'unione dei due rami distinti delle due linee di corrente, congiunti nel punto di ristagno, determina un'unica linea di corrente (con valori distinti della funzione di corrente nei due rami) che dividono il piano in due aree, di cui una interessata soltanto dal flusso uniforme e una influenzata soltanto dalla sorgente. Tale soluzione del problema di moto irrotazionale può quindi essere utilizzata per rappresentare il campo di moto determinato dalla corrente uniforme che investe una parete impermeabile di forma uguale alla linea di divisione menzionata (sulla faccia sinistra nel caso di Figura 93), delimitante un corpo seminfinito (*semicorpo*), o anche il campo determinato dalla sola sorgente, delimitato dall'altra faccia (destra nel disegno di Figura 93) della stessa parete, delimitante un semicorpo complementare al precedente.

8.5.7 Dipolo (doppietta)

La sovrapposizione di un pozzo e una sorgente di uguale intensità q e centri posti sui semiassi x_1 positivo e negativo, a distanza $d/2$ dall'origine, genera un campo di moto irrotazionale descritto dalle seguenti espressioni del potenziale e della funzione di corrente:

$$\begin{aligned}\phi &= -\frac{q}{2\pi} \ln\left(\sqrt{(x_1 - d/2)^2 + x_2^2}\right) + \frac{q}{2\pi} \ln\left(\sqrt{(x_1 + d/2)^2 + x_2^2}\right) \\ \psi &= -\frac{q}{2\pi} \arctan\left(\frac{x_2}{x_1 - d/2}\right) + \frac{q}{2\pi} \arctan\left(\frac{x_2}{x_1 + d/2}\right)\end{aligned}$$

Al tendere a zero della distanza d fra pozzo e sorgente con valore costante del prodotto $qd = M$, il potenziale e la funzione di corrente assumono le seguenti espressioni asintotiche⁸⁸:

$$\phi = \frac{M}{2\pi} \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \quad ; \quad \psi = -\frac{M}{2\pi} \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Le linee equipotenziali sono circonferenze con centro sull'asse x_1 , tangenti l'asse x_2 nell'origine; le linee di corrente sono circonferenze con centro sull'asse x_2 , tangenti l'asse x_1 nell'origine⁸⁹.

Le componenti della velocità sono date da:

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \frac{M}{2\pi} \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \quad ; \quad u_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = -\frac{M}{\pi} \frac{x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

Linee equipotenziali, linee di corrente e campo di velocità sono rappresentati in Figura 94.

⁸⁸ Introducendo coordinate polari ed il rapporto $\varepsilon = d/r$ si ha per il potenziale:

$$\phi = \frac{M}{2\pi d} \ln\left(\frac{\sqrt{(x_1 + d/2)^2 + x_2^2}}{\sqrt{(x_1 - d/2)^2 + x_2^2}}\right) = \frac{M}{2\pi d} \ln\left(\frac{\sqrt{(r \cos \vartheta + d/2)^2 + r^2 \sin^2 \vartheta}}{\sqrt{(r \cos \vartheta - d/2)^2 + r^2 \sin^2 \vartheta}}\right) = \frac{M}{2\pi \varepsilon} \ln\left(\frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2/4 + \varepsilon \cos \vartheta}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2/4 - \varepsilon \cos \vartheta}}\right)$$

il cui limite per $\varepsilon \rightarrow 0$, costituente una forma indeterminata del tipo $0/0$, si calcola con la regola di de l'Hospital, come limite del rapporto fra le derivate prime di numeratore e denominatore. Analogo procedimento si applica per la funzione di corrente.

⁸⁹ Una circonferenza di raggio R e centro di coordinate (x_{1c}, x_{2c}) ha equazione $(x_1 - x_{1c})^2 + (x_2 - x_{2c})^2 = R^2$, che sviluppata fornisce $x_1^2 + x_2^2 - 2x_{1c}x_1 - 2x_{2c}x_2 + x_{1c}^2 + x_{2c}^2 - R^2 = 0$. Per confronto con l'espressione dell'equazione di una linea equipotenziale $x_1^2 + x_2^2 - (M/2\pi\phi)x_1 = 0$, si deduce che i centri delle circonferenze hanno coordinate $(M/4\pi\phi, 0)$, col che giacciono sull'asse x_1 , e che $R = x_{1c}$, per cui le circonferenze passano per l'origine, ove sono tangenti l'asse x_2 . Analogo ragionamento si sviluppa per le linee di corrente.

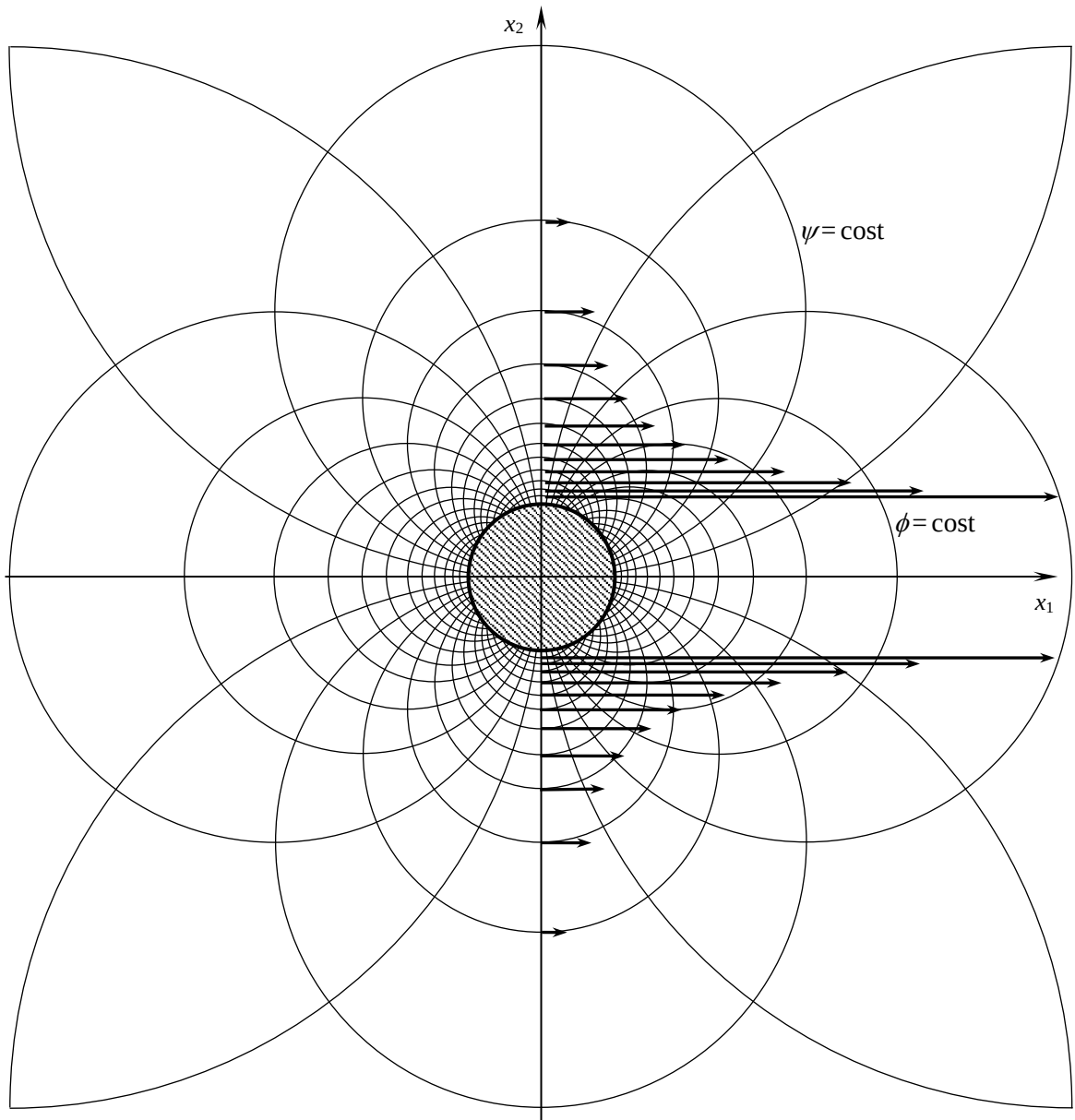


Figura 94. Rete idrodinamica di un moto irrotazionale indotto da un dipolo pozzo-sorgente (doppietta).

8.5.8 Moto attorno a un cilindro

La sovrapposizione di una corrente uniforme di intensità u_∞ parallela all'asse x_1 e di un dipolo di costante $M = 2\pi u_\infty r_0^2$ genera un moto irrotazionale rappresentato dalle seguenti espressioni del potenziale e della funzione di corrente:

$$\phi = u_\infty x_1 + \frac{M}{2\pi} \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} = u_\infty x_1 \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right)$$

$$\psi = u_\infty x_2 - \frac{M}{2\pi} \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} = u_\infty x_2 \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right).$$

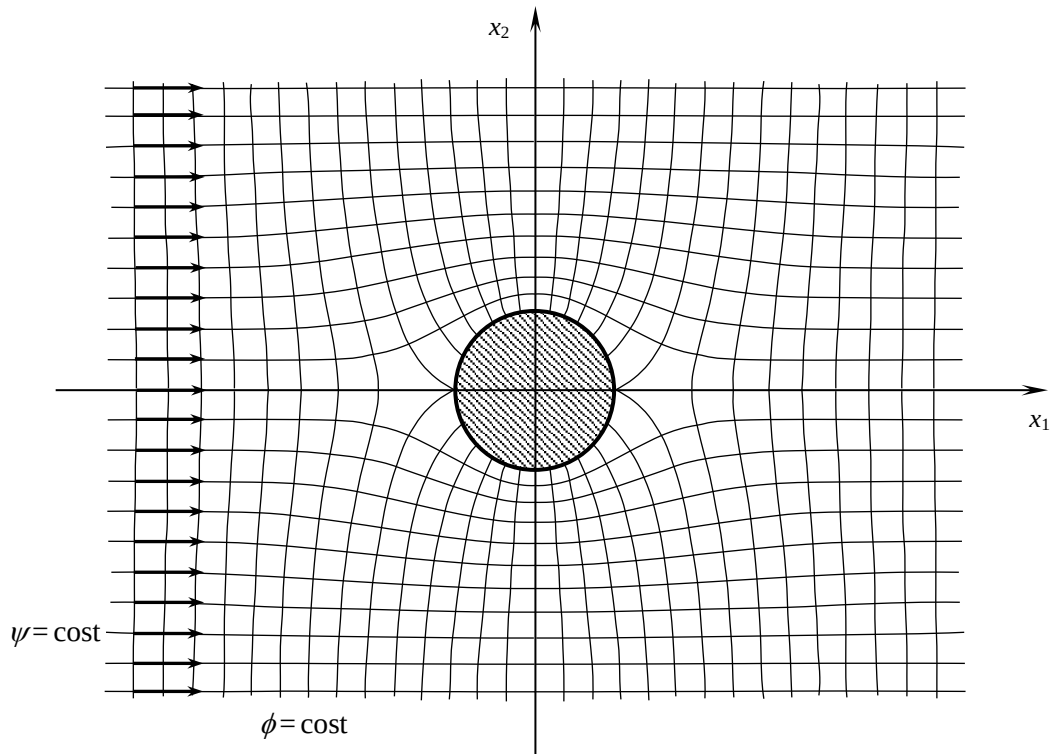


Figura 95. Rete idrodinamica per un moto irrotazionale piano attorno a un cilindro.

Linee di corrente e linee equipotenziali sono rappresentate in Figura 95. Poiché $\psi=0$ per $r=r_0$, la circonferenza di raggio r_0 è una linea di corrente.

Le componenti della velocità sono date da:

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = u_\infty \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) - 2u_\infty x_1 \frac{r_0^2}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x_1} = u_\infty \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} - x_1 \frac{r_0^2}{r^4} \frac{\partial(r^2)}{\partial x_1} \right) = u_\infty \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} - 2x_1^2 \frac{r_0^2}{r^4} \right)$$

$$u_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = -2u_\infty x_1 \frac{r_0^2}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x_2} = -u_\infty x_1 \frac{r_0^2}{r^4} \frac{\partial(r^2)}{\partial x_2} = -2u_\infty x_1 x_2 \frac{r_0^2}{r^4}$$

In coordinate polari si ha:

$$u_1 = u_\infty \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} - 2x_1^2 \frac{r_0^2}{r^4} \right) = u_\infty \left[1 + \frac{r_0^2}{r^2} (1 - 2 \cos^2 \vartheta) \right] = u_\infty \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \cos 2\vartheta \right)$$

$$u_2 = -2u_\infty x_1 x_2 \frac{r_0^2}{r^4} = -2u_\infty \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{r_0^2}{r^2} = -u_\infty \frac{r_0^2}{r^2} \sin 2\vartheta$$

Sulla circonferenza di raggio r_0 sono punti di ristagno le intersezioni con l'asse x_1 .

La distribuzione delle pressioni sulla superficie del cilindro si ottiene dalla legge di Bernoulli:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = z_\infty + \frac{p_\infty}{\gamma} + \frac{u_\infty^2}{2g}.$$

Nel caso di cilindro ad asse verticale le linee di corrente sono contenute in piani orizzontali, col che $z=z_\infty$ e la pressione è data da:

$$p = p_{\infty} + \frac{\rho u_{\infty}^2}{2} \left[1 - \left(\frac{u}{u_{\infty}} \right)^2 \right],$$

in cui:

$$\left(\frac{u}{u_{\infty}} \right)^2 = \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \cos 2\vartheta \right)^2 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^4 \sin^2 2\vartheta = 1 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^4 - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \cos 2\vartheta.$$

Sulla superficie del cilindro ($r = r_0$) si ha quindi:

$$\left(\frac{u}{u_{\infty}} \right)^2_{r=r_0} = 2(1 - \cos 2\vartheta) = 2(1 - \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) = 4 \sin^2 \vartheta \quad (203)$$

e l'eccesso di pressione rispetto alle condizioni indisturbate (p_{∞}) è dato da:

$$\Delta p = \frac{\rho u_{\infty}^2}{2} [1 - 2(1 - \cos 2\vartheta)].$$

La distribuzione delle pressioni è simmetrica e dà pertanto luogo a una spinta nulla. I valori massimo e minimo di pressione si ottengono rispettivamente nei punti di ristagno e nei punti in quadratura rispetto a essi ($\vartheta = \pi/2$):

$$\Delta p_{\max} = \frac{\rho u_{\infty}^2}{2} \quad ; \quad \Delta p_{\min} = -\frac{3}{2} \rho u_{\infty}^2.$$

La circolazione della velocità lungo una linea chiusa che abbraccia l'intera sezione circolare è nulla. Per una linea coincidente con la circonferenza la conclusione è immediata sulla base dell'espressione (203). Per qualunque linea che comprenda la circonferenza la quantità aggiuntiva è nulla per l'irrotazionalità del moto⁹⁰. Un moto attorno a un cilindro con circolazione non nulla si può ottenere sovrapponendo ulteriormente alla soluzione descritta un vortice irrotazionale. Nel caso di vortice orario, all'aumentare dell'intensità del vortice i punti di ristagno sulla circonferenza dapprima si spostano nel semipiano x_2 negativo, coincidono in un unico posto sul punto di minima x_2 per un valore critico dell'intensità, che per valori superiori dell'intensità si localizza in posizione esterna alla circonferenza.

8.6 Problema inverso

Nei §§8.5.6 e 8.5.8 si è mostrato come un moto irrotazionale che soddisfa, su determinate linee di corrente, le condizioni cinematiche di impermeabilità di una parete solida possa ottenersi dalla sovrapposizione di opportuni moti irrotazionali. In particolare, nel §8.5.6, la presenza di un'unica sorgente determinava una linea di corrente equivalente a una parete seminfinita (a conclusione analoga si sarebbe comunque pervenuti con un solo pozzo), mentre nel §8.5.8 la compresenza di un

⁹⁰ Detta ℓ una qualunque linea che racchiude la circonferenza ℓ_c , S ed S_c le superfici piane racchiuse dalle due linee e ΔS la superficie piana compresa fra S_c e S , il Teorema di Kelvin-Stokes e la condizione di irrotazionalità forniscono:

$$\oint_{\ell} \vec{u} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\nabla \times \vec{u}) \cdot \vec{n} dS = \int_{S_c} (\nabla \times \vec{u}) \cdot \vec{n} dS + \int_{\Delta S} (\nabla \times \vec{u}) \cdot \vec{n} dS = \oint_{\ell_c} \vec{u} \cdot d\vec{\ell}.$$

Ne consegue che la circuitazione calcolata con riferimento ad una data linea piana assume il medesimo valore calcolato rispetto ad una linea piana interamente contenuta nella prima.

pozzo e di una sorgente di pari intensità determinava una linea di corrente chiusa, rappresentativa del contorno di un corpo di dimensioni finite.

In generale, almeno in termini approssimati, campi di moto irrotazionali attorno a corpi di forma arbitraria possono ottenersi sovrapponendo un numero adeguato di pozzi e sorgenti aventi intensità la cui somma algebrica sia nulla. Ad esempio, il campo di moto che si produce per effetto di una corrente uniforme che investe il corpo cilindrico di sezione assialsimmetrica rappresentata in Figura 96 si ottiene dal potenziale:

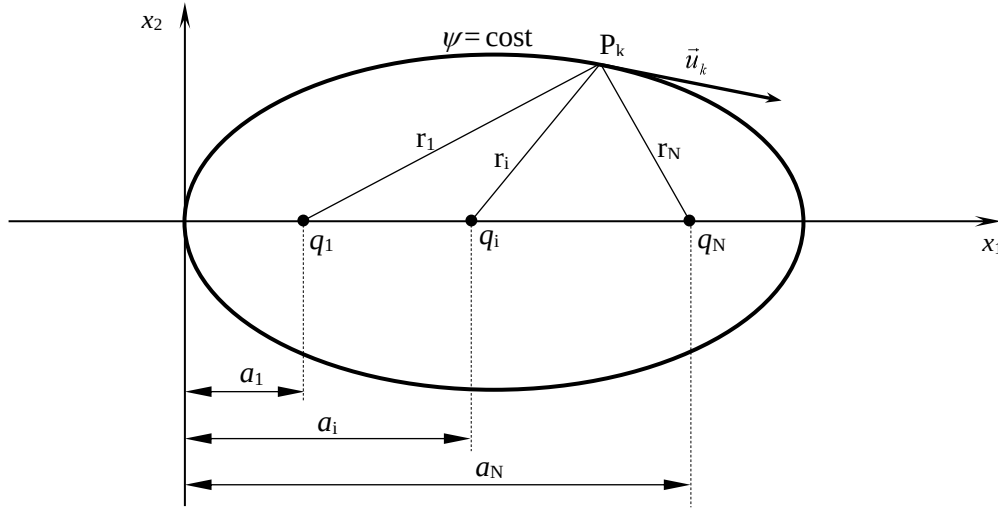


Figura 96. Corpo cilindrico prodotto da pozzi e sorgenti aventi intensità a somma nulla.

$$\phi = u_{\infty} x_1 + \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{2\pi} \ln r_i = u_{\infty} x_1 + \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{2\pi} \ln \sqrt{(x_1 - a_i)^2 + x_2^2},$$

con:

$$\sum_{i=1}^N q_i = 0. \quad (204)$$

Le componenti della velocità sono date da:

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = u_{\infty} + \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(x_1 - a_i)^2 + x_2^2}} \cdot \frac{1}{2} \frac{2(x_1 - a_i)}{\sqrt{(x_1 - a_i)^2 + x_2^2}} = u_{\infty} + \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{2\pi} \frac{(x_1 - a_i)}{(x_1 - a_i)^2 + x_2^2}$$

$$u_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(x_1 - a_i)^2 + x_2^2}} \cdot \frac{1}{2} \frac{2x_2}{\sqrt{(x_1 - a_i)^2 + x_2^2}} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{2\pi} \frac{x_2}{(x_1 - a_i)^2 + x_2^2}.$$

Imponendo che la velocità risulti tangente alla superficie esterna del corpo in $N-1$ punti:

$$\left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{P_k} = \left. \frac{u_2}{u_1} \right|_{P_k},$$

il cui primo membro, pari alla tangente trigonometrica della retta tangente al corpo nel punto P_k , è assegnato, si ottengono $N-1$ equazioni che, accoppiate alla (204), costituiscono un sistema lineare nelle N incognite q_i^{91} .

⁹¹ Il metodo descritto, riferito alla forma tridimensionale del medesimo problema, è stato utilizzato, a suo tempo, per determinare il campo di moto relativo attorno ad un dirigibile in movimento.

8.7 Spinte: paradosso di d'Alembert e Teorema di Kutta-Joukowski

Nel §8.5.8 si è mostrato che la simmetria della distribuzione delle pressioni sulla circonferenza costituente la sezione del cilindro determina l'annullamento della spinta sul corpo. Nel caso ipotizzato di flusso contenuto in un piano orizzontale, l'annullamento del componente della spinta in direzione ortogonale al flusso indisturbato (asse x_2) avrebbe potuto essere previsto per mere ragioni di simmetria. Viceversa, l'annullamento del componente parallelo alla direzione del flusso indisturbato appare tutt'altro che intuitivo e, in effetti, contraddetto dall'esperienza. A tale riguardo va però rilevato che tale seconda caratteristica della spinta è del tutto generale per un flusso di fluido ideale in moto irrotazionale che investe un ostacolo e assume assetto uniforme a grande distanza da esso. Tale proposizione, nota come Teorema di d'Alembert, per la sua contraddittorietà rispetto alla comune esperienza empirica viene anche talora indicata quale paradosso di d'Alembert⁹². Il motivo della discrepanza fra l'enunciato del teorema e l'esperienza è legato a due effetti: l'azione di trascinamento che un fluido reale, viscoso, esercita sulla superficie dell'ostacolo e la depressione che si genera sul lato di poppa dell'ostacolo (il lato opposto alla direzione di provenienza del flusso), in conseguenza del distacco del flusso dalla parete. La prevalenza dell'uno o dell'altro effetto dipende dalla geometria dell'ostacolo e dal modo in cui esso viene investito dal flusso. Il distacco di vena verrà illustrato con qualche maggiore dettaglio nel Capitolo 10, dedicato allo studio della zona del flusso prossima a una parete (*strato limite*).

La componente S_n ortogonale alla direzione asintotica del flusso, detta *portanza*, è invece generalmente non nulla e data da (Teorema di Kutta-Joukowski)⁹³:

$$S_n = \rho u_\infty \Gamma ,$$

in cui Γ è la circuitazione della velocità lungo una qualunque linea chiusa abbracciante una volta l'ostacolo, che risulta indipendente dalla linea scelta per l'irrotazionalità del moto⁹⁴. Il verso della portanza si ottiene da quello della velocità asintotica, ruotata di 90° nel verso opposto a quello di percorrenza delle linee chiuse corrispondenti a una circuitazione positiva.

Nel caso del cilindro del §8.5.8, l'annullamento della portanza è quindi legato all'annullamento della circuitazione della velocità. Diverso sarebbe il caso per il moto irrotazionale attorno a un cilindro con circolazione⁹⁵.

⁹² Due differenti dimostrazioni del teorema sono fornite nel Marchi Rubatta, §7.7, e nel Cenedese, §3.3.7.

⁹³ Vedi Marchi-Rubatta, §11.12.

⁹⁴ Nella nota 85 si è già chiarito che la circuitazione può risultare non nulla se il dominio ove è definito il vettore velocità non risulta a connessione lineare semplice, nel qual caso la linea chiusa rispetto alla quale viene calcolata la circuitazione racchiude punti nei quali la velocità non è definita. Che la circuitazione della velocità sia costante al variare della linea chiusa, purché abbracciante l'intero ostacolo, discende dalle considerazioni presentate nella nota 90.

⁹⁵ La *portanza alare* è la spinta verticale, rivolta verso l'alto, che consente il sostentamento degli aeromobili. Si parla invece di *deportanza* quando la spinta verticale è rivolta verso il basso, ciò che si realizza mediante l'alettone di un'auto da competizione allo scopo di aumentarne l'aderenza al suolo per effetto del maggiore attrito (*grip*) che si produce fra gli pneumatici e l'asfalto. Il calcolo della portanza e della deportanza può effettuarsi ricorrendo ad una trasformazione del moto con circolazione attorno ad un cilindro, mediante la quale il cilindro viene trasformato in un profilo alare. Nel caso di fluidi reali, il Teorema di d'Alembert non è verificato: oltre alla portanza è presente una forza di trascinamento che si oppone al moto. L'efficienza di un'ala aumenta all'aumentare del rapporto fra portanza (l'effetto desiderato) e forza di trascinamento (effetto indesiderato, per vincere la quale occorre spendere energia prodotta dal motore). Tale comportamento dei fluidi reali è ciò che conferisce all'enunciato del Teorema di d'Alembert carattere paradossale.

CAPITOLO NONO

9. TURBOLENZA

9.1 Generalità

Nell'accezione usuale dell'Idraulica, il moto uniforme di una massa fluida è stato definito nel §4.4 come un flusso in cui tutte le particelle si muovono di moto rettilineo e uniforme. Come esempio notevole di tale tipo di moto è stato indicato il flusso in una normale tubazione a sezione costante. Tuttavia, il verificarsi di tale tipo di moto in un condotto siffatto non è affatto scontato: è, anzi, alquanto improbabile nel caso del moto dell'acqua in tubazioni acquedottistiche, come anche in canali a pelo libero – tanto per citare due esempi applicativi abbastanza comuni – per effetto dell'insorgenza di fenomeni di instabilità del flusso, identificati con il termine "turbolenza", che vengono illustrati e analizzati nei loro aspetti essenziali nei paragrafi successivi.

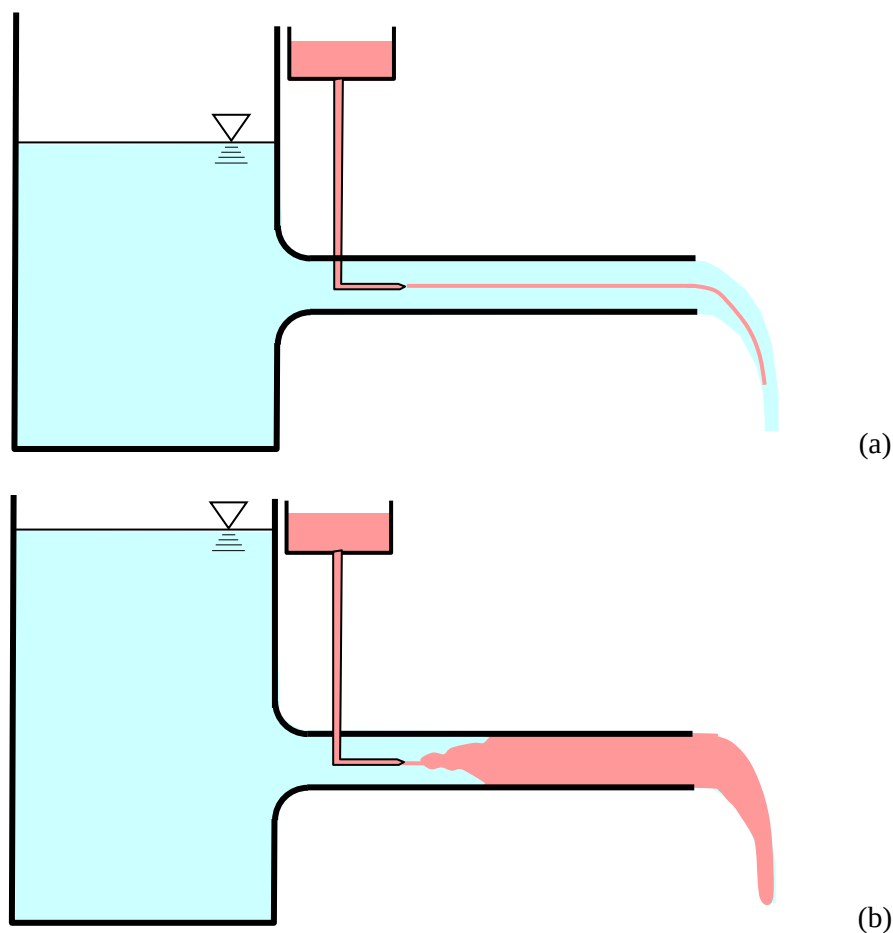


Figura 97. Schema idealizzato dell'esperimento di Reynolds.

9.2 Evidenze sperimentali

Da un punto di vista sperimentale, il verificarsi del moto uniforme come precedentemente definito implicherebbe il fatto che, iniettando continuamente del colorante in un certo punto di un liquido fluente in una tubazione di vetro il colorante descriva, al trascorrere del tempo, un tracciato rettilineo ben definito, dato dalla linea di fumo associata al punto di iniezione del colorante. Ciò è quanto accade, nella versione idealizzata dell'esperienza di Reynolds rappresentata in Figura 97, per una

portata non troppo elevata, corrispondente al pannello superiore (Figura 97a). Essendo il moto stazionario, tale linea di fumo coincide con la traiettoria comune alle particelle che, in tempi successivi, sono passate per il punto di iniezione (vedi §4.6). Tale comportamento denota la mancanza di mescolamento delle particelle che seguono la medesima traiettoria con il liquido circostante, e quindi della massa liquida nel suo complesso. Il regime di moto caratterizzato dal tipo di comportamento testé descritto prende il nome di regime *laminare* o *regolare*. Una ulteriore caratteristica del regime laminare è costituita dal fatto che eventuali perturbazioni indotte in punti della massa liquida tendono progressivamente ad attenuarsi nel senso del moto, fino a scomparire.

Si esegua l'esperimento di cui sopra per una portata Q di un liquido di assegnate viscosità μ e densità ρ , fluente in una tubazione a sezione circolare di diametro D e area $\Omega = \pi D^2/4$, tale che $U = Q/\Omega$ sia la *velocità media* del flusso. Il regime di moto laminare si osserva fino a valori dell'ordine di circa 2300 del numero di Reynolds costruito con tali grandezze scala:

$$\text{Re} = \frac{\rho U D}{\mu} = \frac{U D}{\nu}, \quad (205)$$

Per valori del numero di Reynolds superiori (cioè, per valori maggiori delle velocità medie di un dato liquido fluente in una tubazione di dato diametro), i filetti fluidi colorati presentano dapprima un andamento fluttuante, segnale di una condizione di instabilità del flusso. A ulteriori aumenti del numero di Reynolds, corrispondono movimenti sempre più irregolari dei filetti fluidi, caratterizzati da spostamenti, ondulazioni e contorsioni di ampiezza sempre maggiore, talché il liquido colorato riesce completamente mescolato con il liquido circostante a distanze sempre minori dal punto di immissione. Altrettanto irregolari sono le forme assunte dalle traiettorie delle particelle. Ciò è quanto è rappresentato in Figura 97b (come si vedrà nei capitoli successivi, il maggiore dislivello fra il pelo libero nel serbatoio e lo sbocco fa sì che la tubazione inferiore sia percorsa da una portata maggiore rispetto al primo caso). Un tale regime di moto è denominato *turbolento*.

Il tipo di comportamento dei filetti fluidi nel caso di regime turbolento è dovuto al fatto che, in un dato punto della massa liquida, la velocità non rimane costante al trascorrere del tempo, ma è invece caratterizzata da fluttuazioni di intensità legate, anch'esse, al valore del numero di Reynolds. Un moto turbolento è quindi sempre essenzialmente un moto vario. Inoltre, alcune proprietà peculiari del moto turbolento rendono particolarmente difficoltosi sia la determinazione del campo di moto che lo studio stesso del fenomeno. Un primo aspetto è costituito dalla tendenza alla amplificazione di una perturbazione generata in un punto della massa liquida, anziché alla sua attenuazione, come avviene invece nel caso del moto laminare. Inoltre, due particelle poste inizialmente a distanza infinitesima, possono trovarsi, dopo un intervallo di tempo finito, a una distanza finita. Ciò ha una importante conseguenza nei confronti della possibilità di predire il moto del fluido. Infatti, qualora si desiderasse descrivere la traiettoria di una particella, ci si troverebbe di fronte al problema che un errore, anche molto piccolo, commesso nella localizzazione iniziale della particella che si vuole seguire, si traduce in un errore rilevante riguardo la posizione della particella in un tempo successivo. Per lo stesso motivo, è evidente come gli esperimenti di moto in regime turbolento siano anche non perfettamente ripetibili. Tali caratteristiche sono quelle tipiche di un fenomeno *caotico*.

Sebbene le equazioni di Navier-Stokes non descrivano completamente tutti i fattori che possono avere un ruolo nello sviluppo della turbolenza in particolari fenomeni idrodinamici, generalmente esse sono in sé rappresentative dei fenomeni che hanno sede in un fluido newtoniano, anche in condizioni di moto turbolento. Fra l'altro, il significato riconosciuto nel §7.4 per il numero di Reynolds quale termine dell'equazione adimensionalizzata, unitamente all'effetto di attenuazione della viscosità, suggeriscono che l'insorgenza della turbolenza sia legata ai termini convettivi non lineari dell'equazione. Da quanto illustrato finora, tuttavia, in pratica la possibilità di determinare dettagliatamente un flusso turbolento mediante l'equazione di Navier-Stokes è limitata dalla elevata sensibilità della soluzione a errori commessi nella specificazione di condizioni iniziali o al contorno. Naturalmente, tale considerazione potrebbe suscitare nel lettore il sospetto della totale inutilità di tutta la costruzione logica fin qui condotta per la scrittura delle equazioni scritte ai fini della descrizione del moto di un fluido. Le cose non stanno però in questi termini. Come per vari altri

fenomeni della fisica, la difficoltà di descrivere il moto turbolento, per i motivi illustrati, attraverso le leggi fisiche che lo governano, rende più conveniente analizzarlo come un fenomeno aleatorio, quale effettivamente si manifesta dall'evidenza sperimentale pura e semplice, esaminandone e cercando di descriverne le caratteristiche statistiche. Ciò è quanto verrà illustrato nel paragrafo successivo, mantenendo la trattazione a un livello elementare⁹⁶.

9.3 Analisi statistica della turbolenza

Come precedentemente menzionato, il rilievo puntuale di una qualunque grandezza all'interno di una massa fluida in moto turbolento fornisce un andamento fluttuante. Se la quota del pelo libero del serbatoio di Figura 97 viene mantenuta costante nel tempo (anche in questo caso a meno di un errore che si ammette molto piccolo), l'andamento temporale, ad esempio, della componente della velocità nella direzione dell'asse della tubazione, assume l'aspetto riportato in Figura 98. Corrispondentemente, anche la portata che fluisce nella tubazione assume un andamento fluttuante. Tuttavia, se si effettua la misura della portata media su intervalli di tempo non troppo piccoli Δt , semplicemente misurando, per ciascuno di tali intervalli di tempo, il volume di liquido ΔV_k che si è riversato in un recipiente di raccolta del liquido e dividendolo per l'intervallo di tempo, si osserva che i vari valori di portata così ottenuti sono, a meno di piccoli scarti, tutti uguali fra loro.

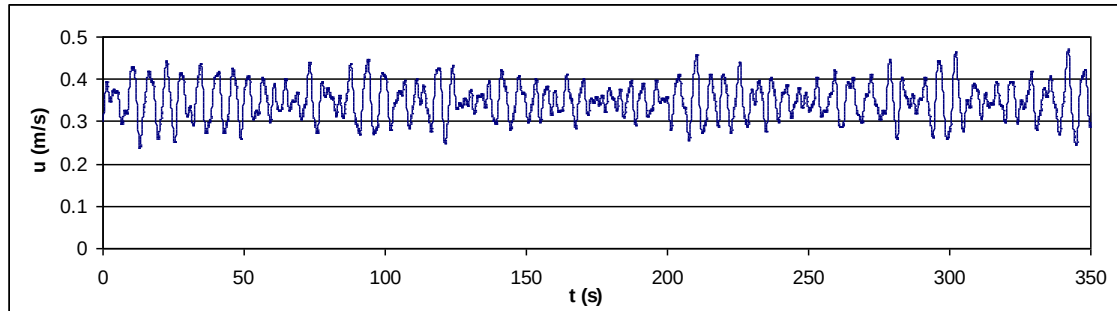


Figura 98. Andamento temporale della velocità assiale in un punto di una tubazione sede di un moto turbolento.

Da un punto di vista matematico, tale operazione corrisponde alla valutazione della seguente media integrale, per il generico intervallo di tempo $[t_k, t_{k+1}] = [t_k, t_k + \Delta t]$:

$$\bar{Q}_k = \frac{\Delta V_k}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_k}^{t_k + \Delta t} Q(t) dt$$

È del tutto evidente come tale modalità di determinazione della portata possa risultare del tutto soddisfacente da un punto di vista applicativo, non essendo di alcun interesse valutare le fluttuazioni della portata, ma soltanto la componente media che effettivamente determina, su tempi non troppo piccoli, il trasporto di massa.

La medesima impostazione può essere adottata per l'analisi di tutte le grandezze che intervengono nel moto turbolento; in particolare, per la componente assiale della velocità il cui andamento temporale è riportato in Figura 98. Allo stesso modo, si calcolano quindi, per ciascun intervallo di tempo, i valori *medi locali* (perché riferiti a un punto della massa liquida):

$$\bar{u}_k = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_k}^{t_k + \Delta t} u(t) dt .$$

⁹⁶ Per un sintetico ma più completo inquadramento del problema si veda Cenedese – Meccanica dei Fluidi.

Nel caso in cui, in alternativa, su ciascun intervallo Δt venga eseguita la misura di un numero finito N , sufficientemente grande, di valori di velocità a intervalli di tempo δt , tali quindi che $\Delta t = N\delta t$, i valori medi locali della velocità vengano calcolati semplicemente come medie aritmetiche:

$$\bar{u}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u_{kn} . \quad (206)$$

In entrambi i casi, tali valori medi, nelle citate condizioni di stazionarietà del livello della superficie libera nel serbatoio, risulteranno identici a meno di piccoli scarti. La componente media della velocità così definita è quella che, punto per punto, determina la portata media valutata come sopra descritto, e assume perciò anche il nome di *velocità* o *componente di trasporto*. Nell'esempio di Figura 98 il valore medio della velocità, o velocità di trasporto, è pari a 0,35 m/s. Per quanto detto sul significato dei valori medi come componenti di trasporto, eseguendo la medesima analisi sulle componenti della velocità radiali, non potendosi avere, su intervalli non troppo piccoli, trasporto netto in direzione trasversale all'asse della corrente essendo questa confinata dalle pareti della tubazione, i valori medi calcolabili per una qualunque direzione radiale non potranno che essere (sempre a meno di piccoli scarti) nulli. L'essere i vari valori medi calcolabili sui successivi intervalli di tempo praticamente identici fra loro, conferisce a un moto di questo tipo l'attributo di moto *stazionario in media*. Inoltre, nel caso specifico di una tubazione a sezione circolare costante, risultando nulli i valori medi delle componenti trasversali della velocità, il moto è anche *uniforme in media*.

I concetti esposti si estendono facilmente a moti turbolenti che non possano dirsi stazionari in media. Ad esempio, conservando il riferimento allo schema di Figura 97, eseguendo N esperienze in ciascuna delle quali il livello del pelo libero del serbatoio viene fatto aumentare (nelle intenzioni) sempre con la stessa legge di variazione temporale (ma sempre con qualche errore nei livelli istantanei), misurando l'andamento temporale della componente assiale della velocità in un certo punto della tubazione, si otterrebbe la sequenza di N rilievi, tutti differenti l'uno dall'altro, illustrata in Figura 99: In tal caso, rilevata, per un dato istante di tempo t_0 , la sequenza degli N valori di velocità assiale misurati nelle N prove (dette *realizzazioni*), il corrispondente valore medio si può ottenere, con tanta maggiore precisione quanto maggiore è il numero di realizzazioni effettuate, dalla media aritmetica (*media di insieme*, riferita cioè all'insieme delle realizzazioni):

$$\bar{u}(t_0) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u_n(t_0) . \quad (207)$$

Tale media locale può essere, ovviamente, valutata per qualunque istante di tempo t . In generale, oltre a risultare differente da istante a istante il valore medio (*moto vario in media*), potranno risultare differenti le distribuzioni di probabilità delle variabili aleatorie $u(t)$, le quali, dipendendo da un parametro quale è il tempo, costituiscono, per definizione, dei *processi stocastici*.

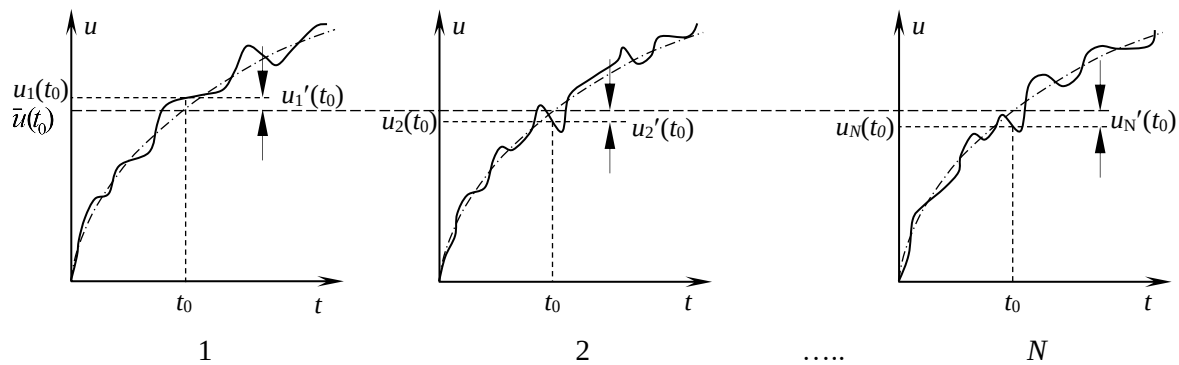


Figura 99. Realizzazioni di esperimenti di moto turbolento non stazionario in media.

L'analisi delineata per i moti vari in media è la più generale possibile. La stazionarietà in media di un moto, in realtà, non implica automaticamente la possibilità di calcolare i valori medi mediante una media temporale, come precedentemente ammesso, essendo richiesta a tale fine l'*ergodicità* del processo stocastico, la quale è peraltro in genere verificata. Poiché tuttavia la valutazione delle parti medie attraverso la media di insieme (207) costituisce un procedimento più generale, a tale termine e all'analisi di un insieme di realizzazioni faremo riferimento in quanto segue. Da un punto di vista puramente aritmetico, peraltro, la media di insieme non costituisce un operatore differente dalla media temporale discreta (206), per cui le operazioni che verranno appresso illustrate possono intendersi indifferentemente riferite all'analisi sia di un moto vario in media che di uno stazionario in media ed ergodico. Si rileva tuttavia come, da un punto di vista pratico, la sussistenza della proprietà ergodica sia importante in quanto consente di limitarsi a effettuare una sola realizzazione del processo stocastico, ossia, un solo esperimento. Poiché l'attendibilità statistica di una media aumenta con il numero dei termini mediati, ottenere un insieme di realizzazioni sufficientemente nutrito – necessario per un moto vario in media, ma anche per un moto stazionario in media non ergodico – può significare un rilevante impegno di tempo ed economico.

Si osservi che l'operatore media di insieme gode della proprietà di linearità (5) (§1.1.1), la quale verrà utilizzata estensivamente nei procedimenti illustrati nel prosieguo per la derivazione delle equazioni per le quantità medie. Si noti anche che per il campo delle velocità medie è possibile determinare tutte le famiglie di linee caratteristiche descritte ai § 4.2 e 4.6 (traiettorie, linee di corrente e linee di fumo).

Tutto ciò precisato, sulla base del concetto di media di insieme, è possibile, in generale, rappresentare il valore istantaneo di una grandezza – ad esempio, la velocità assiale u – come somma della parte media, $\bar{u}$, e di una parte fluttuante, u' (*decomposizione di Reynolds*):

$$u = \bar{u} + u' , \quad (208)$$

nella quale, ovviamente, il valore medio è lo stesso per tutte le realizzazioni, mentre la parte pulsante – detta anche, perché non contribuente al trasporto di massa, *componente di agitazione* – varia da prova a prova, come evidenziato nello schema di Figura 99. Ricalcolando la media di insieme sulla base della decomposizione di Reynolds e utilizzando la proprietà di linearità si ottiene:

$$\bar{u} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u_n = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\bar{u} + u'_n) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \bar{u} + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u'_n = \frac{N\bar{u}}{N} + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u'_n = \bar{u} + \bar{u}' ,$$

da cui, semplificando il valore medio fra il primo e l'ultimo membro, si ottiene:

$$\bar{u}' = 0 , \quad (209)$$

per cui risulta nullo il valore medio delle parti fluttuanti.

9.4 Equazioni per le quantità medie

Poiché il moto turbolento, per le caratteristiche descritte, non è conoscibile compiutamente, in ogni dettaglio sia spaziale che temporale, e poiché inoltre, in svariati problemi applicativi, non si è in effetti interessati a tale completa descrizione ma soltanto alla conoscenza delle componenti di trasporto della velocità – ovvero della conoscenza di tali componenti, più semplicemente, ci si accontenta – si pone il problema di determinare almeno delle equazioni che descrivano il moto medio. L'impostazione di tale problema viene condotta con riferimento al caso di fluido incomprimibile, omogeneo e isoterma ($\rho = \text{cost}$; $\mu = \text{cost}$), per motivi specificamente legati al problema in esame, che riusciranno più chiari nel prosieguo.

9.4.1 Equazione di continuità

L'equazione di continuità per un fluido incomprimibile e omogeneo assume la forma vettoriale (141) (§ 4.9.2), equivalente alla forma per componenti:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 , \quad (210)$$

la quale può scriversi, utilizzando la decomposizione di Reynolds:

$$\frac{\partial(\bar{u}_j + u'_{j_n})}{\partial x_j} = 0 .$$

Applicando l'operatore media di insieme membro a membro e ricordando le proprietà di linearità dell'operatore derivata (6) e (7) – espressioni particolari delle condizioni generali (5) – l'equazione si può sviluppare come segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{u}_j + u'_{j_n})}{\partial x_j} &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\partial(\bar{u}_j + u'_{j_n})}{\partial x_j} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\partial u'_{j_n}}{\partial x_j} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u'_{j_n} \right) = \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial(\overline{u'_{j_n}})}{\partial x_j} = 0 \end{aligned}$$

da cui, essendo nulla la media delle parti fluttuanti, si ottiene infine:

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 , \quad (211)$$

ossia, un'equazione formalmente identica a quella per le grandezze istantanee, espressa però in termini di grandezze medie. Tale risultato deriva dalla linearità dell'equazione di continuità, oltre che dell'operatore media d'insieme. Sulla base di un procedimento analogo, identici risultati si otterranno ogni qual volta si applichi l'operatore media di insieme a un termine lineare di una equazione.

Chiarite per il caso dell'equazione di continuità le modalità di utilizzazione delle proprietà di linearità dell'operatore media di insieme e delle funzioni cui esso è applicabile, nel prosieguo, per la sintesi, la media di insieme verrà sempre indicata con il simbolo di soprassegno piuttosto che attraverso la sua espressione esplicita.

Sottraendo membro a membro la forma dell'equazione di continuità per le parti medie dalla forma contenente esplicitamente la decomposizione di Reynolds, si ottiene anche:

$$\frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0 . \quad (212)$$

È quindi a divergenza nulla anche il campo delle parti fluttuanti della velocità.

In virtù della identità formale delle forme indefinite per le quantità istantanee, medie e fluttuanti, equazioni (210), (211) e (212), nonché della linearità dell'operatore integrale, le corrispondenti forme globali, deducibili come al §4.9.1, sono pure formalmente identiche ed esprimono quindi tutte, per il caso $\rho = \text{cost}$ di cui si tratta, l'annullamento dei flussi volumetrici netti corrispondenti.

9.4.2 Equazione di Navier-Stokes – equazione di Reynolds

Anche per quanto riguarda l'equazione di Navier-Stokes, conviene operare sulla forma per componenti, considerando altresì a primo membro l'espressione dell'accelerazione fornita dalla regola di derivazione lagrangiana:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho f_{mi} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} ,$$

nella quale l'unico termine non lineare è quello convettivo, $u_j(\partial u_i/\partial x_j)$. Si osservi che ciò può dirsi unicamente per un fluido incomprimibile, omogeneo e isoterma ($\rho = \text{cost}$; $\mu = \text{cost}$). In caso contrario, anche la densità e la viscosità dinamica risulterebbero fluttuanti e determinerebbero la natura non lineare dei termini in cui esse sono contenute (tranne che per le forze peso, in cui la densità comparirebbe linearmente). Stessa conclusione si dovrebbe trarre per le forme complete dell'equazione di continuità (139) o (140).

Per quanto visto in sede di derivazione dell'equazione di continuità per le parti medie, l'esecuzione della media di insieme degli altri termini produce termini formalmente identici contenenti le parti medie. La media di insieme del termine convettivo fornisce:

$$\begin{aligned} \overline{(\bar{u}_j + u'_j) \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j}} &= \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = \\ &= \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial(\overline{u'_i})}{\partial x_j} + \overline{u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{u'_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}, \end{aligned}$$

da cui, essendo nulle le medie delle parti fluttuanti contenute nel secondo e terzo termine a ultimo membro:

$$\overline{(\bar{u}_j + u'_j) \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j}} = \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{u'_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}. \quad (213)$$

Sulla base della regola di derivazione di un prodotto e dell'equazione di continuità per le parti fluttuanti (212), l'argomento della media nel secondo termine a secondo membro può essere sviluppato come segue:

$$u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial(u'_i u'_j)}{\partial x_j} - u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = \frac{\partial(u'_i u'_j)}{\partial x_j}.$$

Dei due termini non nulli residui nella (213), il primo è analogo a quello di partenza, espresso però in funzione delle quantità medie. Il secondo termine non è invece ulteriormente riducibile. Non è, in particolare, riconducibile a una forma in cui vi compaiano medie di *singole* parti fluttuanti⁹⁷ e pertanto non può essere riconosciuto identicamente nullo. Esso figura come un termine aggiuntivo incognito in una equazione che formalmente, per il resto, è identica a quella scritta per le grandezze istantanee, ma espressa in termini di valori medi.

L'equazione del moto per le parti medie può quindi scriversi, infine, come (*equazione di Reynolds*):

$$\rho \frac{D \bar{u}_i}{Dt} = \bar{\rho} \bar{f}_{mi} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial(\rho \overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j}. \quad (214)$$

Riconoscendo l'analogia del termine contenente la media del prodotto di parti fluttuanti con il termine degli sforzi contenuto nella equazione indefinita del moto (152), ai termini $\tau_{Rij} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$ si attribuisce il nome di *sforzi turbolenti* o *sforzi di Reynolds*. Poiché derivano da un termine inerziale quale l'accelerazione della particella, gli sforzi turbolenti sono associabili a forze d'inerzia (§1.3.5). Si può mostrare che anche lo stato di sforzo turbolento è rappresentato da un tensore, che risulta ovviamente simmetrico in considerazione della espressione degli sforzi turbolenti. Le forme (151) e

⁹⁷ Si rimarca che, con la (209), si è dedotto l'annullamento della media di una singola quantità fluttuante: nulla si può dire su termini contenenti prodotti, frazioni, potenze, etc., di parti fluttuanti, cioè, combinazioni non lineari delle stesse.

(152) dell'equazione indefinita del moto si possono quindi riscrivere per le grandezze medie, evidenziando l'analogia fra sforzi reali e sforzi turbolenti, rispettivamente come:

$$\rho \frac{D\bar{\underline{\underline{u}}}}{Dt} = \rho \bar{\underline{\underline{f}}}_m + \nabla \cdot (\bar{\underline{\underline{\tau}}} + \underline{\underline{\tau}}_R) \quad (215)$$

e

$$\rho \frac{D\bar{u}_i}{Dt} = \rho \bar{f}_{m\,i} + \frac{\partial(\bar{\tau}_{ij} + \tau_{R\,ij})}{\partial x_j} . \quad (216)$$

Tenendo conto degli sforzi turbolenti, si ottengono le seguenti espressioni dei valori medi degli sforzi totali, nelle notazioni vettoriale e per componenti scalari:

$$\bar{\underline{\underline{\tau}}} = -\bar{p}\underline{\underline{I}} + 2\mu\bar{\underline{\underline{D}}} + \underline{\underline{\tau}}_R , \quad (217)$$

in cui $\underline{\underline{\tau}}_\mu = 2\mu\bar{\underline{\underline{D}}}$ rappresenta la parte dipendente dalla viscosità (tensore degli sforzi viscosi), e

$$\bar{\tau}_{ij} = -\bar{p}\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{\rho u'_i u'_j} . \quad (218)$$

Si rimarca come il problema della determinazione degli sforzi turbolenti mediante relazioni che consentano di ottenere un bilancio equazioni/incognite in pareggio (problema di chiusura) sia tuttora, in generale, insoluto. A parte le equazioni che descrivono la dinamica (generazione, trasporto e decadimento) degli sforzi turbolenti⁹⁸ – di forma simile ma di complessità ancora maggiore dell'equazione di Navier-Stokes, nonché contenenti, a loro volta, ulteriori incognite – o modelli di chiusura che esprimono gli sforzi turbolenti in termini delle grandezze medie – contenenti però, anch'essi, parametri in generale non noti (p.es. il popolare modello di Boussinesq) – in generale la valutazione dell'effetto degli sforzi turbolenti in casi specifici deve essere effettuata a livello sperimentale, eventualmente sulla base di un inquadramento teorico definito mediante un modello del tipo detto. Nel §10.4 verranno illustrati sinteticamente il modello di Boussinesq e la teoria della lunghezza di mescolamento, introdotta da Prandtl e Taylor.

9.4.3 Equazione globale del moto

Sotto l'ipotesi fin qui assunta di fluido incomprimibile, omogeneo e isoterma, anche l'equazione globale del moto presenta termini non lineari che, sottoposti all'operazione di media, forniscono termini aggiuntivi legati agli sforzi turbolenti. Nelle forme sia (163) che (164), tale termine è costituito dal flusso di quantità di moto:

$$\vec{M} = \int_{S_c} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS ,$$

derivante, in effetti, dai termini convettivi dell'equazione indefinita del moto e dell'equazione di Navier-Stokes, § 5.7. La media di insieme di tale termine, valutabile tenendo presente la linearità dell'operatore integrale, fornisce:

$$\overline{\int_{S_c} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS} = \int_{S_c} \rho \bar{\vec{u}} (\bar{\vec{u}} \cdot \vec{n}) dS + \int_{S_c} \rho \overline{\vec{u}' (\vec{u}' \cdot \vec{n})} dS = \bar{\vec{M}} - \vec{I}_R ,$$

⁹⁸ Una sintetica presentazione di tali modelli può trovarsi nel Cenedese, §5.7.3.

di cui il secondo termine, conformemente al concetto di sforzo di Reynolds, viene incluso fra le forze esterne a secondo membro delle:

$$\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{M}} = \bar{\bar{G}} + \bar{\bar{H}} + \bar{\bar{H}}_R \quad (219)$$

$$\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{M}} = \bar{\bar{G}} + \bar{\bar{H}}_p + \bar{\bar{H}}_\mu + \bar{\bar{H}}_R , \quad (220)$$

nella quale gli altri termini sono formalmente i medesimi delle equazioni (163) e (164), ma espressi in termini delle quantità medie. Non è superfluo rimarcare che il termine $\bar{\bar{H}}_R$ deriva dagli stessi termini convettivi non lineari che danno luogo al termine aggiuntivo contenuto nell'equazione di Reynolds.

9.4.4 Teorema di Bernoulli

Nel §5.8.2 è stata presentata l'equazione di Bernoulli riferita al moto di una particella lungo la propria traiettoria. In particolare, sono state dedotte le forme per il caso di moto stazionario di un fluido ideale, non viscoso, e di un fluido reale, viscoso, ed è stato evidenziato quali siano le circostanze che consentono di adottare lo schema di fluido ideale, mediante una semplice integrazione dell'equazione di Bernoulli per fluido viscoso. È stato tuttavia anche chiarito come il moto stazionario in senso stretto possa aversi unicamente in regime di moto laminare, giacché il moto turbolento è intrinsecamente vario, potendosi però avere, anche in regime turbolento, moti stazionari in media.

Seguendo il medesimo procedimento illustrato al §5.8 per il campo delle velocità istantanee, proiettando la (215) sull'asse tangente della terna intrinseca definita per il moto medio e sviluppando si ottiene l'analoga della (166):

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{\bar{p}}{\gamma} + \frac{\bar{u}^2}{2g} \right) - \frac{1}{\rho g} \left[\nabla \cdot \left(\underline{\underline{\tau}}_\mu + \underline{\underline{\tau}}_R \right) \right]_s = 0 \quad (221)$$

nella quale l'ultimo termine a primo membro include l'effetto sia degli sforzi viscosi (medi), data dal secondo termine a secondo membro della (217), esprimibile come nella (222), che degli sforzi turbolenti. Indicato con:

$$\bar{H} = z + \frac{\bar{p}}{\gamma} + \frac{\bar{u}^2}{2g} \quad (223)$$

il carico totale medio puntuale, nell'ipotesi di moto stazionario (in media) si ottiene:

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial s} = \frac{1}{\rho g} \left[\nabla \cdot \left(\underline{\underline{\tau}}_\mu + \underline{\underline{\tau}}_R \right) \right]_s , \quad (224)$$

la quale esprime che il carico totale (medio) varia lungo la linea di corrente (media) per effetto sia della viscosità che della turbolenza.

Integrando tra due punti della linea di corrente si ha:

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial \bar{H}}{\partial s} ds = \bar{H}_2 - \bar{H}_1 = \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{\rho g} \left[\nabla \cdot \left(\underline{\underline{\tau}}_\mu + \underline{\underline{\tau}}_R \right) \right]_s ds \quad (225)$$

dalla quale discende la medesima considerazione presentata nel §5.8.2: per qualunque condizione di moto, è sempre possibile definire una lunghezza massima del percorso, al di sotto della quale le perdite di carico totale sono trascurabili e il fluido può quindi essere trattato come ideale. In questo caso la (225) si riduce alla:

$$\bar{H} = \text{cost} \quad (226)$$

Peraltro, poiché frequentemente gli sforzi turbolenti risultano di ordine di grandezza superiore – anche di molto – rispetto agli sforzi viscosi, come mostrato al §9.5, la lunghezza caratteristica al di sotto della quale un moto turbolento può essere analizzato nell’ambito dello schema di fluido ideale può essere talmente ridotta da rendere l’approssimazione inutilizzabile all’atto pratico.

9.5 Significato fisico del numero di Reynolds

Il numero di Reynolds è stato riconosciuto influente, su base empirica, ai fini dello stabilirsi di uno dei due regimi di moto possibili – laminare o turbolento. Ove si tenga presente l'effetto dissipativo sulle perturbazioni a opera dei termini viscosi, tipico del regime laminare, evidenziato anche nel §5.8.2, e il ruolo dei termini convettivi dell'equazione di Navier-Stokes nella generazione della turbolenza, dai quali derivano anche gli sforzi turbolenti, l'evidenza sperimentale è in accordo ed efficacemente spiegata dal significato di quantità proporzionale al rapporto fra forze d'inerzia e forze viscosi, attribuito al numero di Reynolds nel §7.4. Nel regime laminare, i termini viscosi risultano prevalenti rispetto ai termini convettivi dell'equazione del moto. A essi si deve quindi la stabilizzazione del flusso determinata dalla menzionata dissipazione delle perturbazioni. All'aumentare del numero di Reynolds, l'effetto dissipativo dei termini viscosi diviene sempre meno rilevante per confronto con i termini convettivi non lineari, costituenti la causa della amplificazione delle perturbazioni, il che, oltre a giustificare l'insorgenza della turbolenza, conferisce al numero di Reynolds anche il significato di indice dell'intensità della turbolenza.

Sulla base delle nozioni acquisite nel presente paragrafo, al numero di Reynolds può essere attribuito un significato più specificamente legato a quantità caratteristiche della turbolenza, quali gli sforzi turbolenti. Preliminarmente, appare tuttavia opportuno rieseguire anche la determinazione del significato già evidenziato in termini generali, ma questa volta con specifico riferimento al caso di moto uniforme in media in un condotto a sezione circolare, sia per poterlo inquadrare più precisamente nello schema della decomposizione di Reynolds, che allo scopo di rendere più evidente la formulazione degli ordini di grandezza dei termini interessati dall'analisi: il termine convettivo, la cui media di insieme fornisce gli sforzi turbolenti, e il termine viscoso.

In Figura 100 è riportato uno schema riferito a un profilo di velocità a simmetria cilindrica, dipendente quindi soltanto da una coordinata radiale r , della forma parabolica determinabile per via teorica per il regime laminare. Risulta a simmetria assiale anche il profilo delle velocità medie nel moto turbolento, sebbene caratterizzato da una forma più schiacciata. Il ragionamento che verrà impostato, tuttavia, non richiede la sussistenza di tale simmetria, proprio perché attinente alla valutazione dei soli ordini di grandezza dei termini citati piuttosto che dei valori effettivi. Nonostante il riferimento alle caratteristiche geometriche del profilo rappresentato in Figura 100, il procedimento che verrà qui illustrato è quindi valido anche per un profilo delle velocità assiali istantanee in un moto turbolento, caratterizzato da una forma irregolare.

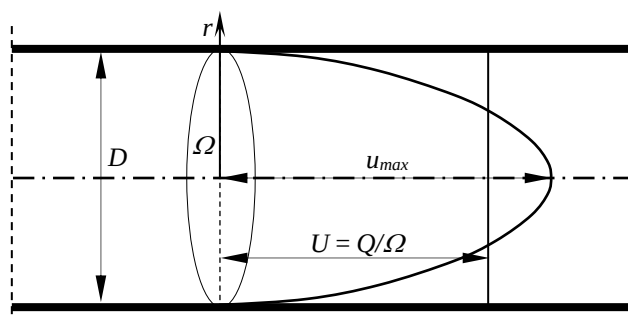


Figura 100. Profilo di velocità in una tubazione a sezione circolare.

Innanzitutto, l'ordine di grandezza dei termini citati è fornito dalla componente assiale della velocità, che è l'unica non nulla nel moto laminare o, in termini di valori medi, nel moto turbolento, ma è

comunque predominante anche in termini di valori istantanei nel regime turbolento. Poiché la velocità varia dal valore zero sulla parete del tubo al valore massimo sull'asse, u_{max} , dello stesso ordine di grandezza della velocità media U , in una distanza pari al raggio della tubazione, a meno di un inessenziale fattore 2 l'ordine di grandezza delle derivate spaziali della velocità è dato da:

$$\frac{\partial u}{\partial r} \propto \frac{U}{D} ,$$

in cui il simbolo $\propto$ indica proporzionalità. Analogamente, l'ordine di grandezza delle derivate seconde valutato sull'intero diametro, come rapporto incrementale di una derivata prima positiva dalla parete all'asse e di una negativa dall'asse alla parete opposta, è dato (in valore assoluto) da:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \propto \frac{\frac{U}{D} - \left(-\frac{U}{D}\right)}{D} \propto \frac{U}{D^2} .$$

L'ordine di grandezza del rapporto fra termini convettivi e termini viscosi è quindi dato da:

$$\frac{\rho u_j \partial u_i / \partial x_j}{\mu (\partial^2 u_i / \partial x_j \partial x_j)} \propto \frac{\rho U (U/D)}{\mu (U/D^2)} = \frac{\rho U D}{\mu} = Re .$$

Poiché, in regime turbolento, le componenti fluttuanti della velocità crescono al crescere delle componenti medie, il numero di Reynolds rappresenta anche una misura del rapporto fra sforzi turbolenti, $\tau_{Rij} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$, e sforzi viscosi, $\tau_{\mu ij} = \mu (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$.

Si ha infatti:

$$\frac{\tau_{Rij}}{\tau_{\mu ij}} = \frac{\overline{\rho u'_i u'_j}}{\mu (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)} \propto \frac{\rho U^2}{\mu \frac{U}{D}} = \frac{\rho U D}{\mu} = Re .$$

Per valori sufficientemente elevati del numero di Reynolds si ha pertanto:

$$\tau_{Rij} \gg \tau_{\mu ij} ,$$

per cui gli sforzi viscosi riescono trascurabili rispetto a quelli turbolenti.

Tuttavia, anche in queste condizioni, una analisi dettagliata nella zona delle pareti che confinano il flusso di un fluido in regime turbolento consente di evidenziare che, sebbene la maggior parte della massa fluida sia sede dei moti caotici che si è avuto modo di descrivere in precedenza, ove gli sforzi turbolenti sono effettivamente molto maggiori di quelli viscosi, esiste generalmente uno strato di fluido aderente alle pareti, sede di un moto laminare (*sottostrato laminare* o *sottostrato viscoso*), il cui spessore peraltro decresce all'aumentare del numero di Reynolds. La presenza del sottostrato laminare e la dipendenza del suo spessore dal numero di Reynolds rivestono una certa importanza ai fini della valutazione delle resistenze al moto offerte da una parete solida a contatto con un fluido in movimento, come si vedrà nel cap. 12 in sede di descrizione delle formule a tale scopo utilizzabili nel caso delle condotte in pressione. I fenomeni che hanno sede in prossimità di una parete vengono descritti in maggiore dettaglio nel capitolo successivo.

Trattandosi d'ora innanzi, nel caso di regime turbolento, sempre di equazioni per le quantità medie, si conviene di indicarle, per brevità, prive del soprassegno, mentre si continuerà a individuare con gli apici le componenti fluttuanti.

CAPITOLO DECIMO

10. STRATO LIMITE

10.1 Generalità

Nel Capitolo 8 si è notato come il moto irrotazionale di un fluido ideale barotropico si mantenga tale al trascorrere del tempo se il campo delle forze di massa è conservativo (Teorema di Lagrange). Si è inoltre mostrato che, se il moto è anche isocoro ($\rho = \text{cost}$), anche un fluido viscoso si comporta come un fluido ideale, giacché riesce nullo il termine viscoso dell'equazione di Navier-Stokes. Nonostante tale osservazione, si è confermata la necessità dell'ipotesi di fluido ideale per la validità del Teorema di Lagrange; la viscosità dei fluidi reali ne determina infatti l'aderenza alle pareti, che è quindi in contraddizione con l'ipotesi di fluido ideale. Conseguenza anche da tale osservazione che, in prossimità delle pareti, il moto di un fluido reale non possa mai risultare irrotazionale. Ricordando la corrispondenza fra vorticità e tensore velocità di rotazione rigida, identificata nel §4.5, si riconosce che l'effetto dell'aderenza alle pareti è quello di mettere in rotazione le particelle in prossimità della parete, generando vorticità. La vorticità prodotta in prossimità della parete si diffonde nella massa fluida in misura dipendente dal tipo di moto. Può quindi avvenire che il moto diventi ovunque rotazionale, oppure che la vorticità rimanga sempre confinata presso la parete.

Nel primo caso, l'intero campo di moto sarà influenzato dalla presenza di azioni tangenziali in seno al fluido e dovrà quindi essere trattato come fluido viscoso. Nel secondo caso, a distanza sufficientemente grande dalla parete le caratteristiche del campo di moto sono tali da poter considerare trascurabili gli effetti della viscosità e quindi il fluido perfetto, anche su grandi estensioni; il moto può essere descritto nell'ambito dello schema di moto irrotazionale, illustrato diffusamente nel Capitolo 8. In prossimità della parete, la condizione di aderenza indotta dalla viscosità determina invece l'insorgenza di gradienti della velocità che rendono gli sforzi resistenti viscosi non più trascurabili. Nelle zone della massa fluida ove il regime diventa turbolento, agli sforzi viscosi si aggiungono gli sforzi turbolenti.

La zona del campo di moto nella quale non possono essere trascurati gli sforzi tangenziali viene definita *strato limite*. Si definiscono, inoltre, *strato limite laminare* e *strato limite turbolento* strati limite nei quali il regime di moto risulti, rispettivamente, laminare e turbolento: nel primo caso si avranno soltanto sforzi viscosi; nel secondo, sforzi sia viscosi che turbolenti.

All'interno dello strato limite, il moto deve invece necessariamente essere descritto mediante le equazioni di Navier-Stokes, eventualmente nella versione di Reynolds per le parti medie se lo strato limite è turbolento, con tutte le difficoltà legate non soltanto alla struttura piuttosto complicata dei soli termini legati alle grandezze medie, comunque ben definiti, ma anche alla impossibilità di esprimere gli sforzi turbolenti su base deduttiva, di cui s'è detto in precedenza. Per questi motivi, la soluzione analitica delle equazioni di Navier-Stokes non è possibile se non in casi nei quali si possa ammettere una ragionevole semplificazione delle stesse, ottenuta trascurando, sulla base dell'analisi dimensionale, determinati termini dell'equazione. Nel caso dello strato limite turbolento è necessario ricorrere, oltre che a tale tipo di semplificazioni, a rappresentazioni ragionevolmente semplificate degli sforzi turbolenti, ossia, a *modelli di turbolenza*.

10.2 Strato limite laminare

Allo scopo di individuare le caratteristiche essenziali di uno strato limite laminare, si consideri il caso di moto piano rappresentato in Figura 101, in cui una corrente uniforme di velocità u_∞ di un fluido incompressibile, isoterma e omogeneo investe una lastra piana di spessore trascurabile – di modo che non si verifichino fenomeni di distacco della vena – parallela alla direzione del flusso, che si assume coincidente con la direzione dell'asse x_1 . Fino al bordo di monte della piastra, la corrente mantiene la velocità uniforme u_∞ , e il moto è quindi irrotazionale, poiché $u_2 = u_3 = 0$ identicamente e $\omega_3 = \partial u_2 / \partial x_1 - \partial u_1 / \partial x_2 = 0$ perché $u_2 = 0$ e $u_1 = u_\infty = \text{costante}$.

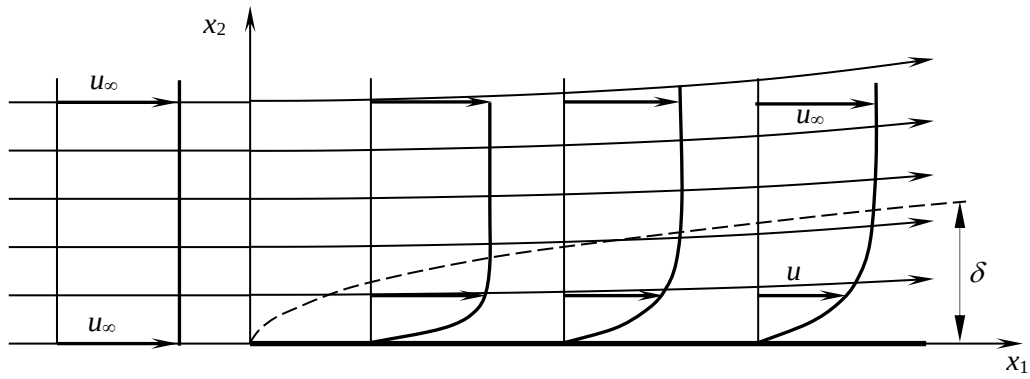


Figura 101. Schema di flusso in uno strato limite laminare.

Al contatto con la piastra, la condizione di aderenza indotta dalla viscosità del fluido dà origine a un gradiente di velocità, cui è associato, a norma della (154), uno sforzo tangenziale viscoso. Tale sforzo resistente determina il rallentamento di uno strato di fluido di spessore δ via via crescente nel senso del moto, riportato in tratteggio nella Figura 101. Per effetto del rallentamento in prossimità della piastra, le sezioni ortogonali alla direzione del flusso indisturbato attraversate da una portata costante hanno altezza crescente nella direzione x_2 , il cui profilo è costituito da una linea di corrente. Pertanto, nello strato rallentato il vettore velocità non è più parallelo alla piastra. Tuttavia, la sua componente u_2 risulta piccola rispetto a u_1 e rispetto a essa senz'altro trascurabile, il che comporta che la distribuzione delle pressioni possa ritenersi approssimativamente idrostatica su piani normali alla direzione del flusso indisturbato. Inoltre, le derivate prime e seconde della velocità u_1 rispetto alla direzione normale alla piastra risultano molto maggiori delle corrispondenti derivate fatte rispetto alla direzione del flusso indisturbato:

$$\left| \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right| \gg \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right| \quad ; \quad \left| \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right| \gg \left| \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \right|.$$

Le espressioni dello sforzo viscoso resistente e della vorticità sono quindi approssimabili come:

$$\tau_{12} = -p\delta_{12} + \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \cong \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} &= \vec{b}_1 (\partial u_3 / \partial x_2 - \partial u_2 / \partial x_3) + \vec{b}_2 (\partial u_1 / \partial x_3 - \partial u_3 / \partial x_1) + \vec{b}_3 (\partial u_2 / \partial x_1 - \partial u_1 / \partial x_2) \\ &\cong -\vec{b}_3 \partial u_1 / \partial x_2 \end{aligned}$$

Le due grandezze sono quindi legate al medesimo gradiente di velocità. Una volta generata presso la parete, la vorticità viene trasportata dal flusso e diffusa in direzione normale alla piastra. L'evoluzione spaziale del campo di moto, quindi anche della vorticità, è determinata dalla viscosità e può essere descritta dall'equazione di Navier-Stokes⁹⁹. A seconda del tipo di fluido e delle condizioni al contorno, può accadere che l'intero campo di moto diventi rotazionale da una certa distanza dal bordo di monte della piastra in poi, ovvero che la vorticità rimanga sempre confinata in prossimità della parete. Un esempio del primo caso è costituito dal moto uniforme in un condotto a sezione circolare, in regime laminare (il comportamento dello strato limite determinato da una parete curva è del tutto simile a quello generato da una parete piana, se lo spessore δ risulta molto minore del raggio di curvatura della parete). Un esempio del secondo caso è quello del moto ondoso in assenza di frangimento, nel quale l'effetto della viscosità dell'acqua è apprezzabile soltanto in prossimità del fondo.

⁹⁹ È possibile formulare una equazione del moto nella quale compare la vorticità in luogo della velocità. Si intuisce che tale equazione possa risultare alquanto utile nello studio della dinamica della vorticità.

Poiché la velocità presenta un andamento asintotico verso il valore indisturbato, la definizione dello spessore dello strato limite presenta un certo grado di arbitrarietà. Convenzionalmente, tale spessore si assume pari alla distanza dalla piastra alla quale la velocità è pari al 99% della velocità u_∞ della corrente indisturbata, alla quale riferiremo il simbolo δ . Definizioni alternative dello spessore dello strato limite sono state formulate, le quali, sebbene ancora legate sostanzialmente al difetto di velocità, che rappresenta l'elemento caratteristico del concetto stesso di strato limite, sono date da medie integrali e sono perciò meno legate a scelte arbitrarie quale è la frazione della velocità asintotica di riferimento. Di tali spessori ci limitiamo qui a fornire le denominazioni e le definizioni. Si dicono *spessore di spostamento*, *spessore di quantità di moto* e *spessore di energia* in una data posizione lungo lo strato limite le altezze delle sezioni normali al flusso indisturbato attraverso le quali si ha un flusso rispettivamente di massa, di quantità di moto e di energia cinetica pari alla diminuzione dei corrispondenti flussi nella posizione data.

Un contributo decisivo allo studio dello strato limite è stato fornito da Prandtl agli inizi del secolo scorso. In effetti, il contributo innovativo della teoria di Prandtl consiste proprio nell'aver identificato la presenza di tale sottile strato aderente alla parete, e nel decomporre conseguentemente lo studio del particolare problema idrodinamico di interesse nella analisi separata del moto all'esterno e all'interno dello strato limite, di cui la soluzione del primo costituisce la condizione al contorno del secondo. La teoria considera il caso di strato limite di spessore δ molto minore di una dimensione lineare caratteristica L del campo di moto all'esterno di esso. La forma adimensionalizzata dell'equazione di Navier-Stokes viene quindi semplificata sulla base, oltre che della condizione $\delta \ll L$, dell'analisi degli ordini di grandezza dei vari termini che risultano da tale condizione. Tale contributo ha fornito i fondamenti teorici degli studi successivi, tanto dello stesso Prandtl quanto di altri autori, quali principalmente Nikuradse, Blasius e Von Kármán, che hanno condotto alla formulazione delle leggi di resistenza per il moto turbolento.

Restringendo il discorso al caso di flusso isocoro (fluido a densità costante) che investe tangenzialmente una lastra piana orizzontale, si può mostrare che le approssimazioni menzionate conducono alla conclusione che la pressione non è un'incognita del problema, poiché, non variando apprezzabilmente in direzione normale alla piastra, assume il valore deducibile dalla soluzione di moto irrotazionale esterno allo strato limite. Conseguentemente, le uniche due equazioni da considerare per le due incognite residue, u_1 e u_2 , sono l'equazione di continuità e la proiezione dell'equazione di Navier-Stokes nella direzione del profilo della piastra. In forma adimensionale, le equazioni per lo strato limite (*equazioni di Prandtl*) si scrivono¹⁰⁰:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} &= 0 \\ \frac{\partial u_1^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_2^*} &= -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial x_1^*} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x_2^{*2}} \end{aligned} \quad (227)$$

Le conclusioni si possono estendere sostanzialmente alla generalità dei flussi a contatto con superfici anche curve, con riferimento a sistemi di riferimento locali variabili lungo il profilo della superficie, con asse x_1 tangente il profilo.

Lo spessore dello strato limite δ alla distanza x_1 dal bordo di monte della piastra deve dipendere, oltre che da tale distanza, dalla densità ρ , dalla viscosità dinamica μ e dalla velocità asintotica u_∞ del fluido. L'analisi dimensionale indica che la relazione intercorrente fra le cinque grandezze δ , x_1 , ρ , μ e u_∞ deve essere esprimibile in termini di una relazione fra le variabili adimensionali δ/x_1 e $Re_\infty = \rho u_\infty x_1 / \mu = u_\infty x_1 / \nu$. Per lo spessore dello strato limite definito sulla base del difetto di velocità, menzionato in precedenza, si ottiene per via sperimentale $\delta/x_1 = 5(Re_\infty)^{-1/2}$, ossia:

¹⁰⁰ Per la deduzione dell'equazione di Prandtl, vedi Cenedese, §4.1, o Çengel-Cimbala, §10.5.

$$\delta = 5 \sqrt{\frac{\nu x_1}{u_\infty}}.$$

Il profilo dello strato limite varia con la radice quadrata della distanza dal bordo di monte della piastra (o della tubazione, se ricorrono le condizioni menzionate in precedenza) e ha pertanto l'andamento rappresentato in Figura 101. Inoltre, a una data distanza lo spessore è tanto minore quanto maggiore è il numero di Reynolds Re_∞ , ossia, per un dato fluido, tanto maggiore è la velocità del flusso indisturbato. Ne consegue che la teoria di Prandtl, basata sull'ipotesi fondamentale di piccolo spessore dello strato limite, risulta valida per moti ad alto numero di Reynolds.

10.3 Strato limite turbolento

Oltre una certa distanza dal bordo della piastra, il moto mostra caratteri di instabilità, che denotano l'insorgere della turbolenza, con la conseguente formazione di uno strato limite turbolento. In una lastra liscia la comparsa dei primi disturbi si verifica per valori del numero di Reynolds Re_∞ definito in precedenza maggiori di un valore critico dell'ordine di 10^5 . Una fase di transizione, con sviluppo progressivo di turbolenza entro lo strato limite, si osserva fino al valore $Re_\infty \cong 3 \times 10^6$, quando lo strato limite diventa puramente turbolento. L'inizio della transizione verso la turbolenza può verificarsi per valori di Re_∞ tanto minori, e la condizione di regime puramente turbolento può raggiungersi tanto più bruscamente, quanto maggiore è il livello della turbolenza già presente nella corrente in arrivo, o la rugosità della superficie. Nella fase di transizione lo spessore dello strato laminare si riduce nel senso del moto, fino a un valore limite che viene mantenuto costante ove la turbolenza assume caratteristiche uniformi. Tale straterello è denominato *sottostrato viscoso* o *laminare*¹⁰¹. Esternamente al sottostrato viscoso è presente una zona di moto turbolento, nella quale sforzi viscosi e sforzi turbolenti sono dello stesso ordine di grandezza (*strato di equilibrio*). All'esterno dello strato di equilibrio gli sforzi turbolenti predominano rispetto agli sforzi viscosi. La struttura dello strato limite descritta è rappresentata in Figura 102.

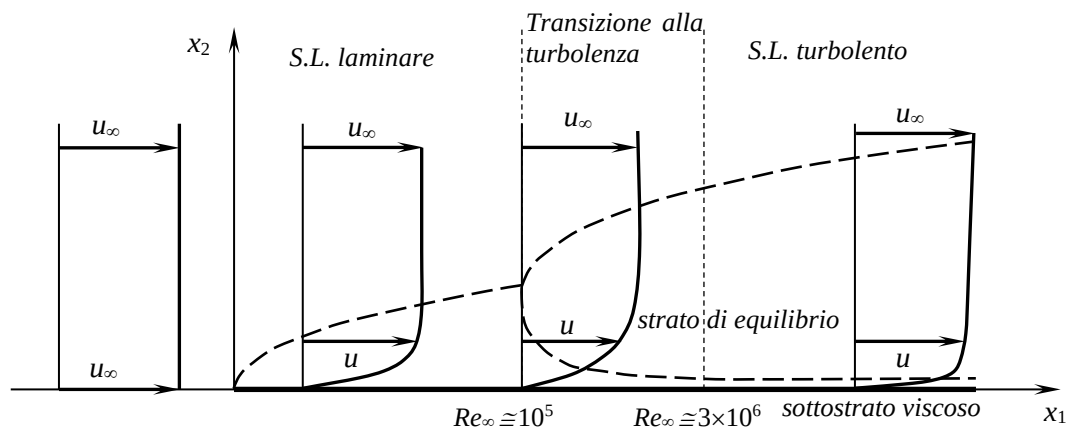


Figura 102. Schema di transizione da strato limite laminare a strato limite turbolento.

Nel caso in cui lo strato limite sia generato fra due piastre piane, il tipo di regime che si realizza a partire da una certa distanza dall'imbocco dipende dall'interazione fra gli strati limite originati dalle due pareti: se gli strati limite interagiscono quando sono ancora laminari, ossia a una distanza dall'imbocco inferiore alla distanza critica alla quale si ha l'insorgenza della turbolenza, fra le due

¹⁰¹ Talora tale termine viene riservato allo straterello aderente alla parete nel quale l'andamento delle velocità è sensibilmente lineare, indicando la parte più interna, dove il moto è ancora sostanzialmente dominato dalle forze viscosi, ed è pertanto ancora laminare, come *strato intermedio* o *strato buffer*.

piastre si stabilisce un moto laminare, il cui profilo di velocità si può dimostrare essere parabolico; se, invece, gli strati limite diventano prima turbolenti, a regime il flusso fra le piastre è turbolento.

Analogamente, nel caso del moto in un condotto, in cui lo strato limite è un unico volume toroidale, fatta una sezione longitudinale della tubazione, da una certa distanza dall'imbocco in poi si stabilisce un moto uniforme in regime laminare se lo strato limite raggiunge l'asse della condotta prima di diventare turbolento (Figura 103a); si stabilisce un moto uniforme in regime turbolento se la turbolenza insorge prima che lo strato limite laminare raggiunga l'asse della condotta (Figura 103b). La zona centrale del flusso, ove interagiscono gli strati di equilibrio, viene detta *nucleo*.

Come mostrato nel §12.2.2, nel caso di regime laminare l'analisi del moto uniforme può essere eseguita in termini analitici fino al punto di determinare la forma (parabolica) del profilo di velocità, e quindi anche il legame fra cadente dei carichi totali, sforzo alla parete, velocità media della corrente, diametro della sezione e caratteristiche fisiche del liquido. Altrettanto non può farsi in regime turbolento, nel qual caso è necessario ricorrere a rappresentazioni debitamente semplificate del fenomeno, illustrate nel paragrafo seguente.

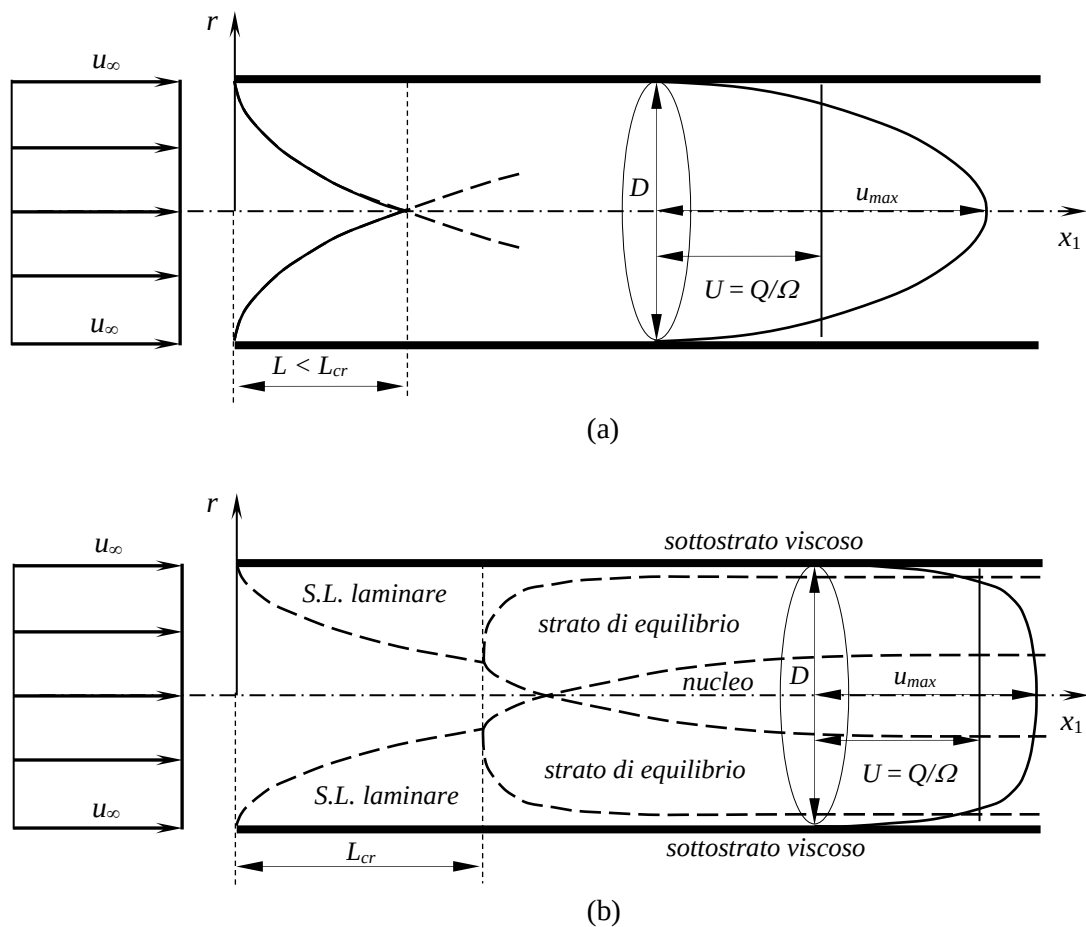


Figura 103. Schema di interazione fra strati limite all'imbocco di un condotto sede di moto uniforme in regime (a) laminare e (b) turbolento.

10.4 Teorie fenomenologiche per lo studio dello strato limite turbolento

Come accennato nel §9.4, l'introduzione delle sei componenti indipendenti del tensore degli sforzi turbolenti nell'equazione di Reynolds comporta un problema di chiusura del bilancio fra incognite ed equazioni, simile a quello evidenziato nel §5.5 con riferimento agli sforzi che compaiono nell'equazione indefinita del moto, precedentemente alla introduzione del legame costitutivo dei fluidi Newtoniani. Le rappresentazioni, necessariamente semplificate, dei processi turbolenti che

possono essere utilizzate a tale scopo prendono il nome di *teorie fenomenologiche*, dette anche, più comunemente, modelli di turbolenza.

Dei vari modelli di turbolenza proposti, interessa qui dare qualche ragguaglio sulle due formulazioni maggiormente utilizzate, che esprimono gli sforzi turbolenti in funzione delle quantità medie, talora classificate come *teorie fenomenologiche*: il modello di Boussinesq e la teoria della lunghezza di mescolamento, dovuta a Prandtl e Taylor. La denominazione di tale classe di modelli attiene alla loro derivazione sulla base dell'osservazione del trasporto trasversale di massa e di quantità di moto che si verifica in un flusso turbolento in prossimità di una parete, e che pertanto il processo di mescolamento conseguente (*diffusione turbolenta*) e il gradiente trasversale di velocità sono intimamente legati.

10.4.1 Modello di Boussinesq

Il modello di Boussinesq è costituito da una relazione fra sforzi turbolenti e velocità di deformazione medie (indicate prive di soprassegno) formalmente identico al legame costitutivo dei fluidi Newtoniani:

$$\tau_{Rij} = -\overline{\rho u_i' u_j'} = -p_T \delta_{ij} + \mu_T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (228)$$

in cui

$$p_T = \frac{2}{3} \rho k \quad ; \quad k = \frac{1}{2} (\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}) = \frac{1}{2} \overline{u_j' u_j'}$$

è una pressione fittizia legata all'energia cinetica turbolenta ρk , definita positiva, mentre μ_T è una *viscosità dinamica turbolenta*. A differenza della viscosità dinamica μ finora considerata (che può ora utilmente qualificarsi come *molecolare*), la viscosità turbolenta dipende, oltre che dalle caratteristiche del fluido, anche, e principalmente, dalle caratteristiche del campo di moto.

La sostituzione della espressione degli sforzi turbolenti secondo il modello di Boussinesq nell'equazione di Reynolds fornisce (omettendo i simboli di media):

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_{mi} - \frac{\partial (p + p_T)}{\partial x_i} + (\mu + \mu_T) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}.$$

Pertanto, essendo anche la pressione idrostatica p incognita, l'introduzione della pressione fittizia implica semplicemente una ridefinizione di una unica pressione incognita, somma delle due¹⁰².

L'ultimo termine a secondo membro è formalmente identico al termine viscoso delle equazioni di Navier-Stokes e di Reynolds, ma contiene ora la somma della viscosità molecolare e turbolenta, la seconda delle quali tipicamente molto maggiore della prima dove il moto è effettivamente turbolento. Al contrario della pressione fittizia, la viscosità turbolenta costituisce una nuova incognita. Inoltre, la dipendenza di tale grandezza dalle caratteristiche del moto fa sì che una formulazione più accurata del modello di Boussinesq debba prevedere anche per essa una forma tensoriale. Ulteriori manchevolezze del modello di Boussinesq sono rappresentate dalla difformità rispetto alle seguenti

¹⁰² La pressione fittizia p_T viene introdotta allo scopo di eliminare una incongruenza che si presenterebbe in assenza di tale termine. Infatti, in tal caso, la traccia del tensore degli sforzi turbolenti sarebbe data da:

$$\tau_{Rjj} = -\overline{\rho u_j' u_j'} = -\rho (\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}) = 2\mu_T \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = 2\mu_T \nabla \cdot \vec{u} = 0$$

per l'equazione di continuità (211) per le parti medie. Tale conclusione è però incompatibile con la positività dell'energia cinetica turbolenta. L'introduzione della pressione fittizia restituisce formalmente il corretto valore dell'energia cinetica turbolenta, che non deve tuttavia essere determinata esplicitamente. Frequentemente il modello di Boussinesq viene presentato privo di tale termine (p.es. nel Cenedese).

osservazioni sperimentali: a) le direzioni principali del tensore di Reynolds non coincidono con quelle del tensore delle velocità di deformazione; b) in certi flussi lo sforzo tangenziale è massimo dove i gradienti di velocità si annullano.

Ciò nonostante, il modello di Boussinesq presenta il vantaggio che formulazioni plausibili della viscosità turbolenta possono dedursi dall'analisi dimensionale. In definitiva, su tale schematizzazione si basano la maggioranza dei modelli di turbolenza implementati nei più complessi modelli idrodinamici attualmente disponibili, necessitanti di soluzione numerica mediante elaboratore elettronico. Svariati modelli di questo tipo possono essere ormai utilizzati anche nei personal computer per la soluzione di problemi applicativi.

10.4.2 Teoria della lunghezza di mescolamento

La teoria della lunghezza di mescolamento si basa sull'analogia, postulata da Prandtl, fra il moto delle particelle fluide e il moto delle molecole di un gas. Come le molecole di un gas, le particelle fluide in movimento da una data zona del campo di moto a una zona ove la velocità media è inferiore, cedono progressivamente quantità di moto negli urti successivi con le particelle adiacenti, finché, dopo aver percorso, mediamente, una distanza l detta *lunghezza di mescolamento*, assumono la quantità di moto degli elementi di fluido circostanti. Si assume che le componenti fluttuanti della velocità tangenziale e normale alla parete, denominate rispettivamente u' e u'_n , siano proporzionali al prodotto della lunghezza di mescolamento e del gradiente della velocità media nella direzione y della normale alla parete:

$$u' \propto u'_n \propto l \frac{\partial u}{\partial y},$$

di modo che il modulo del corrispondente sforzo turbolento tangenziale è esprimibile come:

$$\rho \overline{u' u'_n} \propto \rho l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$

Assumendo che la lunghezza di mescolamento sia proporzionale alla distanza y dalla parete, almeno fino a distanze non troppo grandi, l'espressione dello sforzo turbolento può scriversi:

$$\rho \overline{u' u'_n} = \rho \kappa^2 y^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad (229)$$

in cui tutti i fattori di proporzionalità sono stati inclusi nella costante κ (*costante di Von Kármán*).¹⁰³

Nella parte del sottostrato viscoso più prossima alla parete si può assumere che la distribuzione della velocità sia approssimativamente lineare¹⁰⁴. Sulla base del legame costitutivo, lo sforzo nel sottostrato laminare risulta costante e può anche scriversi:

¹⁰³ Per confronto con la (228), da tale risultato è possibile dedurre, almeno per il problema in questione, una espressione della viscosità turbolenta: $\mu_T = \rho \kappa^2 y^2 \partial u / \partial y$, ovvero, in termini più generali, $\mu_T = \rho l^2 \partial u / \partial y$, che può essere precisata con diverse espressioni della lunghezza di mescolamento.

¹⁰⁴ L'approssimazione lineare è sempre ammissibile ad una distanza dalla parete sufficientemente ridotta in quanto deducibile da uno sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine. Nel caso specifico di una tubazione cilindrica di sezione circolare di diametro D , assumendo che nel sottostrato viscoso viga la medesima distribuzione di velocità parabolica determinata nel §12.2.2 per il caso di moto laminare nell'intero condotto, eq. (249), ed esprimendo la stessa legge in termini della coordinata y in luogo del raggio r , nella parte del sottostrato più prossima alla parete, nella quale $y \ll D$, l'approssimazione lineare della distribuzione della velocità si ottiene dal seguente sviluppo:

$$u = \frac{\dot{\eta}}{4\mu} \left(\frac{D^2}{4} - r^2 \right) = \frac{\dot{\eta}}{4\mu} y(D-y) \cong \frac{\dot{\eta}}{4\mu} Dy,$$

$$\tau = \tau_0 = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{u}{y}.$$

Introdotta una velocità scala $u^* = \sqrt{\tau_0 / \rho}$, detta *velocità d'attrito*, la distribuzione della velocità può esprimersi nella forma (*legge di parete*):

$$\frac{u}{u^*} = \frac{u^* y}{\nu},$$

che misure di laboratorio mostrano essere valida fino a distanze y dalla parete tali che:

$$\frac{yu^*}{\nu} < 5.$$

Il profilo di velocità all'esterno del sottostrato viscoso può essere determinato assumendo che, nello strato di equilibrio, lo sforzo turbolento sia uguale allo sforzo viscoso, e quest'ultimo, a sua volta, sia costante e pari allo sforzo alla parete, τ_0 . Dalla (229) si ricava pertanto:

$$\frac{du}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \frac{dy}{y},$$

che, integrata, fornisce la seguente *legge logaritmica* della distribuzione di velocità adimensionale:

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y}{y_0} \right), \quad (230)$$

in cui y_0 , introdotta come costante di integrazione, rappresenta la distanza dalla parete alla quale la velocità si annulla: $u=0$ per $y=y_0$. Tale grandezza è esprimibile in modo diverso, a seconda del regime di moto. Su tale questione si tornerà nel §12.3. Evidentemente, la legge logaritmica non può valere fino al contatto con la parete, giacché $u \rightarrow -\infty$ per $y \rightarrow 0$.

La teoria della lunghezza di mescolamento, come le teorie fenomenologiche in genere, è stata oggetto di critiche legate alle varie assunzioni richieste riguardo la struttura della turbolenza: in primo luogo, il legame delle caratteristiche locali della turbolenza ai valori medi locali, anziché in un'area limitrofa. Tuttavia, la legge logaritmica rimane tuttora una descrizione ragionevolmente approssimata del profilo di velocità in prossimità di una parete: a dispetto della assunzione $\tau = \tau_0 = \text{cost}$, anche più accurata nella zona in cui lo sforzo resistente non è in realtà costante che nella zona più prossima alla parete. La legge logaritmica interpreta bene i dati sperimentali per:

$$\frac{yu^*}{\nu} > 30.$$

Una espressione più complessa che interpreta bene i dati sperimentali anche nel campo intermedio è stata formulata da Spalding. Sulla base della relazione per il campo lineare, lo spessore δ_v del sottostrato viscoso è dato dalla relazione $\delta_v u^* / \nu = 5^{105}$.

col che lo sforzo viscoso è costante e pari al valore alla parete (247):

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \cong \gamma \frac{D}{4} j = \gamma \Re j = \tau_0 = \text{cost}.$$

¹⁰⁵ Una formula simile reperibile in letteratura, $\delta_v u^* / \nu = 11,5$, fornisce un valore soltanto convenzionale dello spessore, essendo determinata dalla soluzione comune delle leggi lineare e logaritmica ottenibile nella zona di raccordo, ove però né l'una né l'altra hanno validità.

10.5 Separazione dello strato limite

Al contatto della parete, per la condizione di aderenza risultano nulle entrambe le componenti della velocità, u_1 e u_2 . Conseguentemente, l'equazione di Prandtl (227) si scrive:

$$\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial x_1^*} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x_2^{*2}},$$

ovvero, in forma dimensionale:

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}.$$

A norma dell'equazione di Prandtl, la derivata seconda della velocità tangenziale in direzione normale alla parete ha lo stesso segno della derivata della pressione nella direzione della tangente. Pertanto, dove la derivata della pressione è negativa, il profilo di velocità rivolge la concavità verso il basso (rispetto all'asse delle velocità), con velocità ovunque positive, come nella parte iniziale dello strato limite; dove la derivata della pressione diventa positiva, il profilo di velocità rivolge la concavità verso l'alto e il profilo di velocità presenta una zona di inversione di segno, corrispondente alla *separazione dello strato limite*. Tale zona è sede di una *scia*, caratterizzata dalla presenza di intensa generazione di vortici e, quindi, di turbolenza. L'intensa dissipazione energetica conseguente alla presenza dei vortici è la causa di una diminuzione di pressione nella zona di scia¹⁰⁶.

Il distacco di vena, con separazione dello strato limite, avviene anche a tergo di un corpo, per valori del numero di Reynolds non troppo piccoli. La zona di scia è tanto più ampia quanto meno affusolata è la sezione di prua del corpo. La presenza della depressione di scia rispetto alla pressione circostante – in particolare, rispetto alla zona di prua – è la causa di una resistenza al moto, aggiuntiva a quella viscosa originata dagli sforzi tangenziali. La proporzione fra componente viscosa e di pressione della resistenza al moto dipende dalla forma del corpo: prevale la componente viscosa se la forma è affusolata (o, come si dice, *aerodinamica*, con termine mutuato dall'ingegneria automobilistica o aeronautica); prevale la componente di pressione se la forma è tozza o, comunque, mal raccordata nella zona di poppa.

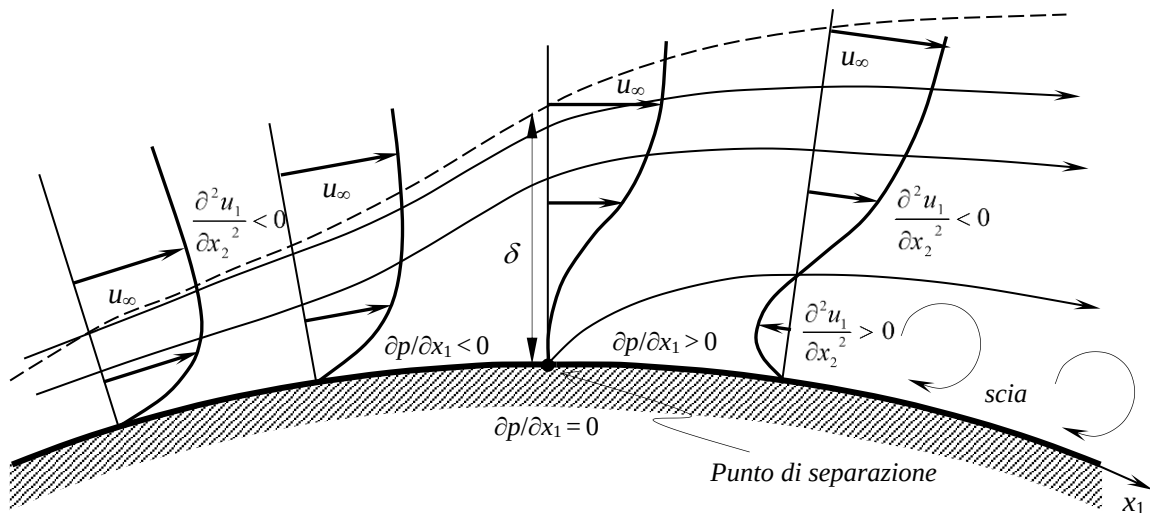


Figura 104. Separazione dello strato limite (distacco di vena).

¹⁰⁶ La depressione a poppa di un corpo è il fenomeno fisico che induce i corridori ciclisti a porsi in scia degli altri concorrenti per risparmiare energie, non essendo esposti alla resistenza frontale dell'aria.

Dalle considerazioni presentate, si deduce che il distacco di vena si verifica, per l'effetto Venturi, in corrispondenza di flussi divergenti, nei quali al gradiente negativo di velocità corrisponde un gradiente positivo di pressione. Al contrario, nei flussi accelerati all'interno di tronchi convergenti i distacchi di vena non si presentano, e le perdite di carico sono esclusivamente viscose e trascurabili su tratti di breve sviluppo.

CAPITOLO UNDICESIMO

11. CORRENTI FLUIDE

11.1 Definizioni

Nel §4.4 sono state definite correnti quei flussi unidimensionali nei quali, a eccezione di alcuni brevi tratti, il moto si svolge, localmente, lungo una direzione preferenziale e le velocità siano perciò sensibilmente parallele. Una corrente caratterizzata da una ridotta curvatura (elevato raggio di curvatura) delle traiettorie delle particelle si dice una corrente *gradualmente variata*. Dall'analisi locale del moto nel piano normale alla traiettoria in un punto discussa nel §5.8.1, si è dedotto che in una sezione normale di una corrente gradualmente variata di un fluido pesante, incompressibile isoterma e omogeneo vige una distribuzione di pressione idrostatica. La schematizzazione di sezione isopiezometrica ($h = \text{cost}$), ideale perché determinata con riferimento a un fluido non viscoso, rimane accettabile anche nei casi reali, nei quali, oltre alle forze viscosse contenute nella (165), sono presenti anche gli sforzi turbolenti introdotti nell'equazione di Reynolds (214) per il moto medio. A tale proposito si ricorda che le parti medie, o di trasporto, sono quelle di interesse pratico, al quale viene perciò fatto implicito riferimento, ove non diversamente specificato, a partire dal termine del Cap. 9, omettendo il soprassegno per le relative grandezze.

Se una sezione normale (o *sezione retta*) di una corrente gradualmente variata è anche piana, si parla di *sezione regolare*. Una sezione regolare è quindi una sezione retta piana sulla quale la distribuzione della pressione è di tipo idrostatico. Sebbene le sezioni normali di una corrente gradualmente variata possano essere anche gobbe (nel caso in cui il flusso converga o diverga), l'essere le traiettorie caratterizzate da un ampio raggio di curvatura e le velocità sensibilmente parallele fa sì che, da un punto di vista pratico, le sezioni normali di correnti gradualmente variate possano comunque sempre considerarsi, almeno approssimativamente, piane e quindi regolari.

Si definisce *asse della corrente* il luogo di punti individuati con criterio prestabilito sulle sezioni della corrente: per esempio, il luogo dei baricentri delle sezioni. Sull'asse della corrente si definisce una *ascissa curvilinea* s , rispetto alla quale si esprime la variabilità spaziale delle grandezze caratteristiche della corrente. Il campo di grandezze relative a una corrente, quali la quota piezometrica o la densità, identificate dalla generica grandezza $\mathcal{Q}$, si esprime pertanto come:

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(s, t) .$$

La caratteristica delle correnti gradualmente variate relativa alla distribuzione idrostatica delle pressioni sulle sezioni normali consente di associare a ogni valore di ascissa curvilinea un valore di quota piezometrica, poiché questa si mantiene costante sulla sezione corrispondente. In termini di rappresentazione grafica, tale relazione univoca può essere descritta da un'unica *linea piezometrica* (Figura 105). Per questo motivo, tali tipi di correnti vengono anche dette *correnti lineari*. Rappresentando l'andamento della quota piezometrica lungo l'asse, la linea piezometrica visualizza, sezione per sezione, la quota di riferimento per il calcolo delle pressioni, essendo esse nulle a una quota geometrica pari alla quota piezometrica, come ampiamente discusso nel §3.5.

Conseguentemente, per una data sezione regolare, il piano orizzontale posto a una quota pari alla quota piezometrica che compete alla sezione rappresenta l'analogo del piano dei carichi idrostatici introdotto nello studio dei fluidi in quiete. Con riferimento a tale piano e con le regole stabilite per le spinte idrostatiche su superfici piane, potrà calcolarsi, con ottima approssimazione, la spinta esercitata sulla sezione regolare dal fluido della corrente a contatto con essa. Infatti, detta spinta (forza di superficie) è legata all'integrale esteso alla sezione stessa della componente di sforzo assiale τ_{ss} (in quanto agente nella direzione del versore tangente alla linea d'asse, $\vec{i}_s$, sul piano normale alla stessa direzione), nella cui espressione deducibile dal legame costitutivo (218):

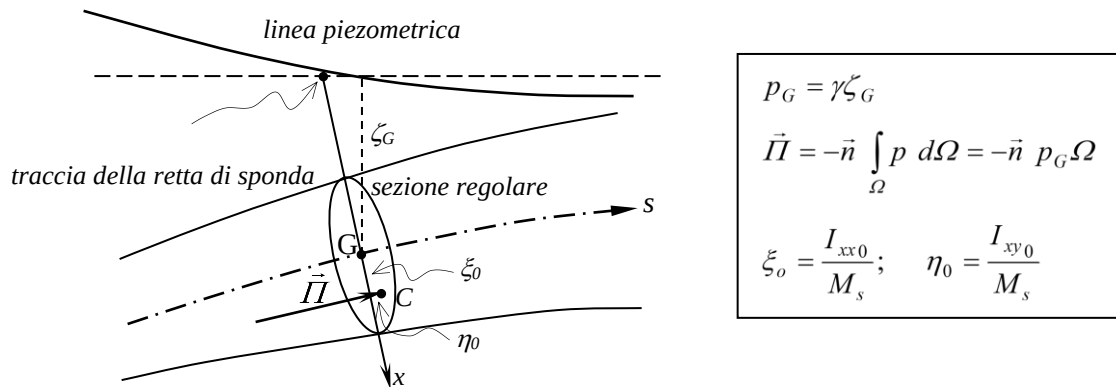


Figura 105. schema di calcolo delle spinte in una sezione regolare di una corrente.

$$\tau_{ss} = -p + 2\mu \frac{\partial u_s}{\partial s} - \rho \overline{u'_s u'_s}$$

possono essere trascurati sia il termine viscoso che il termine dovuto alla turbolenza, in considerazione degli ordini di grandezza che tali termini normalmente assumono. In particolare, per quanto riguarda il termine viscoso, nel caso di un moto uniforme di un fluido incompressibile, essendo identicamente nulle le componenti (medie) della velocità diverse da quella assiale, u_s , l'equazione di continuità in forma locale:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 ,$$

riferita alla terna intrinseca, implica rigorosamente l'annullamento della $\partial u_s / \partial s$.

11.2 Equazione di continuità per le correnti

Il principio di conservazione della massa espresso per una corrente si traduce in una forma specifica di equazione di continuità, deducibile con riferimento allo schema di Figura 106.

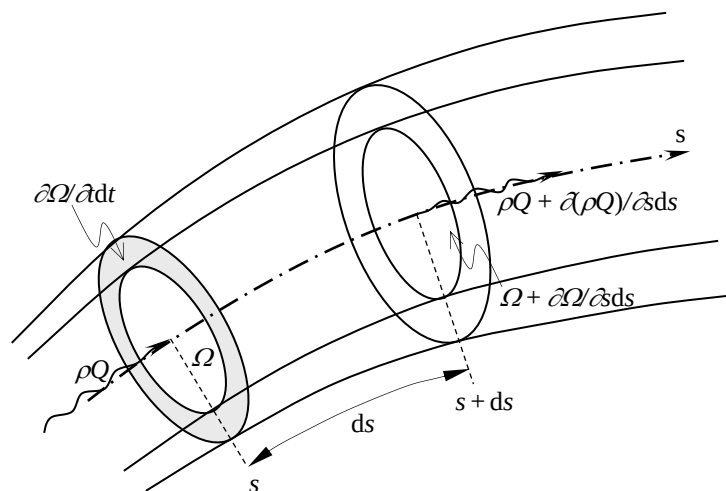


Figura 106. Schema per la derivazione dell'equazione di continuità per una corrente.

Si considerino due sezioni regolari di un tratto di corrente gradualmente variata di sviluppo in asse pari a ds . In considerazione dello schema di corrente, la densità del fluido, $\rho(s, t)$, è uniforme su ciascuna sezione. Inoltre, poiché le sezioni sono regolari, le velocità puntuali sono normali alla

sezione. Pertanto, sulla base della convenzione di normale esterna, nella sezione di ascissa s , ove il vettore velocità è rivolto in verso opposto alla normale esterna, il flusso di massa, deducibile dall'espressione generale (130), è dato da:

$$Q_m(s) = \int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} d\Omega = -\rho \int_{\Omega} u d\Omega = -\rho Q .$$

Nella sezione posta all'ascissa $s + ds$ il vettore velocità è concorde con la normale esterna e l'espressione del flusso di massa ha perciò segno positivo. Detto flusso è esprimibile mediante sviluppo in serie arrestato al primo ordine rispetto al valore della sezione s :

$$Q_m(s + ds) = \rho Q + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} ds .$$

Tali flussi rappresentano la massa che attraversa le sezioni corrispondenti nell'unità di tempo e avvengono entrambi nel senso delle ascisse crescenti. I valori delle masse che attraversano le stesse sezioni in un intervallo di tempo elementare dt si ottengono pertanto come prodotto dei flussi di massa per l'intervallo di tempo.

A meno di infinitesimi di ordine superiore, la massa di fluido compresa fra le sezioni di controllo s e $s + ds$ è data dal prodotto $\rho \Omega ds$. La variazione dm della massa compresa fra le due sezioni nell'intervallo di tempo dt è data quindi da:

$$dm = \frac{\partial m}{\partial t} dt = \frac{\partial(\rho \Omega ds)}{\partial t} dt = \frac{\partial(\rho \Omega)}{\partial t} ds dt .$$

Il bilancio di massa relativo al tratto di corrente compreso fra le ascisse s e $s + ds$ si esprime scrivendo che la massa netta entrante nel tratto compreso fra le due sezioni di controllo deve uguagliare la variazione della massa che rimane compresa fra le sezioni:

$$\rho Q dt - \left[\rho Q + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} ds \right] dt = \frac{\partial(\rho \Omega)}{\partial t} ds dt ,$$

da cui, semplificando, si perviene alla espressione della *equazione di continuità per una corrente*:

$$\frac{\partial(\rho \Omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} = 0 . \quad (231)$$

Si osservi che nel caso di fluido comprimibile in moto turbolento, la (231), in quanto non-lineare, vale a rigore solo per le quantità istantanee. Nel caso di moto stazionario, essa si riduce alla forma:

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} = 0 ,$$

la quale esprime che il flusso di massa non varia da sezione a sezione, lungo l'asse della corrente.

Nel caso di moto vario e fluido incomprimibile, isoterma e omogeneo, la densità ρ , costante in tutta la corrente, può essere portata fuori dai segni di derivata e semplificata, col che si ottiene:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0 .$$

Se, inoltre, il moto è stazionario o la condotta è indeformabile, l'area di una qualunque sezione non può variare al trascorrere del tempo; deve perciò annullarsi la corrispondente derivata temporale euleriana, da cui:

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0 , \quad (232)$$

la quale esprime che la portata si mantiene costante da sezione a sezione:

$$Q = \text{cost.}$$

In particolare, nel presente corso il caso di moto stazionario di fluido incompressibile, isoterma e omogeneo sarà quello cui verrà fatto riferimento esclusivo nelle applicazioni pratiche.

Si definisce *velocità media* in una sezione attraversata da una data portata quel valore di velocità che, uniformemente distribuito nella sezione, determina la stessa portata¹⁰⁷. La velocità media è data pertanto dal rapporto fra la portata e l'area della sezione:

$$U = \frac{Q}{\Omega}.$$

L'equazione di continuità per una corrente di un fluido incompressibile e omogeneo in moto stazionario si può quindi anche scrivere:

$$\Omega U = \text{cost.} \quad (233)$$

11.3 Potenza di una corrente in una sezione

I fenomeni che hanno luogo in una corrente fluida possono essere caratterizzati dal punto di vista energetico sulla base del concetto di potenza di una corrente in una sezione, definita come l'energia meccanica totale del fluido che attraversa una data sezione nell'unità di tempo.

L'espressione della potenza in una sezione regolare di una corrente gradualmente variata di un fluido incompressibile, isoterma e omogeneo si deduce con riferimento allo schema di Figura 107.

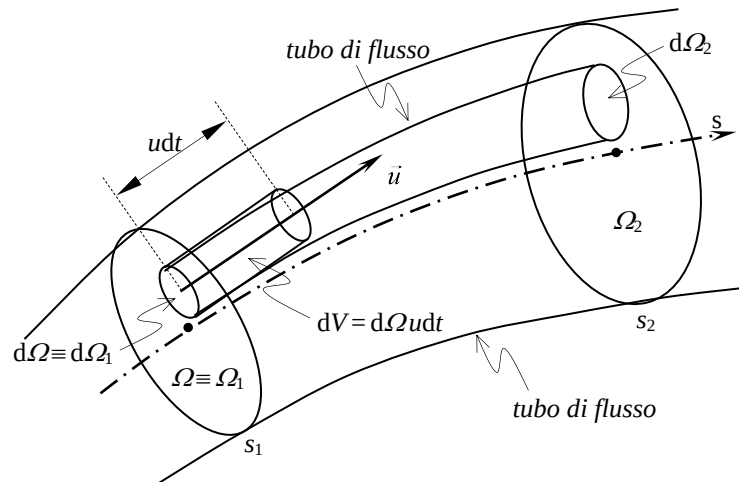


Figura 107. Schema di definizione della potenza di una corrente in una sezione.

Si consideri la sezione regolare Ω posta in corrispondenza dell'ascissa curvilinea s_1 , e una sua porzione elementare $d\Omega$. Essendo la sezione regolare, il vettore velocità nell'areola $d\Omega$, uniformemente distribuito su di essa a meno di termini infinitesimi, è a essa normale. Pertanto, in un intervallo di tempo elementare dt l'areola è attraversata da un volume fluido:

$$dV = d\Omega u dt = dQ dt$$

di peso:

¹⁰⁷ Il concetto di velocità media in una sezione è in realtà già stato utilizzato nella definizione del numero di Reynolds, §9.2.

$$dW = \gamma dV = \gamma d\Omega u dt = \gamma dQ dt .$$

Se $H = z + p/\gamma + u^2/2g$ è il carico totale uniformemente distribuito, a meno di termini infinitesimi, sull'areola $d\Omega$, atteso il significato di energia meccanica totale per unità di peso di fluido attribuitogli nel § 5.8.2, l'energia meccanica totale del volume fluido è data da:

$$dE = H dW = \gamma dQ H dt$$

e la corrispondente potenza (energia che ha attraversato l'areola nell'unità di tempo) è:

$$dP = \frac{dE}{dt} = \gamma dQ H . \quad (234)$$

La potenza che attraversa l'intera sezione Ω , si ottiene integrando l'espressione della potenza elementare attraverso l'areola $d\Omega$ sull'intera sezione (o anche, sull'intera portata che attraversa la sezione):

$$P = \int_Q dP = \int_Q \gamma H dQ = \gamma \int_Q \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) dQ ,$$

essendo il fluido per ipotesi incomprimibile e omogeneo.

Poiché la sezione è regolare, la distribuzione delle pressioni agenti su di essa è idrostatica, la quota piezometrica $h = z + p/\gamma$ è perciò costante sull'intera sezione e può quindi essere integrata facilmente, portandola fuori del segno di integrale. L'espressione della potenza che attraversa l'intera sezione è quindi data da:

$$P = \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) \int_Q dQ + \gamma \int_Q \frac{u^2}{2g} dQ = \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) Q + \gamma \int_{\Omega} \frac{u^3}{2g} d\Omega .$$

Volendo esprimere tale potenza in termini di velocità media della corrente $U = Q/\Omega$, si pone:

$$P = \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) Q + \gamma \alpha \frac{U^3 \Omega}{2g} = \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) Q + \gamma \alpha \frac{U^2}{2g} Q = \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} \right) Q = \gamma \tilde{H} Q , \quad (235)$$

ove $\tilde{H}$ rappresenta un carico totale *medio della corrente*¹⁰⁸, espresso in termini della velocità media U della corrente introducendo il *coefficiente di ragguaglio delle potenze cinetiche* (o *primo coefficiente di Coriolis*), dato da:

$$\alpha = \frac{\int_{\Omega} u^3 d\Omega}{U^3 \Omega} . \quad (236)$$

Il valore del coefficiente α dipende evidentemente dalla forma della distribuzione delle velocità nella sezione regolare. Nei casi di moto turbolento, che costituiscono l'eventualità di gran lunga più comune nelle applicazioni dell'Ingegneria Civile, e di moto uniforme in media in sezioni relativamente regolari (per esempio, circolari) la distribuzione delle velocità è sensibilmente uniforme e il coefficiente di ragguaglio è perciò molto prossimo all'unità, valore che viene generalmente senz'altro assunto nelle applicazioni numeriche. Si danno tuttavia casi di correnti in

¹⁰⁸ Non si confonda la media sulla sezione di una corrente $\tilde{H}$ con la media di insieme di una grandezza puntuale in regime turbolento $\bar{H}$ introdotta nel § 9.4.4. La quantità di interesse pratico di cui si parla qui è, in effetti, un valore medio sulla sezione di una distribuzione di valori medi di insieme.

moto turbolento caratterizzate da sezioni marcatamente irregolari (per esempio le sezioni di un corso d'acqua naturale con un alveo di magra ed espansioni laterali inondabili in condizioni di piena) o in moto vario, in cui la velocità è distribuita in modo irregolare e il coefficiente di Coriolis può discostarsi sensibilmente dall'unità. Nel caso di regime di moto laminare in una tubazione cilindrica a sezione circolare, essendo il solido di portata (distribuzione delle velocità sulla sezione) un paraboloide di rotazione avente per asse l'asse della condotta, si ha $\alpha = 2$.

11.4 Estensione del Teorema di Bernoulli alle correnti

11.4.1 Fluido ideale

Con riferimento allo schema di Figura 107, si consideri un tratto della medesima corrente stazionaria delimitato da due sezioni $\Omega_1 \equiv \Omega$ e Ω_2 , poste alle ascisse s_1 e s_2 rispettivamente, entrambe regolari. La corrente può non essere gradualmente variata nel tratto compreso fra le due sezioni; essa deve però esserlo, lo ripetiamo, sulle sezioni di estremità, talché su di esse si possa definire la potenza della corrente nella forma derivata al paragrafo precedente.

Nel caso di moto stazionario, la superficie di contorno di una corrente rappresenta necessariamente un tubo di flusso. Non è infatti possibile che le velocità su tale superficie non risultino tangenti a essa, perché altrimenti, al trascorrere del tempo, si avrebbe un flusso non nullo attraverso la superficie, la corrente dovrebbe necessariamente modificare la propria forma e il moto non potrebbe quindi definirsi stazionario, contrariamente all'ipotesi. Inoltre, qualunque superficie contenuta in una sezione regolare, finita od infinitesima, definisce un tubo di flusso determinato dalle linee di corrente (coincidenti con le traiettorie nel caso stazionario) che passano per il contorno della superficie in questione (vedi § 4.7). Un tubo di flusso elementare è perciò determinato, ad esempio, dalla sezione $d\Omega_1$, avente sezione di estremità $d\Omega_2$ sulla sezione Ω_2 . Per un fluido incompressibile, isoterma e omogeneo, le portate dQ_1 e dQ_2 che attraversano le sezioni estreme di tale tubo di flusso, $d\Omega_1$ e $d\Omega_2$, devono necessariamente essere identiche (vedi § 4.9):

$$dQ_1 = dQ_2 = dQ .$$

D'altro canto, in forza del Teorema di Bernoulli studiato al § 5.8.2, nel caso di un fluido ideale il carico totale delle particelle che si portano dall'areola $d\Omega_1$ all'areola $d\Omega_2$ deve mantenersi costante durante il percorso, a prescindere dalla conformazione più o meno regolare delle traiettorie da esse descritte (ossia, a prescindere dal fatto che la corrente, nel suo complesso, risulti o meno gradualmente variata fra le due sezioni). Detti H_1 e H_2 i carichi totali delle particelle nelle sezioni $d\Omega_1$ e $d\Omega_2$ rispettivamente, si ha pertanto:

$$H_1 = H_2 = H .$$

A norma della espressione (234) della potenza che attraversa una sezione elementare, le potenze che attraversano l'areola $d\Omega$ e la corrispondente areola all'ascissa s_2 appartenente allo stesso tubo di flusso devono essere identiche:

$$\gamma dQ_1 H_1 = \gamma dQ_2 H_2 = \gamma dQ H .$$

Le due sezioni regolari, Ω_1 e Ω_2 , che delimitano il tratto di corrente considerato, possono essere scomposte in infinite areole elementari per ciascuna delle quali si perviene alla stessa conclusione tratta per le due areole di cui sopra; si deve pertanto necessariamente concludere che anche le potenze che attraversano le due sezioni regolari della intera corrente alle ascisse s_1 e s_2 , esprimibili nella forma (235), devono essere anch'esse fra loro identiche:

$$\gamma \tilde{H}_1 Q_1 = \gamma \tilde{H}_2 Q_2 .$$

Essendo tuttavia uguali anche le portate corrispondenti, $Q_1 = Q_2$, fra le due sezioni deve necessariamente rimanere invariato anche il carico totale medio della corrente:

$$\tilde{H}_1 = \tilde{H}_2 ,$$

ovvero:

$$\tilde{H} = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} = \text{cost} , \quad (237)$$

Tale espressione costituisce una estensione alle correnti del Teorema di Bernoulli per un fluido ideale in moto stazionario, in forma del tutto analoga a quella dimostrata per una particella in moto lungo la propria traiettoria. È importante rimarcare che il carico totale è identico nelle sezioni regolari di estremità di un tratto di corrente stazionaria di fluido ideale anche se il flusso perde il carattere di corrente gradualmente variata all'interno del tratto, ove non è quindi possibile definire una quota piezometrica univoca (§ 11.1) e, quindi, neanche il carico totale medio.

Nelle sezioni in cui la corrente è gradualmente variata, l'esistenza del carico totale consente di esprimerne la costanza in termini differenziali:

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial s} = 0 .$$

Nel caso delle correnti gradualmente variate, analogamente a quanto mostrato per il caso di una particella (§ 5.8.2), è quindi possibile definire, oltre a una linea piezometrica della corrente, una linea dei carichi totali della corrente soprastante la linea piezometrica della quantità $\alpha U^2/2g$, avente pertanto quota locale pari al carico totale medio della corrente, il cui andamento rappresenta graficamente l'andamento dell'energia meccanica per unità di peso di fluido lungo l'asse della corrente. La linea dei carichi totali di una corrente di un fluido ideale risulta pertanto orizzontale.

11.4.2 Fluido reale in regime di moto turbolento

Nel § 5.8.2 si è mostrato perché nel caso di moto uniforme in un condotto a sezione costante, ove vige la condizione di aderenza alle pareti, essendo il profilo di velocità convesso, il carico totale di una singola particella in moto lungo la sua traiettoria debba diminuire nel senso del moto. In tal caso deve perciò diminuire anche il carico totale della corrente. In un fluido reale si osserva pertanto il fenomeno delle *perdite di carico* (che così semplicemente denominate si intende sempre rappresentino perdite di carico *totale*), costituenti perdite di energia meccanica della corrente per unità di peso di fluido, determinate dalla viscosità e dalla presenza degli sforzi turbolenti. Integrando lungo una linea di corrente l'espressione differenziale (221) della legge di Bernoulli per una particella di fluido viscoso in un flusso turbolento si era ottenuta, con riferimento alle grandezze risultanti dalla media di insieme, la:

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial H}{\partial s} ds = H_2 - H_1 = \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{\rho g} \left[\nabla \cdot \left(\underline{\tau}_\mu + \underline{\tau}_R \right) \right]_s ds . \quad (225)$$

Tale espressione può essere elaborata procedendo in modo analogo a quanto fatto per una corrente di fluido ideale, con riferimento al tubo di flusso elementare associato alla linea di flusso e alle potenze nelle due sezioni regolari di estremità. In particolare, per quanto riguarda il termine rappresentativo delle perdite di carico, moltiplicando per γdQ , integrando sulla portata e utilizzando la costanza della portata Q lungo l'asse e la relazione $Q = U\Omega$, si ha:

$$\int_Q \gamma \left\{ \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{\rho g} \left[\nabla \cdot \left(\underline{\tau}_\mu + \underline{\tau}_R \right) \right]_s ds \right\} dQ = \gamma \int_{s_1}^{s_2} ds \int_Q \frac{1}{\rho g} \left[\nabla \cdot \left(\underline{\tau}_\mu + \underline{\tau}_R \right) \right]_s dQ = \gamma \int_{s_1}^{s_2} ds \int_\Omega \frac{1}{\rho g} \left[\nabla \cdot \left(\underline{\tau}_\mu + \underline{\tau}_R \right) \right]_s u d\Omega .$$

L'estensione della legge di Bernoulli a una corrente di fluido reale si scrive quindi:

$$\tilde{H}_2 - \tilde{H}_1 = \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \frac{1}{\rho g} \left[\nabla \cdot \left(\underline{\tau}_{\mu} + \underline{\tau}_{\tau} \right) \right]_s \frac{u}{U} d\Omega \right\} ds. \quad (238)$$

L'espressione a secondo membro, sebbene inutilizzabile dal punto di vista pratico, è stata presentata per evidenziare l'effetto sulla riduzione del carico totale, corrispondente a diminuzione di energia del moto medio, utile al trasporto, della viscosità del fluido e degli sforzi turbolenti: la prima, per dissipazione legata all'attrito interno fra gli strati di fluido, da essa determinato; i secondi, attraverso il trasferimento di energia dal moto medio alla componente di agitazione turbolenta, non contribuente al trasporto. Sulla base di una generalizzazione delle argomentazioni presentate nel § 5.8.2 con riferimento al caso di moto uniforme in un condotto a sezione costante, anche in questo caso si riconosce che la variazione del carico totale è negativa. Si ha quindi:

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial s} < 0,$$

col che la linea dei carichi totali risulta declive nel senso del moto. Le perdite di carico che hanno luogo in tratti di corrente gradualmente variata sono dette *distribuite*.

La perdita di energia meccanica totale per unità di peso e per unità di sviluppo in asse della corrente viene detta *cadente dei carichi totali*:

$$j = - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial s}. \quad (239)$$

Essa rappresenta la pendenza geometrica locale della linea dei carichi totali se la corrente ha asse orizzontale; è minore della pendenza geometrica secondo un fattore costante se l'asse è inclinato ma rettilineo; è, infine, minore della pendenza geometrica e variabile da punto a punto dell'asse se l'asse ha, anch'esso, pendenza variabile.

Analogamente si definisce la *cadente piezometrica*:

$$i = - \frac{\partial \bar{h}}{\partial s}, \quad (240)$$

per la quale valgono considerazioni geometriche simili a quelle presentate per la cadente j .

Sulla base di tali definizioni, le cadenti sono positive (e corrispondono quindi a perdite di energia) se le linee corrispondenti sono declivi nel senso del moto.

Un'espressione formale della cadente dei carichi totali si ottiene dalle (238) e (239):

$$j = - \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \frac{1}{\rho g} \left[\nabla \cdot \left(\underline{\tau}_{\mu} + \underline{\tau}_{\tau} \right) \right]_s \frac{u}{U} d\Omega = - \frac{1}{\gamma Q} \int_{\Omega} \left[\nabla \cdot \left(\underline{\tau}_{\mu} + \underline{\tau}_{\tau} \right) \right]_s u d\Omega. \quad (241)$$

Come già la (238), anche la (241) mostra esplicitamente l'effetto degli sforzi viscosi e degli sforzi turbolenti sulla dissipazione di energia del moto medio. Ricordando che la divergenza del tensore degli sforzi esprime il risultante delle forze di superficie agente sull'unità di volume (§5.4, eq. (150)), l'espressione (241) determina per la cadente il duplice significato di lavoro resistente di sforzi viscosi e sforzi turbolenti compiuto per unità di spostamento lungo l'asse della corrente e di risultante delle forze di superficie (resistenti), entrambi esercitati sull'unità di peso di fluido.

Nei § 5.8.2 e § 9.4.4 si è chiarito come l'ipotesi di fluido ideale vada riferita alle condizioni di moto (in linea di massima, allo sviluppo lineare del flusso in esame) piuttosto che a una effettiva proprietà fisica del fluido, che non può mai essere considerato privo di viscosità. Il medesimo ragionamento condotto sulla (238) mostra che tale concetto è valido anche per le correnti.

In definitiva, trattandosi di una corrente liquida in regime stazionario, *deve sempre, necessariamente, osservarsi una linea dei carichi totali declive nel senso del moto*, eventualmente avente pendenza talmente ridotta da potersi considerare nulla. Qualora il verificarsi di tale ultima condizione risulti fondato sulla base delle caratteristiche del processo di moto, tale ipotesi potrà

essere utilizzata per descrivere in maniera più agevole, anche se pur sempre in via più o meno approssimata, il processo di moto.

La linea piezometrica può essere, invece, sia declive che acclive nel senso del moto, a seconda dell'andamento dell'altezza cinetica media lungo l'asse della corrente.

In Figura 108 sono riportati alcuni esempi di andamento delle linee dei carichi totali e piezometrica, ricapitolativi delle considerazioni svolte in precedenza, di cui i casi (a), (b) e (c) relativi a un fluido ideale; i casi (d), (e) e (f) a un fluido reale. Con il simbolo p_e è stata indicata la pendenza geometrica effettiva della linea dei carichi totali.

Perdite di carico dette *localizzate* si verificano, invece, in zone generalmente circoscritte di una corrente localmente non gradualmente variata, interessata da fenomeni di distacco di vena dalle pareti, originanti zone di ricircolazione caratterizzate da intensa turbolenza, per le quali, non essendo idrostatica la distribuzione delle pressioni, non è definibile una linea piezometrica né, quindi, una linea dei carichi totali. In questo caso, per le sezioni regolari più vicine che comprendano il tratto in questione risulta:

$$\tilde{H}_2 < \tilde{H}_1.$$

La perdita di carico localizzata è definita come differenza di tali carichi totali. Il problema della determinazione di espressioni utili al calcolo delle perdite di carico, sia distribuite che localizzate, verrà affrontato nel cap. 12.

Per brevità, d'ora in avanti indicheremo anche il carico medio di una corrente privo del soprassegno.

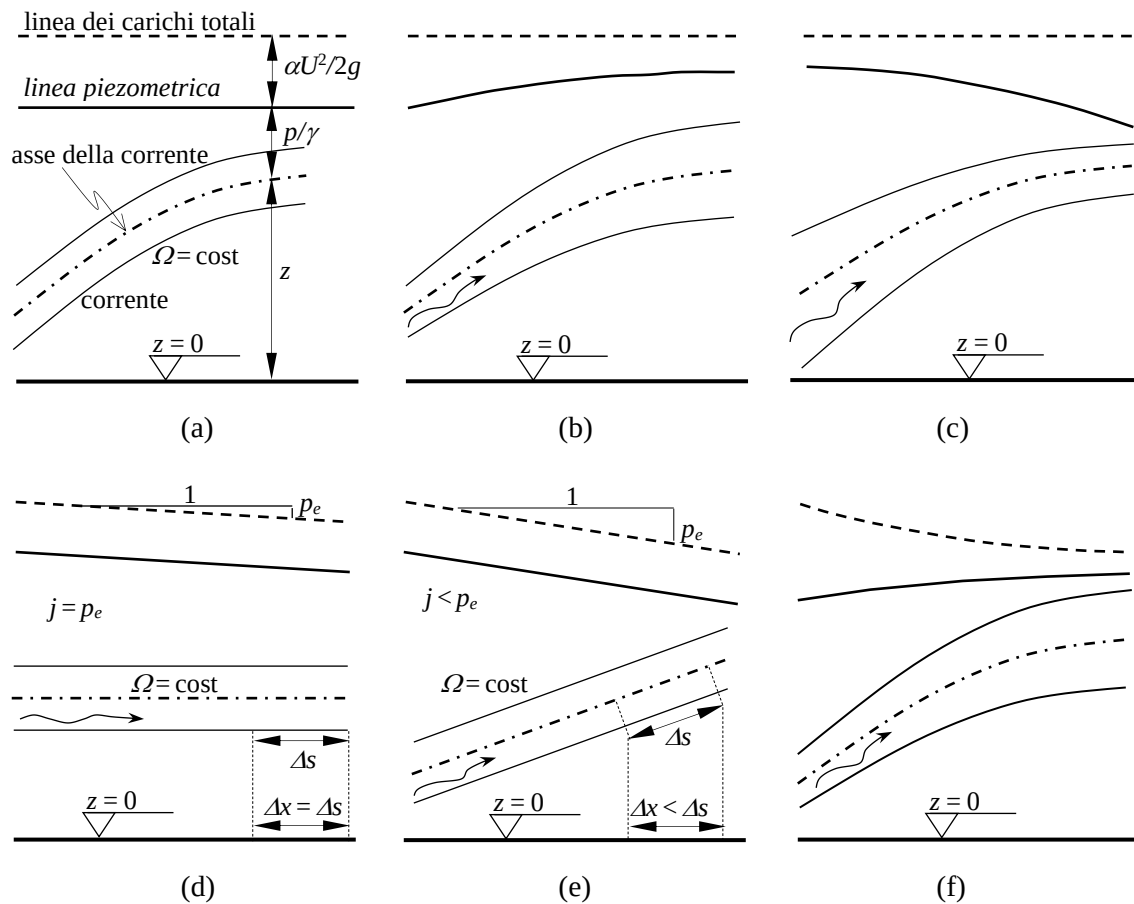


Figura 108. Esempi di andamento della linea dei carichi totali e della linea piezometrica di una corrente: (a), (b), (c) fluido ideale; (d), (e), (f) fluido reale.

11.5 Strumenti di misura della portata e della velocità

Il Teorema di Bernoulli scritto per una corrente di un fluido ideale in regime stazionario può utilizzarsi per esprimere la portata di una corrente, in funzione delle quote piezometriche della stessa rilevabili mediante idonei strumenti di misura. Tali dispositivi, detti *a strozzamento*, si basano sull'effetto di diminuzione della quota piezometrica associato all'aumento della velocità media causato da una strizione del condotto, noto sotto il nome di *effetto Venturi*.

Il dispositivo di misura a strozzamento più affidabile è il *venturimetro*, costituito da un tratto di tubazione convergente nel senso della corrente, avente diametri variabili da un valore massimo D a un minimo d ; un tratto a sezione costante di diametro d e da un successivo tratto divergente (vedi Figura 109). Poiché le correnti accelerate tipicamente non sono affette da perdite di carico localizzate, il convergente può essere relativamente corto, col che risultano trascurabili anche le perdite distribuite e il carico totale della corrente può quindi considerarsi costante, almeno in prima approssimazione. Il tratto divergente deve avere invece uno sviluppo ben maggiore, allo scopo di minimizzare le perdite di carico che, in una corrente rallentata, sono sempre sensibili, come verrà mostrato al §12.5.

Contrassegnate con i pedici 1 e 2 le due sezioni regolari estreme del convergente si ha quindi:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g} .$$

Considerando che le sezioni regolari sono caratterizzate da un valore univoco della quota piezometrica h e assumendo unitario il coefficiente di ragguglio delle potenze cinetiche, si può anche scrivere:

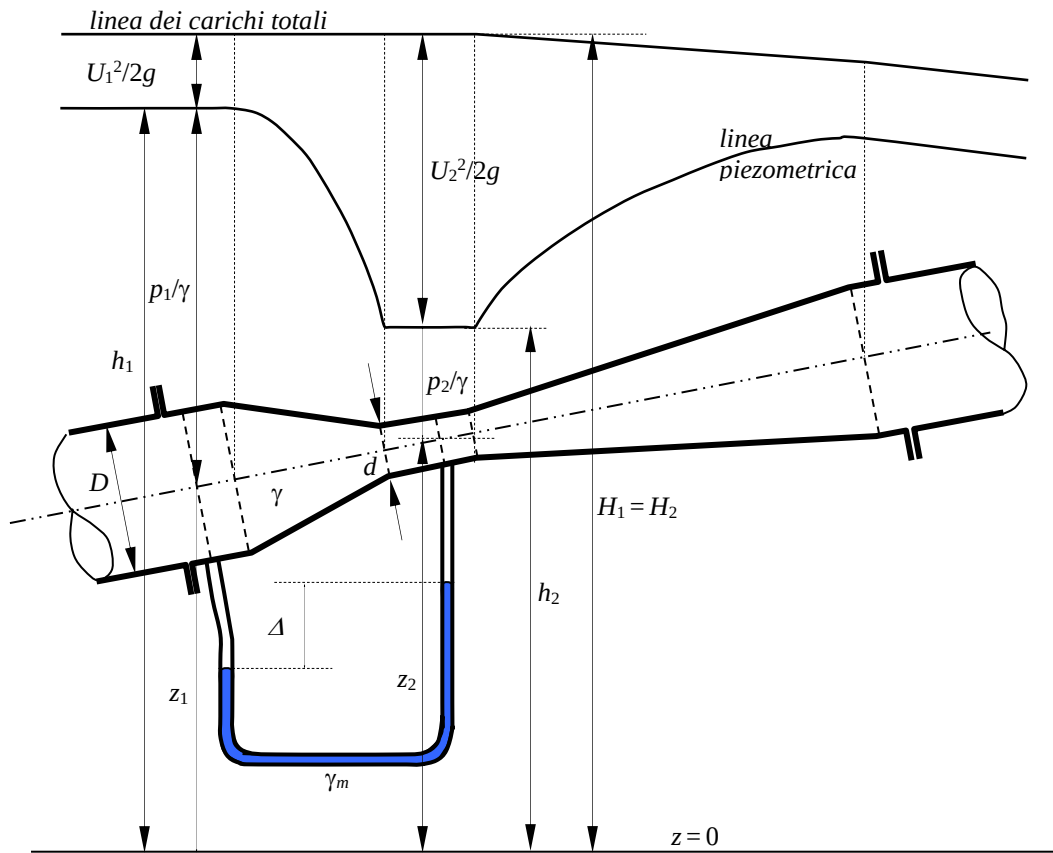


Figura 109. Rappresentazione schematica di un venturimetro.

$$h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = h_2 + \frac{U_2^2}{2g} .$$

Poiché il moto è stazionario e il fluido incompressibile, isoterma e omogeneo, la portata non varia lungo l'asse della corrente. Esprimendo quindi le velocità medie in funzione della portata e delle aree delle sezioni, $U_1 = Q/\Omega_1$ e $U_2 = Q/\Omega_2$, mettendo in evidenza la portata ed esplicitandone l'espressione si ottiene:

$$Q = \sqrt{\frac{2g(h_1 - h_2)}{\frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega_1^2}}} = \Omega_1 \Omega_2 \sqrt{\frac{2g(h_1 - h_2)}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2}} .$$

La misura della portata è quindi ricondotta alla misura delle quote piezometriche ai due estremi del convergente. Tale misura può essere effettuata con un manometro differenziale a liquido del tipo studiato nell'Idrostatica o mediante manometri metallici posti a quote note. Infatti, il liquido in quiete contenuto in una derivazione della condotta avente sezione di attacco posta sulla superficie laterale della condotta ha necessariamente la medesima quota piezometrica della sezione di attacco, poiché sulle due facce della sezione di attacco – una rivolta verso l'interno della condotta, l'altra verso il fluido in quiete nella derivazione – oltre che aversi, ovviamente, la stessa quota geodetica, deve aversi anche equilibrio delle pressioni per il principio di azione e reazione¹⁰⁹.

Ricordando la formula (100) del manometro differenziale si può quindi scrivere una espressione della portata in funzione della misura Δ del manometro differenziale:

$$Q = \Omega_1 \Omega_2 \sqrt{\frac{2g\Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2}} .$$

All'atto pratico, la formula ricavata fornisce una determinazione della portata affetta da imprecisioni legate principalmente all'ipotesi di fluido ideale e all'assunzione di un coefficiente di raggiuglio delle potenze cinetiche unitario. Al fine di poter attribuire allo strumento una determinata precisione, occorre procedere a una taratura basata su misure di portata eseguite, come in tutte le operazioni di taratura, mediante strumenti di misura di precisione maggiore di quella che si vuole attribuire al venturimetro. Tali operazioni sono eseguite in stabilimento dal costruttore, e i relativi risultati riportati nella documentazione tecnica a corredo dello strumento.

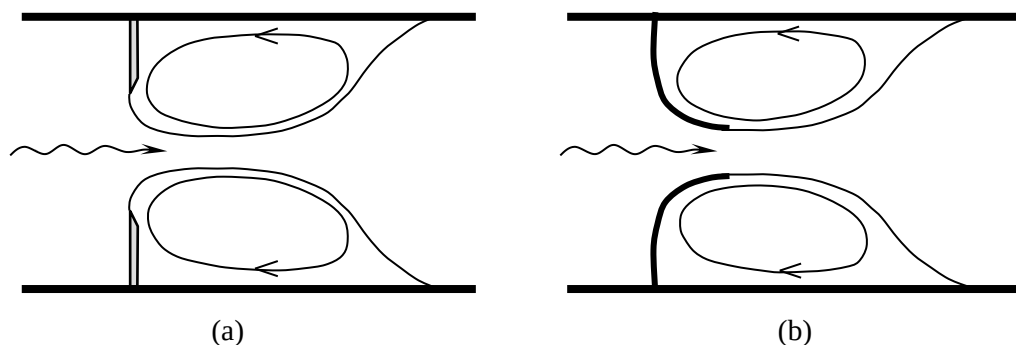


Figura 110. (a) diaframma, (b) boccaglio.

¹⁰⁹ Incidentalmente, si osserva anche che, per lo stesso motivo, la quota del menisco del liquido contenuto in un piezometro collegato ad una sezione di una condotta nella quale la corrente sia gradualmente variata rappresenta la quota piezometrica della corrente in tale sezione.

Strumenti di misura delle portate più economici del venturimetro, basati anch'essi sull'effetto Venturi, sono il *diaframma* e il *boccaglio* (vedi Figura 110). Il primo è costituito, per l'appunto, da un diaframma nel quale è praticato un foro circolare dal bordo affilato, allo scopo di favorire un distacco netto della vena e la formazione, a valle del foro, di una sezione contratta sufficientemente stabile, nella quale è minimo il valore della quota piezometrica. Il valore del rapporto fra le aree della sezione contratta e della sezione del foro, detto *coefficiente di contrazione*, dipende dal rapporto fra le aree del foro e della sezione della condotta. Nel boccaglio, la contrazione è determinata da un elemento convergente a profilo curvilineo interno alla tubazione.

Non includendo alcun dispositivo per realizzare una espansione controllata della vena fluida a valle della sezione contratta, questa avviene in modo relativamente brusco, con intensa produzione di turbolenza e conseguenti maggiori perdite di carico rispetto al venturimetro. Venturimetro, boccaglio e diaframma si collocano in ordine di costo decrescente e perdite di carico crescenti.

Oltre ai misuratori di portata a strozzamento, esistono in commercio vari altri tipi di strumenti per la misura della portata, tutti sostanzialmente basati su una misura della velocità media della corrente.

Il *flussimetro ad area variabile*, o *rotametro*, è un dispositivo meccanico costituito da un tubo trasparente tronco conico, a sezione di area crescente nel senso della corrente, contenente un elemento libero di muoversi lungo l'asse dello strumento. L'elemento mobile raggiunge una posizione di equilibrio sotto l'azione della spinta dinamica del fluido, legata alla sua velocità, e una forza di contrasto fornita da una molla o dal peso proprio dell'elemento, nel qual caso lo strumento deve essere posto verticalmente. La taratura dell'apparecchio consente di realizzare una scala graduata, riportata sulla superficie del tubo.

I *flussimetri a ultrasuoni* si basano sul fatto che onde di pressione (quali sono le onde sonore) generate in un fluido in movimento, si propagano con velocità data dalla somma vettoriale della velocità del fluido e della velocità (usualmente detta *celerità relativa*) con cui le perturbazioni si muoverebbero nel fluido in quiete. Noto il valore della celerità relativa, la velocità della corrente può valutarsi sulla base della differenza delle velocità di propagazione delle perturbazioni rispetto a un osservatore fisso (*celerità assoluta*) nel verso della corrente e nel verso a essa opposto, di cui la prima è ovviamente maggiore della seconda. I misuratori a ultrasuoni generano onde sonore mediante un trasduttore e ne rilevano le modalità di propagazione nel fluido.

I misuratori *a tempo di transito* emettono onde sonore nella direzione del moto e in quella opposta e misurano la differenza dei rispettivi tempi di propagazione.

I misuratori *a effetto Doppler* si basano sulla alterazione della frequenza di un'onda di pressione generata in un fluido in movimento (effetto Doppler), dovuto alla compressione delle onde verso monte e al loro diradamento verso valle. Si tratta, in sostanza, dello stesso effetto per cui il suono prodotto da un'automobile in avvicinamento è più acuto di quello prodotto quando essa si allontana. Nei misuratori in questione un primo trasduttore emette un'onda sonora di frequenza nota e un secondo trasduttore misura la frequenza delle onde riflesse dalle impurità del liquido (particolato o bolle di gas). Si risale alla velocità del fluido dalla differenza fra le due frequenze, che dipende dalla velocità relativa della sorgente e del ricevitore. La necessità che il liquido contenga impurità rende l'uso di tali misuratori particolarmente indicata nei corpi idrici naturali.

I misuratori a ultrasuoni hanno accuratezza dell'ordine di 1-2% e presentano i seguenti vantaggi: facilità di installazione all'esterno di tubazioni di qualunque diametro o alle pareti di canali; non interferiscono con il campo di moto (in particolare, non causano perdite di carico, al contrario degli strumenti a strozzamento); non essendo a contatto con il fluido non sono soggetti a corrosione o intasamento; sono affidabili e non necessitano di manutenzione, poiché non hanno parti in movimento; sono adatti a svariati tipi di fluido, inclusi i fanghi, in condizioni di moto sia stazionario che vario. Non possono essere utilizzati con tubazioni realizzate con materiali fonoassorbenti, quali il calcestruzzo.

I *misuratori elettromagnetici* si basano sul principio fisico dell'induzione elettromagnetica, secondo il quale in un conduttore elettrico in movimento (in particolare, un fluido conduttore) in un campo magnetico si produce una differenza di potenziale proporzionale alla velocità del conduttore (Legge di Faraday sull'induzione elettromagnetica). Sono pertanto particolarmente adatti all'uso con fluidi altamente conduttori (p.es. mercurio, sodio e potassio), ma anche con l'acqua e altri fluidi

contenenti una sufficiente quantità di particelle cariche. Anche i misuratori elettromagnetici non interferiscono con il flusso, ma devono essere montati lungo linea.

I misuratori a ultrasuoni ed elettromagnetici possono essere realizzati, oltre che come misuratori di portata di correnti, anche come misuratori di velocità puntuali, com'è il caso dei velocimetri utilizzati per rilievi in corpi idrici interni o costieri.

Il più semplice strumento di misura di velocità è il *tubo di Pitot*, il cui funzionamento si basa, similmente agli strumenti a strozzamento, sulla legge di Bernoulli. Lo strumento è costituito da un tubo ricurvo, una cui estremità (*presa dinamica*) viene investita dal flusso, che ne determina il parziale riempimento (Figura 111). Il fluido è a contatto con l'atmosfera all'estremo opposto del tubo, che deve essere disposto verticalmente e deve rendere visibile il menisco del liquido. Una camera esterna al tubo centrale è in comunicazione con il liquido attraverso aperture (*prese statiche*) rispetto alle quali il flusso è tangenziale. Il liquido contenuto nella camera esterna possiede pertanto la medesima quota piezometrica della corrente in corrispondenza delle prese statiche. La quota piezometrica del liquido in quiete contenuto nel tubo centrale si ottiene applicando il Teorema di Bernoulli con riferimento alla linea di corrente passante per la presa dinamica, ove (ammettendo un certo grado di schematizzazione del processo) una particella che segue la linea di corrente viene ad arrestarsi (*punto di ristagno*, indicato con la lettera *B* in Figura 111). Scegliendo l'estremo di monte del tratto di linea di corrente considerato (punto *A*) abbastanza vicino al punto di ristagno per poter trascurare le perdite di carico, ma anche sufficientemente lontano dal tubo di Pitot da potervi considerare la velocità non disturbata dalla presenza dello strumento, si ha:

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{u_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{u_B^2}{2g},$$

in cui $u_B = 0$ perché la particella è ferma nel punto di ristagno. La quota piezometrica in tale punto, coincidente con la quota piezometrica del liquido all'interno del tubo centrale, pari alla quota del corrispondente menisco (perché appartenente al piano dei carichi idrostatici del liquido), è data da:

$$h_B = z_B + \frac{p_B}{\gamma} = z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{u_A^2}{2g}$$

ossia, è pari al carico totale della particella nella posizione *A* indisturbata.

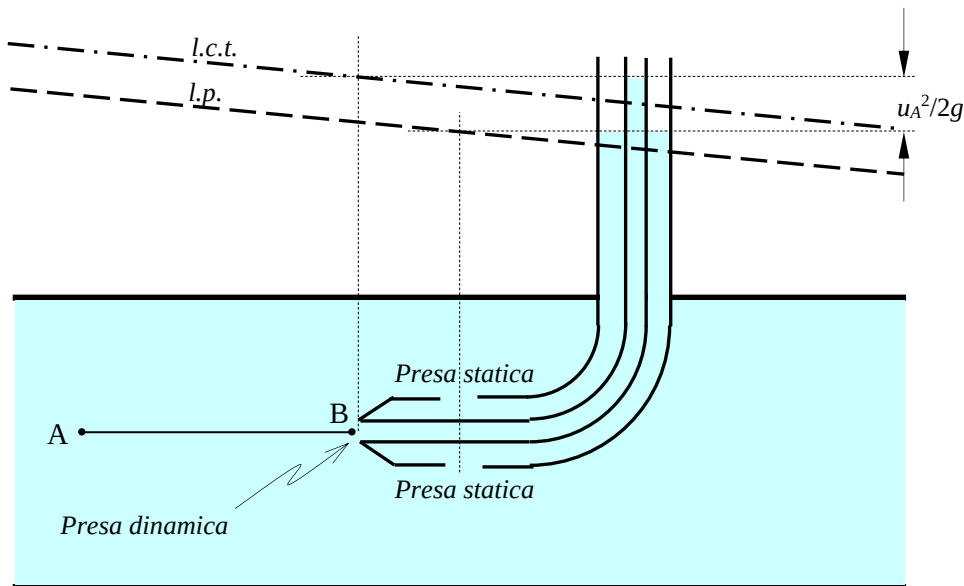


Figura 111. Schema di funzionamento del tubo di Pitot.

In definitiva, la quota del menisco nel tubo interno è pari al carico totale nella posizione indisturbata. Inoltre, poiché la quota del menisco nella camera esterna è pari alla quota piezometrica del liquido (che ammetteremo, dato il breve sviluppo del percorso dal punto A al tubo di Pitot, pari alla quota piezometrica in A), la differenza di quota fra i due menischi è pari all'altezza cinetica in A, dalla quale si ottiene la corrispondente velocità.

Nel caso il fluido sia un aeriforme, il congegno deve essere modificato, collegando le estremità del tubo centrale e della camera esterna a due manometri, e il procedimento di calcolo modificato per tenere conto della comprimibilità del gas. In considerazione della rapidità della compressione che una particella fluida subisce posizione indisturbata a pressione ambiente alla posizione nel punto di ristagno, l'approssimazione indicata per la trasformazione è quella adiabatica. Trascurando le variazioni di quota, la (172) fornisce per l'altezza cinetica incognita:

$$\frac{u^2}{2g} = \frac{k}{k-1} \frac{p_0^{*1/k}}{\rho_0} \left(p_r^{*(1-1/k)} - p_0^{*(1-1/k)} \right)$$

in cui p_0^* e ρ_0 sono rispettivamente la pressione ambiente assoluta e la corrispondente densità del fluido, e p_r^* la pressione assoluta nel punto di ristagno, da cui l'espressione della velocità da misurare:

$$u = \sqrt{2g \left[\frac{k}{k-1} \frac{p_0^{*1/k}}{\rho_0} \left(p_r^{*(1-1/k)} - p_0^{*(1-1/k)} \right) \right]}.$$

Strumenti di questo tipo sono utilizzati come tachimetri, fra l'altro, negli aerei e nelle vetture di Formula 1. Particolarmente nel primo caso, in cui la pressione ambiente può essere sensibilmente differente dalla pressione atmosferica *normale*, occorre eseguire le misure di entrambe le pressioni (ambiente e nel punto di ristagno) con manometri atti a misurare pressioni assolute.

Strumenti e tecniche di misura di velocità puntuali utilizzati prevalentemente in laboratorio sono gli *anemometri a filo caldo* e *a film caldo*, gli *anemometri laser doppler*, la *velocimetria a immagini di particelle* (PIV) e *a tracciamento di particelle* (PTV).

CAPITOLO DODICESIMO

12. CORRENTI IN PRESSIONE

12.1 Generalità

Viene denominata corrente in pressione una corrente che fluisce in un condotto occupandone l'intera sezione, non presentando perciò parte alcuna della sua superficie di contorno a contatto con l'atmosfera e non essendo, conseguentemente, vincolata ad avere parte di tale superficie esposta alla pressione atmosferica. Tale denominazione non esclude quindi che la corrente possa trovarsi localmente in condizioni di pressione negativa (fluido in *depressione*), sebbene la condizione normale sia effettivamente quella in cui le pressioni sono positive (fluido in *pressione*), perché generalmente preferibile per motivi tecnici.

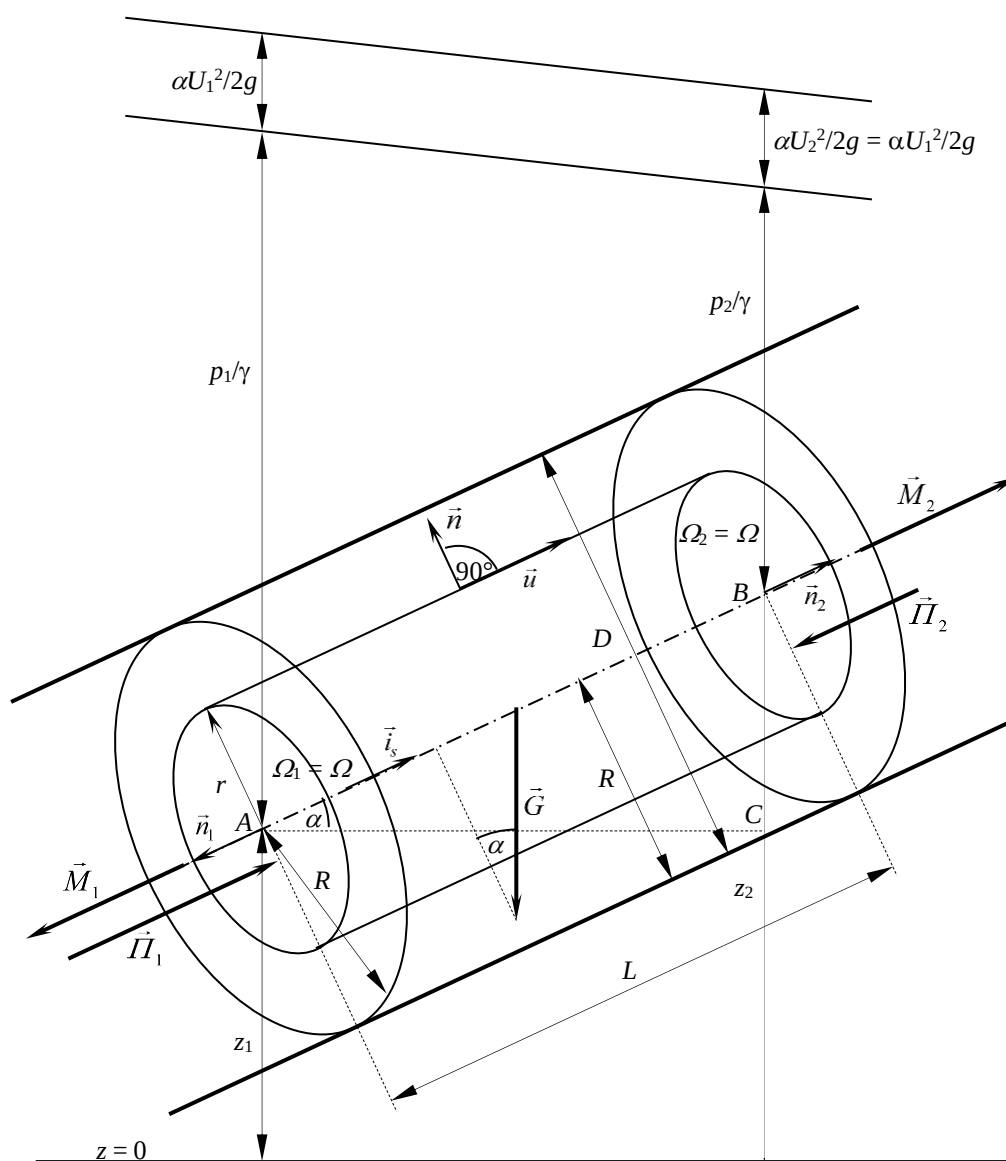


Figura 112. Schema di corrente in pressione in moto uniforme.

Normalmente, una condotta in pressione si compone quasi interamente di tratti cilindrici a sezione circolare, sedi di moti uniformi in media¹¹⁰ soggetti a perdite di carico distribuite, più alcuni tratti di sviluppo complessivamente limitato in confronto ai primi, ove la corrente non è gradualmente variata e non è quindi definibile né una linea piezometrica né una linea dei carichi totali, sedi di perdite di carico localizzate (§ 11.4).

I due tipi di flusso devono essere analizzati con modalità differenti, sostanzialmente allo scopo di dedurre formule per il calcolo delle corrispondenti perdite di carico, mediante le quali poter risolvere i fondamentali problemi di progetto (che caratteristiche occorre assegnare a una tubazione soggetta a certe condizioni al contorno affinché vi fluisca una data portata?) e di verifica (che portata fluisce in una data condotta soggetta a date condizioni al contorno?). L'analisi viene condotta con riferimento al caso di fluidi incomprimibili (liquidi), isoterme e omogenei.

12.2 Moto uniforme nelle condotte in pressione

12.2.1 Cadente piezometrica, cadente dei carichi totali e resistenze al moto

Il moto uniforme di un fluido incomprimibile, isoterme e omogeneo ($\rho = \text{cost}$) in un condotto cilindrico a sezione circolare di raggio R si può studiare convenientemente mediante l'equazione di continuità (211) e l'equazione globale del moto nella forma (220) applicata a un volume di controllo cilindrico di raggio r coassiale alla tubazione, compreso fra due sezioni poste a una distanza L (vedi Figura 112).

Sulla base del significato delle quantità medie, associate al trasporto effettivo di massa, e della presenza della parete della tubazione, le componenti della velocità media nella direzione radiale devono necessariamente risultare nulle. L'equazione di continuità si riduce pertanto alla forma:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 0 ,$$

ove s è l'ascissa definita lungo l'asse della condotta, equiversa al moto, e u la componente assiale della velocità media, coincidente in questo caso con il suo modulo – avendo ommesso per brevità i simboli di media di insieme, come preannunciato al § 9.5. Se ne deduce pertanto che la distribuzione delle velocità medie è la medesima nelle diverse sezioni della condotta.

Proiettando l'equazione lungo l'asse della condotta, assunto orientato nel verso del moto, si ha:

$$(\vec{I} + \vec{M}) \cdot \vec{i}_s = (\vec{G} + \vec{I}_p + \vec{I}_\mu + \vec{I}_R) \cdot \vec{i}_s ,$$

in cui $\vec{i}_s$ è il versore che individua direzione e verso del moto. Essendo il moto uniforme, esso è anche stazionario (cfr. §4.4) e risulta perciò nullo il termine di inerzia locale:

$$\vec{I} = \int_{V_c} \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} dV .$$

Il flusso di quantità di moto attraverso la superficie di contorno del volume di controllo S_c può esprimersi come somma degli integrali estesi alle due sezioni di estremità, Ω_1 e Ω_2 , e alla superficie laterale, S_L , del volume di controllo:

$$\vec{M} = \int_{S_c} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = \int_{\Omega_1} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS + \int_{\Omega_2} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS + \int_{S_L} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS .$$

Per l'uniformità del moto, sulla superficie laterale il vettore velocità è diretto come l'asse della tubazione e risulta perciò ortogonale alla normale alla superficie, col che è nullo il corrispondente prodotto scalare e, quindi, il flusso di quantità di moto attraverso la superficie laterale.

¹¹⁰ Si ricorda che con tale termine si intende il moto uniforme per le grandezze medie in un moto turbolento. Tale specificazione verrà sottintesa e non più ripetuta nel prosieguo.

Poiché la distribuzione di velocità è identica in tutte le sezioni della tubazione, quindi anche sulle sezioni di estremità del volume di controllo, aventi aree $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, i corrispondenti flussi di quantità di moto differiscono unicamente per i valori assunti dal prodotto scalare $\vec{u} \cdot \vec{n}$. Essendo velocità e normale paralleli e discordi nella sezione 1 e paralleli e concordi nella sezione 2, i prodotti scalari valgono $-u$ e u nelle sezioni 1 e 2 rispettivamente, per cui i corrispondenti flussi di quantità di moto sono vettori individualmente non nulli, uguali in direzione e modulo ma opposti in verso e la loro somma vettoriale risulta perciò nulla. Il vettore flusso di quantità di moto attraverso l'intera superficie di contorno del volume di controllo è pertanto nullo.

Sulla base dello schema di Figura 112, ove si individua il triangolo rettangolo ABC avente ipotenusa AB di lunghezza L e cateti orizzontale AC e verticale BC , la componente assiale della forza peso si può esprimere nel modo seguente:

$$\vec{i}_s \cdot \vec{G} = G_s = -|\vec{G}| \sin \alpha = -\gamma V \sin \alpha = -\gamma \Omega L \sin \alpha = -\gamma \Omega (z_2 - z_1).$$

Anche l'integrale delle forze di pressione agenti sulla superficie di contorno del volume di controllo S_c può esprimersi come somma degli integrali estesi alle due sezioni di estremità e alla superficie laterale del volume di controllo:

$$\vec{\Pi}_p = \int_{S_c} -p \vec{n} dS = \int_{\Omega_1} -p \vec{n} dS + \int_{\Omega_2} -p \vec{n} dS + \int_{S_L} -p \vec{n} dS.$$

Di questi, l'integrale esteso alla superficie laterale è il risultante di forze elementari tutte normali all'asse e ha perciò esso stesso componente assiale nulla.

Le sezioni di estremità del volume di controllo sono regolari. Pertanto, trascurando il contributo degli sforzi turbolenti, le distribuzioni di pressione risultano idrostatiche¹¹¹ e i corrispondenti integrali possono valutarsi con le formule studiate nel cap. 3 per le spinte sulle sezioni piane:

$$\int_{\Omega_1} -p \vec{n} dS + \int_{\Omega_2} -p \vec{n} dS = -\vec{n}_1 \int_{\Omega_1} p dS - \vec{n}_2 \int_{\Omega_2} p dS = -\vec{n}_1 p_{G1} \Omega - \vec{n}_2 p_{G2} \Omega,$$

essendo, come già ricordato, $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$. Poiché la normale $\vec{n}_1$ è discorde rispetto al versore dell'asse $\vec{i}_s$ e la normale $\vec{n}_2$ concorde, proiettando lungo l'asse si ha:

$$\vec{i}_s \cdot (-\vec{n}_1 p_{G1} \Omega - \vec{n}_2 p_{G2} \Omega) = p_{G1} \Omega - p_{G2} \Omega.$$

Decomponendo anche il risultante delle forze viscosse come somma di tre integrali estesi alle due sezioni di estremità e alla superficie laterale del volume di controllo:

$$\vec{\Pi}_\mu = \int_{S_c} \mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} dS = \int_{\Omega_1} \mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} dS + \int_{\Omega_2} \mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} dS + \int_{S_L} \mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} dS,$$

si osserva che, essendo il moto uniforme, le derivate del vettore velocità in direzione normale alle superfici di estremità (cioè, nella direzione dell'asse della condotta e delle stesse velocità) sono identicamente nulle. È pertanto non nullo unicamente l'integrale esteso alla superficie laterale cilindrica del volume di controllo. Per la simmetria assiale della distribuzione di velocità, la funzione integranda vettoriale è costante su tale superficie, da cui:

$$\vec{\Pi}_\mu = \int_{S_L} \mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} dS = \mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} S_L = \mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} BL = \mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} 2\pi L,$$

¹¹¹ L'analisi condotta nel §5.8.1 era riferita a grandezze istantanee e ad un moto qualunque. Seguendo il medesimo procedimento a partire dall'equazione di Reynolds (214), le condizioni di moto uniforme in media determinano l'annullamento delle componenti del termine viscoso nel piano normale e gli unici termini che determinano deviazioni (trascurabili) dalla distribuzione idrostatica sono quindi legati agli sforzi turbolenti.

avendo indicato con $B = 2\pi r$ il *contorno bagnato* della sezione circolare, in questo caso coincidente con l'intera sua circonferenza. Proiettando sull'asse si ottiene quindi:

$$\vec{i}_s \cdot \vec{I}_\mu = \vec{i}_s \cdot \mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} 2\pi L = \mu \frac{\partial(\vec{i}_s \cdot \vec{u})}{\partial n} 2\pi L = \mu \frac{\partial u}{\partial n} 2\pi L .$$

Anche il risultante dei termini legati agli sforzi turbolenti (di Reynolds) può essere espresso come somma degli integrali estesi alle superfici laterale e di estremità:

$$\vec{I}_R = \int_{\Omega_1} -\rho \overline{u'(\vec{u}' \cdot \vec{n})} dS + \int_{\Omega_2} -\rho \overline{u'(\vec{u}' \cdot \vec{n})} dS + \int_{S_L} -\rho \overline{u'(\vec{u}' \cdot \vec{n})} dS .$$

Detta u' la proiezione sull'asse del moto della componente di agitazione della velocità, e tenendo presente che $\vec{i}_s = -\vec{n}$ sulla sezione 1 e $\vec{i}_s = \vec{n}$ sulla sezione 2, i termini relativi alle sezioni di estremità del volume di controllo possono scriversi come segue:

$$\int_{\Omega_1} -\rho \overline{u'(\vec{u}' \cdot \vec{n})} dS + \int_{\Omega_2} -\rho \overline{u'(\vec{u}' \cdot \vec{n})} dS = \int_{\Omega_1} -\rho \overline{u'(-u')} dS + \int_{\Omega_2} -\rho \overline{u'(u')} dS = \int_{\Omega_1} \rho \overline{u'u'} dS - \int_{\Omega_2} \rho \overline{u'u'} dS .$$

Essendo il moto uniforme in media, anche le caratteristiche della turbolenza non variano da sezione a sezione. Pertanto, nonostante termini come $\overline{u'u'}$ non possano dirsi, per la natura aleatoria delle componenti di agitazione, identici istante per istante in punti corrispondenti delle due sezioni, devono pur sempre essere identici i loro valori medi sulle due sezioni. La somma algebrica degli integrali contenenti i termini turbolenti relativi alle due sezioni di estremità deve pertanto essere nulla.

Sulla base delle stesse considerazioni utilizzate per il termine viscoso, riguardanti la simmetria assiale del campo di moto (da intendersi in termini di valori medi per quanto riguarda la turbolenza), sulla superficie laterale risulta costante la funzione integranda. Su tale superficie agisce pertanto una forza la cui proiezione lungo l'asse è data da:

$$\vec{i}_s \cdot \vec{I}_R = \vec{i}_s \cdot \int_{S_L} -\rho \overline{u'(\vec{u}' \cdot \vec{n})} dS = \int_{S_L} -\rho \overline{u'u'_n} dS = -\rho \overline{u'u'_n} 2\pi L = -\rho \overline{u'u'_r} 2\pi L , \quad (242)$$

in cui $u'_n = u'_r$ è la componente pulsante della velocità in direzione radiale.

L'equazione globale del moto proiettata sull'asse della tubazione assume pertanto l'espressione:

$$-\gamma \Omega(z_2 - z_1) + p_{G1} \Omega - p_{G2} \Omega + \mu \frac{\partial u}{\partial r} 2\pi L - \rho \overline{u'u'_r} 2\pi L = 0 , \quad (243)$$

in cui il termine viscoso è espresso in termini della coordinata radiale r , variabile dal valore zero sull'asse della condotta al valore R sulla parete. Dividendo membro a membro per $\gamma \Omega L$, introducendo il raggio idraulico $\mathfrak{R}$, definito come rapporto fra l'area della sezione liquida Ω e il contorno bagnato B , $\mathfrak{R} = \Omega/B$, e ricordando la definizione di quota piezometrica, $h = z + p/\gamma$, si ottiene:

$$\frac{h_1 - h_2}{L} + \frac{1}{\gamma \mathfrak{R}} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial r} - \rho \overline{u'u'_r} \right) = 0 . \quad (244)$$

Per una sezione circolare, il raggio idraulico è pari a metà del raggio geometrico:

$$\mathfrak{R} = \frac{\Omega}{B} = \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2} .$$

I termini entro parentesi nella (244) sono le componenti lungo l'asse della condotta degli sforzi viscosi e turbolenti agenti sulla superficie laterale del volume di controllo, quindi tangenziali rispetto

a tale superficie. Entrambi gli sforzi sono di tipo resistente, cioè opposto al verso della corrente. Infatti, poiché la velocità si annulla alla parete della tubazione (condizione di aderenza), risulta negativo il segno della derivata radiale del modulo della velocità che compare nell'espressione dello sforzo tangenziale viscoso. Inoltre, si dimostra che il prodotto delle parti fluttuanti ha valore medio positivo¹¹², per cui la proiezione lungo l'asse dello sforzo turbolento presente nella (242) è negativa.

Detto perciò

$$\tau_{tot} = -\mu \frac{\partial u}{\partial r} + \overline{\rho u' u'_r} \quad (245)$$

il modulo dello sforzo resistente totale, si può anche scrivere:

$$\frac{h_1 - h_2}{L} = \frac{\tau_{tot}}{\gamma \mathfrak{R}}$$

Sulle sezioni trasversali di una corrente in moto uniforme la distribuzione delle pressioni è idrostatica e le quote piezometriche sono perciò costanti. Il termine a primo membro è quindi indipendente dalle dimensioni radiali del volume di controllo considerato. Essendo inoltre lo sforzo resistente totale costante lungo la superficie laterale di un volume di controllo di dato raggio e $\tau_{tot} > 0$, il secondo membro è positivo e costante lungo l'asse. La quota piezometrica decresce pertanto proporzionalmente agli spostamenti lungo l'asse e la linea piezometrica della corrente è quindi rettilinea e declive nel senso del moto (casi di Figura 108d e Figura 108e). La cadente piezometrica della corrente, definita come perdita di carico piezometrico per unità di percorso lungo l'asse:

$$i = -\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{h_1 - h_2}{L}$$

è costante e può anche esprimersi come:

$$i = \frac{\tau_{tot}}{\gamma \mathfrak{R}} .$$

Poiché nel moto uniforme l'altezza cinetica media della corrente, $\alpha U^2/2g$, non varia da sezione a sezione, la linea dei carichi totali si mantiene parallela alla linea piezometrica e risultano pertanto uguali le corrispondenti pendenze. La cadente piezometrica è perciò uguale alla cadente dei carichi totali:

$$j = -\frac{\partial H}{\partial s} = \frac{H_1 - H_2}{L} ,$$

¹¹² Nel caso di fluido incompressibile, risulta nullo, istante per istante, il flusso volumetrico attraverso la superficie di contorno del volume di controllo (§4.9.1), il che significa che risultano identici, istantaneamente, flussi entranti e flussi uscenti. Per quanto riguarda i flussi di quantità di moto, invece, i volumi liquidi uscenti attraverso la superficie laterale ($u_r > 0$), in quanto provenienti da zone del flusso dove sono maggiori le velocità medie, possiedono, mediamente, una componente assiale della velocità, u , maggiore rispetto ai volumi entranti ($u_r < 0$). Per considerazioni analoghe a quelle utilizzate per le parti fluttuanti, attraverso le sezioni di estremità si hanno flussi di quantità di moto medi identici in valore assoluto ma opposti in segno. Si ha pertanto un flusso di quantità di moto medio attraverso l'intera superficie di controllo, riferito alle grandezze *istantanee*, positivo ed interamente dovuto alla superficie laterale, col che si ha $\overline{u u_r} > 0$. Introducendo la decomposizione di Reynolds per i termini sotto il segno di media e ricordando che il valore medio della componente radiale, $\bar{u}_r$, è necessariamente nullo, giacché esso rappresenta la componente di trasporto, si ottiene:

$$\overline{u u_r} = \overline{(\bar{u} + u')(\bar{u}_r + u'_r)} = \overline{(\bar{u} + u')u'_r} = \overline{\bar{u} u'_r} + \overline{u' u'_r} = \overline{\bar{u} u'_r} + \overline{u' u'_r} = \bar{u} \overline{u'_r} + \overline{u' u'_r} = \overline{u' u'_r} > 0 .$$

col che si ha anche:

$$j = \frac{\tau_{tot}}{\gamma R}, \quad (246)$$

Nel caso in questione di condotta a sezione circolare, lo sforzo resistente totale varia linearmente con il raggio del volume di controllo:

$$\tau_{tot} = \gamma \frac{r}{2} j$$

e assume perciò il suo valore massimo τ_0 alla parete:

$$\tau_0 = \gamma \frac{R}{2} j, \quad (247)$$

R essendo il raggio della sezione della tubazione.

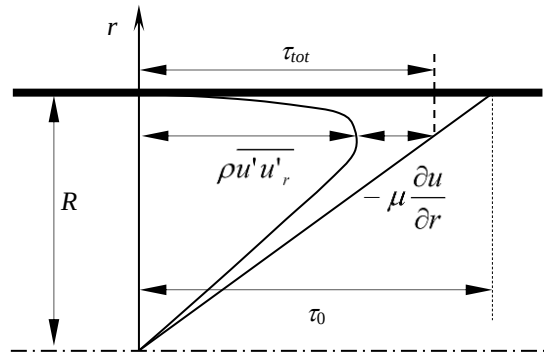


Figura 113. Andamento degli sforzi totali e ripartizione fra sforzi viscosi e sforzi turbolenti.

La ripartizione dello sforzo totale resistente fra componente viscosa e componente turbolenta è rappresentata in Figura 113. Sull'asse risultano nulle entrambe le componenti, a causa della simmetria del campo di moto. Gli sforzi viscosi hanno un andamento strettamente crescente all'aumentare della distanza dall'asse, in conseguenza della concavità del profilo di velocità, a sua volta determinata dalle condizioni di aderenza alla parete, e del conseguente aumento della derivata della velocità media in direzione radiale. Gli sforzi turbolenti crescono dapprima al crescere della distanza dall'asse, ma devono necessariamente annullarsi alla parete, dove vige la condizione di aderenza e risultano pertanto nulle sia la velocità media che la componente fluttuante. Il relativo andamento presenta pertanto un massimo, che si localizza in un'area non troppo distante dalla parete. Come già osservato al §9.5, in adiacenza alla parete è comunque sempre presente un sottile strato di fluido (sottostrato viscoso), all'interno del quale lo sforzo è interamente viscoso.

Per velocità sufficientemente elevate, gli sforzi turbolenti prevalgono in quasi tutta la sezione (a eccezione del sottostrato viscoso), tanto da poter trascurare in confronto a essi gli sforzi viscosi. Un moto di questo tipo si dice *puramente turbolento* o *assolutamente turbolento*. Evidentemente, fra le condizioni di moto laminare, dominato dalla viscosità, e di moto assolutamente turbolento, dominato dagli scambi di quantità di moto e, quindi, dalla densità del fluido, esiste un campo intermedio nel quale le due componenti dello sforzo sono confrontabili: si tratta del *moto turbolento di transizione*.

La rilevanza del raggio idraulico nelle espressioni presentate si comprende meglio ove si osservi che, nella equazione globale del moto (243), le forze motrici – la gravità e le forze di pressione – risultano proporzionali all'area della sezione liquida, mentre le forze tangenziali resistenti, in quanto agenti lungo la superficie laterale, sono proporzionale al contorno bagnato. Il raggio idraulico è quindi una lunghezza caratteristica cui è legato il rapporto fra forze motrici e forze resistenti.

Sulla base della relazione fra cadente dei carichi totali e sforzo resistente alla parete, il modulo T della forza resistente agente su un tratto di corrente in moto uniforme di lunghezza L è dato da:

$$T = \tau_0 BL = \gamma \mathcal{R} j BL = \gamma \frac{\Omega}{B} j BL = \gamma \mathcal{L} j = \gamma \mathcal{V} j ,$$

ove V è il volume liquido del tratto di corrente considerato. Per il principio di azione e reazione, il fluido esercita una azione uguale e contraria nei confronti della parete interna della tubazione, che tende a trascinare quest'ultima nel senso del moto (*azione di trascinamento*).

Esprimendo la cadente dei carichi totali dalla relazione precedente:

$$j = \frac{T}{\gamma V} ,$$

si riconosce che a essa può essere attribuito, in aggiunta al significato energetico illustrato al §11.4, l'ulteriore significato dinamico di azione resistente esercitata sull'unità di peso di fluido dalle pareti della condotta (ovvero similmente, in termini di azione di trascinamento). Tale significato della cadente era già stato riconosciuto, in termini più generali, nel § 11.4.2.

12.2.2 Profilo di velocità

L'equazione (244) riscritta nella forma:

$$j + \frac{2}{\gamma r} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial r} - \rho u' u'_r \right) = 0 \quad (248)$$

consente di determinare il profilo delle velocità medie u nel caso di moto laminare, nonché di dedurre le caratteristiche qualitative del profilo di velocità nel caso di moto turbolento. Nel regime laminare, l'equazione si riduce alla equazione differenziale ordinaria a variabili separabili:

$$du = -\frac{\gamma j}{2\mu} r dr ,$$

il cui integrale generale è dato da:

$$u = -\frac{\gamma j}{4\mu} r^2 + C ,$$

in cui la costante di integrazione C si determina imponendo la condizione di aderenza alla parete, $u = 0$ per $r = D/2$, da cui:

$$C = \frac{\gamma j}{16\mu} D^2 ,$$

che, sostituita nell'integrale generale, fornisce:

$$u = \frac{\gamma j}{4\mu} \left(\frac{D^2}{4} - r^2 \right) , \quad (249)$$

La distribuzione delle velocità ha pertanto simmetria assiale e profilo parabolico (vedi Figura 114), con valore massimo $u_{max} = \gamma j D^2 / 16\mu$. La portata è data dal volume del *solido di velocità*, avente per base la sezione liquida e per altezza, punto per punto, il modulo della velocità, che per quanto detto è un paraboloide di rivoluzione (formula di Hagen-Poiseuille):

$$Q = \int_{\Omega} u \, d\Omega = \int_0^{D/2} \frac{\eta j}{4\mu} \left(\frac{D^2}{4} - r^2 \right) 2\pi r \, dr = \frac{\eta j \pi}{2\mu} \left[\left(\frac{D^2 r^2}{8} - \frac{r^4}{4} \right) \right]_0^{D/2} = \frac{\eta j \pi}{128\mu} D^4.$$

La velocità media della corrente è data da:

$$U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{\eta j \pi}{128\mu} D^4 \cdot \frac{4}{\pi D^2} = \frac{\eta j}{32\mu} D^2 = \frac{1}{2} u_{\max}.$$

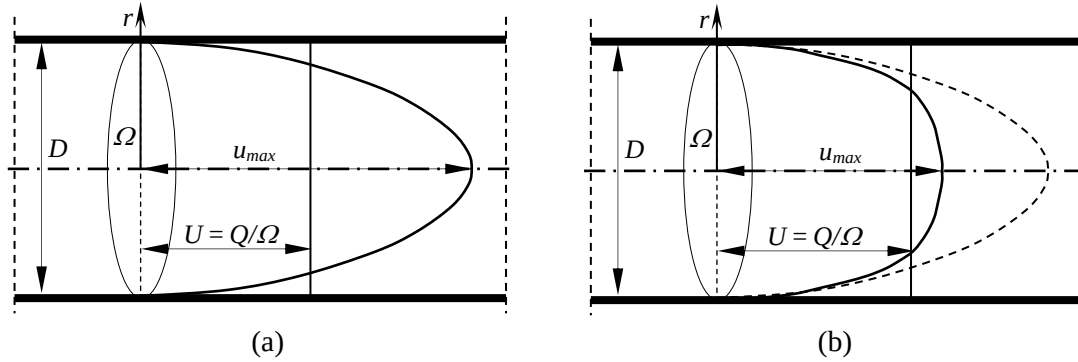


Figura 114. Profili di velocità in tubazione cilindrica a sezione circolare nei regimi (a) laminare e (b) turbolento, a parità di cadente dei carichi totali.

Infine, si determina l'espressione della cadente dei carichi totali in funzione della velocità media e del diametro della sezione:

$$j = \frac{32\mu}{\gamma} \frac{U}{D^2}, \quad (250)$$

che costituisce, in definitiva, il risultato di maggiore interesse ai fini applicativi, in quanto consente la valutazione delle perdite di carico distribuite in funzione di parametri di interesse tecnico.

Nel caso di regime turbolento, l'equazione (248) si riscrive nella forma:

$$du = \left(-\frac{\eta j}{2\mu} + \frac{\rho}{\mu} \overline{u' u'_r} \right) dr,$$

che, integrata, fornisce:

$$u = \int_0^r \left(-\frac{\eta j}{2\mu} + \frac{\rho}{\mu} \overline{u' u'_r} \right) dr + C = -\frac{\eta j r^2}{4\mu} + \frac{\rho}{\mu} \int_0^r \overline{u' u'_r} dr + C.$$

Imponendo la condizione di aderenza alla parete si ottiene:

$$C = \frac{\eta j D^2}{16\mu} - \frac{\rho}{\mu} \int_0^{D/2} \overline{u' u'_r} dr,$$

da cui l'espressione formale della distribuzione delle velocità medie:

$$u = \frac{\eta j}{4\mu} \left(\frac{D^2}{4} - r^2 \right) - \frac{\rho}{\mu} \int_r^{D/2} \overline{u' u'_r} dr,$$

in cui il primo termine a secondo membro rappresenta la distribuzione di velocità nel regime laminare. Come già rilevato, gli sforzi turbolenti non sono suscettibili di determinazione su base deduttiva. Tuttavia, si è rilevato in precedenza che $\overline{u'u'}_r > 0$. Pertanto, l'integrale, nullo alla parete, assume valori strettamente crescenti al diminuire della distanza dall'asse della condotta, ossia, al diminuire di r . A parità di cadente j , proprietà fisiche del liquido e diametro della tubazione, le velocità risultano ovunque inferiori a quelle che si avrebbero in regime laminare (se esso si potesse effettivamente svolgere¹¹³), per sottrazione di quantità tanto maggiori quanto minore è la distanza dall'asse. Inoltre, il fatto che gli sforzi turbolenti presentino un massimo in una zona non distante dalla parete, determina una forma del profilo delle velocità medie più appiattito rispetto al regime laminare, come riportato in Figura 114, che determina una minore differenza fra velocità media e velocità massima. Evidentemente, in regime turbolento anche la portata risulta inferiore, a parità di condizioni – in particolare, a parità di cadente – a quella calcolabile con il profilo di velocità del moto laminare. Per converso, al regime turbolento è quindi associata una maggiore cadente piezometrica a parità di portata. Come già rilevato al §11.3, lo schiacciamento del profilo di velocità nel regime turbolento rispetto al regime laminare consente di approssimare all'unità il coefficiente di ragguaglio delle potenze cinetiche, α .

Da quanto sopra esposto, ai fini del calcolo delle perdite di carico distribuite che hanno luogo nelle correnti in moto uniforme è necessario determinare relazioni fra lo sforzo resistente alla parete e le grandezze caratteristiche del moto (viscosità, densità, portata, diametro della sezione, etc...) per i vari regimi di moto. Tale argomento verrà affrontato nel §12.3. Quale inquadramento generale del problema della determinazione delle resistenze al moto nel regime turbolento, e allo scopo di meglio comprendere la genesi delle relative formule, nel paragrafo successivo vengono illustrati i risultati dell'analisi teorica della turbolenza generata in prossimità di una parete.

12.3 Leggi di resistenza al moto uniforme

Il problema della determinazione delle perdite di carico distribuite nel moto uniforme in condotte a sezione circolare può essere efficacemente impostato con i metodi dell'analisi dimensionale. Tuttavia, rinunciando in questa sede a una trattazione sistematica su tale base, il problema verrà trattato nei suoi aspetti essenziali e con particolare riferimento agli aspetti applicativi, rimandando il lettore interessato ad approfondimenti ai testi a tale scopo consigliati.

12.3.1 Formula di Darcy-Weisbach

La rappresentazione più completa delle resistenze al moto uniforme nei vari regimi di moto possibili in una tubazione cilindrica di sezione qualunque è espressa in termini della formula:

$$j = \lambda \frac{U^2}{8gR} ,$$

che nel caso di sezione circolare di diametro D assume la forma nota sotto il nome di *formula di Darcy-Weisbach*:

$$j = \lambda \frac{U^2}{2gD} , \quad (251)$$

in cui λ è un coefficiente adimensionale, cui vengono attribuite dai vari autori una serie di denominazioni differenti: *coefficiente di resistenza*, *numero indice di resistenza*, *coefficiente di*

¹¹³ Il confronto è con le velocità e la portata calcolate, a parità di caratteristiche del liquido, del diametro della tubazione e della cadente, con la legge del profilo di velocità per regime laminare. Ciò tuttavia non significa che, a parità dei parametri menzionati, si possa avere l'uno o l'altro dei due regimi, l'esistenza dei quali è governata univocamente dal valore del numero di Reynolds.

perdita distribuita, *fattore d'attrito*¹¹⁴. Il problema è quindi ricondotto alla specificazione del valore di λ in funzione delle grandezze caratteristiche del moto.

Nel §12.2.2 è stato determinato il profilo parabolico delle velocità per il caso di regime laminare, dal quale è stata dedotta l'espressione (250) della caduta dei carichi totali in funzione della velocità media della corrente, del diametro della tubazione e delle caratteristiche fisiche del fluido. Da tale espressione si può anche ricavare l'espressione dell'indice di resistenza:

$$j = \frac{32\mu}{\gamma} \frac{U}{D^2} = \frac{64g\mu}{\gamma DU} \frac{U^2}{2gD} = \frac{64\mu}{\rho DU} \frac{U^2}{2gD} = \frac{64}{Re} \frac{U^2}{2gD},$$

da cui:

$$\lambda = \frac{64}{Re}. \quad (252)$$

Nel caso più generale di moto in regime turbolento la determinazione di λ deve essere affrontata necessariamente per via sperimentale, come conseguenza della menzionata incapacità di dedurre espressioni precise degli sforzi turbolenti in funzione delle grandezze caratteristiche del moto medio, tali non potendo essere considerate quelle derivanti dalla teoria della lunghezza di mescolamento. Nel caso più generale di moto in condotte aventi superficie interna scabra, il problema è quello di determinare una relazione fra lo sforzo resistente alla parete, τ_0 , e i parametri fisicamente rilevanti: la densità ρ , la viscosità dinamica μ , il diametro D della condotta, la velocità media della corrente U , e una lunghezza caratteristica σ rappresentativa della rugosità della parete interna della tubazione, detta *scabrezza*.

La definizione operativa della scabrezza di una tubazione costituisce un problema concettuale tutt'altro che banale. Posto che il concetto di scabrezza è legato alla geometria della superficie interna della tubazione, tuttavia, in linea di principio, essa non può essere rappresentata da un'unica lunghezza caratteristica, determinabile per via deduttiva, sulla base di misure di tipo geometrico, quale il valore medio o massimo delle asperità della superficie, dovendo essere rilevante nei confronti delle resistenze offerte al moto la forma delle asperità, come pure la posizione delle asperità rispetto al flusso. Un esempio convincente delle difficoltà insite nella definizione della scabrezza è il classico caso della conformazione del profilo della superficie a denti di sega aventi i tratti acclivi e declivi a diverse pendenze, rappresentato in Figura 115.

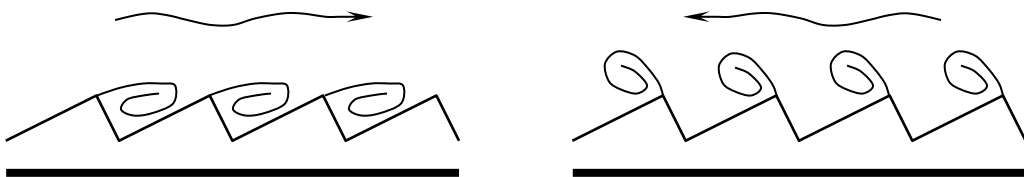


Figura 115. Esempio di superfici scabre di uguale geometria che determinano differenti resistenze al moto in correnti fluenti in sensi opposti.

Infatti, quando il fronte ripido del profilo è posto controcorrente vengono prodotte scie vorticose di ampiezza maggiore rispetto al caso in cui la corrente investa il lato a pendenza minore, con conseguenti maggiori perdite di carico. Nel caso delle tubazioni commerciali il problema di una determinazione della scabrezza su base puramente deduttiva è ulteriormente complicato dal fatto che la conformazione della superficie scabra è estremamente irregolare. Tale difficoltà concettuale ha

¹¹⁴ A proposito della denominazione "fattore d'attrito" è importante rilevare che il fenomeno della perdita di energia di una corrente fluida non è legato allo sviluppo di attrito fra il fluido e la superficie interna della tubazione, giacché alla parete vige la condizione di aderenza e non v'è perciò scorrimento del fluido rispetto ad essa. Il termine "attrito" va quindi inteso nel senso di attrito interno al fluido, dovuto alla sua viscosità e legato allo scorrimento reciproco degli strati di fluido attraverso il legame costitutivo (156).

suggerito di procedere alla definizione del parametro scabrezza in termini degli effetti da essa prodotti – ossia, delle resistenze al moto – piuttosto che puramente geometrici. D'altro canto, una volta rinunciato alla determinazione della scabrezza sulla base di una espressione legata alla geometria della superficie, essa può essere effettivamente rappresentata da un'unica lunghezza caratteristica σ , della quale occorre accontentarsi di determinare, caso per caso, il valore numerico (nel caso della produzione commerciale, a cura del fabbricante).

Sulla base dell'analisi dimensionale, il menzionato legame funzionale fra sei grandezze fisiche:

$$\tau_0 = f(\mu, \rho, U, D, \sigma) ,$$

assunte D , U e ρ come grandezze fondamentali, può esprimersi in funzione di tre soli raggruppamenti adimensionali, nella forma:

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = f\left(\frac{\rho U D}{\mu}, \frac{\sigma}{D}\right) ,$$

di cui il primo entro parentesi è il numero di Reynolds (205), il secondo, rapporto fra la scabrezza e il diametro della sezione circolare¹¹⁵, è detto *scabrezza relativa*. Ricordata l'espressione (247) dello sforzo alla parete, si ha:

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = \frac{\gamma R j}{\rho U^2} = \frac{g D}{4 U^2} \lambda \frac{U^2}{2 g D} = \frac{\lambda}{8} , \quad (253)$$

per cui il problema è ricondotto alla determinazione del legame funzionale fra variabili adimensionali:

$$\lambda = f\left(\text{Re}, \frac{\sigma}{D}\right) .$$

Ai fini dell'analisi sperimentale, si pone il problema di assegnare un valore numerico alla scabrezza di una tubazione avente una parete interna di date caratteristiche. A tale scopo, lo studio del fenomeno è stato condotto, storicamente, ricercando dapprima relazioni valide per un ben determinato tipo di scabrezza omogenea, costituita da sabbia di granulometria pressoché uniforme di diametro d , facilmente misurabile. Gli esperimenti consistevano nel misurare la cadente piezometrica in un moto uniforme di portata nota in una tubazione di scabrezza e diametro della sezione noti, per ricavare successivamente l'indice di resistenza dalla formula di Darcy-Weisbach (251). I risultati di tali esperienze, compiute da Nikuradse nel 1933, sono rappresentati in un diagramma bilogaritmico avente in ascisse il numero di Reynolds e in ordinate l'indice di resistenza λ . Tale diagramma, cui è stato anche attribuito il nome di *arpa di Nikuradse* a causa della forma dell'insieme delle curve in esso contenute, è riportato in forma schematica in Figura 116.

Per valori del numero di Reynolds inferiori al valore critico $Re_c \cong 2300$ il regime di moto è laminare. In tale intervallo vale quindi la relazione (252) – desumibile, come s'è visto, teoricamente – della quale i risultati sperimentali rappresentano tuttavia, come per tutti i risultati teorici, la necessaria conferma. Trattandosi di una relazione monomia, essa è rappresentata da una retta in un diagramma bilogaritmico. Per valori del numero di Reynolds superiori al valore critico si ha l'insorgenza della turbolenza, nelle forme progressive descritte nel §9.2. Tutte le curve relative al regime turbolento e alle varie scabrezze relative giacciono superiormente a una curva limite rappresentativa del comportamento dei tubi lisci, descritta dalla *formula di Prandtl-Von Kármán*:

¹¹⁵ Per una sezione di forma generale, nella definizione tanto del numero di Reynolds quanto della scabrezza relativa il diametro verrebbe rimpiazzato dal raggio idraulico moltiplicato per quattro.

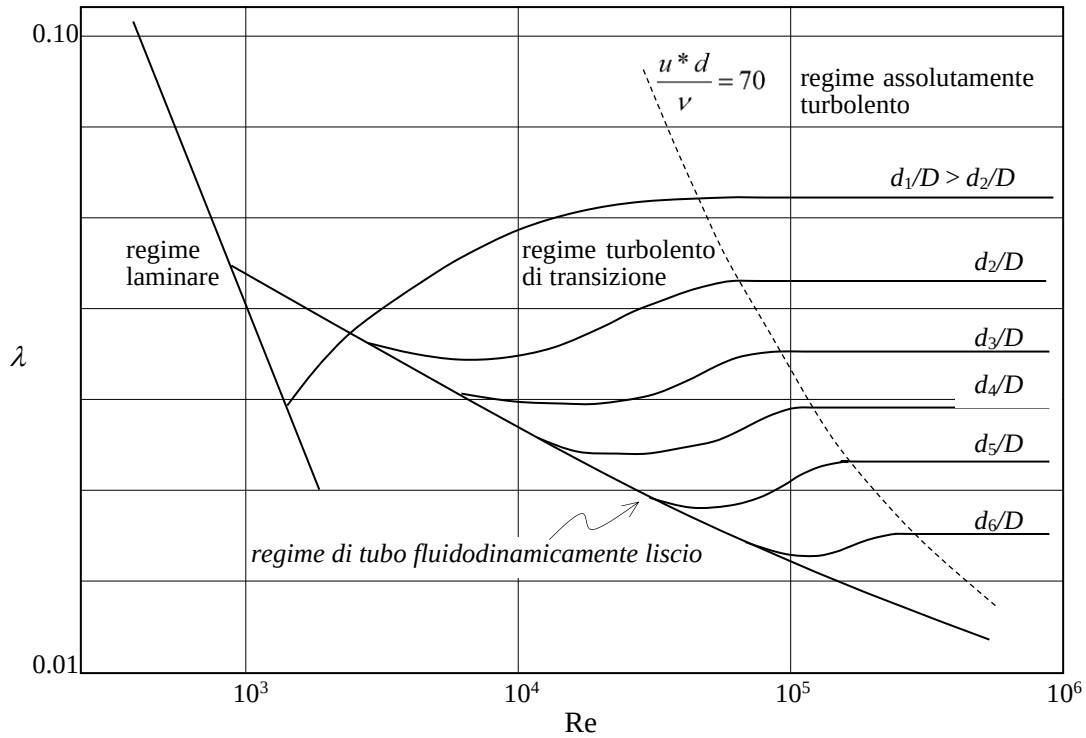


Figura 116. Rappresentazione schematica dell'arpa di Nikuradse.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2,51}{\sqrt{\lambda} \text{Re}} \right). \quad (254)$$

Ciascuna curva associata a una data scabrezza relativa d/D si sovrappone alla curva dei tubi lisci fino a un certo valore del numero di Reynolds, superato il quale la curva relativa al tubo scabro se ne distacca dapprima con andamento decrescente fino a un valore minimo, per poi assumere un andamento crescente, tendente, per valori del numero di Reynolds sufficientemente elevati, a una giacitura parallela all'asse delle ascisse, che denota l'indipendenza dell'indice di resistenza dal numero di Reynolds. Tale condizione, detta di *moto assolutamente turbolento* o di *turbolenza pienamente sviluppata*, è rappresentata dalla *formula di Prandtl-Nikuradse*:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{d/D}{3,71} \right). \quad (255)$$

La struttura delle equazioni di Prandtl-von Kármán e Prandtl-Nikuradse è stata dedotta teoricamente sulla base della legge logaritmica di distribuzione della velocità nel regime turbolento, con valori dei coefficienti calibrati sulla base dei rilievi sperimentali¹¹⁶.

¹¹⁶ Nel caso di tubo liscio, l'analisi dimensionale indica che la costante di integrazione della legge logaritmica è data da $y_0 = K_I \nu / u^*$, con K_I costante adimensionale, per cui si ha:

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y u^*}{K_I \nu} \right) = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y u^*}{\nu} \right) + \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{1}{K_I} \right) = a \ln \left(\frac{y u^*}{\nu} \right) + b_I.$$

Tale relazione è stata controllata sperimentalmente e riconosciuta valida da Nikuradse, il quale determinò anche il valore delle costanti:

$$\frac{u}{u^*} = 2,5 \ln \left(\frac{y u^*}{\nu} \right) + 5,5,$$

Le curve associate ai vari valori di scabrezza relativa si staccano dalla curva dei tubi lisci per valori del numero di Reynolds tanto maggiori quanto minore è la scabrezza relativa. Poiché lo spessore del sottostrato viscoso δ_v è espresso dalla relazione $\delta_v u^*/\nu = 5$, si ha anche:

$$\delta_v = 5 \frac{\nu}{u^*} = 5 \frac{\nu}{UD} \frac{UD}{u^*} = \frac{5D}{\text{Re} \sqrt{\lambda/8}}.$$

da cui si evince che lo spessore del sottostrato viscoso decresce all'aumentare del numero di Reynolds, giacché corrispondentemente l'indice di resistenza decresce molto lentamente. Pertanto, per numeri di Reynolds non troppo elevati lo spessore del sottostrato viscoso è tale da ricoprire interamente le asperità della superficie interna della tubazione, talché le scie vorticosi che si generano in prossimità delle stesse (come da schema di Figura 115) vengono dissipate per effetto della viscosità prima che possano influenzare il nucleo turbolento della corrente. In tali condizioni l'effetto della scabrezza sulle resistenze al moto non è sensibile e un tubo scabro si comporta perciò come un tubo liscio. A sottolineare come tale comportamento si verifichi in dipendenza dalle condizioni del moto, la curva dei tubi lisci viene talora, più efficacemente, designata come propria dei tubi *fluidodinamicamente lisci*. Giusta la spiegazione fornita riguardo lo spessore del sottostrato viscoso, il regime di tubo fluidodinamicamente liscio si verifica per $d < \delta_v$, e quindi per:

$$\frac{u^* d}{\nu} < 5.$$

A ciascun valore di scabrezza relativa corrisponde quindi un valore del numero di Reynolds oltre il quale le asperità della superficie della tubazione non sono più ricoperte dal sottostrato viscoso; in tali

per un valore della costante di von Kármán $\kappa = 0,40 \div 0,41$. Introducendo i logaritmi decimali si ha:

$$\frac{u}{u^*} = 5.75 \log \left(\frac{yu^*}{\nu} \right) + 5.5.$$

La velocità media si ottiene per integrazione del profilo di velocità:

$$\frac{U}{u^*} = \frac{Q}{u^* \Omega} = \frac{1}{u^* \Omega} \int_{\Omega} u \, d\Omega = \frac{4}{u^* \pi D^2} \int_0^{D/2} u 2\pi(D/2 - y) \, dy = \frac{8}{u^* D^2} \int_0^{D/2} u(D/2 - y) \, dy = \sqrt{\frac{8}{\lambda}}$$

avendo posto $u^*/U = (\lambda/8)^{1/2}$ per la (253). Introducendo la legge logaritmica e la trasformazione di variabile $\xi = y/D$, tale che $d\xi = dy/D$, si ha:

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = \frac{8}{D^2} \int_0^{D/2} \left[2.5 \ln \left(\frac{yu^*}{\nu} \right) + 5.5 \right] \left(\frac{D}{2} - y \right) dy = 8 \int_0^{1/2} \left[2.5 \ln \left(\frac{Du^*}{\nu} \right) + 2.5 \ln \xi + 5.5 \right] \left(\frac{1}{2} - \xi \right) d\xi$$

in cui il termine contenente il numero di Reynolds è costante e può quindi essere portato fuori da un primo integrale che si ottiene per la proprietà additiva, mentre l'integrale contenente i termini rimanenti, funzioni solo di ξ , fornisce una costante numerica. Sviluppando ulteriormente ed introducendo i logaritmi decimali si ottiene:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A \log \left(\frac{Du^*}{\nu} \right) + \text{cost} = A \log \left(\frac{DU}{\nu} \frac{u^*}{U} \right) + \text{cost} = A \log \left(\text{Re} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \right) + \text{cost} = A \log (\text{Re} \sqrt{\lambda}) + B_l,$$

che può scriversi nella stessa forma della formula di Prandtl-von Kármán ponendo $B_l = -A \log(B')$.

I valori dei coefficienti numerici che compaiono nella formula di Prandtl-von Kármán furono determinati sperimentalmente da Nikuradse da misure dell'indice di resistenza λ : $A = 2.0$, con approssimazione alla prima cifra decimale, e $B_l = -0.8$. A tale scopo, Nikuradse utilizzò, mettendoli a confronto, anche i risultati delle misure di Nusselt (1910), Stanton e Pannel (1914), Jakob e Erk (1924), Schiller e Hermann (1930). Si osservi che, alla prima cifra decimale, il valore di A coincide con il valore teorico $A = 5.75/\sqrt{8}$, mentre il valore di B_l tiene conto degli scostamenti della distribuzione di velocità effettiva rispetto alla legge logaritmica. Qualche ulteriore ragguaglio sulla relazione fra le deviazioni della distribuzione reale dalla legge logaritmica e le corrispondenti correzioni alle leggi di resistenza al moto si trova nel Marchi-Rubatta, §13.9.

condizioni, la scabrezza può esercitare un'influenza sulle resistenze al moto e la curva del tubo scabro si distacca pertanto da quella dei tubi lisci. La conformazione omogenea della scabrezza determina un distacco netto delle curve relative a tubi scabri dalla curva dei tubi lisci, per valori del numero di Reynolds ben distinti in funzione delle diverse scabrezze relative.

Il regime di moto turbolento in un tubo scabro che non ha raggiunto le condizioni di turbolenza pienamente sviluppata è detto *regime turbolento di transizione*. Mentre nei regimi di tubo liscio e assolutamente turbolento l'indice di resistenza dipende rispettivamente soltanto dal numero di Reynolds e dalla scabrezza relativa, nel regime turbolento di transizione la dipendenza è da entrambi i parametri. Il passaggio dal regime turbolento di transizione al regime di turbolenza pienamente sviluppata, rappresentato dalla curva tratteggiata riportata nel diagramma di Nikuradse, avviene per:

$$\frac{u^* d}{\nu} > 70 .$$

Per il regime assolutamente turbolento in tubi con scabrezza omogenea, Nikuradse ha stabilito che la costante della distribuzione logaritmica è proporzionale alla scabrezza:

$$y_0 = \frac{d}{30} .$$

Sulla base di tale espressione, con ragionamento analogo a quello illustrato per la derivazione dell'equazione di Prandtl-Von Kármán, si deduce l'equazione di Prandtl-Nikuradse¹¹⁷.

Inquadrato nei suoi aspetti essenziali il problema della determinazione delle resistenze al moto in tubazioni a scabrezza omogenea mediante le esperienze di Nikuradse, si pone il problema dell'estensione al caso delle tubazioni a scabrezza eterogenea, tipica dei prodotti commerciali. I risultati sperimentali ottenuti su tubazioni commerciali hanno consentito di verificare, anche per le tubazioni a scabrezza eterogenea, il verificarsi sia del comportamento di tubo fluidodinamicamente liscio che del regime di turbolenza pienamente sviluppata, mentre le forme delle curve sperimentali differiscono nel regime turbolento di transizione, ove l'indice di resistenza ha un andamento monotono decrescente. Tale differente comportamento è interpretabile considerando che, in una superficie a scabrezza eterogenea, a differenza del caso di scabrezza omogenea, le asperità emergono dal sottostrato viscoso progressivamente, a cominciare dalle più pronunciate, alle quali può corrispondere un valore di altezza anche molto maggiore di quello medio.

Come rilevato in precedenza, l'impossibilità di definire la scabrezza su base puramente geometrica ha indotto a darne una definizione legata agli effetti che essa ha sulle resistenze al moto. In particolare, l'esistenza del regime di turbolenza pienamente sviluppata ha consentito di assumere quale definizione operativa della scabrezza eterogenea il valore di scabrezza omogenea che, in condizioni di moto assolutamente turbolento, fornisce la stessa resistenza al moto (ossia, lo stesso indice di resistenza) della tubazione commerciale in esame, come mostrato nella Figura 117. Si parla perciò di *scabrezza omogenea equivalente*, correntemente identificata dal simbolo ε . Tale definizione è legata, in effetti, alla verifica, eseguita da Colebrook, della possibilità di interpretare adeguatamente i risultati sperimentali disponibili per tubazioni commerciali mediante una formula semi-empirica, priva di alcuna giustificazione teorica, ottenuta semplicemente sommando gli argomenti dei logaritmi a secondo membro delle formule di Prandtl-Von Kármán e di Prandtl-Nikuradse:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2,51}{\sqrt{\lambda} \text{Re}} + \frac{\varepsilon/D}{3,71} \right) , \quad (256)$$

detta *formula di Colebrook* o, talora, *di Colebrook-White*. Oltre che ridursi, per i casi particolari rispettivamente di regime assolutamente turbolento ($\text{Re} \rightarrow \infty$) e di tubo liscio ($\varepsilon = 0$), alle formule di

¹¹⁷ Anche in questo caso, come già per il regime di parete fluidodinamicamente liscia, la costante moltiplicativa del logaritmo assume il valore deducibile dalla teoria.

Prandtl-Nikuradse e Prandtl-Von Kármán, tale formula interpreta bene i risultati sperimentali anche nella zona del moto turbolento di transizione. È inoltre evidente che, riducendosi esattamente alla formula di Prandtl-Nikuradse per il caso di moto assolutamente turbolento, il valore di scabrezza ε che vi compare è proprio il diametro di una scabrezza omogenea che fornisce il medesimo valore del coefficiente di resistenza λ , da cui la denominazione di scabrezza omogenea equivalente per ε .

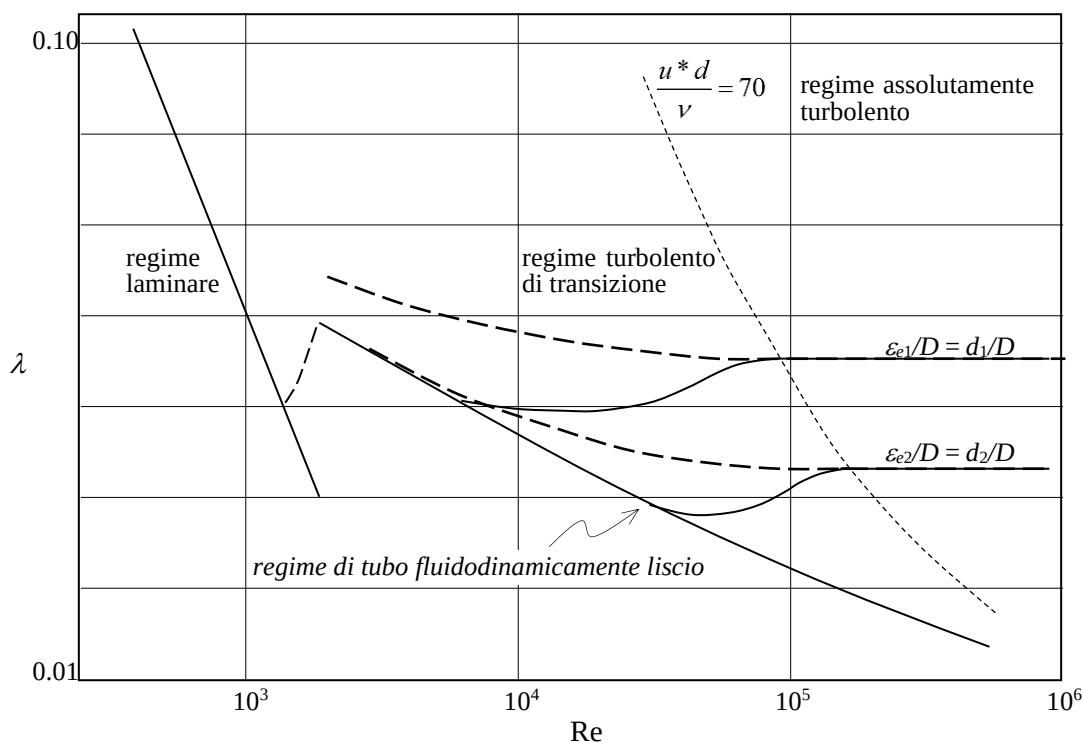


Figura 117. Schema di definizione della scabrezza omogenea equivalente.

Nell'abaco di Moody, riportato in Figura 118, sono tracciate curve rappresentative dell'indice di resistenza dedotte dalla formula di Colebrook, oltre alla curva rappresentativa del regime laminare. Il valore di scabrezza omogenea equivalente ε da attribuire a una data tubazione commerciale si determina ricercando quel valore di ε che consente di tracciare in un diagramma $\lambda-Re$, sulla base della formula di Colebrook (256), la curva che meglio si sovrappone ai punti sperimentali. Pertanto, come preannunciato, sulla base degli effetti della scabrezza (le resistenze al moto) piuttosto che su base deduttiva.

Con il corredo di tabelle che riportano i valori di scabrezza omogenea equivalente così determinati per diversi tipi di superficie interna delle tubazioni, la formula di Colebrook o l'abaco di Moody, consentono di ricavare l'indice di resistenza del tipo di tubazione prescelta corrispondente a un dato valore del numero di Reynolds e, attraverso la formula di Darcy-Weisbach, il valore della caduta dei carichi totali per assegnati valori della velocità media della corrente e del diametro della tubazione, o viceversa.

La natura implicita dell'equazione di Colebrook nel caso di tubo liscio o di regime turbolento di transizione ha dato impulso, nel passato, alla derivazione di formule semplificate di più agevole utilizzo in relazione agli strumenti di calcolo disponibili. Allo stato attuale, tuttavia, la soluzione di una equazione implicita in λ non rappresenta più un serio inconveniente, potendo essere eseguita con semplici funzioni implementate in software di uso corrente, quali i solutori automatici dei fogli elettronici. Rimandando ai testi indicati per approfondimenti per una elencazione di formule di questo tipo, si ricorda che, peraltro, il problema frequentemente non si pone nelle applicazioni usuali dell'Ingegneria Civile, nelle quali il moto è generalmente turbolento pienamente sviluppato e la

formula assume perciò carattere esplicito per essere in tal caso trascurabile il termine dipendente dal numero di Reynolds. Volendo comunque procedere alla soluzione diretta dell'equazione mediante calcolo numerico, attesa la natura implicita nell'incognita λ essa può ottenersi mediante un procedimento iterativo. Essendo l'equazione del tipo $x = f(x)$, dove $x = (1/\lambda)^{1/2}$, le iterazioni possono eseguirsi, nel modo più semplice, calcolando la successione di valori:

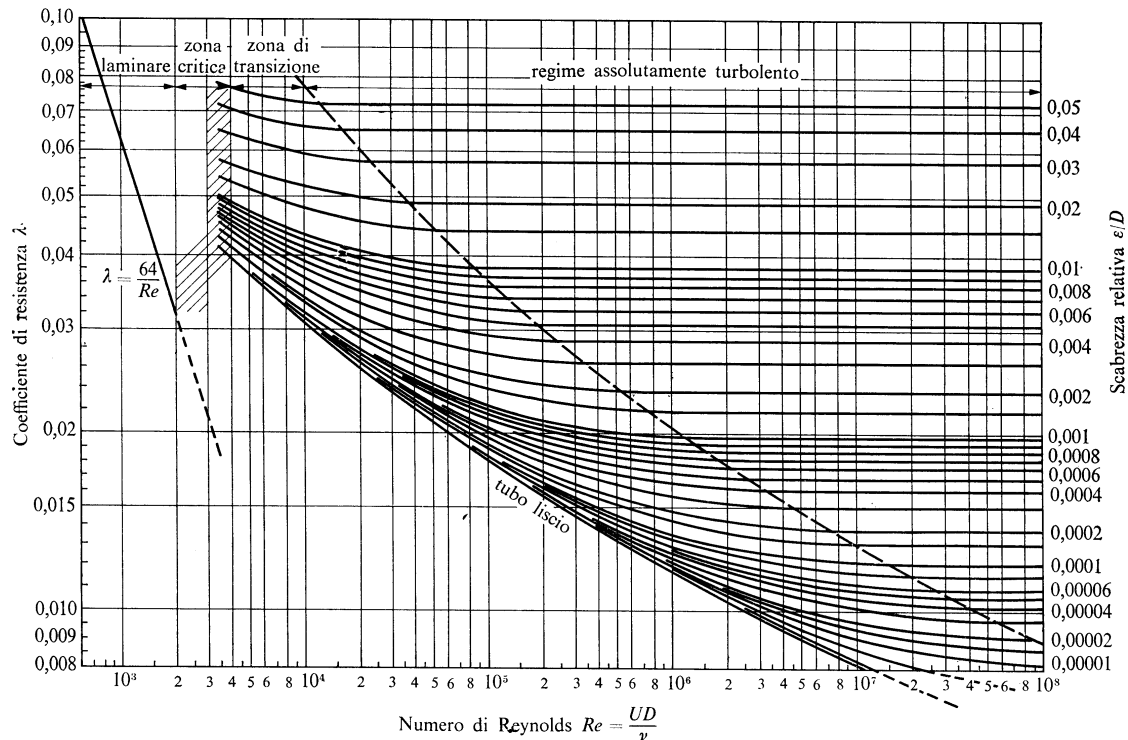


Figura 118. Abaco di Moody (fonte: Marchi-Rubatta – Meccanica dei Fluidi).

$$x_k = f(x_{k-1}) = -2 \log \left(\frac{2,51}{Re} x_{k-1} + \frac{1}{3,71} \frac{\varepsilon}{D} \right),$$

assumendo come valore iniziale $x_0 = 0$ – ossia, condizioni di moto turbolento pienamente sviluppato ($Re \rightarrow \infty$) – finché due valori successivi differiscono di una prefissata tolleranza δ , espressa, ad esempio, in termini di scarto relativo: $(x_k - x_{k-1})/x_{k-1} < \delta$ ($\delta = 0.01$ per uno scarto dell'1%). Procedure dello stesso tipo sono implementate nei, più pratici, solutori automatici dei fogli elettronici.

12.3.2 Formule pratiche

Vengono denominate formule pratiche un insieme di formule utilizzabili per il calcolo delle perdite di carico distribuite, aventi in comune, in generale, una derivazione di tipo empirico e, conseguentemente, campi di validità più limitati rispetto alla formula di Darcy-Weisbach in associazione con la formula di Colebrook o l'abaco di Moody. Del resto, la stessa formula di Darcy-Weisbach nasce come formula empirica, nella quale l'indice di resistenza assumeva forme meno generali di quella analizzata nel paragrafo precedente.

A parte una pletora di formule reperibili, oltre che su vari testi, su pubblicazioni tecniche di ditte costruttrici di tubazioni, riferite a specifici materiali e pertanto di uso non molto generale, la formula pratica di uso più comune è la *formula di Chezy*:

$$j = \frac{U^2}{\chi^2 \Re} \quad (257)$$

in cui χ (frequentemente indicato anche con il simbolo C^{118}) è il *coefficiente di Chezy*, avente dimensioni $\text{m}^{1/2}\text{s}^{-1}$, per il calcolo del quale sono in uso differenti espressioni: la *formula di Bazin*:

$$\chi = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\Re}}},$$

la *formula di Kutter*:

$$\chi = \frac{100}{1 + \frac{m}{\sqrt{\Re}}},$$

la *formula di Gauckler-Strickler*:

$$\chi = k_s \Re^{1/6}$$

e la *formula di Manning*:

$$\chi = \frac{1}{n} \Re^{1/6}$$

in cui γ , m , k_s e n rappresentano *indici* o *coefficienti di scabrezza* legati alla rugosità della superficie della tubazione, aventi dimensioni fisiche e corrispondenti unità di misura SI date rispettivamente da $\text{L}^{1/2}$ ($\text{m}^{1/2}$), $\text{L}^{1/2}$ ($\text{m}^{1/2}$), $\text{L}^{1/3}\text{T}^{-1}$ ($\text{m}^{1/3}\text{s}^{-1}$), $\text{L}^{-1/3}\text{T}$ ($\text{m}^{-1/3}\text{s}$): nessuna di esse, quindi, rappresenta una lunghezza caratteristica rappresentativa della scabrezza, al contrario della scabrezza omogenea equivalente ε . I coefficienti 87 e 100 delle formule di Bazin e Kutter non sono dei numeri puri; hanno invece le medesime dimensioni fisiche del coefficiente di Chezy: $\text{m}^{1/2}\text{s}^{-1}$.

Un'importante differenza concettuale fra la formula di Chezy corredata di una qualunque delle formule elencate per il coefficiente di scabrezza e la formula di Darcy-Weisbach corredata della formula di Colebrook per l'indice di resistenza consiste nel fatto che, nella prima, non compare il numero di Reynolds. Sulla scorta di quanto illustrato nel § 12.3.1 in sede di descrizione dei vari tipi di moto turbolento, ciò significa che *la formula di Chezy ha validità limitata al moto turbolento completamente sviluppato*, la qual cosa ben si giustifica col fatto che tali erano le condizioni nelle quali vennero condotti gli esperimenti in canali a pelo libero che, nel XVIII secolo, portarono alla sua formulazione.

Confrontando le formule di Darcy-Weisbach e di Chezy è possibile stabilire un legame fra numero indice di resistenza e coefficiente di Chezy:

$$\chi = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$$

ed estendere così la validità della formula di Chezy all'intero regime turbolento e al regime laminare.

Un'osservazione importante dal punto di vista pratico è che ε , γ , m , n sono tutti parametri crescenti all'aumentare della scabrezza della parete interna del tubo, mentre $k_s = 1/n$ varia in senso inverso. Va anche osservato come l'uso delle formule di Gauckler-Strickler o Manning conduca a forme monomie dell'equazione di Chezy – per esempio, per una sezione circolare:

$$j = \frac{U^2}{k_s^2 \Re^{4/3}} = \frac{4^{4/3} U^2}{k_s^2 D^{4/3}},$$

¹¹⁸ In alcuni testi il simbolo C è invece riservato al parametro dimensionale $\chi/g^{1/2}$.

$$j = \frac{4^{10/3}}{\pi^2 k_s^2} \frac{Q^2}{D^{16/3}} \quad .$$

Tabella 6. coefficienti di scabrezza per le condotte.

Fra le formule pratiche, citiamo infine la formula di Darcy:

utilizzata prevalentemente per tubazioni in ghisa o acciaio di diametro inferiore a 500 mm, assumendo $\beta = 0,00164 + 0,000042/D$ per tubi nuovi e coefficienti raddoppiati per tubi vecchi.

12.4 Perdite distribuite nel moto stazionario non uniforme

Nel caso di moto stazionario non uniforme di una corrente gradualmente variata possono assumersi ancora valide, in via approssimata, le formule stabilite per il moto uniforme. Tuttavia, mentre in un tratto di tubazione sede di moto uniforme compreso fra sezioni a e b distanti L_{ab} , essendo costanti la portata e il diametro della sezione, quindi anche l'area della sezione liquida e la velocità media della corrente, la soluzione dell'equazione differenziale:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\lambda \frac{U^2}{2gD} \quad (258)$$

si presenta particolarmente semplice per la costanza della cadente, potendosi in tal caso scrivere:

$$H_b - H_a = -\int_a^b \lambda \frac{U^2}{2gD} ds = -\lambda \frac{U^2}{2gD} L_{ab} ,$$

nel caso di moto non uniforme la perdita di carico nel tratto deve necessariamente essere determinata risolvendo un integrale. A tale scopo, converrà avvalersi dell'equazione di continuità nella forma $Q = U\Omega = \text{cost}$, rendendo in tal modo, almeno per il caso di moto assolutamente turbolento in cui λ non dipende dal numero di Reynolds, la funzione integranda dipendente solo da parametri geometrici di cui è noto l'andamento in funzione dell'ascissa s :

$$H_b - H_a = -\int_a^b \lambda \frac{Q^2}{2gD\Omega^2} ds = -\frac{8Q^2}{g\pi^2} \int_a^b \frac{\lambda(\varepsilon/D)}{D^5} ds .$$

12.5 Perdite di carico localizzate

Secondo quanto già più volte richiamato, nei tratti nei quali la corrente non può considerarsi gradualmente variata essa non può essere studiata mediante un'equazione differenziale del tipo (258), giacché non è definibile una linea piezometrica della corrente né, quindi, una linea dei carichi totali. Il moto, eventualmente comprendente fenomeni di distacco con relative elevate dissipazioni di energia, deve in tal caso essere studiato mediante l'equazione globale del moto. Tipicamente, per un tratto di questo tipo, generalmente di sviluppo limitato, interposto fra due tratti sedi di correnti gradualmente variate, ciò che interessa in pratica è determinare la variazione del carico totale fra le due sezioni regolari poste alle estremità del tratto, espresse come frazione dell'altezza cinetica della corrente a valle dello stesso, nella forma:

$$\Delta H = H_m - H_v = \eta \frac{U_v^2}{2g} ,$$

in cui i pedici m e v si riferiscono alle sezioni a monte e a valle del tratto considerato.

Nonostante, per quanto detto, in tali tratti della corrente non abbia senso, a rigore, il tracciamento delle linee piezometrica e dei carichi totali, ciò si suole tuttavia fare, convenzionalmente, nella rappresentazione grafica, avendo però chiara in mente la differenza sostanziale con le correnti gradualmente variate, che sono le sole per le quali le due curve possono essere, a rigore, definite e tracciate.

Richiamando una definizione introdotta nel § 11.4, essendo tali tratti generalmente di sviluppo limitato, le relative perdite di carico vengono dette localizzate. Nelle rappresentazioni del profilo longitudinale di una condotta a scale distorte, tali zone possono essere anche rappresentate, in pratica, come discontinuità delle linee dei carichi totali e piezometrica.

12.5.1 Perdita di Borda o per brusco allargamento. Perdita di sbocco.

Una classe importante di perdite di carico localizzate è quella in cui le perdite sono determinate da una decelerazione della corrente, che, nel caso di un fluido incomprimibile, isoterma e omogeneo in

moto stazionario, al quale verrà fatto esclusivo riferimento, è associata a un aumento della sezione liquida nel senso del moto, la portata essendo costante lungo l'asse della corrente, eq (232).

Un caso rilevante sia in sé, ai fini applicativi, che per il fatto che, nei vari tipi di perdite localizzate ascrivibili a tale classe, tutta o parte della perdita è legata a un fenomeno di questo tipo, è quello che si determina per un brusco allargamento della corrente. In particolare, si consideri il brusco allargamento di una corrente in moto stazionario determinato da un cambio di diametro, non raccordato, di due tubazioni a sezione circolare, rappresentato in Figura 119. Per effetto del brusco aumento della sezione della tubazione, la corrente proveniente dal tronco a sezione minore Ω_1 si immette nel tronco a sezione maggiore Ω_2 formando un getto, con conseguente distacco della vena dalle pareti della tubazione e creazione di una zona di ricircolazione fra il getto e le pareti della tubazione caratterizzata da intensa turbolenza, come rappresentato nel particolare della Figura 119.

Il fenomeno si studia proiettando lungo l'asse della tubazione, nel verso del moto, l'equazione globale del moto nella forma (220) applicata al volume di controllo cilindrico di sezione Ω_2 e sviluppo in asse L , compreso fra la sezione di valle del tronco a sezione Ω_1 , ove la corrente è ancora in moto uniforme e la sezione della condotta varia bruscamente, e la sezione a valle della zona di ricircolazione, ove la corrente, successivamente al riattacco alle pareti della tubazione, riacquista le caratteristiche del moto uniforme:

$$(\vec{I} + \vec{M}) \cdot \vec{i}_s = (\vec{G} + \vec{\Pi}_p + \vec{\Pi}_\mu + \vec{\Pi}_R) \cdot \vec{i}_s ,$$

nella quale, a eccezione di $\vec{\Pi}_R$, tutti i termini sono relativi alle quantità medie del moto turbolento e $\vec{i}_s$ è il versore avente direzione e verso dei moti uniformi esterni al volume.

Essendo il moto stazionario, risulta nullo il termine di inerzia locale, $\vec{I}$. Il flusso di quantità di moto attraverso la superficie di contorno del volume di controllo S_c risulta dai contributi delle sole due sezioni di estremità, Ω_1 e Ω_2 , poiché la parte rimanente della superficie di contorno è costituita dalle pareti della tubazione, attraverso le quali il flusso è nullo.

Essendo velocità e normale paralleli e discordi nella sezione 1 ($\vec{u} \cdot \vec{n} = -u$) e paralleli e concordi nella sezione 2 ($\vec{u} \cdot \vec{n} = u$), mentre le velocità sono concordi con il versore dell'asse, si ha:

$$\vec{i}_s \cdot \vec{M} = M_1 + M_2 = \vec{i}_s \cdot \int_{\Omega_1} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS + \vec{i}_s \cdot \int_{\Omega_2} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = - \int_{\Omega_1} \rho u^2 dS + \int_{\Omega_2} \rho u^2 dS .$$

Analogamente a quanto fatto nel §11.3 per la valutazione della componente cinetica della potenza di una corrente in una sezione, gli integrali esprimono il flusso di quantità di moto nelle sezioni regolari si esprimono in funzione delle grandezze medie nella forma:

$$M_1 = - \int_{\Omega_1} \rho u^2 dS = -\beta \rho U_1^2 \Omega_1 ,$$

e analogamente per la sezione 2, introducendo il *coefficiente di ragguaglio del flusso di quantità di moto*, o *secondo coefficiente di Coriolis*, dato, in generale, da:

$$\beta = \frac{\int u^2 dS}{U^2 \Omega} .$$

Come già per il coefficiente di ragguaglio delle potenze cinetiche α , nel caso di moto turbolento, per effetto dello schiacciamento del profilo di velocità, può assumersi anche $\beta = 1$ a meno di errori pari a poche unità percentuali.

Ripetendo le medesime argomentazioni utilizzate nel § 12.2, considerando il triangolo rettangolo ABC avente ipotenusa AB di lunghezza L e cateti orizzontale AC e verticale BC, la componente assiale della forza peso si può esprimere nel modo seguente:

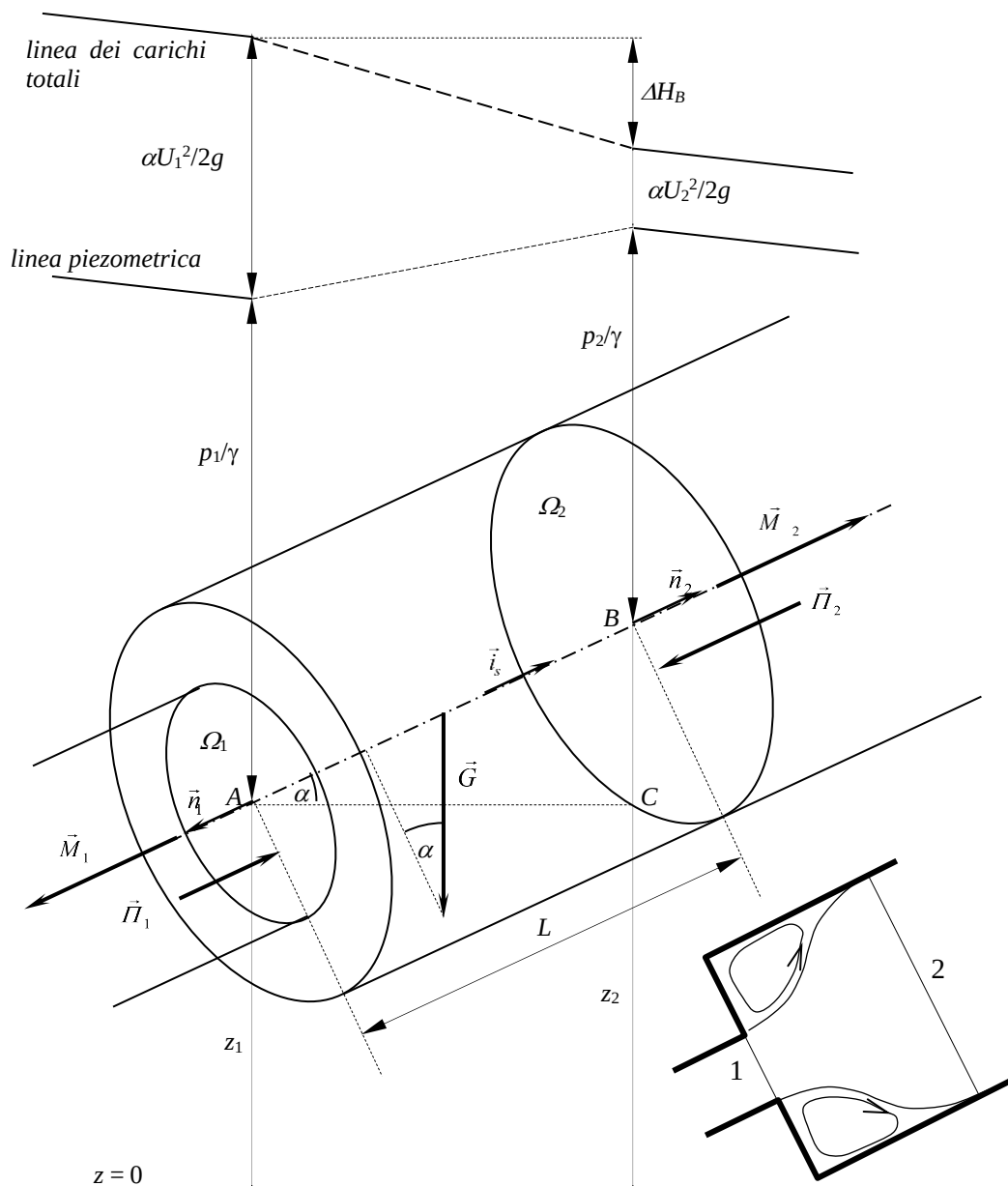


Figura 119. Schema di riferimento per la deduzione dell'espressione della perdita di carico per brusco allargamento (o di Borda).

$$\vec{i}_s \cdot \vec{G} = G_s = -|\vec{G}| \sin \alpha = -\gamma \Omega_2 L \sin \alpha = -\gamma \Omega_2 (z_2 - z_1).$$

Nella valutazione della componente assiale delle forze di pressione $\vec{\Pi}_p$, la superficie laterale cilindrica del volume di controllo offre un contributo nullo essendo il relativo risultante ortogonale all'asse. Per quanto riguarda le sezioni di estremità, va intanto osservato che la superficie da considerare nella sezione 1 è la superficie circolare Ω_1' di area pari a Ω_2 , parte della quale – la superficie di area Ω_1 – è attraversata dalla corrente, mentre la rimanente corona circolare di area $\Omega_2 - \Omega_1$ è a contatto con la parete della tubazione. Inoltre – fatto tutt'altro che scontato in una superficie così composta – la distribuzione della pressione su di essa è sensibilmente idrostatica, con valore della quota piezometrica pari a quella nella tubazione di sezione Ω_1 . La distribuzione di pressione è invece senz'altro idrostatica nella sezione 2, essendo essa una sezione regolare, in quanto sede di moto uniforme. Operando come nel § 11.3, utilizzando le formule per il calcolo delle spinte

idrostatiche su superfici piane, la componente assiale del risultante delle forze di pressione può quindi scriversi:

$$\vec{i}_s \cdot \vec{\Pi}_p = \vec{i}_s \cdot \int_{\Omega_1'} -p\vec{n} dS + \vec{i}_s \cdot \int_{\Omega_2} -p\vec{n} dS = p_{G1}\Omega_2 - p_{G2}\Omega_2.$$

La proiezione lungo l'asse del risultante delle forze viscosi:

$$\vec{\Pi}_\mu = \int_{S_c} \mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} dS$$

può ritenersi trascurabile nei suoi vari contributi: sulle sezioni regolari Ω_1 e Ω_2 per le considerazioni espone al § 11.1, essendo esse sedi di moto uniforme; nella corona circolare di area $\Omega_2 - \Omega_1$ perché la direzione delle velocità si mantiene tangente alla parete ancora a una distanza finita da questa; sulla superficie cilindrica laterale, infine, a causa del limitato sviluppo della stessa.

I contributi al risultante degli sforzi turbolenti risultano infine nulli alle pareti della tubazione per la condizione di aderenza e trascurabili sulle sezioni regolari Ω_1 e Ω_2 .

Raccogliendo i termini residui dell'equazione globale proiettata si scrive quindi:

$$-\rho U_1^2 \Omega_1 + \rho U_2^2 \Omega_2 = -\gamma \Omega_2 (z_2 - z_1) + p_{G1} \Omega_2 - p_{G2} \Omega_2.$$

Utilizzando l'equazione di continuità (233) per ottenere:

$$U_1 = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} U_2,$$

dividendo membro a membro per $\gamma \Omega_2$ e riordinando si perviene all'espressione:

$$\left(z_1 + \frac{p_{G1}}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_{G2}}{\gamma} \right) = h_1 - h_2 = \left(1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) \frac{U_2^2}{g},$$

da cui, essendo $\Omega_1 < \Omega_2$, si conclude che il valore della quota piezometrica a valle del brusco allargamento è maggiore del valore a monte.

Essendo $H = z + p/\gamma + \alpha U^2/2g = h + \alpha U^2/2g$, assumendo, come d'uso, $\alpha = 1$ e utilizzando ancora l'equazione di continuità, la perdita di carico per brusco allargamento, nota anche sotto il nome di *perdita di Borda*¹¹⁹, è data da:

$$\begin{aligned} \Delta H_B = H_1 - H_2 &= \left(z_1 + \frac{p_{G1}}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_{G2}}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} \right) = \left(1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) \frac{U_2^2}{g} + \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_2^2}{2g} = \\ &= \left(2 - 2 \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) \frac{U_2^2}{2g} + \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2} \frac{U_2^2}{2g} - \frac{U_2^2}{2g} = \left(1 + \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2} - 2 \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) \frac{U_2^2}{2g} = \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{U_2^2}{2g} = \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g} \end{aligned} \quad (259)$$

Sulla base dell'ultima espressione, la perdita per brusco allargamento è nulla se $\Omega_1 = \Omega_2$, mentre è pari all'intera altezza cinetica della corrente nella sezione Ω_1 se $\Omega_1 \ll \Omega_2$. Quest'ultimo è il caso che si verifica quando una corrente sbocca in un serbatoio, all'interno del quale l'energia cinetica della corrente viene progressivamente dissipata (vedi Figura 120); si parla allora di *perdita di sbocco*.

¹¹⁹ nome di un idraulico francese del XIX secolo, da pronunciare quindi con l'accento sulla "a"!

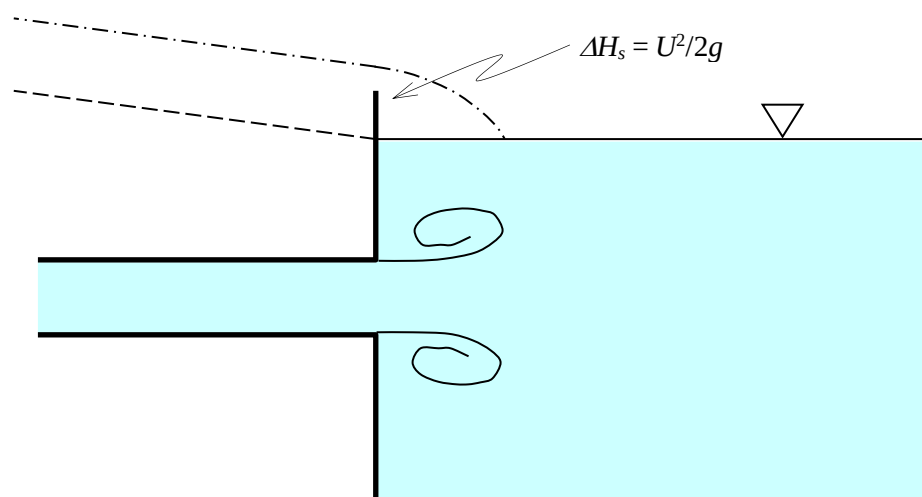


Figura 120. Perdita di sbocco.

12.5.2 Perdita per brusco restringimento

In corrispondenza di un brusco restringimento di sezione (Figura 121), a valle del cambio di diametro si verifica un distacco di vena, con una contrazione di entità dipendente dal rapporto dei due diametri. Conseguentemente si produce una perdita localizzata dovuta prevalentemente al successivo brusco allargamento che la vena subisce a valle della sezione contratta e su questa base valutabile approssimativamente mediante la formula della perdita di Borda.

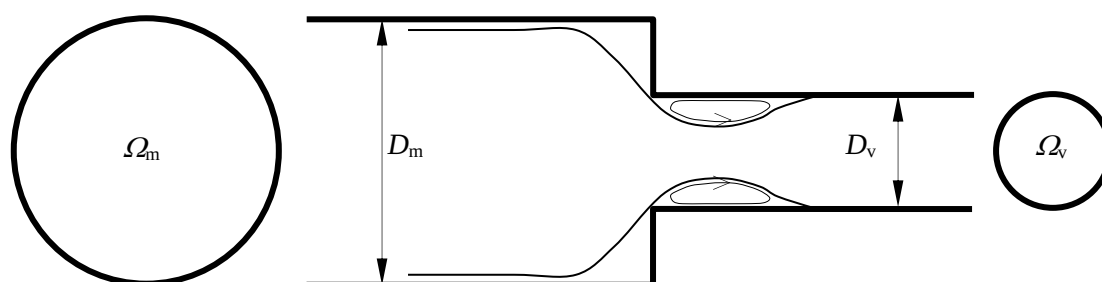


Figura 121. Brusco restringimento.

In termini più precisi, per tenere conto dei fenomeni dissipativi che hanno luogo a monte della sezione contratta, la perdita di carico per brusco restringimento può valutarsi come frazione dell'altezza cinetica della corrente a valle:

$$\Delta H = \eta_r \frac{U_v^2}{2g}, \quad (260)$$

in cui η_r è un coefficiente dipendente dal rapporto dei diametri, desumibile dalla Tabella 7 (v. Manuale di Ingegneria Civile Cremonese, edizione 1981, Parte Prima, pag. 208).

Tabella 7. Coefficienti della formula per le perdite localizzate per brusco restringimento.

Ω_v/Ω_m	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0
C_c	0,624	0,632	0,643	0,659	0,681	0,712	0,813	1,0
η_r	0,47	0,44	0,40	0,35	0,28	0,21	0,10	0

12.5.3 Perdita di imbocco

All'imbocco di una condotta da un serbatoio si verifica una perdita localizzata composta di una parte di origine viscosa e, se si verifica un distacco della vena liquida, di una parte relativa al brusco allargamento che la vena subisce fra la sezione ove si ha la massima contrazione (*sezione contratta*) e la sezione in cui la vena occupa nuovamente l'intera condotta. L'entità della contrazione dipende dalla variazione della direzione delle traiettorie delle particelle prossime alla parete del serbatoio. A seconda della conformazione dell'imbocco della condotta, si considerano tre casi notevoli, illustrati di seguito.

12.5.3.1 Imbocco a spigolo vivo (non raccordato), deviazione di 90° (Figura 122)

Le perdite viscose possono essere valutate come perdita di energia cinetica calcolabile sulla base della correzione del valore della velocità nella sezione contratta deducibile nell'ipotesi di fluido ideale (*velocità torricelliana*), effettuata mediante il coefficiente di velocità $C_v \cong 0,98$:

$$\Delta H_1 = (1 - C_v^2) \frac{U_c^2}{2g} = (1 - C_v^2) \frac{(Q / \Omega_c)^2}{2g} = (1 - C_v^2) \frac{(\Omega U / \Omega_c)^2}{2g} = \frac{1 - C_v^2}{C_c^2} \frac{U^2}{2g}$$

avendo indicato con $C_c = \Omega_c / \Omega$ il *coefficiente di contrazione* che, per deviazione di 90° delle traiettorie, vale $C_c \cong 0,61$. Sostituendo i valori numerici si ha:

$$\Delta H_1 = \frac{1 - (0,98)^2}{(0,61)^2} \frac{U^2}{2g} = 0,106 \frac{U^2}{2g} \cong 0,1 \frac{U^2}{2g} .$$

La perdita dovuta al brusco allargamento è data da:

$$\Delta H_2 = \left(\frac{\Omega}{\Omega_c} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2g} = \left(\frac{1}{C_c} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2g} = \left(\frac{1}{0,61} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2g} = 0,409 \frac{U^2}{2g} \cong 0,4 \frac{U^2}{2g}$$

Complessivamente si ha pertanto una perdita di imbocco pari a:

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 \cong 0,5 \frac{U^2}{2g} . \quad (261)$$

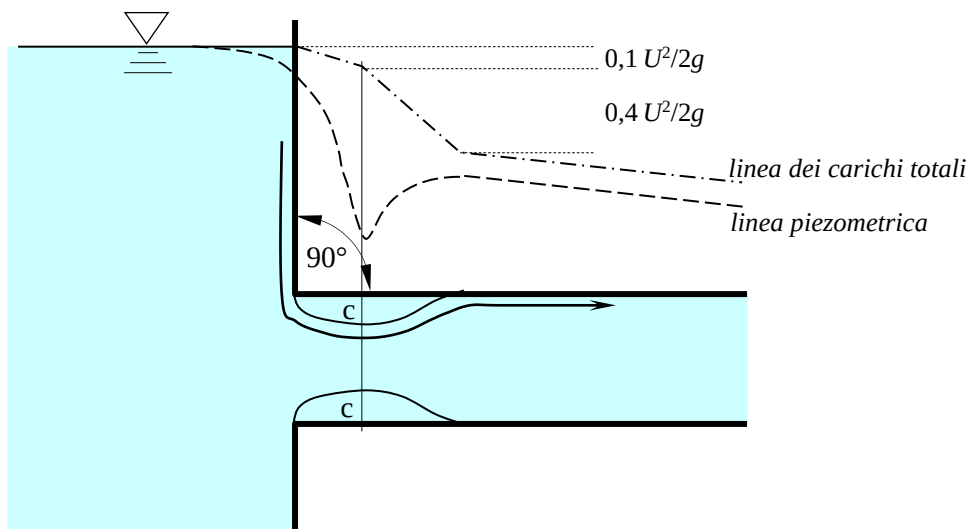


Figura 122. Imbocco a spigolo vivo.

Come si può vedere dalla Tabella 7, tale risultato costituisce il caso limite di perdita per brusco restringimento per $\Omega_v/\Omega_m \ll 1$.

12.5.3.2 Imbocco con tubo addizionale interno, deviazione di 180° (Figura 123)

Il coefficiente di contrazione vale, in questo caso, $C_c = 0,5$. Sostituendo tale valore nelle espressioni precedentemente ottenute per le perdite viscose e per brusco allargamento, si ottiene:

$$\begin{aligned}\Delta H_1 &= \frac{1 - C_v^2}{C_c^2} \frac{U^2}{2g} = \frac{1 - (0,98)^2}{(0,5)^2} \frac{U^2}{2g} = 0,158 \frac{U^2}{2g}, \\ \Delta H_2 &= \left(\frac{1}{C_c} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2g} = \left(\frac{1}{0,5} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2g} = 1,00 \frac{U^2}{2g} \\ \Delta H &= \Delta H_1 + \Delta H_2 \cong 1,16 \frac{U^2}{2g}.\end{aligned}\quad (262)$$

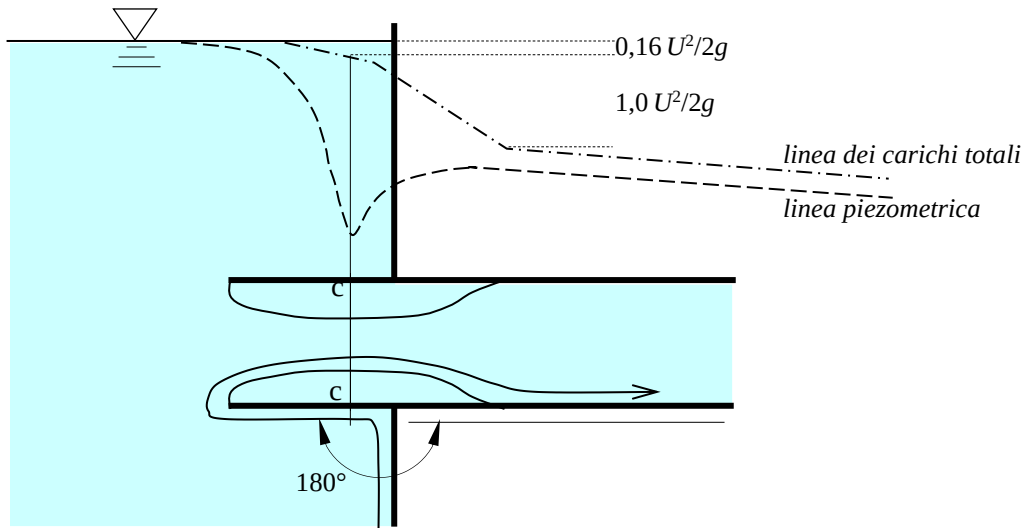


Figura 123. Imbocco con tubo addizionale interno.

12.5.3.3 Imbocco ben raccordato (Figura 124)

Raccordando adeguatamente la condotta alle pareti del serbatoio, le perdite di imbocco possono essere ridotte a un valore minimo:

$$\Delta H = 0,05 \div 0,10 \frac{U^2}{2g}.\quad (263)$$

12.5.4 Perdite in tronchi divergenti

Le perdite in tronchi divergenti (vedi Figura 125) vengono espresse in forma simile alle perdite di brusco allargamento (Gibson):

$$\Delta H = K_g \frac{(U_m - U_v)^2}{2g} = K_g \left(\frac{\Omega_v}{\Omega_m} - 1 \right)^2 \frac{U_v^2}{2g},\quad (264)$$

in cui il coefficiente K_g dipende dal valore dell'angolo di apertura del divergente, θ , e dal rapporto delle aree delle sezioni, come illustrato nella Tabella 8 (Marchi-Rubatta – Meccanica dei Fluidi, edizione 1981, p. 452).

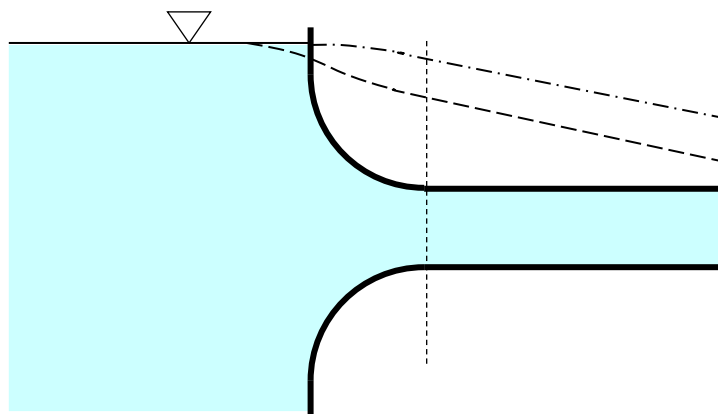


Figura 124. Imbocco ben raccordato.

Tabella 8. Coefficienti della formula di Gibson per perdite localizzate in divergenti.

ϑ	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	120°	180°	Ω_m/Ω_v
K_ϑ	0,20	0,40	0,70	0,95	1,10	1,20	1,20	1,16	1,12	1,05	1,00	1/2
			0,65	0,80	0,95	1,00	1,05	1,05	1,05	1,05	1,00	1/10

Come si può vedere dalla Tabella 8, per fissati valori delle aree delle sezioni il coefficiente K_ϑ ha un massimo di valore maggiore dell'unità. Il motivo di ciò risiede nel fatto che le formule di Gibson esprimono le perdite di carico che si misurano *complessivamente* nel divergente; esse contengono perciò, oltre alle perdite dovute alla turbolenza associata al distacco della vena liquida, le perdite distribuite dovute alla resistenza della parete del tubo. Queste ultime, evidentemente, per fissati valori delle aree delle sezioni, diminuiscono all'aumentare dell'angolo di apertura, poiché in tal modo diminuisce lo sviluppo in asse del divergente. Viceversa, al tendere a zero dell'angolo di apertura, le perdite complessive aumentano indefinitamente per il fatto che, pur tendendo a zero le perdite per distacco di vena, lo sviluppo dell'elemento cresce indefinitamente. Il valore minimo del coefficiente K_ϑ si ha per $\vartheta = 6^\circ \div 7^\circ$ e vale 0,13.

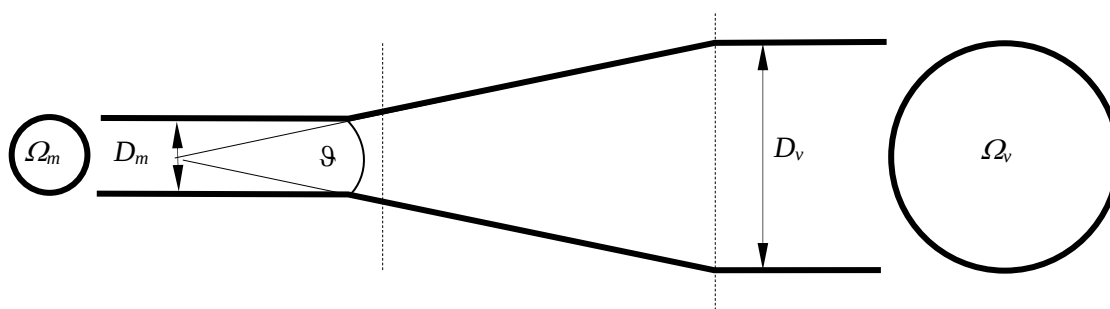


Figura 125. Condotta divergente.

12.5.5 Perdite nelle curve

Le perdite localizzate nelle curve sono proporzionali all'altezza cinetica della corrente, secondo un coefficiente di proporzionalità dipendente dall'angolo di deviazione, ω , e dal rapporto fra il raggio di curvatura dell'asse della condotta e il diametro del tubo (Figura 126):

$$\Delta H = \eta_c \frac{U^2}{2g} \quad ; \quad \eta_c = \eta_c(\omega, r/D, Re). \quad (265)$$

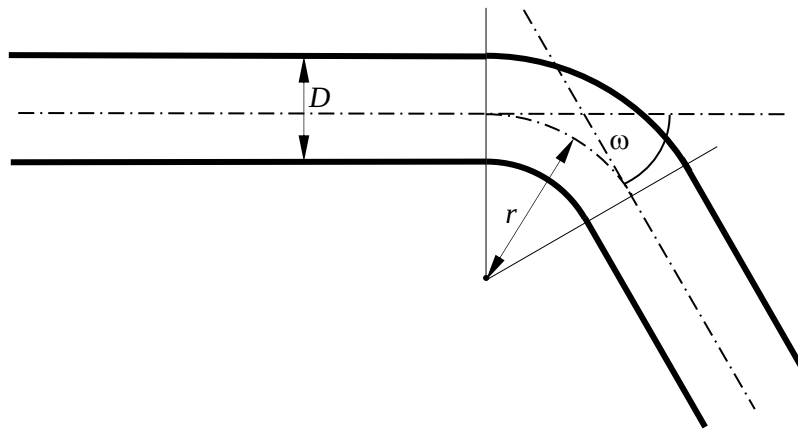


Figura 126. Curva di una tubazione.

Nei manuali il lettore può trovare una serie di espressioni di perdite di carico localizzate di varia natura (gomiti, giunzioni, valvole di vario tipo, saracinesche, etc..) di cui in questa sede si omette una descrizione particolareggiata.

12.6 Progetto e verifica delle condotte in pressione

Con le espressioni illustrate in precedenza per il calcolo delle perdite di carico distribuite e localizzate, è ora possibile analizzare il funzionamento di una condotta in pressione convogliante un liquido ($\rho = \text{cost}$), allo scopo di eseguire operazioni sia di progetto che di verifica.

In termini generali, entrambe le operazioni richiedono di esprimere che la somma delle perdite di carico distribuite e localizzate che hanno luogo nelle varie parti della condotta sia pari alla differenza dei carichi totali fra gli estremi di monte e di valle, soggetti a idonee condizioni al contorno. Ai fini del calcolo delle perdite di carico distribuite, verrà utilizzata la formula di Darcy-Weisbach (251) congiuntamente alla formula di Colebrook o all'abaco di Moody per la determinazione dell'indice di resistenza λ , o la formula di Chezy (257) congiuntamente a una delle espressioni illustrate nel § 12.3.2 per il coefficiente χ . Inoltre, verrà fatto uso dell'equazione di continuità per le correnti (232), la quale stabilisce che la portata liquida debba mantenersi costante lungo l'asse della condotta:

$$Q = U\Omega = \text{cost} .$$

Come già osservato nel §12.4, il calcolo delle perdite di carico distribuite in un tratto generico di tubazione sede di moto uniforme compreso fra sezioni a e b distanti L_{ab} si presenta particolarmente semplice, essendo costanti lungo ciascuno di essi sia la portata che il diametro, quindi anche l'area della sezione e la velocità media, e perciò anche la cadente, potendosi in tal caso scrivere:

$$H_b - H_a = - \int_a^b \lambda \frac{U^2}{2gD} ds = \lambda \frac{U^2}{2gD} L_{ab} .$$

Ovviamente, a una conclusione analoga si perverrebbe utilizzando la formula di Chezy.

A titolo esemplificativo, si mostra come determinare la portata che fluisce in condizioni stazionarie nella condotta di Figura 127, della quale siano noti tutti i dati geometrici (lunghezze, diametri e scabrezze dei tre tratti e quota dell'asse, diametro dell'ugello del convergente, livello del liquido nel serbatoio, coefficiente di contrazione allo sbocco in aria), oltre al peso specifico del liquido convogliato (problema di verifica). Sebbene nello schema di Figura 127 siano stati indicati, per chiarezza concettuale, sviluppi dei tratti sede di perdite distribuite che escludono le zone sede di perdite localizzate, considerato il limitato sviluppo di queste ultime è di norma lecito utilizzare nel calcolo delle perdite distribuite le intere lunghezze delle tubazioni, commettendo comunque un errore

a favore della sicurezza in quanto le perdite di carico vengono in tal modo sovrastimate.

Le perdite di carico distribuite e localizzate che intervengono fra l'interno del serbatoio A e la sezione contratta C a valle del convergente (*sezione di controllo*) sono, nell'ordine (v. Figura 127):

$H_A - H_{1'} = 0,5 \frac{U_1^2}{2g}$	perdita di imbocco;
$H_{1'} - H_{1''} = \int_{1'}^{1''} \lambda_1 \frac{U_1^2}{2gD_1} ds = \lambda_1 \frac{U_1^2}{2gD_1} L_1$	perdita distribuita nel tratto 1;
$H_{1''} - H_{2'} = \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{U_2^2}{2g}$	perdita per brusco allargamento;
$H_{2'} - H_{2''} = \int_{2'}^{2''} \lambda_2 \frac{U_2^2}{2gD_2} ds = \lambda_2 \frac{U_2^2}{2gD_2} L_2$	perdita distribuita nel tratto 2;
$H_{2''} - H_{3'} = \eta_r \frac{U_3^2}{2g}, \quad \eta_r = \eta_r(\Omega_3/\Omega_2)$	perdita per brusco restringimento;
$H_{3'} - H_{3''} = \int_{3'}^{3''} \lambda_3 \frac{U_3^2}{2gD_3} ds = \lambda_3 \frac{U_3^2}{2gD_3} L_3$	perdita distribuita nel tratto 3;
$H_{3''} - H_c \cong 0$	percorso in aria a valle convergente.

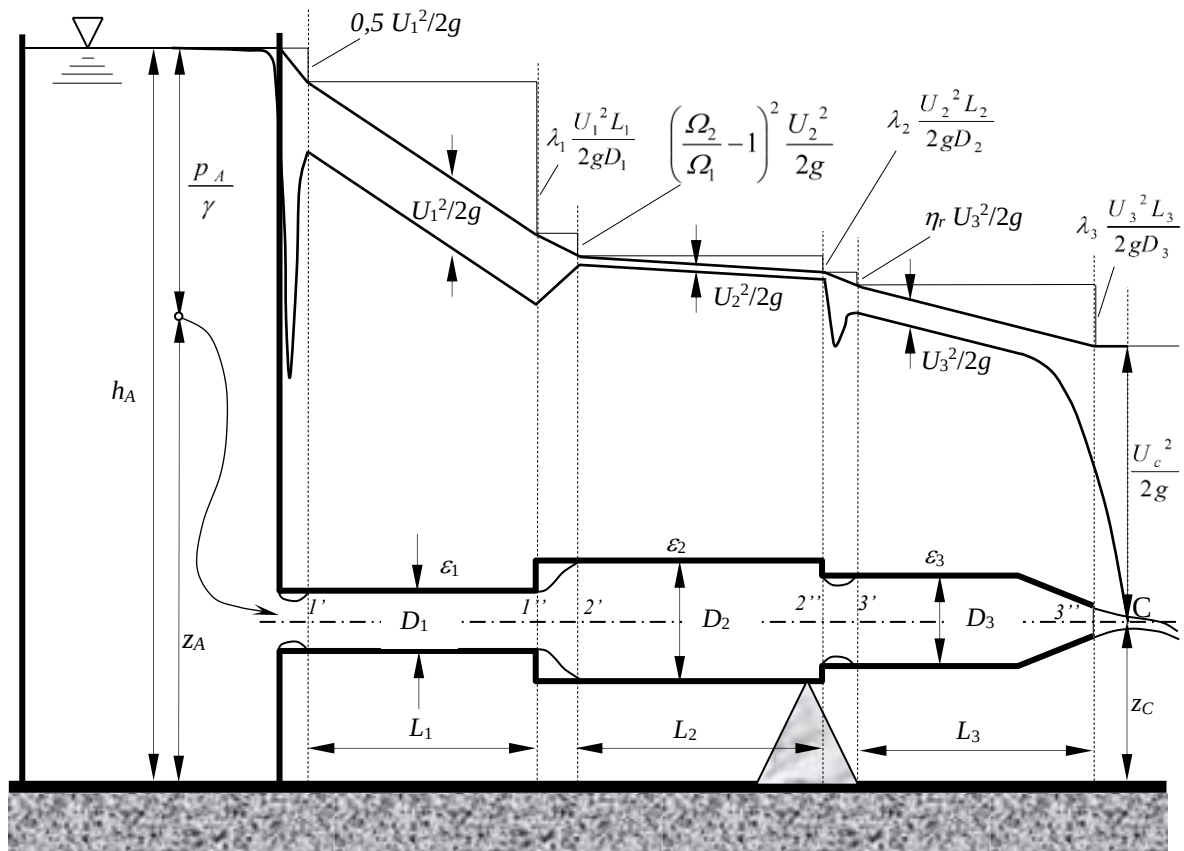


Figura 127. Esempio di condotta in pressione con sbocco in aria.

Si osservi che, essendo incognita la portata, non è noto il valore del numero di Reynolds e non si è perciò in grado di assegnare un valore definitivo agli indici di resistenza $\lambda = \lambda(Re, \varepsilon/D)$. Il calcolo dovrà quindi essere eseguito iterativamente, assumendo valori di λ di primo tentativo per i vari tratti, scelti negli intervalli definiti dalle curve dell'abaco di Moody corrispondenti ai valori di scabrezza relativa, ε/D , calcolati per ciascun tratto. In particolare, λ può essere calcolato sotto l'ipotesi di moto assolutamente turbolento ($Re \rightarrow \infty$); il tal caso il termine $2,51/(\lambda^{1/2} Re)$ nella formula di Colebrook tende a zero e la formula si riduce alla formula di Prandtl-Nikuradse (255) con $d = \varepsilon$, nella quale $\lambda = \lambda(\varepsilon/D)$ è funzione esplicita della sola scabrezza relativa.

A rigore, avendo il convergente sezione variabile, la relativa perdita distribuita avrebbe dovuto valutarsi, come indicato al §12.4, mediante un integrale, utilizzando peraltro formule stabilite per il moto uniforme. Tuttavia, assumendo, come è normale, uno sviluppo del convergente ridotto rispetto al terzo tronco a monte di esso, la valutazione delle relative perdite distribuite può effettuarsi, in via speditiva, considerando una lunghezza L_3 comprensiva della lunghezza del convergente, così come è stato fatto nell'esempio in questione.

Sommando membro a membro le espressioni delle perdite di carico nei vari tratti, si ottiene l'equazione algebrica esprimente l'insieme delle perdite di energia della corrente, detta *equazione caratteristica della condotta*, costituente l'espressione del teorema di Bernoulli generalizzato:

$$H_A - H_c = 0,5 \frac{U_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{U_1^2}{2gD_1} L_1 + \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{U_2^2}{2g} + \lambda_2 \frac{U_2^2}{2gD_2} L_2 + \eta_r \frac{U_3^2}{2g} + \lambda_3 \frac{U_3^2}{2gD_3} L_3$$

in cui:

$$H_A = z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{U_A^2}{2g} \cong z_A + \frac{p_A}{\gamma} = h_A$$

$$H_c = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{U_c^2}{2g} \cong z_c + \frac{U_c^2}{2g} ,$$

avendo considerato tutte le particelle fluide costituenti la corrente come provenienti da punti del serbatoio A abbastanza lontani dall'imbocco della condotta per poterne trascurare l'altezza cinetica. Detti punti si trovano pertanto all'interno di un campo di pressioni idrostatico, in cui la quota piezometrica si mantiene costante e pari alla quota della superficie libera del liquido contenuto nel serbatoio, costituente la materializzazione del relativo piano dei carichi idrostatici.

Nella sezione contratta a valle del convergente si hanno ovunque condizioni di pressione nulla. Si badi che tale sezione *non* è una sezione regolare. Si può infatti mostrare facilmente che una distribuzione di pressione uniforme su una sezione verticale, quale è la sezione c, deriva dall'avere tutte le traiettorie passanti per tale sezione curvatura non trascurabile, causata dalla accelerazione di gravità cui le particelle sono sottoposte, muovendosi, da tale sezione in poi, come un grave in aria.

Sostituendo le espressioni dei carichi totali agli estremi della corrente nella equazione generale delle perdite di carico, si ha:

$$h_A - z_c = \frac{U_c^2}{2g} + 0,5 \frac{U_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{U_1^2}{2gD_1} L_1 + \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{U_2^2}{2g} + \lambda_2 \frac{U_2^2}{2gD_2} L_2 + \eta_r \frac{U_3^2}{2g} + \lambda_3 \frac{U_3^2}{2gD_3} L_3 .$$

Utilizzando l'equazione di continuità nella forma $U\Omega = Q = \text{cost}$, l'equazione può scriversi:

$$h_A - z_c = \frac{Q^2}{2g\Omega_c^2} + \frac{0,5 \cdot Q^2}{2g\Omega_1^2} + \frac{\lambda_1 Q^2 L_1}{2gD_1 \Omega_1^2} + \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{Q^2}{2g\Omega_2^2} + \frac{\lambda_2 Q^2 L_2}{2gD_2 \Omega_2^2} + \frac{\eta_r Q^2}{2g\Omega_3^2} + \frac{\lambda_3 Q^2 L_3}{2gD_3 \Omega_3^2} ,$$

riconducibile, mettendo in evidenza i quadrati delle portate che compaiono nei termini di perdita di carico e nell'altezza cinetica nella sezione contratta, a una forma del tipo:

$$h_A - z_c = KQ^2 ,$$

in cui:

$$K = \frac{1}{2g\Omega_c^2} + \frac{0,5}{2g\Omega_1^2} + \frac{\lambda_1 L_1}{2gD_1\Omega_1^2} + \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1\right)^2 \frac{1}{2g\Omega_2^2} + \frac{\lambda_2 L_2}{2gD_2\Omega_2^2} + \frac{\eta_r}{2g\Omega_3^2} + \frac{\lambda_3 L_3}{2gD_3\Omega_3^2}$$

è un coefficiente il cui valore è calcolabile. Il valore della portata si ricava quindi dalla:

$$Q = \sqrt{\frac{h_A - z_c}{K}} . \quad (266)$$

Per verificare l'accettabilità dell'approssimazione occorrerà, in pratica, controllare i valori del numero di Reynolds, Re , che si ottengono, per i vari tratti, in corrispondenza del valore di portata determinato. Il controllo può essere effettuato graficamente sull'abaco di Moody, oppure, analiticamente, facendo riferimento alla curva separatrice delle zone del diagramma relative a moto turbolento di transizione e moto turbolento pienamente sviluppato (vedi §12.3.1), di equazione:

$$Re^* = \frac{u^* \varepsilon}{\nu} = 70 ,$$

il moto essendo assolutamente turbolento per valori di $Re^* > 70$. Ricordando che $u^* = \sqrt{\tau_0 / \rho}$ e $\tau_0 = \rho R_j$ e utilizzando la formula di Darcy-Weisbach, con semplici passaggi la stessa condizione può essere espressa in funzione delle grandezze utilizzate nei calcoli pratici:

$$Re^* = \frac{U \varepsilon \sqrt{\lambda / 2}}{2\nu} = 70 , \quad (267)$$

ovvero, in termini del numero di Reynolds della corrente:

$$Re \cong \frac{200}{\sqrt{\lambda} (\varepsilon / D)} . \quad (268)$$

In alternativa, si può ricalcolare l'indice di resistenza con la formula di Colebrook inserendo nell'argomento del logaritmo il valore di λ determinato sotto l'ipotesi di moto assolutamente turbolento: nel caso tale ipotesi fosse corretta, il valore così calcolato non dovrebbe differire significativamente da quello precedente. Qualora il tipo di verifica scelta indicasse valori di Re^* (o Re) propri del regime di transizione, il calcolo andrà reiterato, utilizzando in ciascuna iterazione, per il calcolo del coefficiente K , valori degli indici di resistenza calcolati (o letti nell'abaco di Moody) sulla base dei numeri di Reynolds determinati nella iterazione precedente.

L'applicazione della formula di Chezy in luogo delle formule di Darcy-Weisbach – Colebrook, essendo di validità limitata al moto turbolento pienamente sviluppato, non comporta iterazioni. Naturalmente, in linea di principio occorre verificare le condizioni di turbolenza pienamente sviluppata attraverso le (267) o (268) o mediante l'abaco di Moody. Nel caso in cui il moto non risultasse assolutamente turbolento, la formula di Chezy si rivelerà insufficiente e risulterà perciò necessario effettuare il calcolo iterativo con le formule di Darcy-Weisbach – Colebrook.

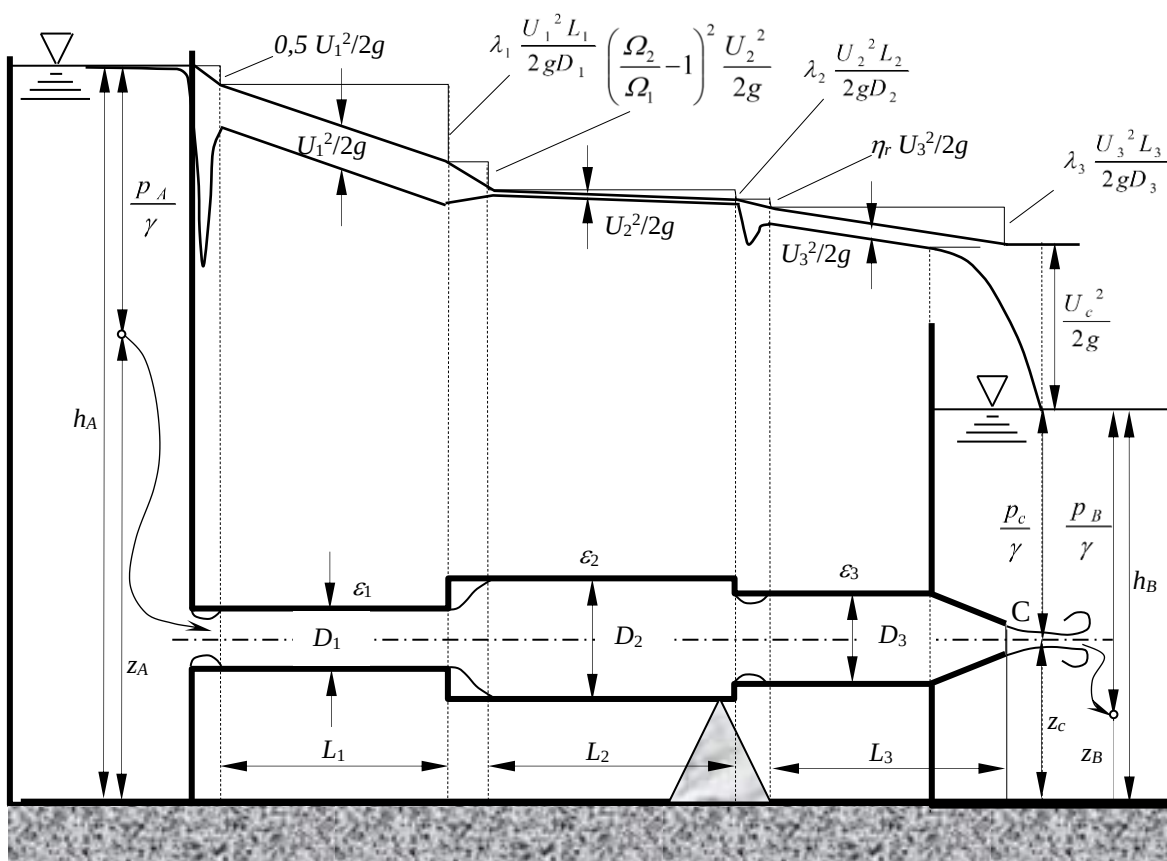


Figura 128. Esempio di condotta in pressione con sbocco sotto battente.

Un tipo diverso di condizioni al contorno all'estremo di valle della corrente va imposto nel caso di sbocco sotto battente, illustrato in Figura 128. In tal caso, la corrente nella sezione contratta allo sbocco è gradualmente variata, essendo immersa in liquido pressoché in quiete che determina al contorno della sezione una distribuzione di pressione idrostatica, la quale rende possibile la medesima condizione all'interno della sezione. Le quote piezometriche, costanti all'interno della sezione contratta e del liquido in quiete nel serbatoio, devono anche necessariamente essere uguali fra loro per l'unicità del valore della pressione in un punto. Assumendo come sezione terminale la sezione contratta, la determinazione della portata si esegue quindi in modo del tutto analogo al caso dello sbocco in aria¹²⁰, salvo assumere ora:

$$H_c = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{U_c^2}{2g} \cong h_B + \frac{U_c^2}{2g} .$$

Nel caso dello sbocco sotto battente, può scegliersi anche di considerare come sezione terminale quella, identificata dal pedice B, in cui la corrente ha interamente dissipato la propria energia cinetica e il fluido che la costituiva si trova, quindi, in condizioni di quiete. Si porrà in tal caso:

$$H_B = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{U_B^2}{2g} \cong h_B .$$

La dissipazione dell'energia cinetica della corrente a valle della sezione contratta viene tenuta in conto includendo nel novero delle perdite di carico la perdita di sbocco menzionata nel §12.5.1:

¹²⁰ Trascurando la piccola perdita di carico distribuita che interviene fra l'ugello del convergente e la sezione contratta.

$$\Delta H_s = \frac{U_c^2}{2g} .$$

In entrambi i casi, eseguendo l'operazione di sostituzione delle velocità in funzione della portata e delle aree delle sezioni, si perviene a una equazione nella forma:

$$h_A - h_B = KQ^2 ,$$

in cui il coefficiente K ha la medesima espressione determinata per il caso di sbocco in aria, da cui l'espressione della portata:

$$Q = \sqrt{\frac{h_A - h_B}{K}} . \quad (269)$$

Come indicato in precedenza, quello illustrato è il procedimento di verifica della tubazione. Un problema di progetto si pone qualora si desideri, ad esempio, consentire il passaggio di una portata maggiore di quella convogliabile con un determinato assetto della tubazione; in tal caso si rende necessario sostituire le tubazioni, o parti di esse, con altre di diametro maggiore o, comunque, realizzare una combinazione di scabrezza e diametri che consenta di ottenere la portata desiderata. In pratica, si effettua a priori la scelta del tipo di tubazione e, quindi, la specificazione della scabrezza, che occorrerà considerare nelle condizioni di funzionamento più sfavorevoli, a tubi vecchi.

Scritta quindi l'equazione della condotta come sopra illustrato, la determinazione del diametro da assegnare alla tubazione non è generalmente possibile in termini espliciti, poiché, per una condotta del tipo esaminato in precedenza, il diametro incognito è contenuto in più termini, a denominatore degli stessi (oltre che all'interno dell'indice di resistenza nella scabrezza relativa) ed elevato a potenze massime pari a 5. Poiché, in definitiva, si è vincolati a utilizzare le tubazioni in commercio, il procedimento che conviene seguire per la determinazione del diametro del nuovo tronco consiste nel determinare, con il procedimento di verifica illustrato, il più piccolo diametro commerciale che comporta, a tubi vecchi, il passaggio di una portata maggiore o uguale a quella desiderata. Nel caso la condotta si componga di più tronchi, come nell'esempio proposto, la scelta del tronco da sostituire si effettuerà sulla base di un criterio di minima spesa¹²¹.

Ciò fatto, poiché all'inizio della vita utile della nuova tubazione la minore scabrezza determinerebbe valori della portata maggiori di quello prefissato, occorre includere nella condotta un organo di regolazione della portata (*valvola riduttrice di pressione*). Tralasciando una descrizione dettagliata di tali dispositivi, si osserva qui come il loro funzionamento (come del resto quello dei normali rubinetti) si basi sulla induzione di una perdita di carico per brusco allargamento associata alla riduzione della luce libera della valvola attraverso la quale avviene il transito della corrente. In termini analitici, ciò si riflette in un aumento del coefficiente K della (266) e in una conseguente riduzione della portata. Regolando l'ampiezza della luce libera della valvola si può modulare la portata a seconda delle necessità – per esempio, mantenendola costante al trascorrere del tempo in relazione all'invecchiamento della condotta.

Nelle pagine precedenti è stato descritto dettagliatamente il procedimento da seguire per l'analisi di una condotta in pressione, con specifico riferimento esemplificativo ai casi di Figura 127 e Figura 128. Peraltro, nella pratica è possibile incontrare una ben maggiore varietà di casi differenti quanto a condizioni al contorno, sia a monte che a valle.

¹²¹ Di norma, la scelta finale del tratto da sostituire ricade su quello di diametro minimo. Per questo motivo, conviene procedere come segue: i) determinare il diametro da sostituire al diametro minimo della condotta esistente; ii) determinare il relativo costo della sostituzione (costo per metro di lunghezza $\times$ lunghezza del tratto di tubazione); iii) determinare i costi per la sostituzione di ciascuno degli altri tratti con il primo diametro commerciale superiore a quello esistente (senza effettuare calcoli idraulici). Qualora il costo della sostituzione del diametro minimo risultasse inferiore a tali costi, la scelta ricadrà senz'altro sul primo; in caso contrario, si procederà con i calcoli idraulici per gli altri diametri, ordinati per valori crescenti, fino a determinare il primo diametro che consente il flusso della portata richiesta e costa meno di tutte le alternative.

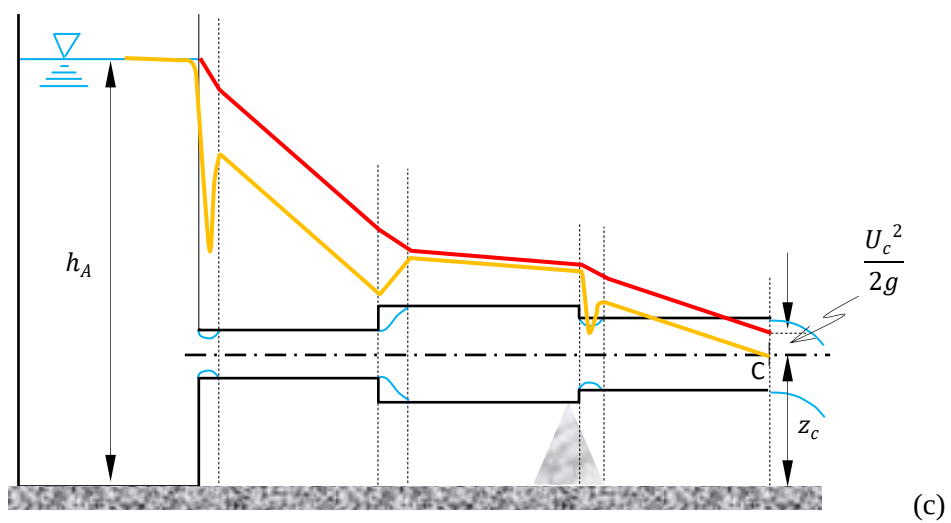
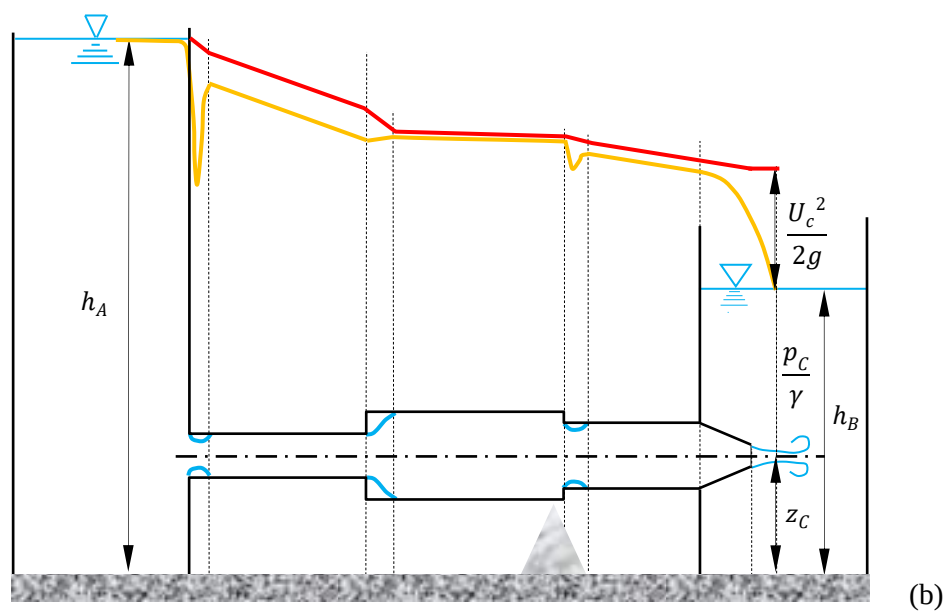
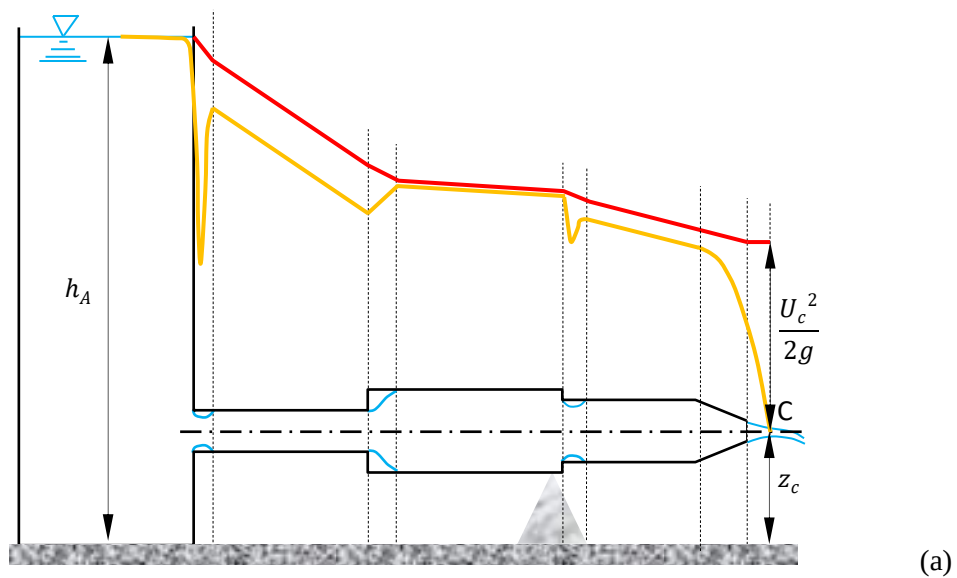


Figura 129. Casistica di condizioni al contorno in una condotta in pressione – 1.

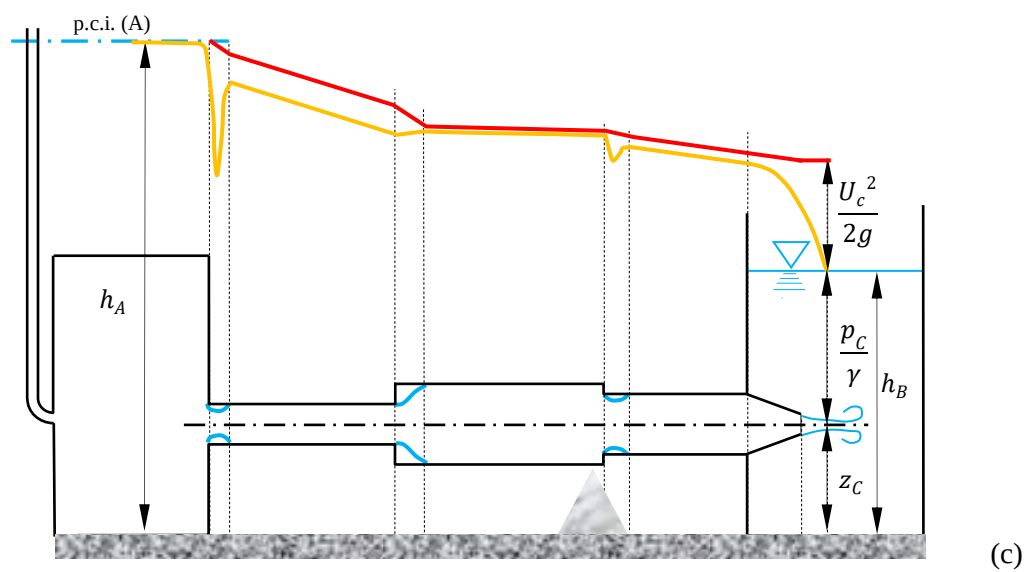
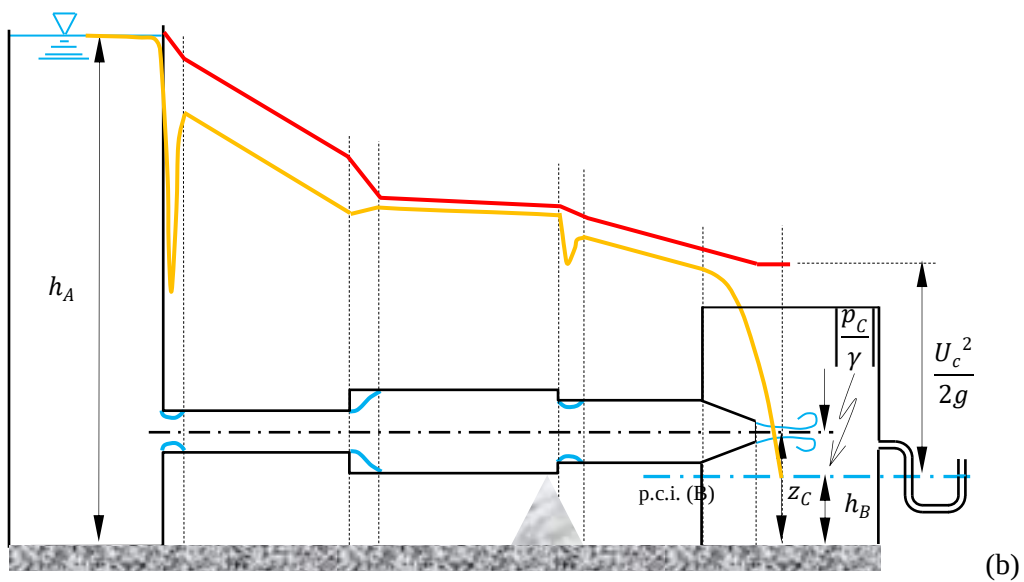
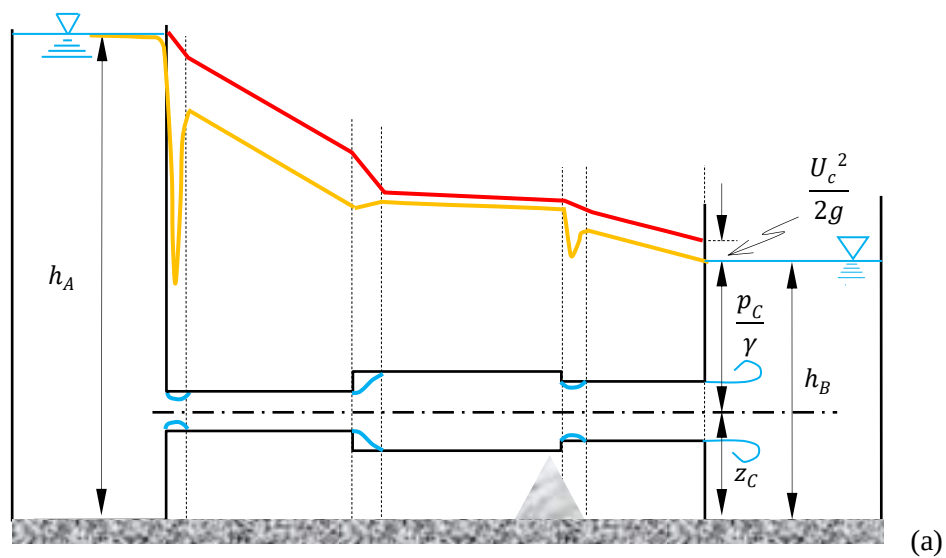


Figura 130. Casistica di condizioni al contorno in una condotta in pressione – 2.

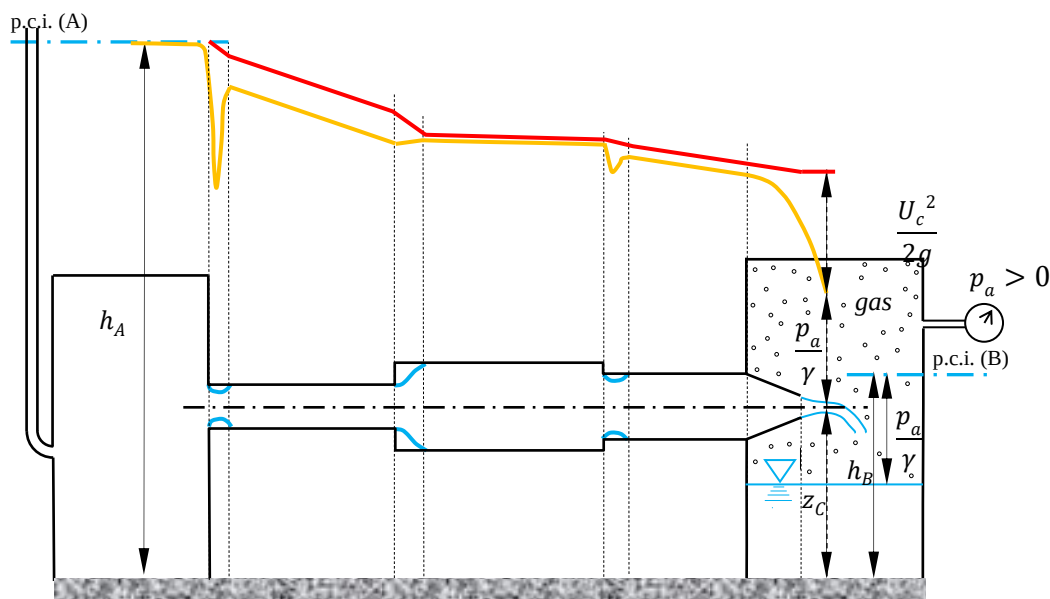


Figura 131. Casistica di condizioni al contorno in una condotta in pressione – 3.

I concetti presentati in precedenza all'interno di questo paragrafo sono di applicazione del tutto generale e, quindi, senz'altro utilizzabili per casi diversi da quelli di esempio; appare tuttavia opportuno fornire qualche ulteriore esempio di corretta specificazione delle condizioni al contorno in una casistica di possibili configurazioni del sistema serbatoio-condotta-sbocco, rappresentate negli schemi riportati in Figura 129, Figura 130 e Figura 131. Inoltre, con riferimento agli stessi casi, verranno discusse le caratteristiche delle linee dei carichi totali e piezometrica, al fine di consentirne l'agevole tracciamento in tutti i casi che si possono presentare nell'analisi di una condotta a gravità.

In termini generali, nel tracciamento delle linee dei carichi totali e piezometrica di una corrente in pressione occorre sempre tenere presenti i seguenti concetti fondamentali, in parte già presentati nell'analisi dettagliata dei casi di Figura 127 e Figura 128, corrispondenti ai casi di Figura 129 a) e b), ma che si ritiene utile richiamare qui in via riassuntiva:

- I vari termini dell'equazione caratteristica della condotta (legge di Bernoulli generalizzata) e le relative condizioni imposte sul carico totale e sulla quota piezometrica trovano puntuale corrispondenza nelle caratteristiche geometriche dei diversi tratti delle linee dei carichi totali e piezometrica, che sarà pertanto opportuno verificare puntualmente durante il tracciamento.
- In un serbatoio posto a monte della condotta si assumono velocità trascurabili (liquido praticamente in quiete) a distanza sufficientemente grande dall'imbocco della condotta; ne discende una condizione al contorno sul carico totale, coincidente con il carico piezometrico del liquido in quiete, e pertanto pari, in generale, alla quota del piano dei carichi idrostatici. Si potranno quindi presentare i seguenti casi:
 - serbatoio a pelo libero (Figura 129 a-c e Figura 130 a, b): la linea dei carichi totali e la linea piezometrica hanno inizio dal pelo libero del serbatoio, il quale costituisce la materializzazione del piano dei carichi idrostatici;
 - serbatoio in pressione (Figura 130 c e Figura 131): la linea dei carichi totali e la linea piezometrica hanno inizio dal piano dei carichi idrostatici, la cui posizione deve essere determinata, in generale, da una misura di pressione in un punto di quota nota, e può essere eventualmente materializzata dal menisco di un piezometro (come in Figura 130 c e Figura 131);
- All'estremo di valle la condizione al contorno è definita con riferimento alla quota piezometrica. Si possono presentare i seguenti casi:

- sbocco in atmosfera (Figura 129 a, c): essendo $p_c = 0$ nella sezione di controllo a valle dello sbocco, $h_c = z_c$ e la linea piezometrica presenta quindi in tale sezione una quota pari alla quota z_c dell'asse della corrente;
- sbocco sotto battente: la sezione di controllo è una sezione regolare e la sua quota piezometrica è pari a quella del liquido circostante; in corrispondenza della sezione di controllo la linea piezometrica si trova pertanto, in generale, alla quota del piano dei carichi idrostatici del liquido in quiete contenuto nel serbatoio di arrivo. In un serbatoio a pelo libero il piano dei carichi idrostatici sarà materializzato dalla superficie libera del liquido (Figura 129 b, Figura 130 a, c). In caso contrario, la posizione del piano dei carichi idrostatici sarà ottenuta da una misura di pressione in un punto di quota nota, ovvero materializzata dalla presenza di un piezometro (Figura 130 b); la sezione di controllo potrà essere in pressione o, come nell'esempio di Figura 130 b, in depressione;
- sbocco in un aeriforme a pressione p_a diversa dalla pressione atmosferica (Figura 131): essendo $p_c = p_a \neq 0$ nella sezione di controllo e $h_c = z_c + p_c/\gamma$, la linea piezometrica si trova, in tale sezione, al di sopra della quota dell'asse del getto z_c dell'altezza piezometrica p_c/γ se $p_c > 0$ (Figura 131), ovvero al di sotto della quantità $|p_c|/\gamma$, se $p_c < 0$. Sia nel caso di sbocco in atmosfera che nel caso di sbocco in un serbatoio contenente un aeriforme e il sottostante accumulo del liquido effluente dalla condotta, la sezione di controllo è quella terminale per le due linee caratteristiche; non è pertanto di interesse tracciare linea piezometrica e linea dei carichi totali oltre la sezione di controllo. Va inoltre osservato che la posizione del piano dei carichi idrostatici del liquido accumulato nel serbatoio, come pure del relativo pelo libero, non hanno alcuna rilevanza ai fini della specificazione delle condizioni al contorno;
- Carico totale e carico piezometrico differiscono dell'altezza cinetica $U^2/2g$. In una condotta percorsa da una portata Q , costante lungo l'asse, a diametro maggiore corrispondono velocità media $U = Q/\Omega$ e, quindi, altezza cinetica, minori. Pertanto:
 - nei tratti a sezione costante, sedi di moto uniforme, a diametro maggiore corrisponde distanza minore delle linee dei carichi totali e piezometrica;
 - In presenza di contrazioni della corrente con distacchi di vena (imbocco, brusco restringimento), al minimo relativo di area della sezione contratta corrispondono massimi relativi della velocità media e dell'altezza cinetica e, quindi, un minimo relativo della quota piezometrica (detto anche *gancio*);
 - Nel caso di brusco allargamento la vena subisce unicamente un'espansione e non si osserva quindi un minimo relativo di quota piezometrica. L'analisi condotta nel §12.5.1 mostra che la quota piezometrica aumenta fra gli estremi dell'espansione;
 - Nel caso di un convergente (divergente) l'altezza cinetica aumenta (diminuisce) nel senso del moto con la quarta potenza del diametro. Pertanto, in tali dispositivi (convergente in Figura 129 a,b e Figura 130 b,c) la linea piezometrica presenta una marcata curvatura;
 - Nel caso di sbocco da un ugello terminale di un convergente (Figura 129 a,b e Figura 130 b,c) la vena subisce una ulteriore contrazione a valle dell'ugello, fino alla sezione di controllo, che è anche una sezione contratta. Nel caso di uno sbocco di una condotta cilindrica (Figura 129 c e Figura 130 a) la sezione di controllo non è contratta, la sua area è uguale all'area della sezione del tratto terminale della tubazione e le linee dei carichi totali e piezometrica terminano mantenendosi parallele come nel tratto di moto uniforme a monte.

12.7 Lunghe condotte

12.7.1 Generalità

Con riferimento alla formulazione del Teorema di Bernoulli per una traiettoria, nel §5.8.2 si è osservato come un aspetto importante nella valutazione della applicabilità dell'ipotesi di fluido ideale all'analisi di un dato problema di flusso sia legato, fra gli altri, allo sviluppo del tratto di traiettoria considerato, la differenza di carico totale agli estremi del tratto essendo tanto minore quanto minore

è tale sviluppo.

Trattando di correnti nelle quali le perdite di carico totale non possano ritenersi trascurabili, sia per essere le lunghezze non sufficientemente limitate che per via di eventuali perdite localizzate, risultano di particolare interesse tecnico-applicativo condizioni nelle quali le perdite di carico localizzate possano considerarsi trascurabili rispetto a quelle distribuite, nel qual caso i calcoli illustrati nel paragrafo precedente possono notevolmente semplificarsi, soprattutto per quanto riguarda il problema di progetto.

Potendosi esprimere le perdite di carico totale in un tratto di corrente compreso fra due sezioni a e b nel quale si succedano, come visto negli esempi precedenti, M tronchi sedi di moto uniforme con relative perdite di carico distribuite e N perdite localizzate, nella forma generale:

$$H_b - H_a = \sum_{i=1}^M \lambda_i \frac{U_i^2}{2gD_i} L_i + \sum_{j=1}^N \eta_j \frac{U_j^2}{2g} ,$$

tale approssimazione è consentita se risulta:

$$\sum_{i=1}^M \lambda_i \frac{U_i^2}{2gD_i} L_i \gg \sum_{j=1}^N \eta_j \frac{U_j^2}{2g} .$$

Nel caso di un unico tratto con N perdite localizzate, essendo i corrispondenti coefficienti η dell'ordine dell'unità (vedi §12.5) l'approssimazione citata richiede il rispetto della condizione:

$$\lambda \frac{U^2}{2gD} L \gg N \frac{U^2}{2g} ,$$

da cui, semplificando le altezze cinetiche fra primo e secondo membro:

$$\lambda \frac{L}{D} \gg N .$$

Le condotte che soddisfano tali condizioni vengono denominate *lunghe condotte*, come sempre l'aggettivo intendendosi legato a un concetto di similitudine sintetizzabile in "lunghe in confronto al diametro" (sebbene a tal fine, a rigore, anche la scabrezza della condotta sia rilevante tramite λ).

Considerando valori dell'indice di resistenza nell'intervallo $0,015 \div 0,03$ in relazione alle possibili scabrezze e diametri delle tubazioni realisticamente riscontrabili nella pratica, la condizione su riportata equivale ad assumere:

$$\frac{D}{L} \ll \frac{0,015 \div 0,03}{N} .$$

Per fissare le idee, assumendo $\lambda = 0,03$, $N = 2$ e D/L dell'ordine del 4% del secondo membro perché possa essere considerato molto minore di esso, si ottiene una lunghezza minima necessaria alla validità dell'approssimazione di lunga condotta:

$$L = \frac{2}{0,03 \times 0,04} D \cong 1667 D .$$

In definitiva, la valutazione delle perdite di carico può essere limitata alle sole perdite distribuite per lunghezze dell'ordine del migliaio di diametri. A titolo di esempio, rientrano in quest'ordine di valori condotte di lunghezza dell'ordine delle decine di metri e diametro dell'ordine delle decine di millimetri, valori caratteristici di impianti idrici domestici; lunghezze di centinaia di metri e diametri di centinaia di millimetri, tipici di reti di distribuzione urbana; lunghezze dell'ordine dei chilometri e diametri dell'ordine del metro, riscontrabili in condotte di adduzione esterna ai centri abitati – gli ultimi due esempi peraltro spesso caratterizzati da diametri anche alquanto inferiori.

Tali condizioni consentono anche di trascurare nei calcoli l'altezza cinetica costituente parte del carico totale, per cui nelle lunghe condotte è consuetudine considerare unicamente la linea piezometrica. Sempre a titolo esemplificativo, considerando che le velocità che si tende a realizzare nelle condotte acquedottistiche è dell'ordine di 1 m/s, la corrispondente altezza cinetica è dell'ordine dei 5 cm. Considerando una condotta di questo tipo che congiunga serbatoi i cui peli liberi abbiano un dislivello di appena poche decine di metri, si capisce bene come il tracciamento sia della linea piezometrica che della linea dei carichi totali risulterebbe del tutto inutile, perché le due linee risulterebbero in pratica indistinguibili.

Nei paragrafi seguenti viene illustrata la soluzione di alcuni semplici problemi riguardanti le lunghe condotte. Problemi di natura più complessa vengono trattati in corsi specialistici.

12.7.2 Progetto e verifica di una condotta congiungente due serbatoi

Si tratta del tipico caso di progetto di una condotta acquedottistica, in cui il serbatoio di monte può essere costituito da un vaso artificiale o dall'opera di presa di una sorgente e il serbatoio di valle dal serbatoio di compenso di un centro urbano.

Il problema consiste nel determinare i diametri commerciali dei quali deve essere composta la condotta di lunghezza L assegnata, affinché essa possa convogliare una portata Q assegnata fra i serbatoi di monte e di valle aventi rispettivamente quote dei peli liberi assegnate h_1 e h_2 (vedi Figura 132). Utilizzando la formula di Chezy – il che è consentito dall'essere tipicamente assolutamente turbolento il moto in questo tipo di condotte – l'equazione del moto per la condotta si scrive:

$$h_1 - h_2 = \frac{U^2}{\chi^2 \mathcal{R}} L .$$

Utilizzando la formula di Strickler per il coefficiente di scabrezza χ , con indice di scabrezza k_s a tubi vecchi assegnato in relazione al tipo di tubazione prescelta per la realizzazione della condotta (di ghisa, di acciaio, di polietilene, etc...), introducendo la portata nota $Q = U\Omega = U(\pi D^2/4)$, detto $Y = h_1 - h_2$ il dislivello fra i due serbatoi; ricordato infine che $\mathcal{R} = D_t/4$ per tubazioni a sezione circolare, dove D_t è il diametro teorico incognito (teorico in quanto il valore risultante dal calcolo in generale non coinciderà con un diametro esistente in commercio), l'equazione del moto per la condotta si scrive:

$$Y = \frac{4^{10/3}}{\pi^2 k_s^2} \frac{Q^2}{D_t^{16/3}} L , \quad (270)$$

da cui l'espressione del diametro teorico:

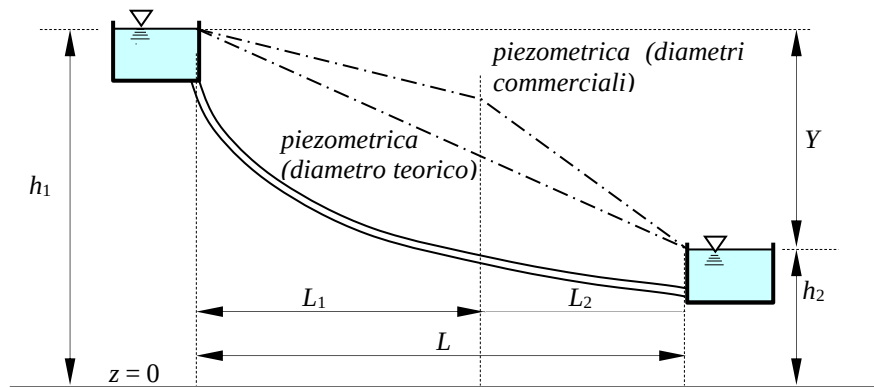


Figura 132. Schema di lunga condotta congiungente due serbatoi (tubi vecchi).

$$D_t = \left(\frac{4^{10/3}}{\pi^2 k_s^2} \frac{Q^2}{Y} L \right)^{3/16}.$$

Poiché il diametro così determinato generalmente non coincide con un diametro esistente in commercio per il tipo di tubazione scelta, la condotta dovrà essere necessariamente realizzata con i due diametri commerciali successivi, D_1 e D_2 , fra i quali il diametro teorico risulta compreso. I due tronchi corrispondenti dovranno avere lunghezze L_1 e L_2 , la cui somma deve uguagliare la lunghezza totale L prescritta e tali da produrre una perdita di carico complessiva pari al valore Y , pure prescritto.

Calcolate quindi le cadenti j_1 e j_2 corrispondenti ai due diametri:

$$j_1 = \frac{4^{10/3}}{\pi^2 k_s^2} \frac{Q^2}{D_1^{16/3}} \quad ; \quad j_2 = \frac{4^{10/3}}{\pi^2 k_s^2} \frac{Q^2}{D_2^{16/3}},$$

le lunghezze incognite dei due tronchi devono soddisfare il sistema lineare:

$$\begin{aligned} L_1 + L_2 &= L \\ j_1 L_1 + j_2 L_2 &= Y \end{aligned}$$

la cui soluzione è data da:

$$L_1 = \frac{Y - L j_2}{j_1 - j_2} \quad ; \quad L_2 = \frac{Y - L j_1}{j_2 - j_1} = L - L_1$$

La condotta così composta convoglia la portata Q prescritta nelle condizioni di massima scabrezza relative alla fine della vita utile dell'opera. In assenza di ulteriori provvedimenti, all'inizio dell'esercizio la condotta, composta di tubazioni meno scabre rispetto alle condizioni di progetto, convoglia pertanto una portata maggiore di quella di progetto. Inoltre, la portata di progetto potrà differire da quella effettivamente richiesta all'inizio della vita utile dell'opera: per esempio, trattandosi di un acquedotto a uso idropotabile, quest'ultima potrà essere inferiore alla portata di progetto per ragioni di crescita demografica.

Detta quindi Q' la portata richiesta all'inizio dell'esercizio della condotta e calcolate le minori cadenti, j_1' e j_2' associate alle minori scabrezze dei due tronchi (corrispondenti per la formula di Strickler a maggiori valori del corrispondente indice di scabrezza k_s), la perdita di carico Δ che occorre indurre lungo linea con una apposita valvola si determina imponendo, ancora, che la perdita di carico totale eguagli il dislivello Y :

$$j_1' L_1 + j_2' L_2 + \Delta = Y,$$

da cui:

$$\Delta = Y - j_1' L_1 - j_2' L_2.$$

Conseguentemente, ipotizzando di disporre la valvola nel primo tronco, la piezometrica assumerà l'aspetto riportato in tratteggio semplice in Figura 133.

12.7.3 Progetto e verifica di una rete di lunghe condotte con un nodo interno

Si dice *rete di condotte* una serie di condotte, costituenti i *lati* della rete, convergenti in uno o più punti detti *nodi*. Le equazioni che descrivono il comportamento idraulico di una rete sono le equazioni del moto lungo i lati, del tipo visto nel paragrafo precedente se si tratta di lunghe condotte, così come ammetteremo nel prosieguo, e le equazioni di continuità ai nodi, le quali, per il caso consueto di fluido incompressibile, isoterma e omogeneo, esprimono che la somma delle portate entranti in un nodo uguaglia la somma delle portate uscenti dallo stesso nodo.

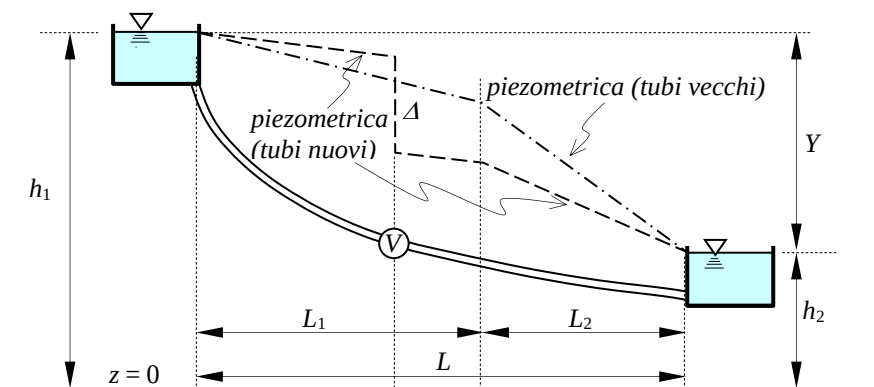


Figura 133. Schema di lunga condotta congiungente due serbatoi (tubi nuovi).

Si consideri la semplice rete di Figura 134, costituita di tre lati e un solo nodo. La natura monomia dell'espressione della cadente j tramite la formula di Chezy con indice di scabrezza di Strickler consente di indicarla nella forma sintetica:

$$j = \frac{U^2}{\chi^2 \Re} = \frac{4^{10/3}}{\pi^2 k_s^2} \frac{Q^2}{D^{16/3}} = k Q^2 D^{-n} ,$$

con:

$$k = \frac{4^{10/3}}{\pi^2 k_s^2} , \quad n = \frac{16}{3} = 5,333 .$$

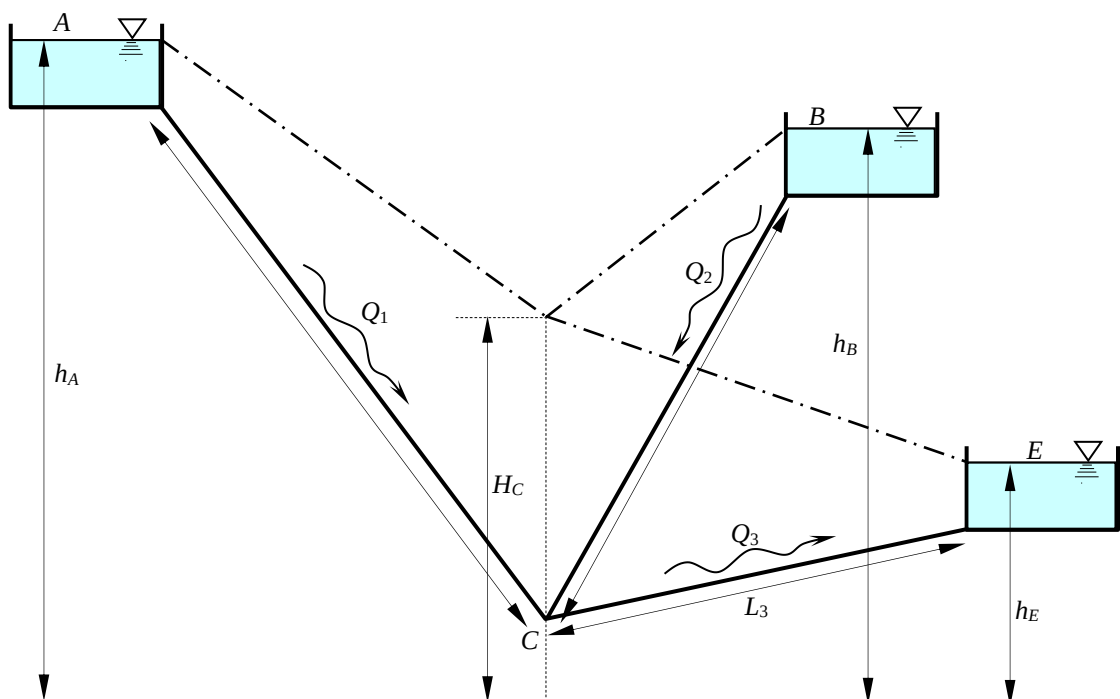


Figura 134. Schema di rete di lunghe condotte composta di tre lati e un nodo.

Si osservi che, in generale, anche l'esponente n può variare da tronco a tronco, il che può verificarsi qualora vengano utilizzate formule diverse dalla formula di Strickler per la valutazione delle perdite di carico. Ciò può rendersi indispensabile, ad esempio, nel caso si usino tubazioni di materiale plastico (ad esempio, PVC), considerabili come lisce, per le quali occorre pertanto utilizzare la formula di Colebrook e ottenere successivamente, mediante un'operazione di regressione¹²², i coefficienti (sia k che n) della forma monomia della cadente utilizzata nei calcoli.

Il funzionamento di tale semplice rete è governato da tre equazioni del moto per i tre lati:

$$h_A - H_C = k_1 Q_1^2 D_1^{-n} L_1$$

$$h_B - H_C = k_2 Q_2^2 D_2^{-n} L_2$$

$$H_C - h_E = k_3 Q_3^2 D_3^{-n} L_3$$

e da una equazione di continuità al nodo C :

$$Q_1 + Q_2 = Q_3,$$

nello scrivere le quali si è ammesso implicitamente che nel lato n°2 il moto avvenga dal serbatoio B al nodo C , circostanza la cui validità può essere soltanto verificata a posteriori. È invece certo che le portate escano dal serbatoio a quota massima ed entrino nel serbatoio a quota minima.

Il problema di progetto più generale consiste nella determinazione dei diametri (teorici, con successiva determinazione dei diametri commerciali secondo quanto illustrato al paragrafo precedente) dei tre lati per assegnati livelli nei tre serbatoi, portate circolanti nei lati, lunghezze e scabrezze degli stessi. Tuttavia, nelle equazioni del moto risulta incognita anche la quota piezometrica del nodo C , H_C , mentre le portate, essendo prescritte, devono a priori soddisfare l'equazione di continuità, che non comprende alcuna delle incognite e non è perciò utilizzabile per determinarle. Pertanto, il problema di progetto così prospettato ammette soltanto tre equazioni fra le quattro incognite da determinare e non è pertanto risolvibile univocamente in assenza di una ulteriore equazione fra le incognite citate (il problema si dice *idraulicamente indeterminato*).

Naturalmente, poiché il problema comprende più incognite che equazioni, esso ammette ∞^1 soluzioni. A ciascuna di queste ∞^1 terne di diametri corrisponde un costo, sia di acquisto e messa in opera delle tubazioni, da pagare nel relativamente limitato periodo di costruzione dell'opera, che per manutenzione, da distribuire nel corso della vita utile dell'opera. Senza entrare nel dettaglio della formulazione dell'equazione aggiuntiva che consente di chiudere il bilancio fra equazioni e incognite, per la quale si rimanda ai testi di Costruzioni Idrauliche, ci si limita qui a dire che essa esprime la minimizzazione del costo totale dell'opera, espresso mediante le formule di attualizzazione della matematica finanziaria, che consentono di confrontare costi sostenuti in tempi differenti¹²³. Un particolare problema di progetto verrà affrontato nel corso di esercitazioni.

Nel prosieguo si limiterà il discorso al problema di verifica della semplice rete in questione. Come già menzionato nel §12.7.2, tale problema si pone sia per controllare le condizioni di funzionamento di una condotta di nuova costruzione, che, in generale, per predisporre l'installazione di organi di regolazione della portata. Si assume quindi di conoscere in quale condizione ci si trovi e che gli indici di scabrezza dei tre tronchi vengano specificati di conseguenza. Essendo assegnati i diametri e incognite le portate e la quota piezometrica nel nodo C , il sistema da risolvere è, questa volta, di quattro equazioni in quattro incognite. Quale che sia la composizione dei singoli tronchi (cioè, anche nel caso in cui essi siano realizzati mediante due diametri, secondo quanto illustrato al §12.7.2), tale sistema può scriversi nella forma generale:

¹²² In breve, la regressione è un procedimento utilizzato in statistica, che consente di dedurre una relazione funzionale in forma analitica fra due variabili per le quali si conoscano un certo numero di coppie di valori corrispondenti.

¹²³ Si tratta, in buona sostanza, di formule dello stesso tipo di quelle che consentono di stabilire la rata annua costante di restituzione di un mutuo concesso in un'unica soluzione da una banca.

$$h_A - H_C = K_1 Q_1^2$$

$$h_B - H_C = K_2 Q_2^2$$

$$H_C - h_E = K_3 Q_3^2$$

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

Esprimendo le portate dalle equazioni del moto nella forma:

$$Q_1 = \sqrt{\frac{h_A - H_C}{K_1}} \quad , \quad Q_2 = \sqrt{\frac{h_B - H_C}{K_2}} \quad , \quad Q_3 = \sqrt{\frac{H_C - h_E}{K_3}}$$

e sostituendo nell'equazione di continuità, si perviene all'equazione nell'unica incognita H_C :

$$F(H_C) = \sqrt{\frac{h_A - H_C}{K_1}} + \sqrt{\frac{h_B - H_C}{K_2}} - \sqrt{\frac{H_C - h_E}{K_3}} = 0 \quad ,$$

la quale, in generale, non è esplicitabile rispetto all'incognita.

Come per ogni equazione in forma implicita (quale è anche la formula di Colebrook nella sua forma completa), la soluzione può determinarsi: a) con il solutore automatico di un foglio elettronico; b) graficamente, tracciando la $F(H_C)$ e verificando per quale valore della quota piezometrica al nodo essa si annulla; c) con metodi iterativi: ad esempio, calcolando dapprima la $F(H_C)$ per vari valori di H_C compresi nell'intervallo $[h_E, h_B]$, per individuare i due valori di H_C in corrispondenza dei quali la funzione cambia di segno, fra i quali deve quindi essere compresa la soluzione; quindi, determinare una successione di intervalli della variabile H_C di ampiezza l'una la metà della precedente, agli estremi dei quali la funzione $F(H_C)$ assuma sempre valori di segno discorde, fino a quando la dimensione sufficientemente ridotta dell'ultimo intervallo determinato consente di assegnare alla variabile H_C un valore con la precisione desiderata. In pratica, tutti e tre i procedimenti possono essere implementati facilmente in un foglio elettronico.

L'equazione può anche essere risolta per via analitica scrivendola nella forma:

$$\sqrt{\frac{h_A - H_C}{K_1}} + \sqrt{\frac{h_B - H_C}{K_2}} = \sqrt{\frac{H_C - h_E}{K_3}} \quad ,$$

quadrando membro a membro:

$$\frac{h_A - H_C}{K_1} + \frac{h_B - H_C}{K_2} + 2\sqrt{\frac{h_A - H_C}{K_1}}\sqrt{\frac{h_B - H_C}{K_2}} = \frac{H_C - h_E}{K_3} \quad ,$$

rielaborando e quadrando nuovamente:

$$\left(\frac{h_A - H_C}{K_1} + \frac{h_B - H_C}{K_2} - \frac{H_C - h_E}{K_3} \right)^2 = 4 \frac{h_A - H_C}{K_1} \frac{h_B - H_C}{K_2}$$

per ottenere una equazione di secondo grado, dalla quale si ricava, delle due radici possedute, l'unica che soddisfa le condizioni specifiche del caso (H_C reale, $h_E < H_C < h_B$). Solo valori dell'incognita H_C compresi nell'intervallo $[h_E, h_B]$ sono accettabili, in quanto compatibili con il verso ipotizzato per la portata Q . Nel caso risultasse invece $H_C > h_B$, si dovrà invertire il verso di tale portata e ripetere il procedimento sulla base dell'equazione di continuità al nodo C :

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

e dell'equazione del moto per il lato n° 2¹²⁴:

$$H_C - h_B = K_2 Q_2^2.$$

Qualora la verifica fornisca una portata Q_3 superiore a quella desiderata (caso certo nella verifica a tubi nuovi di una rete di condotte progettata per le condizioni di fine vita utile), occorrerebbe installare una valvola riduttrice di pressione per la regolazione della portata e determinarne la corrispondente perdita di carico localizzata Δ . Assumendo di installare la valvola nel tronco n°3, il sistema di equazioni che descrive il funzionamento del sistema di condotte si scrive:

$$h_A - H_C = K_1 Q_1^2$$

$$h_B - H_C = K_2 Q_2^2$$

$$H_C - h_E = K_3 Q_3^2 + \Delta$$

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

in cui la portata Q_3 è ora assegnata. Inserendo nell'equazione di continuità le espressioni delle portate Q_1 e Q_2 ricavate dalle corrispondenti equazioni del moto, si ottiene:

$$\sqrt{\frac{h_A - H_C}{K_1}} + \sqrt{\frac{h_B - H_C}{K_2}} = Q_3,$$

la quale, risolta con uno dei metodi illustrati in precedenza, fornisce il valore della quota piezometrica H_C . La perdita di carico Δ da realizzare con la valvola riduttrice si determina dalla equazione del moto per il tronco n° 3:

$$\Delta = H_C - h_E - K_3 Q_3^2,$$

12.8 Correnti in depressione

Di norma, si desidera che il flusso all'interno di una condotta avvenga a pressione relativa positiva (funzionamento *in pressione*), per vari motivi.

Nel caso degli acquedotti, nei quali vengono spesso utilizzate tubazioni con giunzione a biccchiere e guarnizione di tenuta, il funzionamento in pressione assicura la tenuta della guarnizione. Inoltre, nel funzionamento a pressione relativa negativa (*in depressione*), può accadere che materiale del terreno di posa della tubazione, o anche acque di falda, possano essere risucchiate all'interno della tubazione per effetto della depressione interna, pregiudicando la qualità dell'acqua.

Diminuzioni della pressione causano riduzioni della concentrazione dell'aria disciolta nell'acqua (§2.9), con formazione di bolle nocive al funzionamento regolare della condotta, specialmente in prossimità dei massimi relativi di quota, ove le bolle tendono a stazionare per effetto della spinta di Archimede. In altri casi, come nella condotta di aspirazione di una pompa da un pozzo, o nella presa da un bacino attraverso un sifone, il funzionamento in depressione costituisce una evenienza inevitabile.

Anche nei casi in cui le depressioni siano compatibili con la funzionalità del servizio, occorre comunque verificare che non si presentino le anomalie di funzionamento di natura prettamente idraulica, che vengono illustrate con riferimento al caso del sifone di cui allo schema di Figura 135.

La portata convogliata dalla condotta si ottiene dalla Legge di Bernoulli generalizzata. Assumendo per semplicità trascurabile la perdita localizzata di imbocco, per valori h'_B del livello del pelo libero nel serbatoio di arrivo sufficientemente grandi, si ha:

¹²⁴ Si osservi comunque che tale circostanza è abbastanza improbabile nel caso si stia trattando della verifica di una condotta progettata per realizzare i versi delle portate ipotizzati.

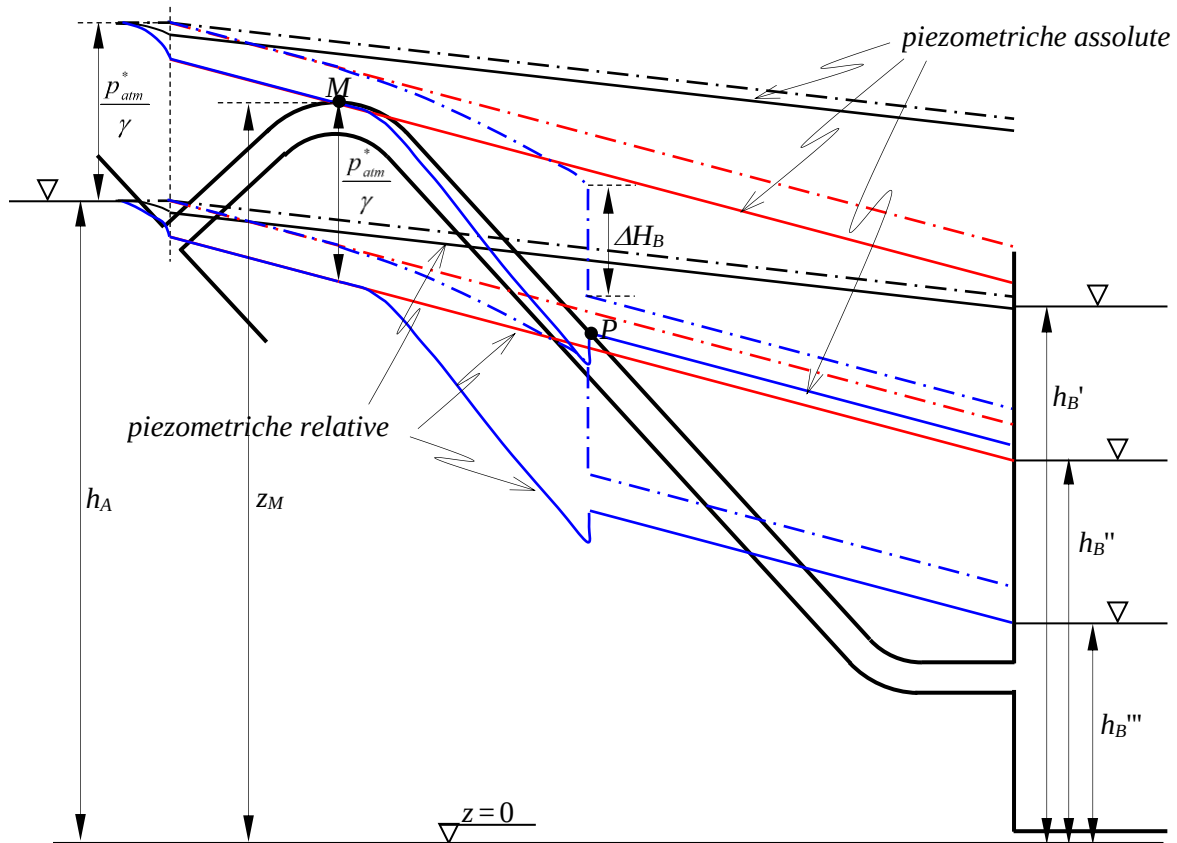


Figura 135. Schemi di funzionamento di condotte in pressione e in depressione.

$$h_A = h'_B + \frac{U^2}{2g} + \lambda \frac{U^2}{2gD} L,$$

da cui, utilizzando la relazione $U = Q/\Omega$ ed esplicitando la portata¹²⁵:

$$Q = \Omega \sqrt{\frac{2g(h_A - h'_B)}{1 + \lambda \frac{L}{D}}}. \quad (271)$$

Tale valore di portata può effettivamente transitare nella condotta perché in ogni punto della stessa la pressione assoluta è positiva (sempre per semplicità, viene qui fatto riferimento a tale condizione, piuttosto che alla condizione di pressione assoluta maggiore della tensione di vapore, come sarebbe più appropriato in riferimento al comportamento dei liquidi descritti nel §2.7); conseguentemente, la depressione esistente nella prima parte della condotta si mantiene inferiore, in valore assoluto, al medesimo valore. La presenza di depressioni in condotta rende preferibile rappresentare, oltre alle consuete linee dei carichi totali e piezometrica relative (riferite alle pressioni relative), riportate in tratto nero per questo primo caso, anche le corrispondenti linee assolute (riferite alle pressioni assolute), sovrastanti le prime di una quantità pari all'altezza piezometrica p_{atm}^*/γ , che nel caso dell'acqua vale 10,33 m. In termini di linea piezometrica assoluta, la verifica consiste nel constatare che essa si mantiene sempre al di sopra della condotta.

¹²⁵ Come chiarito al §12.6, la portata è ottenuta da una sola applicazione della formula se il regime è assolutamente turbolento; in caso contrario la portata va determinata per approssimazioni successive, reiterando l'utilizzazione della formula con valori dell'indice di resistenza λ determinati, ad ogni iterazione, sulla base dei numeri di Reynolds ottenuti dai risultati dell'iterazione precedente.

Sulla base della (271), la portata aumenta al diminuire della quota del serbatoio di arrivo h'_B , col che diminuiscono progressivamente le pressioni in condotta e la piezometrica assoluta si avvicina alla tubazione. In corrispondenza di un valore del livello nel serbatoio di arrivo h''_B , la piezometrica assoluta passa per il punto più elevato della condotta, ove la pressione assoluta è quindi nulla. Precisamente, il primo punto per il quale si verifica tale condizione è posto sull'intradosso della sezione in cui l'asse della condotta ha quota massima (punto M in Figura 135). A tale situazione limite corrisponde il minimo livello nel serbatoio di arrivo per il quale la linea dei carichi totale e linea piezometrica, riportate in rosso in Figura 135, sono ancora ovunque rettilinee (a meno di un raccordo di sviluppo limitato in prossimità dell'imbocco). Ulteriori diminuzioni del livello non danno luogo a incrementi della portata fluente nella condotta. Infatti, un aumento della portata darebbe luogo a pressioni *assolute* negative nel punto M , il che comporterebbe la rottura della vena liquida. La relativa sezione assume allora la funzione di *sezione di controllo* ai fini della determinazione della portata che può effettivamente transitare in condotta. Imponendo il valore di pressione assoluta nulla nel punto M , posto all'ascissa L_M , si ottiene:

$$h_A = z_M - \frac{p_{atm}^*}{\gamma} + \frac{U_{max}^2}{2g} + \lambda \frac{U_{max}^2}{2gD} L_M$$

e quindi il valore massimo della portata che può fluire in condotta per un assegnato livello z_A nel serbatoio di monte e per valori di livello nel serbatoio di arrivo $h'''_B < h''_B$:

$$Q_{max} = \Omega \sqrt{\frac{2g(h_A - z_M + p_{atm}^* / \gamma)}{1 + \lambda \frac{L_M}{D}}}.$$

Sulla base di tale portata massima, si determina anche il livello critico h''_B mediante la:

$$h_A = h''_B + \frac{U_{max}^2}{2g} + \lambda \frac{U_{max}^2}{2gD} L.$$

Per $h'''_B < h''_B$, come detto, la portata assume sempre il valore massimo. Poiché la linea piezometrica relativa deve terminare alla quota del pelo libero del serbatoio di valle, percorrendo l'asse della condotta dal serbatoio di valle verso monte essa si mantiene rettilinea fintanto che la piezometrica assoluta si mantiene al di sopra della condotta. La sezione ove la piezometrica assoluta intercetta l'intradosso della condotta (punto P in figura) delimita verso valle il tratto di corrente, avente inizio nella sezione di quota massima, nel quale si ha pressione assoluta nulla. Poiché in tale tratto la pressione assoluta è ovunque nulla nel punto più alto della sezione liquida, il moto è governato dalla seguente forma della Legge di Bernoulli:

$$z_M + \frac{U_{max}^2}{2g} = z_x + \frac{U_x^2}{2g} + \int_{L_M}^x \lambda \frac{U^2}{8g\Re} dx,$$

ove il pedice x indica la variabilità delle grandezze lungo l'asse. L'equazione è stata scritta introducendo il raggio idraulico nell'espressione della cadente in luogo del diametro della condotta, perché la corrente non occupa interamente la sezione della tubazione. Infatti, assumendo nulle le perdite di carico distribuite, la velocità U_x nella sezione generica di ascissa x risulterebbe crescente con l'ascissa perché la quota piezometrica assoluta z_x diminuisce ovviamente lungo l'asse. In presenza di una portata costante, ciò comporta una diminuzione dell'area della sezione lungo l'asse. La presenza delle perdite distribuite modifica i valori puntuali delle grandezze in gioco, riducendo l'accelerazione della corrente, ma non l'andamento qualitativo descritto. In queste condizioni, oltre la sezione di quota massima la condotta è sede di una corrente simile a quelle che si osservano in un canale (*correnti a superficie libera o a pelo libero*, descritte nel cap. 14), in cui la quota piezometrica è pari alla quota z_x della parte della superficie di contorno della corrente a pressione assoluta nulla (*superficie libera*, che nei canali è però soggetta alla pressione *relativa* nulla): si parla perciò di *moto*

a canaletta. Introducendo la portata costante Q_{max} , l'andamento del profilo della superficie libera può essere più precisamente descritto dalla equazione:

$$z_M + \frac{U_{max}^2}{2g} = z_x + \frac{Q_{max}^2}{2g} \left(\frac{1}{\Omega_x^2} + \int_{L_M}^x \frac{\lambda}{4\Re\Omega^2} dx \right).$$

L'accelerazione della corrente determina un aumento della pendenza della linea dei carichi totali nel senso del moto, la quale comunque aumenta la propria distanza dalla linea piezometrica, data dall'altezza cinetica (linee in tratto blu). Nel punto P la corrente occupa nuovamente l'intera sezione della condotta. Al corrispondente brusco allargamento è associata una perdita di carico localizzata che ricongiunge la linea dei carichi totali al suo tratto terminale rettilineo.

Occorre anche osservare che il funzionamento a portata massima è associato al fenomeno della cavitazione, in seguito al quale bolle di vapore si generano all'interno della massa liquida, rendendo il flusso alquanto irregolare. Nel tratto di corrente interessato dal moto a canaletta la pressione alla superficie libera è in realtà pari alla tensione di vapore, che, come già osservato, costituisce, a rigore, il valore minimo di riferimento della pressione assoluta nel punto M , in corrispondenza del quale si ottiene il valore massimo della portata.

In una condotta come quella di Figura 135 il flusso non si stabilisce spontaneamente, poiché essa ha quota massima superiore al livello del serbatoio di monte. Il liquido in esso contenuto non possiede quindi l'energia sufficiente a superare il punto più elevato della condotta. Il flusso può essere avviato soltanto creando una depressione in condotta che consenta al liquido di superare tale punto. Mediante tale procedura, denominata *adescamento*¹²⁶, si esegue lavoro meccanico pari al quantitativo di energia mancante al liquido contenuto nel serbatoio per superare la sezione critica. L'adescamento è però inefficace se la sezione di quota massima è posta a una quota rispetto al pelo libero del serbatoio di monte superiore all'altezza piezometrica corrispondente alla pressione atmosferica ($p_{atm}^*/\gamma = 10,33$ m nel caso dell'acqua), perché oltre tale livello la corrente dovrebbe fluire a regime a pressione assoluta negativa, il che non è consentito.

Da quanto illustrato con riferimento all'esempio di Figura 135, è evidente che la presenza di tratti in depressione è certa nel caso di una condotta con tratti posti a quota superiore al livello nel serbatoio di monte, ma non è necessariamente associata a tali condizioni. A seconda del tracciato altimetrico della condotta, il moto può verificarsi con una delle modalità illustrate in Figura 136, costituenti varie combinazioni di casi in cui: a) il moto ha necessità o meno di essere avviato mediante adescamento (o non può essere avviato in alcun modo); b) si creano o meno depressioni in condotta; c) nel caso di depressione, si determinano o meno condizioni di moto a canaletta.

Condizioni di depressione possono essere determinate, oltre che dall'andamento altimetrico della condotta, da strizioni della sezione quali quelle occorrenti, ad esempio, nella luce con tubo addizionale esterno illustrata nel §6.4.1, per la quale è stato discusso il problema del legame fra portata effluente e depressione massima ammissibile, all'imbocco di una condotta, ovvero, in assenza di distacco di vena, in dispositivi quali il venturimetro (§11.5). L'analisi del funzionamento in questi e altri casi è del tutto analogo a quello illustrato nel presente paragrafo.

12.9 Equazione indefinita del moto per le correnti

Lo studio di una corrente nelle più generali condizioni di moto vario richiede l'introduzione di una appropriata forma di equazione del moto da affiancare all'equazione di continuità (231), eventualmente semplificata per il particolare problema in studio. L'equazione del moto per correnti gradualmente variate si ricava applicando l'equazione globale del moto a un volume di controllo compreso fra due sezioni regolari poste a distanza infinitesima. In questa sede, ci limitiamo a una deduzione di tipo euristico, riconoscendo nella equazione una plausibile estensione di equazioni derivate in precedenza per il caso di fluido incompressibile, isoterma e omogeneo ($\rho = \text{cost}$).

¹²⁶ Si tratta, in sostanza, dell'operazione che si attua aspirando con la bocca per spillare il vino da una botte, mediante un tubo inserito da un'apertura posta nella parte superiore del contenitore.

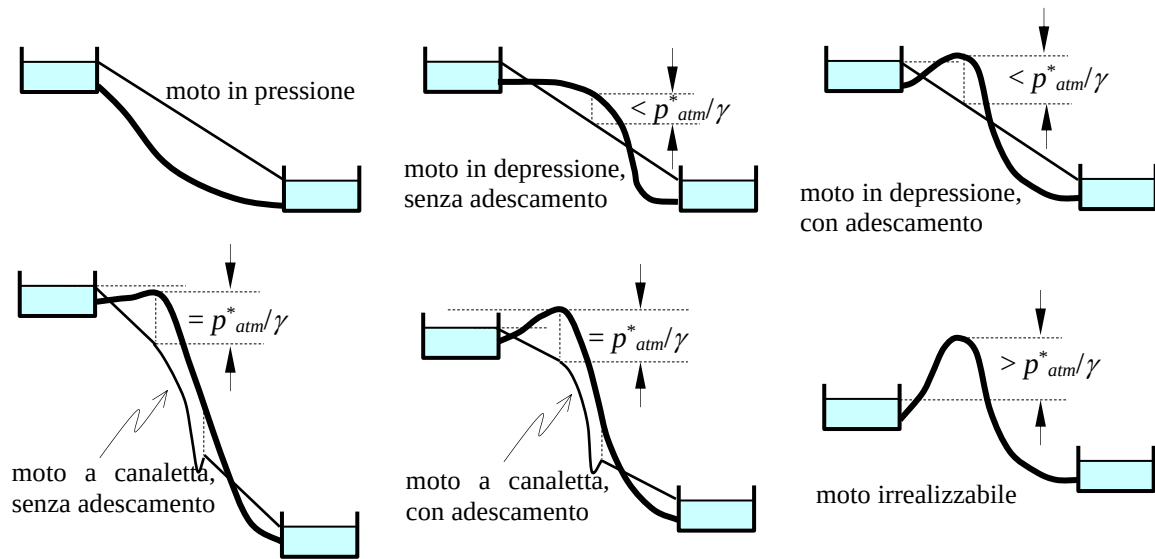


Figura 136. Possibili modalità di funzionamento di una condotta.

Nel §5.8.2 è stata derivata l'espressione della legge di Bernoulli per il moto vario di una particella di fluido incomprimibile, isoterma, omogeneo e viscoso:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) - \frac{\nu}{g} (\nabla^2 \bar{u})_s = 0, \quad (166)$$

nella quale figurano grandezze istantanee della particella fluida, con l'ultimo termine a primo membro a rappresentare l'effetto degli sforzi viscosi, che in regime stazionario si manifesta sotto forma di diminuzione del carico totale $H = z + p/\gamma + u^2/2g$ nel senso del moto (perdite di carico).

Successivamente, estensioni della legge di Bernoulli sono state scritte per le componenti di trasporto (medie di Reynolds) in un flusso turbolento: nel §9.4.4 per una singola particella lungo la traiettoria media; nel §11.4 per una corrente, limitatamente a caso di moto stazionario:

$$\tilde{H}_2 - \tilde{H}_1 = \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \frac{1}{\rho g} \left[\nabla \cdot \left(\underline{\tau}_{\mu} + \underline{\tau}_R \right) \right]_s \frac{u}{U} d\Omega \right\} ds, \quad (238)$$

in cui:

$$\tilde{H} = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g}$$

è il carico medio della corrente, definito sulla base del concetto di flusso di energia (o potenza) della corrente in una sezione regolare di una corrente gradualmente variata. Da tale equazione si deduce la forma differenziale:

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial s} = - \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \frac{1}{\rho g} \left[\nabla \cdot \left(\underline{\tau}_{\mu} + \underline{\tau}_R \right) \right]_s \frac{u}{U} d\Omega, \quad (272)$$

nella quale il termine a secondo membro rappresenta, a meno del segno, un'espressione formale (praticamente inutilizzabile) della cadente dei carichi totali.

Nel §12.2.1 è stata ricavata un'espressione della cadente dei carichi totali per il moto uniforme in condotto cilindrico che consente di scrivere la seguente equazione per il carico totale medio della corrente (qui nuovamente identificato con il soprassegno per evitare ambiguità):

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial s} = -\frac{\tau_0}{\gamma \mathfrak{R}} .$$

Infine, nel §12.4 si è accennato che sostanzialmente la medesima equazione, con il secondo membro espresso da una delle leggi di resistenza dedotte per il moto uniforme, è utilizzabile anche per moti stazionari non uniformi.

L'analisi rigorosa mediante l'equazione globale del moto menzionata in precedenza¹²⁷ consente di ottenere la seguente forma dell'equazione del moto vario per una corrente liquida gradualmente variata in regime turbolento:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} \right) + \frac{\tau_0}{\gamma \mathfrak{R}} = 0 , \quad (273)$$

che denota una evidente analogia con la legge di Bernoulli (166) e con l'espressione delle resistenze al moto uniforme. Tale espressione contiene un'approssimazione del termine cinetico derivante dall'ipotesi di regime turbolento. Tuttavia, essendo essa dedotta da un'equazione di bilancio della quantità di moto, invece che dell'energia, volendo tenere conto della effettiva distribuzione della velocità nella sezione, il termine cinetico dovrebbe più correttamente scriversi $\beta U^2/2g$, dove β è il coefficiente di ragguaglio della quantità di moto introdotto nel §12.5.1:

$$\beta = \frac{\int u^2 d\Omega}{U^2 \Omega} .$$

Esiste quindi una lieve discrepanza con l'equazione dell'energia per le correnti (272), nella quale il carico totale medio della corrente è definito in termini di coefficiente di ragguaglio delle potenze cinetiche α , del tutto irrilevante per gli scopi pratici. Nella (273) le perdite di carico possono essere espresse mediante una delle due principali formulazioni delle leggi per le resistenze al moto uniforme, di Darcy-Weisbach e di Chezy, adattate per prevedere l'eventualità di inversione del flusso e, nel caso della formula di Darcy-Weisbach, per tener conto della forma eventualmente non circolare della sezione, anche mediante l'introduzione di un coefficiente di forma nell'espressione dell'indice di resistenza al moto:

$$\frac{\tau_0}{\gamma \mathfrak{R}} = \lambda \frac{|U| U}{8g \mathfrak{R}}$$

$$\frac{\tau_0}{\gamma \mathfrak{R}} = \frac{|U| U}{\chi^2 \mathfrak{R}} .$$

A puro titolo informativo, si fa cenno alla possibilità che equazioni come quelle in oggetto producano soluzioni discontinue. Sebbene tale eventualità possa forse sembrare un'astrazione di natura puramente matematica, tale comportamento della soluzione è invece atto a rappresentare con buona approssimazione fenomeni piuttosto comuni, nonché di rilevante interesse tecnico, quali la propagazione di un'onda di piena generata dal collasso di un'opera di ritenuta o di un argine, o di onde marine frangenti in prossimità della riva. In tal caso occorre però ricorrere a una diversa formulazione delle equazioni (forma conservativa), sostanzialmente di tipo globale e perciò utilizzabile anche per correnti non più gradualmente variate. Tali argomenti, dei quali non è possibile dare conto nel presente corso, sono ampiamente trattati in svariati testi specialistici.

¹²⁷ Vedi Marchi-Rubatta, Cap. 16.

CAPITOLO TREDICESIMO

13. MACCHINE IDRAULICHE

13.1 Macchine a fluido

In generale, una macchina è un congegno atto a utilizzare e trasferire l'energia di una fonte primaria, eventualmente convertendone la forma. Ad esempio, in un'automobile con motore a scoppio l'energia primaria di tipo chimico del carburante viene dapprima trasformata in energia termica per effetto della combustione che avviene all'interno dei cilindri del motore e successivamente, per effetto delle pressioni che così si sviluppano e che si esercitano sui pistoni, in energia meccanica. Questa, per il tramite degli organi di trasmissione, viene trasferita agli assi delle ruote motrici e infine, per effetto dell'aderenza al suolo di queste, resa al veicolo in forma di energia cinetica e potenziale, in relazione a variazioni della velocità e della quota dello stesso.

In particolare, nelle *macchine a fluido* gli scambi di energia avvengono per il tramite di un fluido. Data la varietà di macchine a fluido esistenti, queste possono essere classificate in funzione di molteplici caratteristiche costruttive e funzionali.

Le *macchine termiche* operano su fluidi comprimibili, con conversione da energia interna in energia meccanica, o viceversa, e associate rilevanti variazioni di temperatura. Le *macchine idrauliche* operano su fluidi incompressibili (liquidi) e sono sede praticamente solo di scambi di energia meccanica fra il liquido e gli organi mobili della macchina.

Le *macchine motrici* sottraggono energia meccanica al liquido che le attraversa; le *macchine operatrici*, forniscono a una corrente liquida l'energia meccanica generata da un motore.

In relazione al regime di funzionamento, si distinguono *macchine volumetriche* e *macchine a flusso continuo*, o *turbomacchine*. Le prime hanno funzionamento ciclico e intermittente: il fluido viene dapprima spinto, o aspirato, in una camera a tenuta stagna, dalla quale viene successivamente espulso attraverso una seconda apertura, verso una condotta diretta all'utilizzazione. Un esempio è costituito dalle vecchie pompe a mano per l'emungimento da pozzi. Nelle turbomacchine il flusso liquido e lo scambio di energia con gli organi mobili sono, invece, continui e stazionari.

In relazione al tipo di moto degli organi meccanici, le macchine idrauliche si distinguono, infine, in *rotative* e *alternative*. Le prime sono dotate di un organo mobile animato da moto rotatorio attorno a un asse e sono generalmente a funzionamento continuo; nelle seconde, l'organo mobile è animato da un moto alternato fra due posizioni estreme e il funzionamento è discontinuo.

In Tabella 9 e Tabella 10 sono riportati schemi riassuntivi delle classificazioni introdotte per le macchine a fluido, distinti per macchine motrici e macchine operatrici.

Tabella 9. Classificazione delle macchine a fluido motrici

Fluido motore	Movimento organo mobile	Tipo di funzionamento	
		Macchine volumetriche	Turbomacchine
Liquido	Alternativo	Macchine alternative idrauliche (a revolver, stellari, etc...)	—
	Rotativo	Macchine rotative idrauliche (a ingranaggi, a palette, a eccentrici, etc...)	Turbine idrauliche (assiali, miste, radiali, tangenziali)
Vapore	Alternativo	Macchine alternative a vapore	—
	Rotativo	—	Turbine a vapore (assiali, radiali)
Gas	Alternativo	Motori alternativi (a combustione interna o esterna – Otto o Diesel)	—
	Rotativo	Motori rotativi (a combustione interna – Wankel)	Turbine a gas (assiali, radiali) turbine eoliche

Tabella 10. Classificazione delle macchine a fluido operatrici.

Fluido motore	Movimento organo mobile	Tipo di funzionamento	
		Macchine volumetriche	Turbomacchine
Liquido	Alternativo	Pompe alternative	—
	Rotativo	Pompe rotative volumetriche (a ingranaggi, a palette, a eccentrici, etc...)	Turbopompe (assiali, radiali, miste)
Gas	Alternativo	Compressori alternativi (a stantuffo, a membrana)	—
	Rotativo	Compressori rotativi volumetrici (roots, a palette, a eccentrici, etc...)	Turbocompressori e ventilatori (assiali, radiali, misti)

13.2 Macchine idrauliche

Nel prosieguo la trattazione verrà limitata alle macchine idrauliche e, prevalentemente, alle macchine idrauliche operatrici, più comunemente denominate *pompe*. Più specificamente, a seconda che l'energia meccanica venga generata da motori elettrici o da motori a scoppio, si parla rispettivamente di *elettropompe* o di *motopompe*.

Nelle turbomacchine l'organo rotante, detto *girante*, è collegato a un asse e composto da un certo numero di pale. Nelle pompe, l'asse è messo in rotazione da un motore; la spinta che le pale esercitano sul fluido, compiendo lavoro su di esso, determina il trasferimento di energia dalla macchina al fluido. Il fluido uscente dalla girante viene raccolto in un *collettore* a chiocciola di sezione crescente con la portata raccolta, e inviato alla condotta. Nelle turbomacchine motrici – dette, più semplicemente, *turbine* – l'asse è messo in rotazione dalla spinta che il fluido esercita sulle pale della girante, compiendo lavoro su di esse e cedendo quindi parte della propria energia, che viene eventualmente convertita in altra forma mediante ulteriori dispositivi collegati all'asse (in un impianto idroelettrico, l'energia meccanica viene convertita in energia elettrica mediante alternatori). L'ingresso nella girante è regolato da un *distributore*, sostanzialmente della stessa forma del collettore delle pompe e anch'esso talora dotato di palettature fisse.

Sia le turbine che le pompe rotative, a seconda della conformazione della girante, possono essere a *flusso radiale* (o *centrifughe*), *assiale* o *misto*, a seconda che il flusso in ingresso (solo per le turbine) o in uscita (per pompe e turbine) dalla girante risulti ortogonale all'asse di rotazione, parallelo allo stesso o avente direzione compresa fra le due. In Figura 137 sono rappresentate sezioni di pompe dei tre tipi, molto simili alle sezioni dei corrispondenti tipi di turbine. Nelle turbine e pompe assiali la girante è costituita sostanzialmente da un'elica. I tipi più sofisticati di macchine di questo tipo consentono la regolazione dell'inclinazione delle pale in funzione della portata, allo scopo di massimizzare il rendimento della macchina, durante il funzionamento della macchina; come d'uso per le turbine, esse prendono il nome del progettista (turbine e pompe *Kaplan*). Analogamente, le turbine radiali e miste vengono correntemente denominate turbine *Francis*. Esistono inoltre turbine a *flusso tangenziale* (*ruota Pelton* – Figura 138a), nelle quali le pale della girante, che può avere asse orizzontale o verticale, sono investite da un getto alla pressione atmosferica.

Le macchine idrauliche sono dette *ad azione* se il lavoro sulle pale della girante è interamente dovuto a variazione dell'energia cinetica del flusso (*ruota Pelton*); sono dette *a reazione* se il lavoro è dovuto in parte a variazione di pressione e in parte a variazione di energia cinetica (turbine e pompe a flusso radiale, assiale e misto).

Sono macchine idrauliche rotative anche dispositivi di concezione antichissima: fra le pompe la *coclea*, o *vite di Archimede* (Figura 138b) utile per il sollevamento di acque contenenti quantità anche notevoli di solidi sospesi (come può accadere, ad esempio, negli impianti di depurazione); fra le turbine, i mulini a vento o ad acqua – dei quali, in sostanza, la ruota Pelton costituisce una versione tecnologicamente aggiornata.

Sono esempi di pompe volumetriche alternative le vecchie pompe manuali per emungimento da pozzi, le pompe peristaltiche in uso particolarmente in medicina e i dispenser di detersivi liquidi di uso domestico quotidiano.

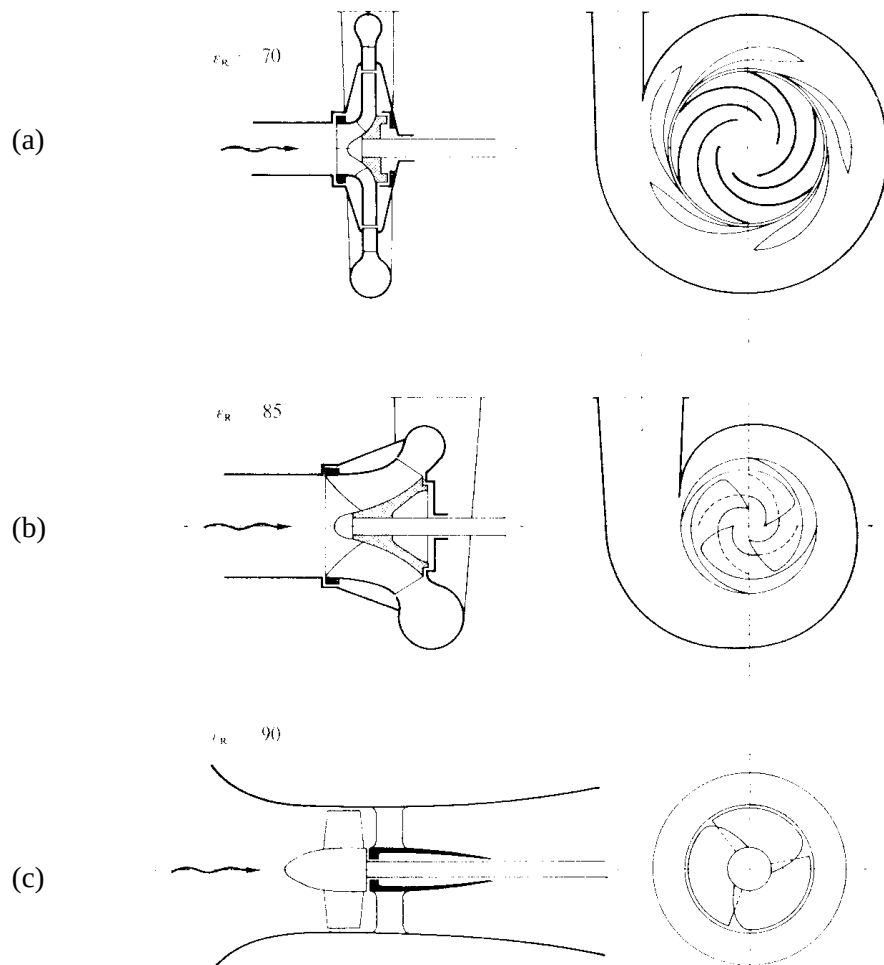


Figura 137. Sezioni di pompe a flusso (a) radiale (centrifuga), (b) misto, (c) assiale.



(a)



(b)

Figura 138. (a) ruota Pelton e (b) coclea.

13.3 Pompe

13.3.1 Generalità

Nei §12.6 e 12.7 – in particolare con formule del tipo (266) o (269) – si è illustrato come il valore della portata che può fluire in una data condotta dipenda, oltre che dalla conformazione della condotta (rappresentate dal coefficiente K), dalla differenza delle quote piezometriche della corrente ai due estremi. Poiché della quota piezometrica si è riconosciuto il significato energetico (§3.5), in sostanza la possibilità di far fluire una data portata in una data condotta è legata alla disponibilità da parte della corrente di sufficiente energia da dissipare nel percorso dall'estremo di monte all'estremo di valle. Fornire energia alla corrente consente pertanto il flusso di una maggiore portata a parità di altre condizioni, rispetto a quanto consentito nel funzionamento passivo di una condotta fin qui considerato (detto *funzionamento a gravità*¹²⁸).

Un primo esempio di utilizzazione di una pompa è quindi quello legato alla necessità di far fluire in una condotta una portata maggiore di quella consentita dal funzionamento a gravità di cui ai §12.6 e 12.7. Un altro esempio è costituito dalla necessità di consentire la circolazione in un circuito chiuso, quale, ad esempio, il circuito di un impianto di riscaldamento tradizionale a elementi radianti o il particolare circuito di un impianto di condizionamento ad aria circolante (p.es. pompe di calore), in cui parte del moto del fluido avviene non in un condotto ma negli ambienti serviti. Un terzo esempio, al quale verrà fatto riferimento nel prosieguo, è quello del moto di una corrente da un serbatoio di monte a una certa quota a un serbatoio di valle posto a una quota superiore, eventualmente con sbocco in aria (vedi Figura 139 e Figura 140). I concetti che verranno introdotti sono suscettibili di immediata estensione alle altre due tipologie; nel caso di riferimento, il funzionamento a gravità della condotta determinerebbe non solo una portata insufficiente (come nel primo esempio) o nulla (come nel secondo esempio) ma addirittura fluente in verso opposto a quello desiderato. Con riferimento agli schemi di Figura 139 e Figura 140 possono darsi innanzitutto le seguenti definizioni:

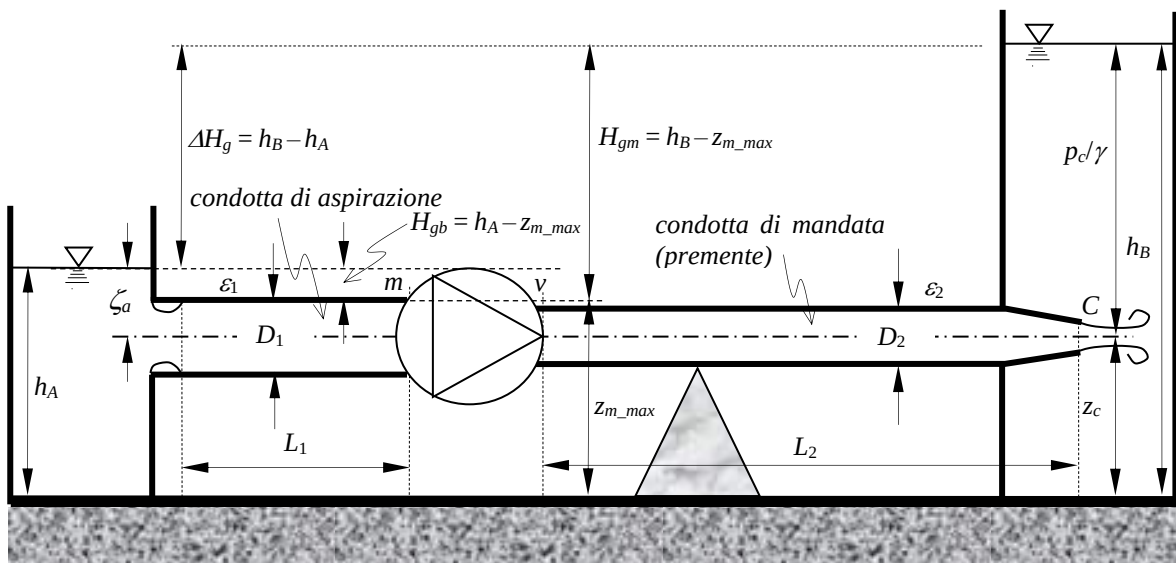


Figura 139. Schema di condotta con pompaggio (imbocco girante sotto battente).

¹²⁸ Questa denominazione è giustificata dal fatto che, delle forze esterne considerate nelle varie espressioni del bilancio di quantità di moto finora considerate, la forza motrice prima è proprio la forza peso, il campo delle forze di pressione essendo una conseguenza della presenza della gravità (come descritto dalle formule dell'idrostatica) e del moto del fluido e le forze viscosse una conseguenza del solo moto del fluido (come descritto dalla legge costitutiva dei fluidi newtoniani). A conferma di ciò vale l'osservazione che l'accelerazione di gravità g è comune a tutti i termini costituenti il coefficiente K delle equazioni (266) e (269); considerarla nulla renderebbe $K = \infty$ e, conseguentemente, nulla la portata.

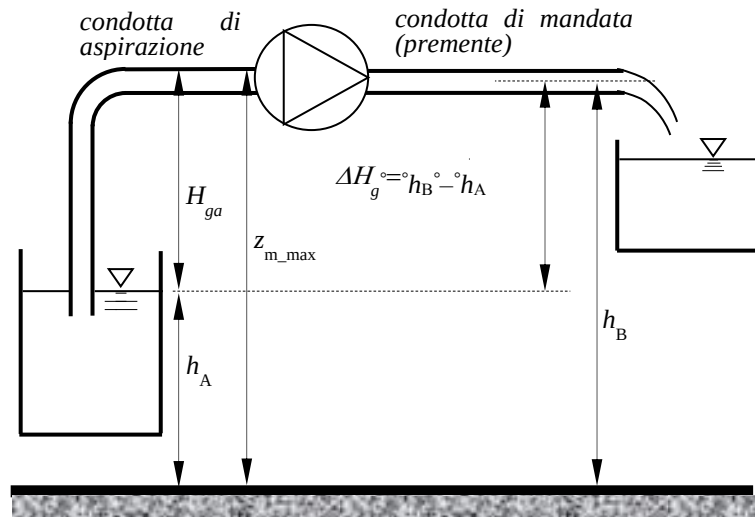


Figura 140. Schema di condotta con pompaggio (imbocco girante in depressione).

- *prevalenza geodetica*: dislivello fra le quote piezometriche della corrente agli estremi di monte e di valle dell'impianto (nel caso di sbocco in aria si considera la quota dello sbocco, essendo ivi nulla la pressione):

$$\Delta H_g = h_B - h_A ;$$

- *altezza geodetica di aspirazione* (H_{ga}): differenza di quota fra l'intradosso della sezione immediatamente a monte della pompa e il pelo libero del serbatoio di monte (quando l'intradosso della sezione a monte della pompa si trova a quota superiore al pelo libero, come in Figura 140);
- *battente geodetica di aspirazione* (H_{gb}): differenza di quota fra il pelo libero del serbatoio di monte e l'intradosso della sezione della condotta immediatamente a monte della pompa (quando questa si trova a quota inferiore al pelo libero, come in Figura 139);
- *altezza geodetica di mandata* (H_{gm}): differenza fra la quota piezometrica del serbatoio di valle e la quota dell'intradosso della sezione della condotta immediatamente a monte della pompa.

Si dicono poi *condotta di aspirazione* la condotta a monte della pompa e *condotta di mandata* o *premente* la condotta a valle della pompa.

Il funzionamento di una pompa inserita nell'impianto riprodotto in Figura 139 dà luogo alle linee piezometrica e dei carichi totali riportate nella Figura 141, dettate dalle condizioni al contorno ai serbatoi di monte (dal pelo libero del quale hanno entrambe inizio) e di valle (sul pelo libero del quale termina la linea piezometrica). Per un dato valore di portata, il tracciamento della linea dei carichi totali da monte verso valle a partire dal serbatoio A e a ritroso a partire dal serbatoio B consente di determinare i carichi totali della corrente H_m e H_v , rispettivamente a monte e a valle della pompa (bocche di aspirazione e di mandata della macchina). Si dice *prevalenza totale* della pompa l'incremento del carico totale:

$$\Delta H = H_v - H_m .$$

Il corrispondente differenziale di quota piezometrica:

$$\Delta H_m = \left(z_v + \frac{p_v}{\gamma} \right) - \left(z_m + \frac{p_m}{\gamma} \right) = \left(H_v - \frac{U_v^2}{2g} \right) - \left(H_m - \frac{U_m^2}{2g} \right) = \Delta H - \left(\frac{U_v^2}{2g} - \frac{U_m^2}{2g} \right) \quad (274)$$

prende il nome di *prevalenza manometrica*.

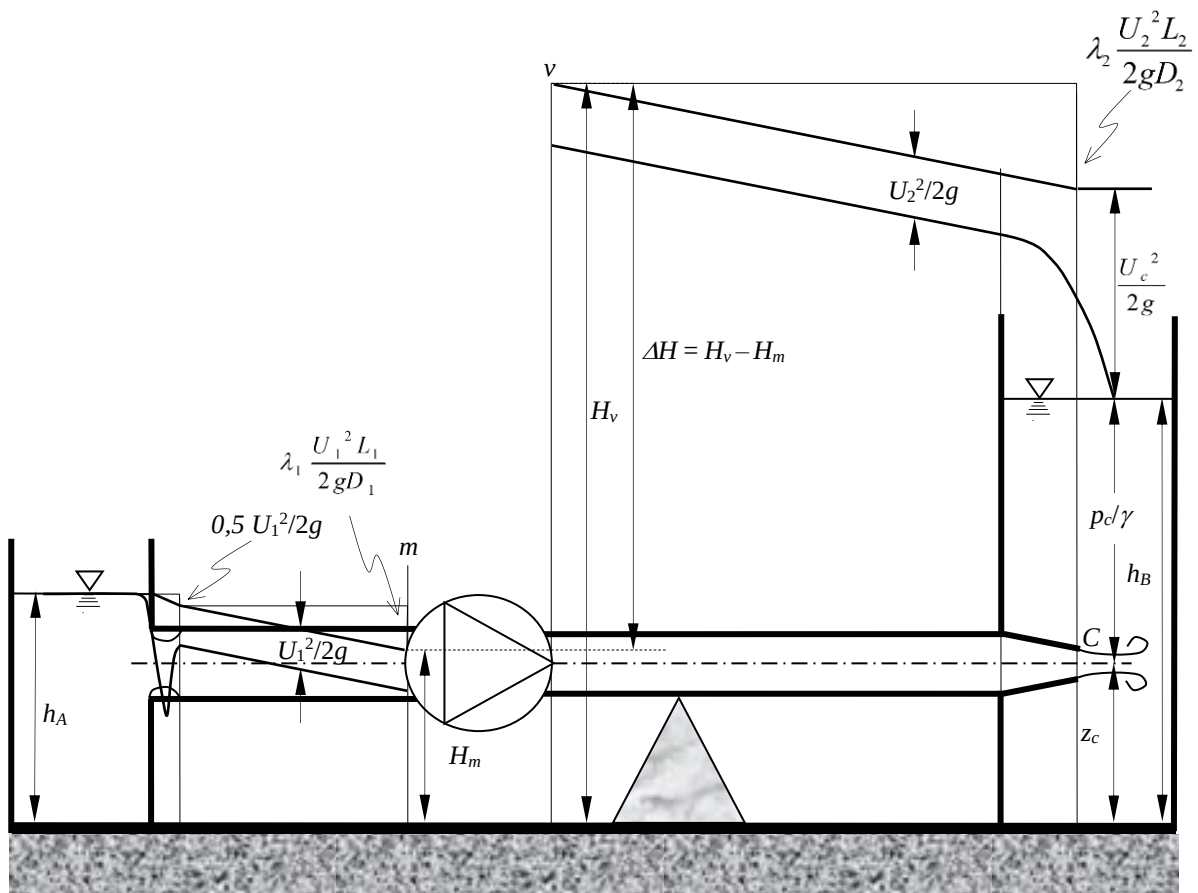


Figura 141. Linee dei carichi totali e piezometrica per la condotta con pompaggio di Figura 139.

Nella pratica conviene determinare la prevalenza totale di una pompa funzionante indirettamente, misurando la prevalenza manometrica mediante manometri e sommandovi la differenza delle altezze cinetiche fra valle e monte della pompa, secondo l'equazione precedente.

Giusta l'espressione (235) della potenza di una corrente in una sezione, e osservato che per un fluido incompressibile la portata Q risulta costante in tutte le sezioni della condotta, la potenza che la pompa fornisce alla corrente (*potenza utile*) si ottiene come differenza fra le potenze possedute dalla corrente a valle e a monte della macchina (bocche di mandata e di aspirazione):

$$N_u = P_v - P_m = \gamma Q \Delta H . \quad (275)$$

Per effetto di dissipazioni energetiche di vario tipo che avvengono nella macchina (come in qualunque tipo di macchina), questa deve assorbire una potenza superiore a quella fornita alla corrente. La potenza assorbita all'asse è espressa in funzione della potenza utile dalla:

$$N_a = \frac{\gamma Q \Delta H}{\eta} . \quad (276)$$

in cui $\eta = N_u / N_a$ è il rendimento della macchina, inferiore all'unità.

Un primo tipo di dissipazioni, che si verifica all'interno della girante, è legato allo sviluppo dello strato limite al contatto del flusso con le pale, al distacco della vena conseguente al brusco cambio di direzione all'ingresso nella girante e alla presenza di moti secondari (vortici) che si instaurano fra le pale. Un secondo tipo di perdite è legato al fatto che una frazione del flusso, rifluendo verso l'imbocco attraverso gli spazi necessariamente esistenti fra le pale della girante e l'involucro della macchina, percorre la girante più di una volta. Ulteriori perdite di tipo idraulico avvengono nelle

parti della pompa esterne alla girante (aspirazione e collettore). A tali perdite, tutte di tipo idraulico, si aggiungono quelle legate sostanzialmente ad attriti fra parti solide in movimento.

Si dice *grado di reazione* della pompa la frazione della potenza utile dovuta alla variazione di quota piezometrica fra l'ingresso e l'uscita della girante. Sulla base della (275), dette h_i e h_u le quote piezometriche rispettivamente all'ingresso e all'uscita della girante, e H_i e H_u i corrispondenti carichi totali, il grado di reazione della pompa può essere definito come:

$$\varepsilon_R = \frac{h_u - h_i}{H_u - H_i} = \frac{H_u - H_i - \frac{u_u^2}{2g} + \frac{u_i^2}{2g}}{H_u - H_i},$$

in cui u_i e u_u sono le velocità all'ingresso e all'uscita della girante, rispettivamente.

Pompe con alto grado di reazione sono adatte a piccoli salti utili e grandi portate; pompe con basso grado di reazione sono adatte a grandi salti utili e piccole portate. Il grado di reazione aumenta passando dalle pompe centrifughe, alle pompe a flusso misto, alle pompe assiali.

Un'indicazione quantitativa degli intervalli di portata e prevalenza indicati per i vari tipi di pompe è mostrata in Figura 142: le pompe assiali (a elica) sono indicate per grandi portate e piccole prevalenze – dal che la denominazione di *idrovoce*; nel passaggio alle macchine centrifughe a flusso misto e a flusso radiale il funzionamento avviene per portate via via decrescenti e prevalenze crescenti. È inoltre possibile incrementare ulteriormente la prevalenza di una pompa centrifuga disponendo due o più giranti in serie (pompe centrifughe multistadio). I massimi valori di prevalenza e i minimi valori di portata si realizzano con le pompe volumetriche.

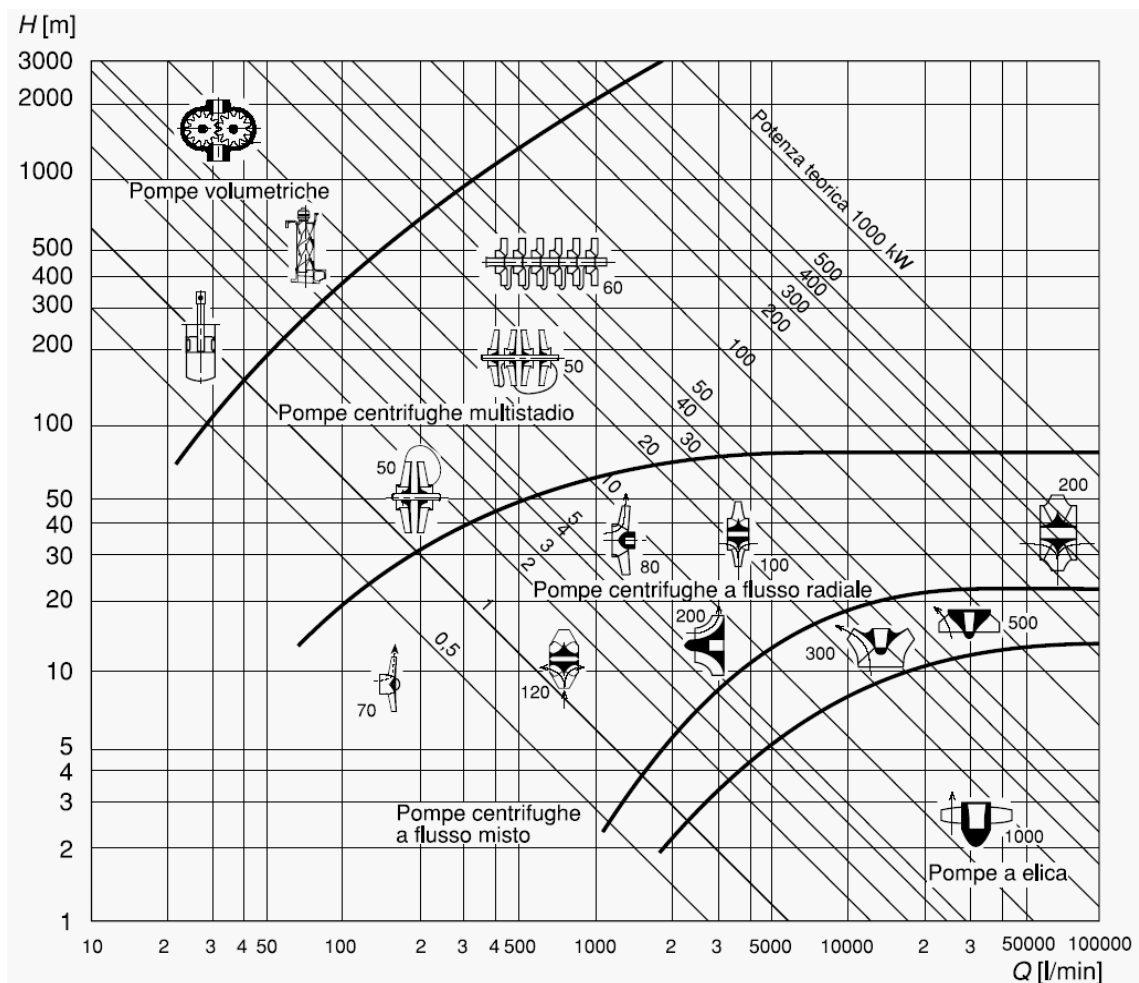


Figura 142. Campi di funzionamento dei vari tipi di pompe.

13.3.2 Determinazione del punto di funzionamento di una pompa

Nel presente e nei successivi paragrafi, le operazioni di verifica di un impianto di pompaggio verranno illustrate con riferimento agli schemi di Figura 139 e Figura 141 e al seguente tipico problema: assegnata completamente la geometria della tubazione (lunghezze, diametri e scabrezze dei tre tratti, diametro dell'ugello del convergente, livelli del liquido nei serbatoi) e le caratteristiche della pompa, determinare la portata che fluisce fra i due serbatoi in regime permanente, verificare le massime depressioni e calcolare la potenza installata a servizio della pompa.

Contrariamente al caso del funzionamento a gravità, l'andamento della linea dei carichi totali presenta un aumento nel senso del moto, con discontinuità fra le sezioni a monte e a valle della pompa. L'andamento della linea dei carichi totali si può analizzare come per i casi precedenti, avendo cura di rispettare le condizioni al contorno del problema, rappresentate dalle quote dei peli liberi nei due serbatoi, h_A e h_B . Si parte pertanto dal serbatoio A con la sequenza di perdite localizzate e distribuite esaminate in precedenza, fino alla sezione immediatamente a monte della pompa. Analogamente, si procede dal serbatoio B , a ritroso, fino alla sezione immediatamente a valle della pompa, con carichi totali crescenti. Come detto, il differenziale di carico totale che si produce fra monte e valle della pompa è la prevalenza totale ΔH . Introducendo la prevalenza totale nella equazione del moto, quest'ultima, ulteriormente generalizzata per estensione ai moti con immissioni di energia localizzate, si scrive:

$$H_A - H_c = 0,5 \frac{U_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{U_1^2}{2gD_1} L_1 - \Delta H + \lambda_2 \frac{U_2^2}{2gD_2} L_2$$

con:

$$H_A = z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{U_A^2}{2g} \cong z_A + \frac{p_A}{\gamma} = h_A$$

$$H_c = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{U_c^2}{2g} \cong h_B + \frac{U_c^2}{2g} .$$

Esprimendo i termini cinetici e delle perdite di carico in funzione del quadrato della portata, si ottiene una equazione che lega i valori di prevalenza totale richiesti in funzione delle portate circolanti corrispondenti, detta *equazione caratteristica della condotta*:

$$\Delta H = h_B - h_A + KQ^2 = \Delta H_g + KQ^2 , \quad (277)$$

in cui il coefficiente K , dipendente unicamente dalle caratteristiche delle condotte di aspirazione e di mandata, è dato dalla espressione:

$$K = \frac{1}{2g} \left(\frac{0,5}{\Omega_1^2} + \frac{\lambda_1 L_1}{D_1 \Omega_1^2} + \frac{\lambda_2 L_2}{D_2 \Omega_2^2} + \frac{1}{\Omega_c^2} \right)$$

La prevalenza totale è quindi somma delle perdite di carico e della prevalenza geodetica; quest'ultima rappresenta pertanto il minimo valore possibile di prevalenza totale in assenza di perdite di carico, ossia, il minimo contenuto energetico da fornire alla corrente in relazione ai valori alle estremità. Evidentemente, il contributo delle perdite di carico tende a zero al tendere all'infinito dei diametri di tutti i tratti della condotta, tendendo in tal caso a zero il coefficiente K .

Il funzionamento della pompa è descritto da una relazione fra prevalenza totale e portata, $\Delta H = f(Q)$, detta *curva caratteristica della pompa*, di cui è riportato un esempio in Figura 143 (ove la prevalenza viene indicata con il simbolo H).

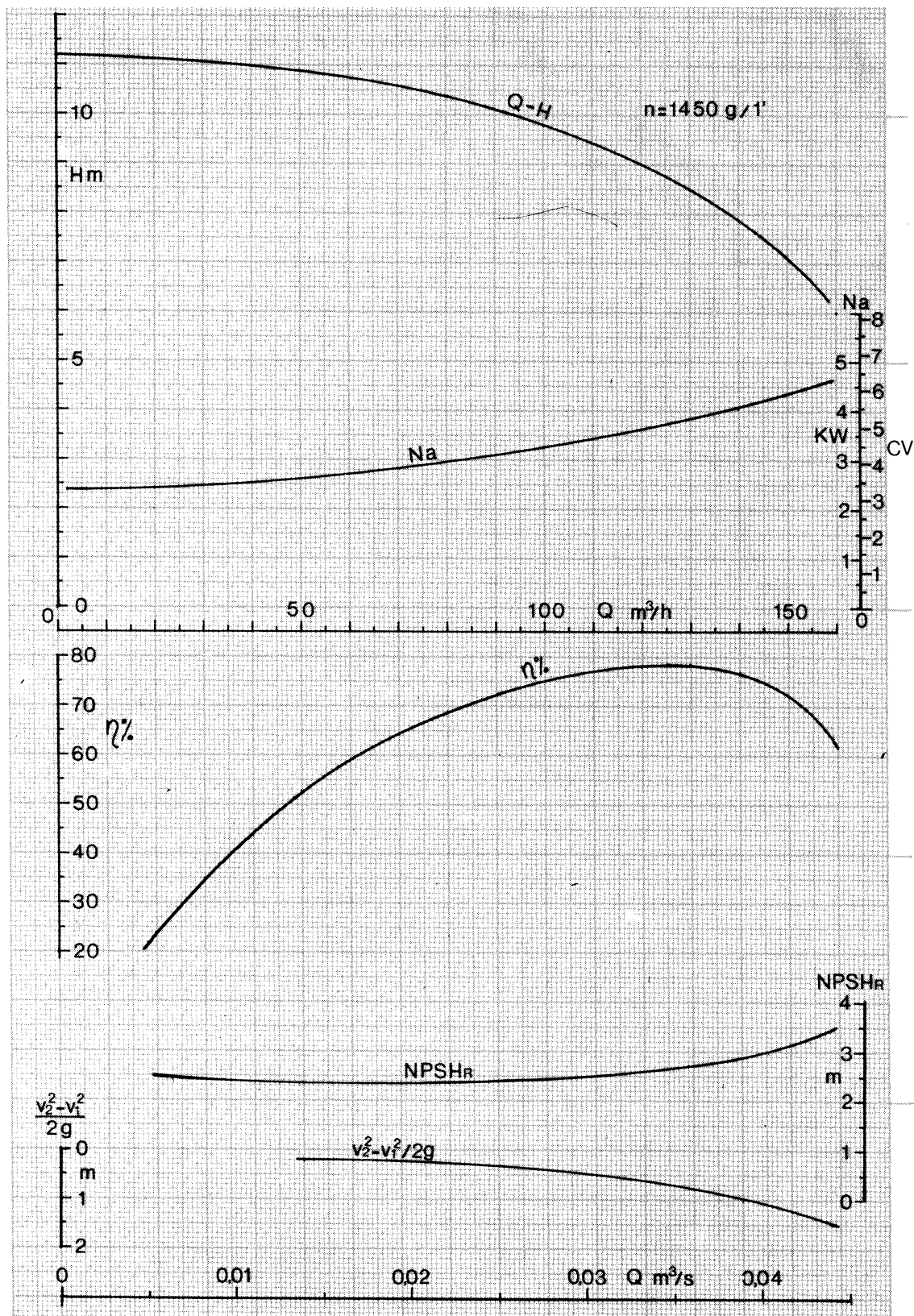


Figura 143. Curve caratteristica, della potenza assorbita, del rendimento, dell' $NPSH_R$ e del differenziale delle altezze cinetiche mandata-aspirazione per una pompa centrifuga in funzione della portata, a numero di giri costante ($n = 1450 \text{ g/min}$).

Nella stessa figura sono anche riportate, in funzione della portata: le curve della potenza assorbita all'asse della pompa, N_a , del rendimento della pompa, $\eta = N_u/N_a$, del cosiddetto *NPSH* (*Net Positive Suction Head*, letteralmente: carico positivo netto di aspirazione) e della differenza fra le altezze cinetiche nelle bocche di mandata ($v_2^2/2g$) e di aspirazione ($v_1^2/2g$). Questo ultimo termine, sommato alla prevalenza manometrica, fornisce la prevalenza totale, equazione (274). Tali curve, determinate sperimentalmente dal costruttore, vengono riportate nella documentazione tecnica a corredo della pompa.

Le due equazioni caratteristiche, della condotta e della pompa, devono essere verificate simultaneamente, per cui il punto di funzionamento del sistema condotta + pompa è rappresentato dal punto di intersezione delle due curve, come mostrato in Figura 144.

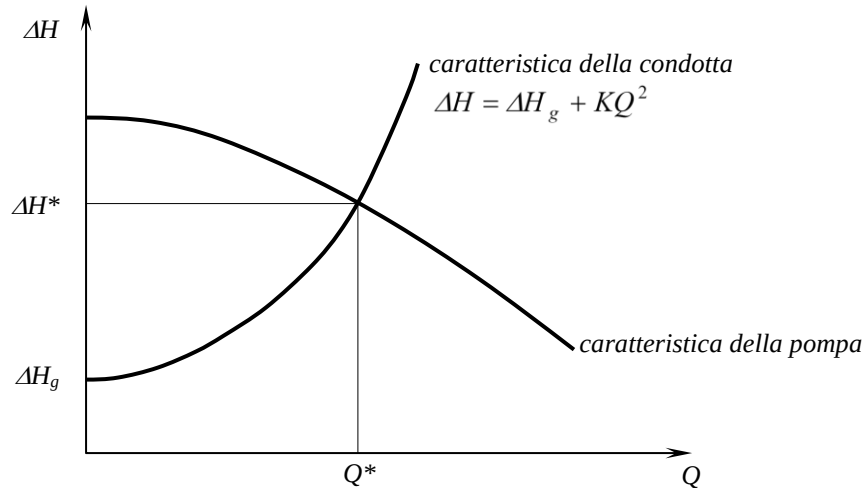


Figura 144. Determinazione del punto di funzionamento di un sistema pompa – condotta.

Nella pratica possono presentarsi una varietà di situazioni relative a disposizioni di più pompe in serie (tutte eroganti la stessa portata) o in parallelo (tutte soggette alla stessa prevalenza), o a sistemi di più serbatoi a quote differenti, per i quali si rimanda ai testi specialistici.

13.3.3 Verifica delle massime depressioni in un impianto di pompaggio

L'effettiva possibilità di realizzare il passaggio di una data portata dipende dal regime delle pressioni che si stabiliscono nelle varie sezioni della condotta. Come può vedersi dalla Figura 141, la condotta di aspirazione è soggetta in vari punti a condizioni di depressione. In particolare, le sezioni critiche sotto questo profilo sono la sezione contratta in prossimità dell'imbocco e la sezione immediatamente a monte della pompa. All'interno delle singole sezioni, il punto a pressione minima sarà quello posto alla quota massima: il punto di intradosso della condotta.

Con riferimento allo schema di Figura 145, detto ζ_a l'affondamento dell'asse della condotta rispetto alla superficie libera del serbatoio A e ricordato che la prima parte della perdita di imbocco che si osserva nella sezione contratta è data, per l'imbocco a spigolo vivo, da $0,1 U_1^2/2g$, la massima depressione nella sezione contratta si calcola dalla relazione:

$$0,1 \frac{U_1^2}{2g} + \frac{U_c^2}{2g} = \zeta_a - \frac{D_1}{2} - \frac{p_{c_{\min}}}{\gamma},$$

ottenuta da semplici considerazioni geometriche sul dislivello fra il pelo libero nel serbatoio e il punto di minimo della piezometrica. La pressione $p_{c_{\min}}$ è presa col proprio segno ed è pertanto, nel caso in questione, negativa. Il corrispondente valore dell'altezza piezometrica è dato da:

$$\frac{p_{c_{\min}}}{\gamma} = \zeta_a - \frac{D_1}{2} - 0,1 \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_c^2}{2g}.$$

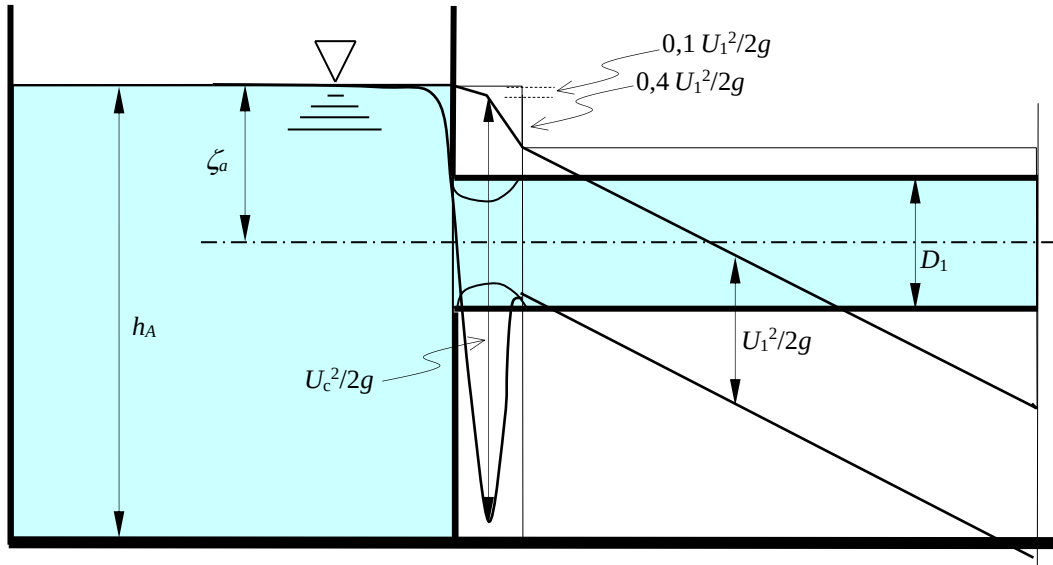


Figura 145. Dettaglio della linea piezometrica nella sezione contratta dell'imbocco.

La corrispondente pressione assoluta all'intradosso è data pertanto da:

$$p_{c_{\min}}^* = p_{atm}^* + p_{c_{\min}}.$$

Il limite massimo al quale si può spingere la depressione corrisponde al raggiungimento di una pressione assoluta pari alla tensione di vapore del liquido convogliato nelle particolari condizioni di funzionamento, p_v^* , definita nel §2.7. Deve essere perciò verificata la condizione:

$$p_{c_{\min}} + p_{atm}^* > p_v^*.$$

In caso contrario, il liquido tende a passare massivamente in fase gassosa attraverso la formazione di bolle di vapore al suo interno (*cavitazione*). Tale fenomeno comporta innanzitutto un generale irregolare e rumoroso funzionamento della condotta, per effetto della eterogeneità del fluido convogliato, esaltata dalla continua formazione e successiva chiusura delle cavità gassose. Inoltre, gli urti che il liquido esercita in tal modo sulle pareti della condotta e sugli organi mobili della pompa (girante) risultano particolarmente nocivi nei confronti di questi ultimi e sono in grado di mettere fuori uso la macchina in breve tempo.

A tale risultato contribuisce ulteriormente l'azione ossidante sulle parti metalliche della pompa legata alla maggiore disponibilità di ossigeno libero, per effetto della diminuzione della solubilità dei gas nei liquidi al diminuire della pressione. In tali condizioni, infatti, come descritto nel §2.9, parte dell'aria che si trovava in soluzione nel liquido nella vasca di presa tende anch'essa a passare allo stato gassoso, seppure in misura meno eclatante rispetto al fenomeno della cavitazione¹²⁹.

In funzione dei dati del problema in questione deve pertanto aversi:

$$\frac{p_{atm}^*}{\gamma} + \zeta_a - \frac{D_1}{2} - 0,1 \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_c^2}{2g} > \frac{p_v^*}{\gamma}.$$

Lo stesso tipo di verifica occorre fare, come detto, anche alla sezione di entrata della pompa. Più precisamente, la verifica viene eseguita soltanto convenzionalmente con riferimento a tale sezione, giacché i minimi valori di pressione si verificano all'interno della macchina, per effetto sia di perdite

¹²⁹ Tale fenomeno è il medesimo che si osserva nei punti di massima quota di una normale condotta e che richiede l'installazione di opportuni organi di sfiato per l'eliminazione delle bolle.

di carico totale – sia distribuite che, soprattutto, localizzate all'imbocco della girante – che della velocità all'ingresso nella girante, U_g . La verifica della massima depressione va pertanto eseguita tenendo conto della somma di tale perdita di carico aggiuntiva, Δw , e dell'altezza cinetica all'ingresso della girante, $U_g^2/2g$, il cui andamento in funzione della portata è determinato dal costruttore, che lo fornisce generalmente in forma grafica sotto la denominazione $NPSH_R$ (vedi Figura 143).

Introducendo il battente geodetico:

$$H_{gb} = \zeta_a - \frac{D_2}{2}$$

e raccogliendo tutte le perdite di carico in un termine:

$$\Delta y = 0,5 \frac{U_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{U_1^2}{2gD_1} L_1 ,$$

un'analisi simile a quella condotta per la sezione contratta all'imbocco consente di esprimere la pressione relativa minima (massima depressione) all'interno della macchina:

$$H_{gb} - \frac{p_{min}}{\gamma} = \Delta y + \frac{U_g^2}{2g} + \Delta w ,$$

da cui si ottiene la condizione per evitare la cavitazione nella pompa:

$$\frac{p_{atm}^*}{\gamma} + H_{gb} - \Delta y - \frac{U_g^2}{2g} - \Delta w > \frac{p_v^*}{\gamma} , \quad (278)$$

esprimibile nella forma:

$$\frac{p_{atm}^*}{\gamma} + H_{gb} - \Delta y - \frac{p_v^*}{\gamma} > \frac{U_g^2}{2g} + \Delta w , \quad (279)$$

nella quale

$$NPSH_R = \frac{U_g^2}{2g} + \Delta w$$

è il valore di $NPSH$ minimo richiesto, caratteristico della singola pompa, il cui andamento in funzione della portata è riportato in Figura 143, e:

$$NPSH_a = \frac{p_{atm}^*}{\gamma} + H_{gb} - \Delta y - \frac{p_v^*}{\gamma}$$

è il valore di $NPSH$ disponibile (*available* in lingua inglese, da cui il pedice "a") all'imbocco della pompa. In sostanza la verifica viene fatta calcolando un $NPSH$ disponibile che dipende soltanto da termini noti (p_{atm}^*/γ , p_v^*/γ) o calcolabili sulla base della conformazione della condotta (H_{gb} , Δy) e confrontandolo con il valore minimo ammissibile fornito dal costruttore. Nel caso si abbia a che fare con una pompa la cui sezione di ingresso sia posta a quota superiore del pelo libero di monte, dovrà considerarsi una prevalenza di aspirazione H_{ga} ; tutte le formule scritte sono ancora valide purché si sostituisca $-H_{ga}$ a H_{gb} .

In pratica, particolarmente per quanto riguarda la pompa, è buona norma adottare criteri più cautelativi di quello esposto in precedenza, limitando la depressione massima a un valore inferiore al limite corrispondente al raggiungimento di pressioni assolute pari alla tensione di vapore. Una

congrua maggiorazione della pressione minima di riferimento rispetto al valore della tensione di vapore può essere indicata nell'ordine di 0,5 m di colonna d'acqua (trattandosi di tale liquido), sebbene condizioni di funzionamento stabile possano essere conseguite con depressioni massime non superiori a circa 8 m di colonna d'acqua.

Poiché il soddisfacimento della condizione (279) dipende essenzialmente dalle caratteristiche della condotta, l'esito negativo della verifica *impone necessariamente il ridimensionamento della condotta*. Risulta a questo punto evidente come la condotta di aspirazione di un impianto di pompaggio debba essere, oltre che di sezione adeguata, della lunghezza minima possibile. Lo schema di Figura 139 è stato utilizzato unicamente a titolo illustrativo delle problematiche connesse al funzionamento di tali macchine idrauliche; in pratica la condotta di aspirazione sarà costituita da un unico tratto di sviluppo limitato e le perdite di carico lungo linea pari essenzialmente da quelle che si verificano nella condotta di mandata.

13.3.4 Calcolo della portata massima convogliabile da una pompa

Per ciascuna delle due sezioni di controllo si possono definire le condizioni critiche relative al raggiungimento di un valore della pressione minima pari alla tensione di vapore (o eventualmente a una pressione maggiore, più cautelativa). Poiché il raggiungimento di tali condizioni dipende dalla presenza delle perdite di carico, esse definiscono un valore massimo della portata che può essere convogliata dalla condotta in oggetto *indipendentemente dalla potenza della pompa*. Tale valore sarà dato dal minore dei due valori di portata che si ottengono, per ciascuna delle sezioni di controllo, imponendo sulla sezione la pressione assoluta minima (depressione massima) che si è disposti ad accettare in condotta, p_{acc}^* , comunque non inferiore alla tensione di vapore del liquido.

Per la sezione contratta all'imbocco il valore della portata critica si ottiene imponendo il segno di uguaglianza nella equazione (278):

$$\frac{p_{atm}^*}{\gamma} + \zeta_a - \frac{D_1}{2} - 0,1 \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_c^2}{2g} = \frac{p_{acc}^*}{\gamma}$$

da cui, nel caso il liquido sia acqua:

$$10,33 + \zeta_a - \frac{D_1}{2} - 0,1 \frac{Q_{cr_i}^2}{2g\Omega_1^2} - \frac{Q_{cr_i}^2}{2g\Omega_1^2 C_c^2} = \frac{p_{acc}^*}{\gamma},$$

nella quale sono stati introdotti il valore di colonna d'acqua corrispondente alla pressione atmosferica standard (10,33 m) e il coefficiente di contrazione all'imbocco, C_c .

Si ottiene quindi il valore della portata critica per la sezione di imbocco:

$$Q_{cr_i} = C_c \Omega_1 \sqrt{\frac{2g \left(10,33 + \zeta_a - \frac{D_1}{2} - \frac{p_{acc}^*}{\gamma} \right)}{0,1 C_c^2 + 1}}.$$

Analogamente, per la sezione di controllo all'aspirazione della pompa si avrà, in condizioni critiche:

$$\frac{p_{atm}^*}{\gamma} + H_{gb} - \Delta y(Q_{cr_a}) - \frac{p_{acc}^*}{\gamma} = \frac{U_g^2}{2g} + \Delta w = NPSH_R(Q_{cr_a}) \quad (280)$$

da cui si può dedurre il valore della portata critica corrispondente. In questo caso, il valore di portata si deduce per via grafica, dal momento che l'andamento di $NPSH_R$ è fornito in tale forma. In pratica, ciò si realizza tracciando, sul grafico del $NPSH_R$ fornito dal costruttore (Figura 143) la curva dei valori del primo membro della (280) in funzione di Q , che è una parabola avente concavità rivolta verso il basso. Il valore di portata del punto di intersezione delle due curve rappresenta il valore

critico per l'aspirazione della pompa. Si rimarca come il pompaggio di portate maggiori *richieda necessariamente il ridimensionamento della condotta*, non essendo realizzabile unicamente con l'installazione di una pompa di maggiore potenza.

13.3.5 Progetto di un impianto di pompaggio

Tipicamente, un impianto di pompaggio è costituito da una condotta di aspirazione di sviluppo limitato ad alcuni metri e da una condotta di mandata che copre l'intero sviluppo rimanente. Obiettivo della progettazione di un impianto di pompaggio è la determinazione dei diametri delle condotte di aspirazione e di mandata, della prevalenza e della potenza della pompa. Da un punto di vista puramente idraulico, il problema ammette le infinite soluzioni fornite dalla equazione caratteristica della condotta (277). Infatti, per ogni insieme di valori di diametri assegnati e per una data portata l'equazione caratteristica della condotta fornisce il valore di prevalenza che consente il passaggio della portata assegnata. Sulla base della conoscenza di portata e prevalenza totale si procederebbe quindi alla scelta della pompa.

Si tratta, in sostanza, di un problema di indeterminazione analogo a quello evidenziato nel §12.7.3 per il progetto di una rete di lunghe condotte. Come in quel caso, una soluzione univoca del problema si ottiene sulla base di un criterio di minimo costo, che viene di seguito illustrato assumendo che l'intera condotta, di lunghezza L , sia costituita da un unico diametro relativo alla sola condotta di mandata. Ciò è del tutto accettabile in considerazione del fatto che, essendo la condotta di aspirazione di sviluppo limitato, le relative perdite di carico sono di norma trascurabili rispetto a quelle aventi sede nella condotta di mandata, come pure il costo di costruzione.

Anche in questo caso, i costi complessivi si distinguono in costi di realizzazione dell'impianto, sopportati in un intervallo di tempo relativamente limitato (il tempo necessario alla costruzione dell'opera) e costi distribuiti nell'arco della vita utile dell'opera, eventualmente anche variabili da anno ad anno. Questi ultimi consistono di due parti: una relativa alla manutenzione dell'impianto (come per le reti di condotte a gravità), l'altra relativa al costo dell'energia utilizzata per il funzionamento della pompa.

Sulla base delle analisi dei prezzi per la realizzazione della condotta, è possibile esprimere il costo di impianto per metro lineare di condotta nella forma¹³⁰:

$$c_i = \omega_0 + \omega D^\varepsilon \quad (281)$$

in cui ω_0 , ω e ε sono coefficienti costanti per dati tipo di tubo e classe di pressione, con valori dell'esponente ε compresi fra 1 e 2. Dal costo unitario si ottiene il costo di impianto $C_i = c_i L$. I costi di impianto, sostenuti nel periodo limitato della realizzazione dell'opera, e i costi di manutenzione e di gestione, distribuiti sull'intera vita utile dell'opera, vanno resi omogenei con i metodi del calcolo attuariale, riducendo i primi a rate annuali che tengano conto dell'ammortamento del capitale e del tasso di interesse da corrispondere al finanziatore dell'opera. I diversi costi annui possono così essere sommati nel costo globale annuo per costruzione ed esercizio dell'opera, denominato *passività*.

La somma della rata annua corrispondente al costo di impianto C_i e dei costi di manutenzione per unità di lunghezza viene espressa come una frazione r di C_i . L'energia utilizzata per un dato intervallo temporale di funzionamento della pompa con assegnate portata e prevalenza (costanti), misurata in chilowattora (kWh), si ottiene moltiplicando la potenza assorbita dalla pompa in kW, ottenuta dividendo per 1000 il valore in W dato dall'equazione (276), per il tempo di funzionamento in ore, costituente un dato progettuale. Moltiplicando il valore così ottenuto per il costo unitario dell'energia c_{kWh} (in €/kWh), si ottiene il costo annuo da sostenere per il funzionamento della pompa. In definitiva,

¹³⁰ Nella contabilità a misura, le analisi dei prezzi forniscono il costo per unità di misura di un'opera mediante la valutazione dettagliata dei costi, sulla base delle incidenze delle varie voci di costo: manodopera, materiali, noli e mezzi d'opera, con l'aggiunta dell'utile di impresa, delle spese generali e tecniche e per la sicurezza. Nel caso di una condotta, occorrerà considerare i costi per la realizzazione dello scavo, del letto di posa, del rinterro, dell'acquisto, trasporto e posa della tubazione, etc... L'insieme dei prezzi unitari corrispondenti ai diametri commerciali fra i quali si prevede ricada il diametro di progetto può essere espresso nella forma (281) mediante il già menzionato procedimento di regressione.

detto T_a il numero di ore annue di funzionamento dell'impianto per la portata Q , il costo annuo per energia elettrica C_e (di esercizio) è dato da:

$$C_e = c_{kWh} \frac{\gamma Q \Delta H}{1000 \eta} T_a = c_{kWh} \frac{\gamma Q (\Delta H_G + K Q^2)}{1000 \eta} T_a .$$

In tale espressione, il termine $K Q^2$ rappresenta le perdite di carico lungo linea. Assumendo condizioni di lunga condotta ed esprimendo la cadente con la formula di Chezy e scabrezza di Strickler k_s (270) nella forma monomia:

$$j = k Q^2 D^{-n} ,$$

in cui $k = 4^{10/3} / (\pi^2 k_s^2)$ e $n = 16/3$, l'espressione del costo annuo per energia elettrica assume la forma:

$$C_e = c_{kWh} \frac{\gamma Q (\Delta H_G + k Q^2 D^{-n} L)}{1000 \eta} T_a ,$$

che è la più adatta per impostare il problema di minima passività. Infatti, risulta ora evidente che, per dati valori dei parametri fissi (costo unitario dell'energia, portata, ore di funzionamento, rendimento, parametri idraulici e rappresentativi del costo di costruzione), al crescere del diametro della condotta aumenta la rata annua per impianto e manutenzione, che tende all'infinito per $D \rightarrow \infty$, mentre diminuisce il costo annuo di esercizio, che tende al valore costante $c_{kWh} \gamma \Delta H_G T_a / 1000 \eta$ per $D \rightarrow \infty$. Viceversa, per $D \rightarrow 0$ tende a zero la rata annua per costruzione e manutenzione e cresce senza limiti il costo di esercizio, per effetto della stessa tendenza della cadente, nella cui espressione il diametro si trova a denominatore. Poiché la passività totale, somma delle due voci, tende all'infinito per $D \rightarrow 0$ e $D \rightarrow \infty$, essa presenta necessariamente un minimo in corrispondenza di un valore del diametro che è quindi da ritenersi ottimale in termini economici (diametro di *massimo tornaconto*). Il criterio della minima passività consiste quindi nella determinazione di tale valore, mediante la ricerca del minimo della funzione del diametro costituita dalla passività:

$$P = r C_i + C_e .$$

I grafici della rata annua dei costi di impianto e manutenzione, dei costi di esercizio e della passività dell'impianto sono riportati in tratto sottile in Figura 146. Il diametro D_t corrispondente alla passività totale minima è da intendersi come valore teorico perché in generale non disponibile nella produzione commerciale. Il passaggio dal diametro teorico ai diametri commerciali si esegue nel modo descritto per le lunghe condotte, ovvero utilizzando il primo diametro commerciale superiore al valore teorico, se la maggiore spesa conseguente si può ritenere accettabile.

È peraltro evidente che, ai fini della ricerca della passività minima, è sufficiente considerare la sola parte del costo di esercizio dipendente dal diametro, perché la parte costante corrispondente alla prevalenza geodetica determina unicamente una traslazione della curva della passività parallelamente all'asse delle ordinate, ma non lo spostamento del punto di minimo. Analoga considerazione vale per la rata annua del costo di impianto e manutenzione.

Per lo stesso motivo, nella valutazione dei costi di impianto, non vengono considerati costi fissi, o approssimativamente considerabili come tali, quali, ad esempio, quelli sostenuti per le opere civili per l'alloggiamento delle pompe o per l'acquisto delle stesse pompe. Con queste semplificazioni, nelle espressioni dei costi di diversa natura la lunghezza della condotta compare come fattore comune, per cui ci si può ridurre a considerare i costi (privati della parte fissa) per unità di lunghezza. Si ottengono in tal modo le curve riportate in tratto spesso in Figura 146.

Inoltre, è possibile considerare senza sensibile complicazione il caso di funzionamento a portata variabile nel tempo, valutando la parte variabile del costo annuo per energia C'_e come:

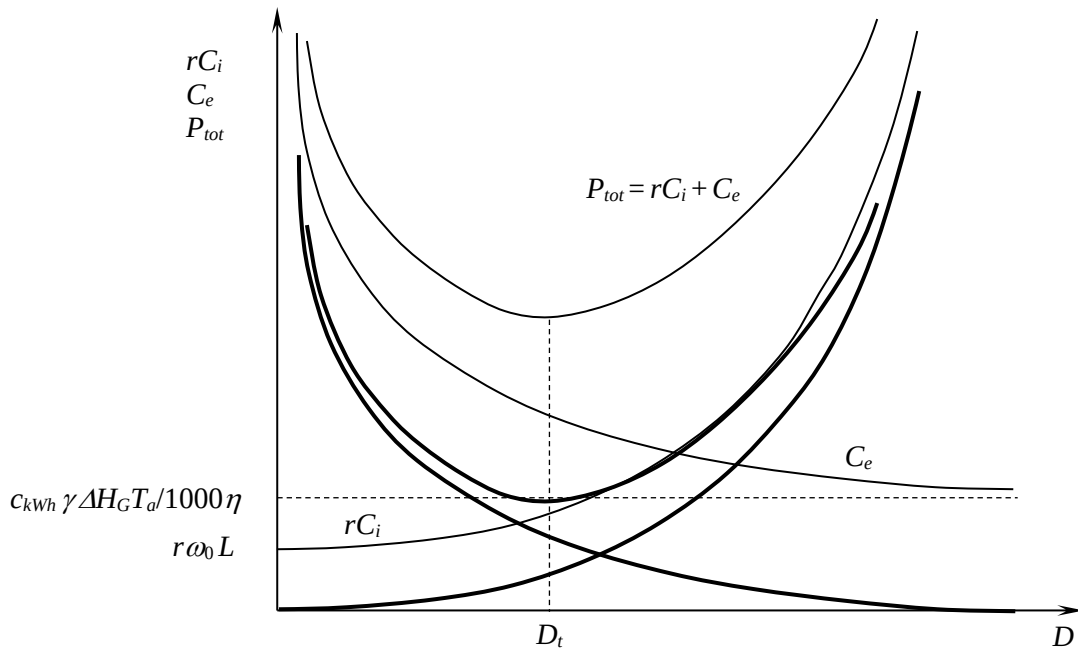


Figura 146. Curva della passività totale in funzione del diametro della condotta.

$$C'_e = c_{kWh} \frac{\gamma k D^{-n}}{1000 \eta} \int_0^{T_a} Q^3 dt = c_{kWh} \frac{\gamma k D^{-n}}{1000 \eta} T_a \overline{Q^3}.$$

La parte variabile della passività da minimizzare è quindi data da:

$$P' = r \omega D^\varepsilon + c_{kWh} \frac{\gamma k T_a \overline{Q^3}}{1000 \eta} D^{-n} = r \omega D^\varepsilon + \psi \overline{Q^3} D^{-n},$$

avendo conglobato nel termine ψ tutti i termini costanti, a meno della media dei cubi delle portate. Derivando rispetto al diametro e uguagliando a zero si ottiene:

$$\frac{\partial P'}{\partial D} = \varepsilon r \omega D^{\varepsilon-1} - n \psi \overline{Q^3} D^{-(n+1)} = 0,$$

da cui l'espressione del diametro teorico:

$$D_t = \left(\frac{n \psi \overline{Q^3}}{\varepsilon r \omega} \right)^{\frac{1}{n+\varepsilon}}.$$

Il valore della somma $n + \varepsilon \cong 7$ fa sì che il valore del diametro risultante sia poco sensibile a errori nella valutazione di parametri contenuti entro parentesi. In particolare, si menziona l'assunzione di una scabrezza costante, la quale non può che considerarsi una approssimazione necessaria per la trattazione analitica, non corrispondente alla reale evoluzione temporale delle condizioni della condotta. Peraltro, facendo uso di un foglio di calcolo e riferendosi, come è ormai chiaro doversi fare, al solo insieme di diametri e, volendo, di pompe disponibili in commercio, la determinazione del diametro commerciale di massimo tornaconto può eseguirsi agevolmente anche tenendo conto di portate, scabrezze, rendimenti, etc. variabili nel tempo.

La scelta dei diametri commerciali con i quali realizzare la condotta di mandata deve inoltre tenere conto di limitazioni sulle velocità medie in condotta: in generale, un limite massimo dell'ordine di

2-2,5 m/s per evitare un rapido deterioramento della parete interna della tubazione; nel caso degli acquedotti a uso idropotabile, un limite minimo dell'ordine di 0,5 m/s per evitare un tempo di permanenza dell'acqua in condotta eccessivo, che potrebbe comprometterne le caratteristiche organolettiche. Sia tali limitazioni, sia la necessità di realizzare condotte di mandata di lunghezza contenuta per ridurre le sovrappressioni provocate dalle manovre di avvio e di arresto delle pompe (*colpo d'ariete*), fanno sì che, spesso, risulti conveniente realizzare le mandate con un unico diametro commerciale, contrariamente a quanto visto nel § 12.7.2 per le lunghe condotte a gravità.

Per quanto riguarda la condotta di aspirazione, quand'anche la verifica alle massime depressioni indicasse la necessità di un adeguamento rispetto alla sezione della bocca di aspirazione della pompa, le condizioni di ottimalità economica non verrebbero modificate sostanzialmente in considerazione del limitato sviluppo di tale tronco.

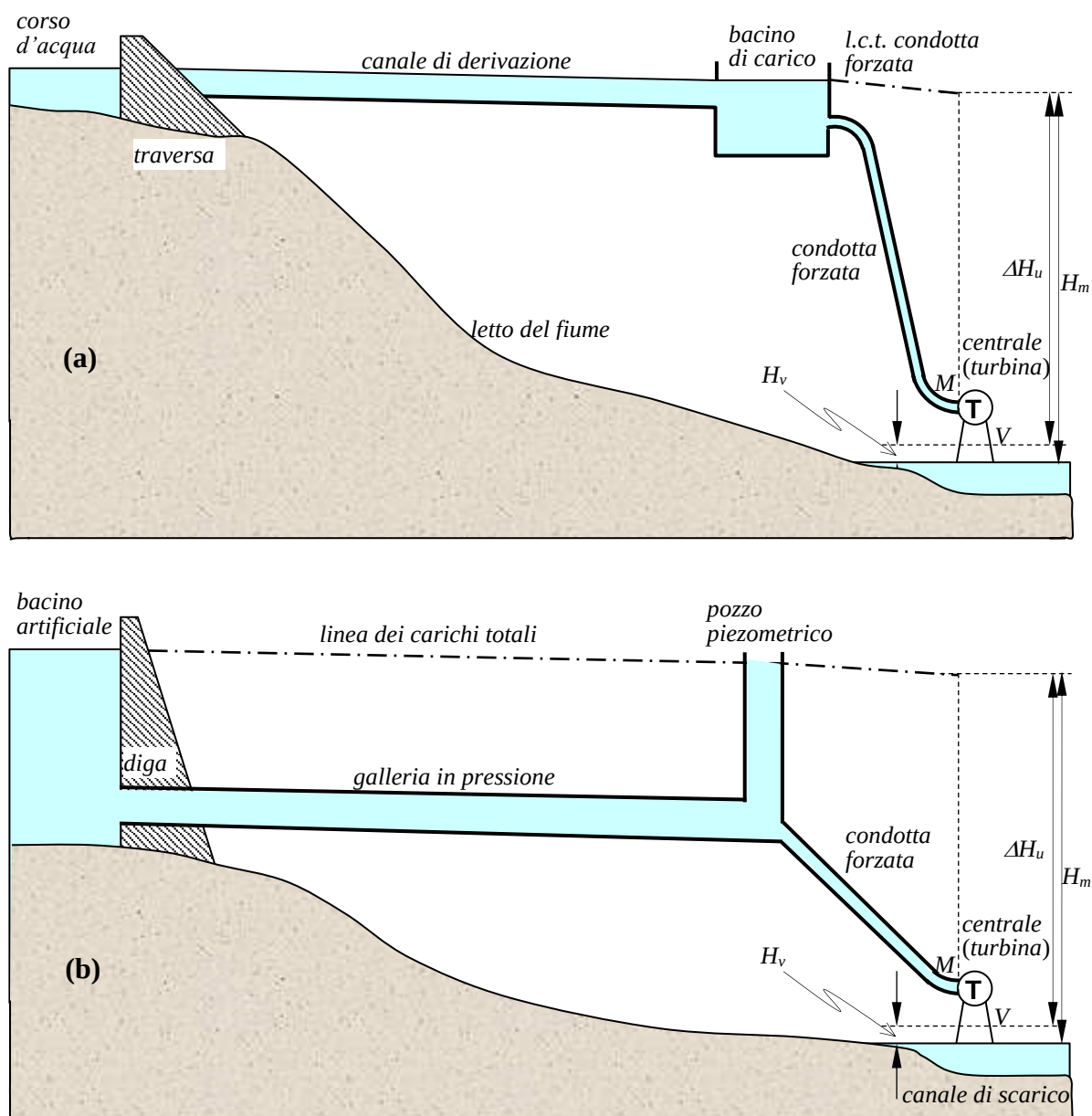


Figura 147. Schemi di impianto idroelettrico: (a) con presa superficiale, bacino di carico e condotta forzata; (b) con presa sotto carico, galleria in pressione, pozzo piezometrico e condotta forzata.

13.4 Turbine e impianti di forza motrice

Tipici schemi di impianti idroelettrici sono riportati in Figura 147. Nello schema di Figura 147 (a) uno sbarramento di altezza modesta (*traversa*) realizzato su un corso d'acqua consente di alimentare, tramite un'opera di presa, un canale derivatore che conduce a un bacino di carico, posto planimetricamente in prossimità della centrale idroelettrica nella quale sono ospitate le turbine, ma a quota talora anche notevolmente superiore a essa. Il bacino di carico è collegato alle turbine da una condotta forzata che può essere anche molto ripida. A valle della turbina la portata viene restituita al corso d'acqua in una sezione a valle di quella sulla quale era stato realizzato lo sbarramento, attraverso un canale di scarico. L'impossibilità di immagazzinare grandi quantità di acqua per effetto della modesta altezza dello sbarramento impone di turbinare portate legate al regime occasionale del corso d'acqua (impianto *ad acqua fluente*).

Nello schema di Figura 147 (b), la realizzazione di uno sbarramento di dimensioni maggiori (diga) consente la formazione di un serbatoio artificiale, dal quale la portata desiderata viene convogliata verso la condotta forzata mediante una galleria in pressione. Al termine della galleria, ove ha inizio la condotta forzata, è presente un pozzo piezometrico, costituito da una canna verticale atta ad attenuare le oscillazioni di pressione nella condotta forzata.

La corrente di portata Q di acqua di peso specifico γ possiede un carico totale H_m nella sezione a monte della turbina. Dovendo trovarsi a quota piezometrica di poco differente dal livello nel canale di scarico a valle della turbina, ivi essa possiede un carico $H_v < H_m$. Si dice *salto utile* la differenza $\Delta H_u = H_m - H_v$. A tali valori dei carichi totali corrispondono le potenze $P_m = \gamma Q H_m$ e $P_v = \gamma Q H_v < P_m$. Pertanto, nel passaggio attraverso la turbina, la corrente ha ceduto alla macchina la potenza (energia per unità di tempo) $\Delta P = P_m - P_v = \gamma Q \Delta H_u$.

Ai fini della massimizzazione della resa economica dell'impianto idroelettrico, a fronte di portate determinate sostanzialmente dal regime idrometrico del corso d'acqua, occorre aumentare convenientemente il salto utile. A tal fine, occorre ridurre quanto più possibile le perdite di carico nel canale derivatore e nella condotta forzata, agendo sui parametri rilevanti a tal fine, quali le sezioni liquide e le scabrezze. Questa parte della progettazione può essere ricondotta alla soluzione di un problema di massimo beneficio economico, del tutto analogo al problema di minima passività utilizzato per gli impianti di pompaggio. In questo caso, occorre determinare il diametro che rende massima la differenza fra i benefici economici connessi alla disponibilità di energia e i costi di impianto e manutenzione (beneficio economico netto), anche in questo caso distribuiti nel tempo in modo disomogeneo. Tuttavia, in pratica le condotte forzate vengono realizzate con una successione di tronchi di diametro differente, in relazione alle pressioni anche notevolmente differenti esistenti lungo l'asse (i cambi di diametro vengono realizzati a intervalli regolari dell'altezza piezometrica dell'ordine di 150÷200 m).

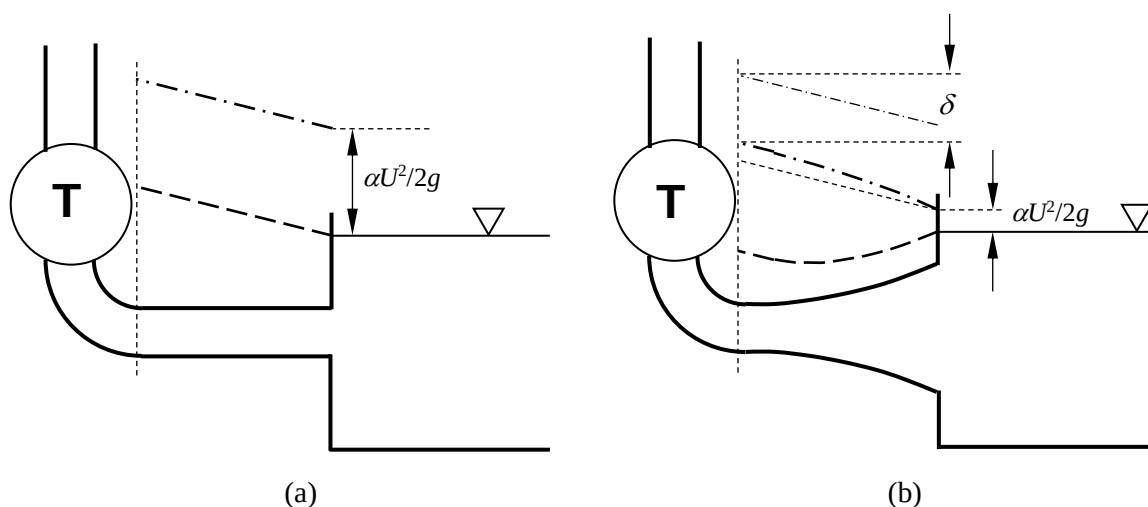


Figura 148. Schema di scarico a valle di turbina: (a) senza e (b) con diffusore.

Specialmente negli impianti a bassa caduta, nei quali l'energia cinetica residua della corrente rappresenta una quota parte non trascurabile dell'energia complessivamente utilizzata, può essere utile anche ottenere una riduzione del carico totale a valle della macchina riducendo la perdita di sbocco nel canale di scarico, ciò che può ottenersi installando un particolare dispositivo a valle della turbina, detto *diffusore*, il cui principio di funzionamento viene illustrato sulla base dello schema in Figura 148. In assenza di diffusore (Figura 148a), il carico totale all'uscita della turbina, misurato rispetto al livello nel canale di scarico, è dato dalla somma dell'altezza cinetica allo sbocco (perdita di sbocco) e delle perdite di carico nella tubazione di scarico che dall'uscita della turbina conduce al canale, entrambe crescenti al diminuire del diametro della condotta. Il diffusore è sostanzialmente costituito da un divergente, la cui funzione è diminuire l'altezza cinetica allo sbocco come conseguenza della maggiore sezione rispetto alla tubazione in uscita dalla turbina (Figura 148b). La convenienza di utilizzare un diffusore è legata al fatto che tale diminuzione eccede le maggiori perdite di carico che in esso inevitabilmente hanno luogo (cfr. §12.5.4), di modo che il carico totale all'uscita della turbina risulti convenientemente diminuito e il salto utile corrispondentemente aumentato. A tale scopo, il dispositivo deve essere disegnato accuratamente allo scopo di contenere le perdite di carico. Nello schema in Figura 148b sono riportate per confronto, in tratto sottile, la linea dei carichi totali relativa al caso (a) e una linea di pari pendenza sovrastata dalla la linea dei carichi totali in presenza del diffusore, come conseguenza delle maggiori perdite di carico. Il guadagno di salto utile è dato dall'altezza δ .

CAPITOLO QUATTORDICESIMO

14. CORRENTI A SUPERFICIE LIBERA

14.1 Generalità

Si dice *corrente a superficie libera*, o *a pelo libero*, una corrente che presenta parte della sua superficie di contorno a contatto con l'atmosfera ed è perciò vincolata ad avere tale porzione di superficie esposta alla pressione atmosferica. Sebbene, in termini generali, una corrente a superficie libera così definita possa essere costituita, per esempio, da un getto in aria, la teoria delle correnti a pelo libero ha a oggetto il moto di una corrente in un canale artificiale o in un alveo naturale, quale quello rappresentato in Figura 149.

Contrariamente al caso delle correnti in pressione, le correnti a pelo libero non sono vincolate ad assumere una forma prestabilita; il loro studio presenta conseguentemente qualche maggiore difficoltà, sia nel caso di moto uniforme che nel caso di moto stazionario non uniforme, anche a motivo del fatto che le correnti a pelo libero in condizioni sensibilmente differenti dal moto uniforme possono avere estensioni ragguardevoli.

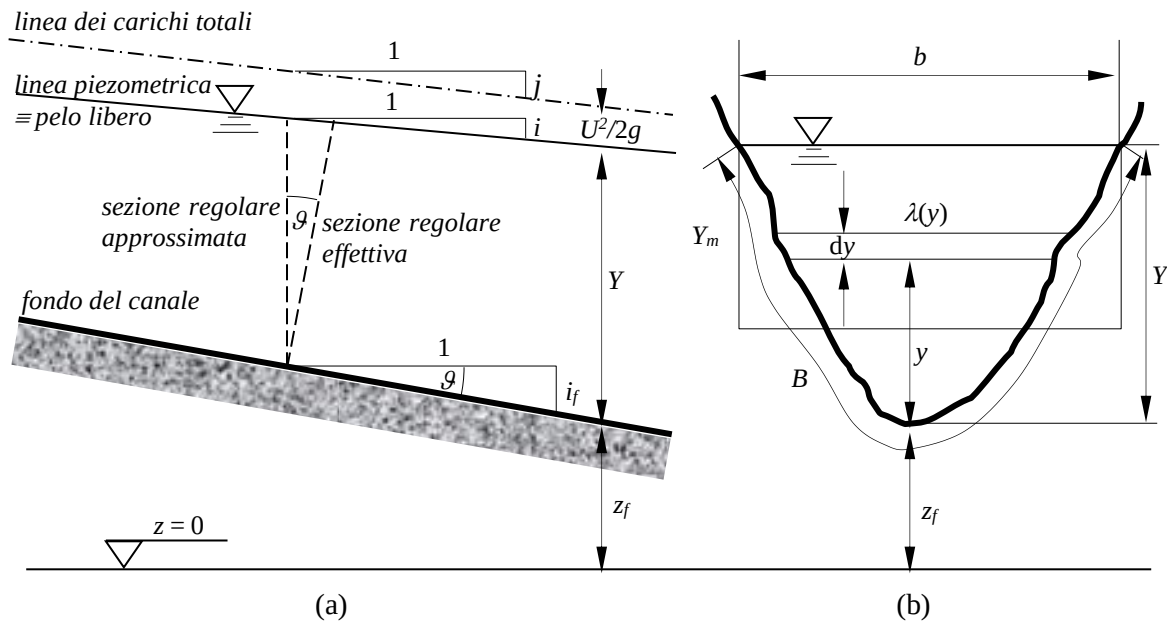


Figura 149. Elementi caratteristici di una corrente a pelo libero: (a) sezione longitudinale; (b) sezione trasversale.

Le ipotesi alla base della teoria delle correnti a pelo libero sono quelle di liquido a densità costante, corrente gradualmente variata – cui consegue la presenza di sezioni regolari ove la pressione è distribuita idrostaticamente – e piccola pendenza del fondo, col che risulta piccolo l'angolo ϑ che il profilo del fondo dell'alveo forma con l'orizzontale, $\cos \vartheta \cong 1$ e le sezioni regolari possono essere considerate, con ottima approssimazione, verticali. Si assume inoltre che il profilo trasversale della superficie libera nelle sezioni della corrente sia orizzontale, il che consente di definire la profondità Y della corrente in una sezione come la differenza di quota fra il pelo libero e il punto più depresso della sezione, la cui quota verrà indicata con z_f . Inoltre, l'asse della corrente è generalmente assunto come luogo di tali punti più depressi delle sezioni della corrente.

Poiché la quota piezometrica di un fluido in quiete rappresenta la quota del suo piano dei carichi idrostatici (§3.5) e, conseguentemente, la quota piezometrica che vige in una sezione regolare di una

corrente rappresenta la quota alla quale si porta il menisco di un piezometro che venga collegato al contorno della corrente, nel caso di una corrente a pelo libero la quota piezometrica di una sua sezione regolare è rappresentata dalla quota stessa della superficie libera della corrente. Pertanto, la linea piezometrica di una corrente a pelo libero è data dal profilo della superficie libera e la cadente piezometrica i è pertanto pari alla pendenza di tale superficie. La linea dei carichi totali si trova quindi, sezione per sezione, al di sopra del pelo libero di una quantità pari all'altezza cinetica media della corrente nella sezione considerata. Poiché che il regime di moto nei canali a pelo libero è generalmente turbolento pienamente sviluppato, nella espressione dell'altezza cinetica media può essere assunto unitario il coefficiente di ragguaglio delle potenze cinetiche α .

Come già nel caso delle correnti in pressione, a tratti caratterizzati dalle condizioni di corrente gradualmente variata, di sviluppo prevalente, si alternano talora tratti di sviluppo molto più limitato sede di fenomeni di moto non lineare, in cui cioè la corrente non può dirsi gradualmente variata e non sono perciò definibili una linea piezometrica e una linea dei carichi totali della corrente. Tali fenomeni vanno analizzati con metodi appropriati dei quali si darà conto nei paragrafi successivi.

14.2 Moto uniforme

La definizione di moto uniforme data nel §4.4 (moto nel quale tutte le particelle fluide si muovono di moto rettilineo uniforme) implica che il moto uniforme in una corrente a pelo libero possa avere luogo unicamente in alvei prismatici o cilindrici, ossia, alvei il cui profilo delle pareti non vari da sezione a sezione¹³¹. Come in tutte le correnti in moto uniforme, anche nel caso delle correnti a pelo libero la sezione liquida Ω deve mantenersi costante lungo l'asse, come anche la profondità della corrente. Poiché quindi il profilo della superficie libera deve mantenersi rettilineo e parallelo al profilo del fondo (ossia, del punto più depresso della sezione dell'alveo), detta:

$$i_f = -\frac{\partial z_f}{\partial s} \quad (282)$$

la pendenza del fondo (positiva quando l'alveo, come di norma avviene, è declive nel senso del moto), questa deve risultare pari alla pendenza della superficie libera, a sua volta pari, come detto, alla cadente piezometrica. Essendo le correnti in moto uniforme stazionarie, anche l'altezza cinetica media della corrente deve mantenersi costante lungo l'asse, per cui la linea dei carichi totali risulta anch'essa parallela al profilo del fondo e le corrispondenti pendenze, j e i_f , sono perciò uguali. In definitiva, la condizione rappresentativa del moto uniforme delle correnti a pelo libero è data da:

$$j = i = i_f . \quad (283)$$

Tale condizione consente di risolvere il problema fondamentale della determinazione della profondità Y_u (*profondità o altezza di moto uniforme*) con la quale si svolge il moto uniforme di una portata Q assegnata, come pure il problema inverso. Essendo nota la pendenza del canale in esame, inserendo la condizione $j = i_f$, ad esempio, nell'equazione di Chezy (257) per il calcolo delle perdite di carico nel moto uniforme, si ottiene:

$$i_f = \frac{U^2}{\chi^2 \Re} ,$$

da cui si ricavano le espressioni della velocità e della portata di moto uniforme per un alveo di data sezione, scabrezza delle pareti e pendenza del fondo:

$$U = \chi \sqrt{\Re i_f} ,$$

¹³¹ A proposito dell'uso indiscriminato delle formule del moto uniforme dal quale si intende mettere in guardia il lettore, si osservi come un alveo naturale ben difficilmente possa dirsi prismatico e come, quindi, solo con una certa dose di approssimazione, e magari di rischio, esso possa essere considerato sede di moto uniforme.

$$Q = \Omega \chi \sqrt{\Re i_f} \quad (284)$$

ove per il coefficiente di Chezy χ si adotterà una delle formule pratiche disponibili (Bazin, Kutter, Gauckler-Strickler, Manning). Per assegnati valori della pendenza del fondo e della scabrezza dell'alveo, la velocità e la portata di moto uniforme sono funzione della sola profondità della corrente tramite i termini $\Re$, χ e Ω . Sebbene siano state proposte formulazioni delle leggi di resistenza al moto uniforme analoghe alla formula di Colebrook¹³², a livello pratico, poiché il regime di moto nei canali è generalmente di tipo turbolento pienamente sviluppato, l'uso della formula di Chezy è di gran lunga più diffuso.

La curva che rappresenta l'andamento della portata di moto uniforme in funzione della profondità della corrente (attraverso i termini della formula di Chezy (284) da essa dipendenti) è detta *scala delle portate di moto uniforme*, talora identificata con il termine, più generico, di *scala di deflusso*. Poiché l'area della sezione liquida e il raggio idraulico (quindi anche il coefficiente di Chezy) sono funzioni note della profondità, per ogni valore di profondità di moto uniforme è possibile calcolare il corrispondente valore di portata. Eseguito tale calcolo per un numero congruo di valori di profondità, è pertanto possibile tracciare il grafico della scala delle portate di moto uniforme. Viceversa, per un alveo di assegnata geometria, non è possibile ricavare in forma esplicita la profondità di moto uniforme corrispondente a un dato valore di portata, con le eccezioni degli alvei a sezione rettangolare di larghezza molto maggiore della profondità, $Y \ll b$, significativa dal punto di vista pratico soltanto in alcuni casi molto particolari, e dell'alveo a sezione triangolare, di scarso interesse pratico.

A titolo di esempio, i problemi legati alla determinazione della profondità di moto uniforme vengono illustrati con riferimento al caso della sezione rettangolare di Figura 150. Le varie grandezze che figurano nella espressione della scala delle portate di moto uniforme sono date da:

$$\Omega(Y) = bY ;$$

$$B(Y) = b + 2Y ;$$

$$\Re(Y) = \frac{\Omega}{B} = \frac{bY}{b + 2Y} ;$$

$$\chi(Y) = k_s \Re^{1/6} = k_s \left(\frac{bY}{b + 2Y} \right)^{1/6} ,$$

da cui infine l'espressione della portata:

$$Q_u(Y_u) = \Omega \chi \sqrt{\Re i_f} = bY_u k_s \left(\frac{bY_u}{b + 2Y_u} \right)^{2/3} \sqrt{i_f} .$$

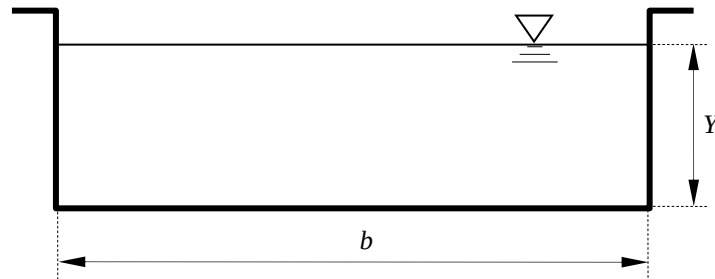


Figura 150. Canale a sezione rettangolare.

¹³² Vedi, ad esempio, il Marchi-Rubatta, §17.7.

Risulta evidente come, anche per la sezione più semplice, non sia possibile scrivere una espressione esplicita di Y_u in funzione della portata, se non nel caso $Y \ll b$, col che $B \cong b$, $\mathcal{H} \cong Y$ e la portata diventa una funzione monomia della profondità. Il problema della determinazione della profondità di moto uniforme deve pertanto essere risolto con uno dei metodi generali di soluzione di equazioni in forma implicita, illustrati in precedenza con riferimento ai casi dell'equazione di Colebrook (§12.3.1) o della verifica di reti di lunghe condotte (§12.7.3): metodi grafici o metodi iterativi (per approssimazioni successive); questi ultimi, in particolare, di agevole utilizzazione mediante i solutori automatici reperibili in un foglio elettronico, che si basano su tali metodi.

A titolo di esempio, in Figura 151 sono riportate le scale delle portate di moto uniforme e gli andamenti dei raggi idraulici in funzione della profondità Y per una sezione circolare ($D = 2,50$ m; $i_f = 0,0005$; $k_s = 75 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$) e una sezione rettangolare ($b = 3,50$ m; $i_f = 0,0001$; $k_s = 60 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$).

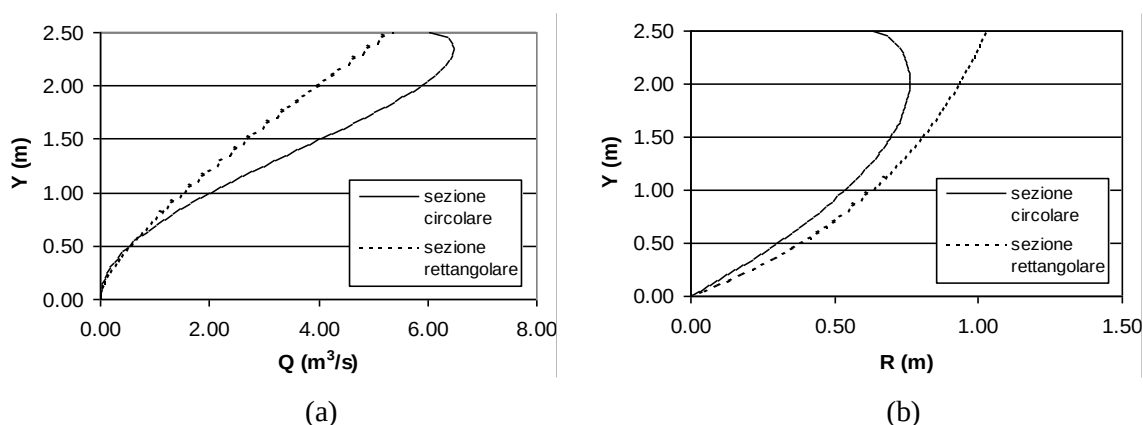


Figura 151. (a) Scala delle portate di moto uniforme e (b) andamento dei raggi idraulici in funzione della profondità Y in canali a sezione circolare ($D = 2,50$ m; $i_f = 0,0005$; $k_s = 75 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$) e rettangolare ($b = 3,50$ m; $i_f = 0,0001$; $k_s = 60 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$).

Si osservi come l'andamento di entrambe le grandezze relativamente alla sezione circolare presenti un massimo per valori della profondità minori del massimo consentito, pari al diametro della sezione. Tale caratteristica è comune alle sezioni chiuse, utilizzate tipicamente nelle condotte fognarie. Il massimo nell'andamento del raggio idraulico, costituente la causa del massimo della portata, è dovuto al fatto che, in prossimità del riempimento della sezione, il contorno bagnato (cui sono legate, attraverso lo sforzo alla parete, le resistenze al moto) aumenta molto più rapidamente dell'area della sezione (cui è legata la forza motrice, data dalla forza peso), sicché il rapporto dei due, Ω/B , tende a diminuire in prossimità della sommità (o *cielo*) della condotta.

Il procedimento grafico consiste nella lettura sull'asse delle Y del valore corrispondente al valore di portata Q assegnato¹³³. In Figura 151 le scale delle portate di moto uniforme sono riportate in termini di portate effettive. Poiché l'espressione (284) contiene a secondo membro la pendenza dell'alveo, per una stessa sezione occorre tracciare una scala delle portate per ciascun valore di pendenza del fondo. Nel caso si abbia a che fare con un canale composto di più tronchi a pendenza diversa, risulta quindi comodo riferirsi alla scala delle portate di moto uniforme *ridotte*:

$$\frac{Q}{\sqrt{i_f}} = \Omega \chi \sqrt{R} \quad , \quad (285)$$

in quanto indipendente dal valore della pendenza dell'alveo. È quindi sufficiente tracciare una sola scala delle portate ridotte per uno stesso tipo di alveo, sulla quale si individuano i diversi valori di

¹³³ Sebbene il calcolo grafico vero e proprio sia oramai alquanto in disuso, la rappresentazione grafica consente tuttavia una efficacia illustrativa che non va sottovalutata, soprattutto nella produzione di documenti tecnici che devono avere chiarezza sufficiente alla comprensione dei procedimenti di calcolo da parte di terzi.

profondità di moto uniforme corrispondenti alla stessa portata (perché si tratta di regime stazionario) e alle diverse pendenze in funzione dei diversi valori del rapporto $Q/\sqrt{i_f}$.

È evidente che, una volta che sia chiaro il concetto di scala delle portate di moto uniforme, determinarne l'espressione per un tipo di sezione piuttosto che per un altro è una mera questione di abilità nell'espressione analitica dei vari elementi che la compongono (area della sezione liquida, perimetro bagnato, etc...) in funzione della profondità Y . Si noti anche che certi tipi di sezione di uso corrente ammettono espressioni diverse in diversi campi della profondità. È il caso, ad esempio, delle sezioni ovoidali utilizzate nei collettori fognari (vedi Figura 152a), aventi lo scopo di far fluire le portate minori con velocità non troppo piccole, allo scopo di evitare il deposito dei sedimenti trasportati dalla corrente.

Sezioni del tipo degli ovoidali consentono, comunque, l'uso della formula di Chezy così come è stato illustrato finora, poiché le sezioni sono di forma sufficientemente regolare. Il procedimento descritto può invece risultare inadeguato nel caso di sezioni composite di forma più irregolare, quali, ad esempio, quelle dei grandi collettori fognari, dotati di una cunetta atta al convogliamento delle portate minori e di espansioni laterali occupate dalle acque quando nel collettore fluiscano portate maggiori (vedi Figura 152b). Un altro esempio di sezioni di questo tipo è quello degli alvei fluviali composti, similmente al precedente esempio, da un alveo di magra ed espansioni laterali (dette *golene*), che vengono sommerse in occasione degli eventi di piena.

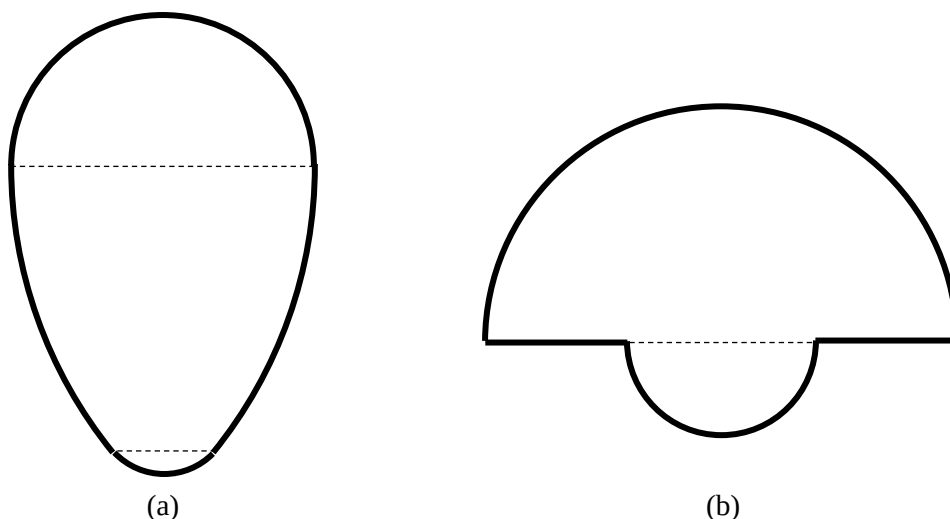


Figura 152. Esempi di (a) sezione ovoidale e (b) sezione composta con cunetta ed espansioni laterali.

Il medesimo meccanismo descritto a proposito della presenza dei massimi di raggio idraulico e portata nelle sezioni chiuse, corrispondente in quel caso a un effetto fisicamente plausibile e che ha infatti effettivamente luogo, comporta invece, nel caso delle sezioni composite fortemente irregolari, conseguenze chiaramente irrealistiche. Con riferimento al caso della sezione di Figura 152b, quando la superficie libera supera il livello massimo della cunetta, indicato in tratteggio, di una quantità dY infinitesima, la sezione liquida aumenta di una quantità pure infinitesima, mentre si ha un incremento finito del contorno bagnato, dato dalla somma delle larghezze delle due espansioni laterali. Il corrispondente effetto di riduzione del valore della portata calcolabile con la formula di Chezy considerando l'intera sezione non è in questo caso reale, ma dovuto unicamente, in buona sostanza, al fatto di applicare a una sezione estremamente irregolare una formula dedotta per sezioni relativamente compatte.

A tale inconveniente si ovvia facilmente decomponendo la sezione in parti che, all'ingrosso, possano essere considerate sufficientemente compatte da poter applicare, a ciascuna di essa, la formula di Chezy con valori specifici di alcuni dei parametri che vi compaiono: nel caso in esempio, la sezione della cunetta e la parte rimanente al di sopra di essa. In generale, data una sezione

scomponibile in N parti, uno dei criteri di calcolo più seguiti assume che in ciascuna delle N sezioni il moto sia caratterizzato dalle medesime velocità e cadente dei carichi totali; quest'ultima, date le condizioni di moto uniforme, posta pari alla pendenza del fondo. Si scrive quindi, per ciascuna (j -esima) sezione:

$$\frac{U}{\sqrt{i_f}} = \chi_j \sqrt{\Re_j} = \chi_j \sqrt{\frac{\Omega_j}{B_j}},$$

da cui si ottiene la seguente espressione dell'area della sezione liquida complessiva:

$$\Omega = \sum_{j=1}^N \Omega_j = \sum_{j=1}^N \frac{U^2}{i_f} \frac{B_j}{\chi_j^2} = \frac{U^2}{i_f} \sum_{j=1}^N \frac{B_j}{\chi_j^2}$$

e quindi, ricordando che $\Re = \Omega/B$, la seguente estensione della espressione di Chezy:

$$i_f = \frac{U^2}{\Omega} \sum_{j=1}^N \frac{B_j}{\chi_j^2} = \frac{U^2}{\Re} \left(\frac{1}{B} \sum_{j=1}^N \frac{B_j}{\chi_j^2} \right) = \frac{U^2}{\Re \bar{\chi}^2}$$

in cui compare un valore medio del coefficiente di Chezy dato da:

$$\bar{\chi}^2 = \frac{B}{\sum_{j=1}^N \frac{B_j}{\chi_j^2}}.$$

Si noti che il procedimento descritto ha un'utilità legata anche al fatto che, tipicamente, e specialmente nel caso degli alvei fluviali, le espansioni laterali hanno una scabrezza differente da quella della cunetta o alveo di magra che sia. Si noti anche che dalla formulazione proposta consegue che la forza resistente esercitata dalle pareti dell'alveo sull'intera corrente sia pari alla somma delle resistenze esercitate su ciascuna delle N parti che la compongono (v. Citrini, §10.2)

Si osservi anche che il procedimento si basa, necessariamente, su una specificazione approssimata dei contorni bagnati delle singole parti della sezione totale, i quali – si ricorda – rappresentano il profilo delle superfici attraverso le quali vengono esercitati sforzi resistenti sulla corrente liquida. In pratica, questi si assumono coincidenti con i profili delle superfici materiali a contatto con le sezioni liquide parziali, trascurando gli sforzi che le sezioni parziali si trasmettono attraverso le superfici liquide di separazione (nel caso dell'esempio di Figura 152b, la superficie identificata dalla linea tratteggiata). Tale approssimazione può ritenersi, generalmente, del tutto accettabile.

Soprattutto nel caso di alvei naturali, come pure di canali artificiali a cielo aperto o adibiti a usi particolari, va anche osservato come il problema della specificazione della scabrezza delle pareti possa essere soggetta a incertezze ancora maggiori di quelle che pure esistono nel caso delle condotte in pressione. Per effetto degli agenti atmosferici, della erodibilità degli alvei naturali, della presenza di vegetazione, del convogliamento di sostanze aggressive (è il caso delle condotte fognarie), le scabrezze nei canali a superficie libera possono essere più difficilmente specificabili per una situazione nota e maggiormente variabili nello spazio e nel tempo. In tali casi, è compito del progettista tenere conto di tali incertezze assumendo valori ragionevolmente cautelativi.

14.3 Caratteristiche energetiche della corrente in una sezione. Stato critico

Essendo per ipotesi le correnti a pelo libero gradualmente variate (a meno di pochi tratti di sviluppo limitato) ed essendo perciò la quota piezometrica costante sulle sezioni verticali regolari, il carico totale in una sezione può esprimersi con riferimento alla quota del fondo del canale e alla corrispondente altezza piezometrica $Y = p_f/\gamma$, in cui $p_f = \gamma Y$ rappresenta la pressione al fondo:

$$H = h + \frac{U^2}{2g} = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} = z_f + Y + \frac{U^2}{2g} .$$

Si definisce *carico rispetto al fondo* o *carico specifico* della corrente il carico totale valutato, sezione per sezione, con riferimento alla quota del fondo, variabile lungo l'asse:

$$E = H - z_f = Y + \frac{U^2}{2g} = Y + \frac{Q^2}{2g\Omega^2} . \quad (286)$$

La condizione di moto stazionario in una corrente liquida implica (§11.2) che la portata della corrente sia costante lungo l'asse. È pertanto di particolare interesse studiare l'andamento del carico specifico in funzione della profondità della corrente a portata costante, rappresentato in Figura 153. A tale scopo è conveniente utilizzare l'espressione del carico specifico contenente esplicitamente la portata, dalla quale si evince che E dipende unicamente dalla profondità Y , sia direttamente che attraverso la dipendenza univoca dell'area della sezione liquida Ω da Y .

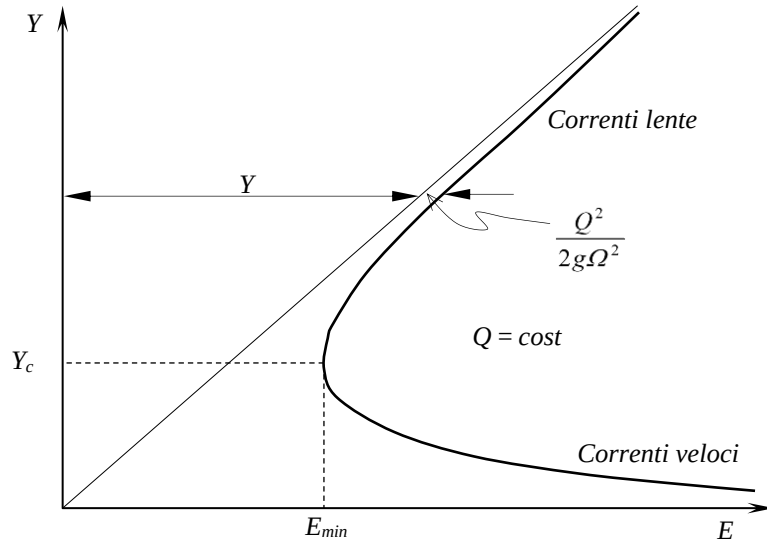


Figura 153. Andamento del carico specifico a portata costante.

Il carico specifico è dato dalla somma di un primo contributo pari alla profondità Y , tendente ovviamente a zero per $Y \rightarrow 0$ e a infinito per $Y \rightarrow \infty$, e di un secondo contributo, $Q^2/(2g\Omega^2)$, tendente a zero per $Y \rightarrow \infty$ (perché allora $\Omega \rightarrow \infty$) e tendente a infinito per $Y \rightarrow 0$ (allorché $\Omega \rightarrow 0$). Pertanto, a entrambi gli estremi dell'intervallo di definizione della variabile indipendente Y , 0 e ∞ , si ha $E \rightarrow \infty$, in quanto uno dei due addendi tende sempre a infinito. Tale constatazione implica necessariamente l'esistenza di un minimo del carico specifico. Si definisce *stato critico* di una corrente a superficie libera la condizione della corrente per la quale è minimo il carico specifico a portata costante fissata, e *profondità critica*, indicata con il simbolo Y_c , il corrispondente valore di profondità.

L'espressione in forma analitica dello stato critico si determina esprimendo la condizione di minima energia specifica, data dall'annullamento della derivata prima della E rispetto alla variabile indipendente Y (la verifica del segno della derivata seconda non è necessaria in quanto, per quanto discusso in precedenza, è certo che la condizione di derivata prima nulla deve corrispondere a un minimo). Si ha quindi:

$$\left. \frac{\partial E(Y)}{\partial Y} \right|_{Q=\text{cost}} = \left. \frac{\partial}{\partial Y} \left(Y + \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \right) \right|_{Q=\text{cost}} = 1 - \frac{Q^2}{g\Omega^3} \frac{d\Omega}{dY} .$$

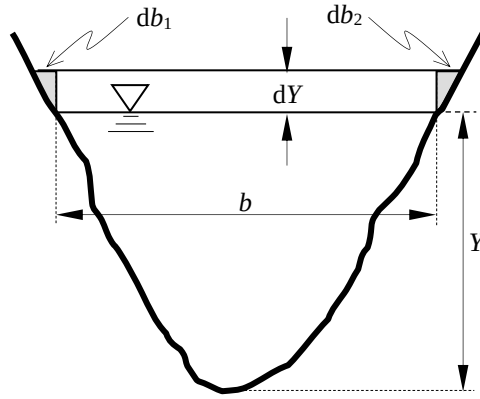


Figura 154. Schema per la valutazione della derivata $d\Omega/dY$.

L'espressione della derivata $d\Omega/dY$ si deduce dallo schema di Figura 154. Detta b la larghezza della sezione liquida in superficie, a un incremento infinitesimo dY della profondità corrisponde un incremento dell'area della sezione liquida composto da una parte rettangolare di area $b dY$, e da due parti, costituenti triangoli rettangoli al limite per $dY \rightarrow 0$, aventi entrambi un cateto pari a dY e l'altro pari a db_1 e db_2 rispettivamente, infinitesimi dello stesso ordine di dY . Le due aree triangolari sono quindi infinitesime di ordine 2 rispetto a dY , mentre l'area rettangolare, proporzionale a dY , è infinitesimo di ordine 1. Nel limite per $dY \rightarrow 0$ le aree delle superfici triangolari sono quindi trascurabili rispetto all'area della superficie rettangolare, per cui $d\Omega = b dY$ e $d\Omega/dY = b$.

Inserendo tale relazione nell'espressione della derivata dell'energia specifica si ottiene quindi:

$$\left. \frac{\partial E(Y)}{\partial Y} \right|_{Q=\text{cost}} = 1 - \frac{Q^2 b}{g \Omega^3} = 0 ,$$

da cui si ottiene la condizione utilizzabile in pratica per determinare la profondità critica:

$$\left(\frac{\Omega^3}{b} \right)_c = \frac{Q^2}{g} , \quad (287)$$

in cui i termini dipendenti da Y a primo membro sono separati dai termini costanti a secondo membro.

Dalla (287) si può anche dedurre l'espressione della *scala delle portate critiche*:

$$Q(Y_c) = \Omega \sqrt{g \Omega / b} , \quad (288)$$

che esprime i valori di portata in funzione della corrispondente profondità critica.

Per una sezione di forma qualunque, con ragionamento del tutto analogo a quello condotto in tema di scala delle portate di moto uniforme, il valore della profondità critica Y_c si può determinare, per via grafica o numerica, quale valore di profondità Y che rende la funzione $\Omega^3/b = F(Y)$ uguale alla quantità prefissata Q^2/g , ovvero $\Omega(g\Omega/b)^{1/2} = Q$ nella scala delle portate critiche.

Il valore minimo del carico specifico si ottiene inserendo la condizione (287) nella (286):

$$E_{\min} = \left(Y + \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \right)_c = Y_c + \left(\frac{\Omega^3}{b} \right)_c \frac{1}{2\Omega_c^2} = Y_c + \frac{Y_{mc}}{2}$$

ove Y_{mc} è la *profondità media* della corrente in condizioni critiche, la profondità media $Y_m = \Omega/b$ essendo interpretabile come profondità di una sezione rettangolare fittizia di larghezza costante pari alla larghezza in superficie della sezione data e uguale area della sezione liquida (vedi Figura 149). Per una sezione rettangolare si ha, ovviamente, $Y_m = Y$, per cui si ottiene, in tal caso:

$$E_{\min} = \frac{3}{2} Y_c ,$$

mentre la profondità critica ha l'espressione esplicita ricavabile facilmente dalla condizione (287):

$$Y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}} . \quad (289)$$

Sulla base del concetto di stato critico si introduce una classificazione fondamentale delle correnti a pelo libero, il cui significato fisico verrà illustrato nel §14.4.1. Si dicono *correnti lente* (o *subcritiche*) quelle aventi profondità superiore alla profondità critica: $Y > Y_c$; si dicono *correnti veloci* (o *supercritiche*) quelle aventi profondità inferiore alla profondità critica: $Y < Y_c$.

Assumendo costante il carico specifico in luogo della portata, quest'ultima è ora funzione della profondità della corrente secondo la relazione, ottenibile dalla (286):

$$Q = \Omega \sqrt{2g(E - Y)} , \quad (290)$$

rappresentata graficamente in tratto sottile in Figura 155.

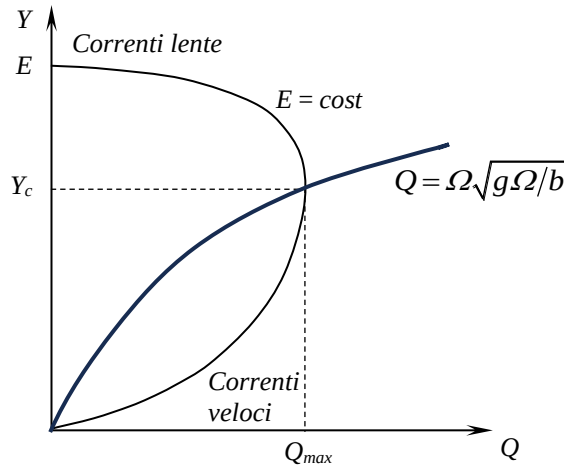


Figura 155. Andamento della portata a carico specifico costante.

La portata, in quanto nulla per $Y=0$ (perché $\Omega=0$) e $Y=E$, deve ora ammettere un valore massimo, determinabile, analogamente a quanto fatto in precedenza per ricercare il minimo di E a Q costante, uguagliando a zero la derivata prima di Q rispetto a Y . Si ha pertanto:

$$\left. \frac{dQ}{dY} \right|_{E=\text{cost}} = \frac{d\Omega}{dY} \sqrt{2g(E - Y)} - \Omega \frac{1}{2} \frac{2g}{\sqrt{2g(E - Y)}} = \frac{b 2g(E - Y) - \Omega g}{\sqrt{2g(E - Y)}}$$

da cui, eguagliando a zero il numeratore, si ottiene:

$$E = Y_c + \frac{Y_{mc}}{2} .$$

L'identità di tale relazione con la relazione ottenuta per il carico specifico minimo a portata costante segnala che tale condizione di portata massima a carico specifico costante si ottiene in corrispondenza dello stato critico precedentemente definito, riferito al valore di portata massima mantenuto costante. La scala delle portate critiche deve pertanto passare per il punto $(Y_c, Q_{\max})$.

Sostituendo tale espressione nella (290), si ottiene l'espressione della portata massima:

$$\frac{Q_{\max}^2}{g} = \left(\frac{\Omega^3}{b} \right)_c ,$$

analoga alla condizione (287).

Nel caso di sezione rettangolare, $Y = Y_m$ e la profondità critica è pertanto data da:

$$Y_c = \frac{2}{3} E ,$$

mentre la portata massima si esprime in funzione del carico specifico costante:

$$Q_{\max} = b Y_c \sqrt{g Y_c} = \sqrt{\frac{8}{27}} b \sqrt{g} E^{3/2} .$$

Le condizioni di minima energia specifica a portata costante e di massima portata a energia specifica costante sono quindi equivalenti, cioè entrambe identificatrici dello stato critico. Il valore minimo di E corrispondente a una data portata Q costante è pari a quel valore che, mantenuto costante, ammette un valore di portata massima pari alla stessa Q . Tutte le relazioni caratteristiche dello stato critico dedotte con riferimento al caso di portata costante si ottengono, identiche, per il caso di energia specifica costante. A tutti gli effetti, la condizione di portata massima a energia specifica costante potrebbe quindi essere assunta come definizione dello stato critico in luogo di quella relativa al minimo di energia specifica a portata costante.

Il confronto fra le profondità lette sui due rami della curva della portata posti al di sopra e al di sotto della profondità critica (per la portata massima), in corrispondenza di una data portata, con il corrispondente valore di profondità critica, letto sulla curva delle portate critiche, consente di associare il ramo superiore alle correnti lente e il ramo inferiore alle correnti veloci.

Si osservi, infine, che in nessuna delle relazioni su esposte compare la pendenza dell'alveo, la quale pertanto non gioca alcun ruolo nella determinazione della profondità critica di una corrente, né, quindi, di tutti i parametri a essa legati.

14.4 Caratteristiche cinematiche delle correnti a pelo libero

14.4.1 Propagazione delle perturbazioni. Classificazione delle correnti.

Dall'equazione caratteristica dello stato critico (287) si può ricavare l'espressione della velocità media della corrente in condizioni critiche:

$$U_c = \frac{Q}{\Omega_c} = \sqrt{\frac{g \Omega_c}{b_c}} = \sqrt{g Y_{mc}} , \quad (291)$$

la quale riveste un'importanza fondamentale nella teoria delle correnti a pelo libero. Infatti, si può mostrare che tale espressione coincide con l'espressione della velocità con cui si propagano perturbazioni della superficie libera di modesta entità rispetto alla profondità indisturbata e alla lunghezza dell'onda, data dalla distanza fra due creste (*piccole perturbazioni*). Tali sono certamente le uniche perturbazioni che possono prodursi, per definizione, in una corrente gradualmente variata e che possono quindi interessare le correnti a pelo libero sulla base delle ipotesi ammesse. La velocità di propagazione di perturbazioni di qualsivoglia natura viene usualmente denominata *celerità*.

Un esempio di propagazione di perturbazioni della superficie libera di un corpo idrico di cui ognuno ha nozione per normale esperienza è costituito dalle onde circolari che si generano in uno stagno nel quale sia stato buttato un sasso – anche se in tal caso può non trattarsi di piccole perturbazioni, giacché l'altezza delle ondulazioni può essere confrontabile con la profondità indisturbata e/o la lunghezza d'onda. Supponendo di riuscire a produrre, in qualche modo, piccole perturbazioni della superficie libera a simmetria circolare, le creste circolari si propagherebbero

radialmente, in acqua stagnante, con celerità $\sqrt{gY}^{134}$. Se, invece, una piccola perturbazione viene creata in un corpo idrico in movimento, le creste, oltre a muoversi in direzione radiale con la celerità $\sqrt{gY}$ rispetto alla corrente, vengono anche da essa trasportate.

Nello schema di moto unidimensionale proprio delle correnti, una perturbazione indotta in una sezione di un canale produce due sistemi di onde che vengono viste viaggiare verso monte e verso valle con celerità $\sqrt{gY_m}$ da un osservatore animato dalla medesima velocità U della corrente. Tale valore di celerità, in quanto misurata in un sistema di riferimento localmente solidale con la corrente, è associata perciò al moto relativo delle perturbazioni rispetto alla corrente, viene denotata con il termine di *celerità relativa* e indicata qui con il simbolo c . Un osservatore fisso posto sulla sponda del canale misura, invece, velocità delle due perturbazioni (che diremo *celerità assolute*) date dalla somma algebrica della velocità della corrente (che trasporta con sé le perturbazioni) e della celerità relativa con cui le perturbazioni si muovono rispetto alla corrente, una verso monte e l'altra verso valle. I valori delle celerità assolute delle due perturbazioni, indicate con il simbolo a e considerate positive se concordi con il verso della corrente, sono date, per una sezione qualunque, da:

$$a_{1,2} = U \pm \sqrt{gY_m} . \quad (292)$$

Risulta pertanto che una delle due perturbazioni, la cui celerità assoluta corrisponde al segno "+" nell'espressione precedente, si propaga certamente verso valle anche rispetto all'osservatore fisso. Il comportamento di una corrente può essere radicalmente differente a seconda del segno della celerità assoluta corrispondente al segno "-". Poiché una corrente in condizioni critiche ha velocità media $U_c = \sqrt{gY_{mc}}$, per $Y > Y_c$, corrispondente alla definizione di corrente lenta, si ha $Y_m > Y_{mc}$, $U < U_c$ e dunque anche $U < \sqrt{gY_m}$. Si ottiene quindi $U - \sqrt{gY_m} < 0$, per cui l'osservatore fisso vede tale seconda perturbazione muoversi verso monte, risalendo la corrente. Viceversa, se $Y < Y_c$ (corrente veloce) si ha $U - \sqrt{gY_m} > 0$ e la perturbazione corrispondente si propaga anch'essa verso valle rispetto all'osservatore fisso. Se, infine, $Y = Y_c$ si ha $U - \sqrt{gY_m} = 0$ e la perturbazione rimane immobile rispetto all'osservatore fisso.

Una rappresentazione delle tre modalità di propagazione delle perturbazioni è presentata in Figura 156, per i casi (a) unidimensionale (canale) e (b) bidimensionale (stagno).

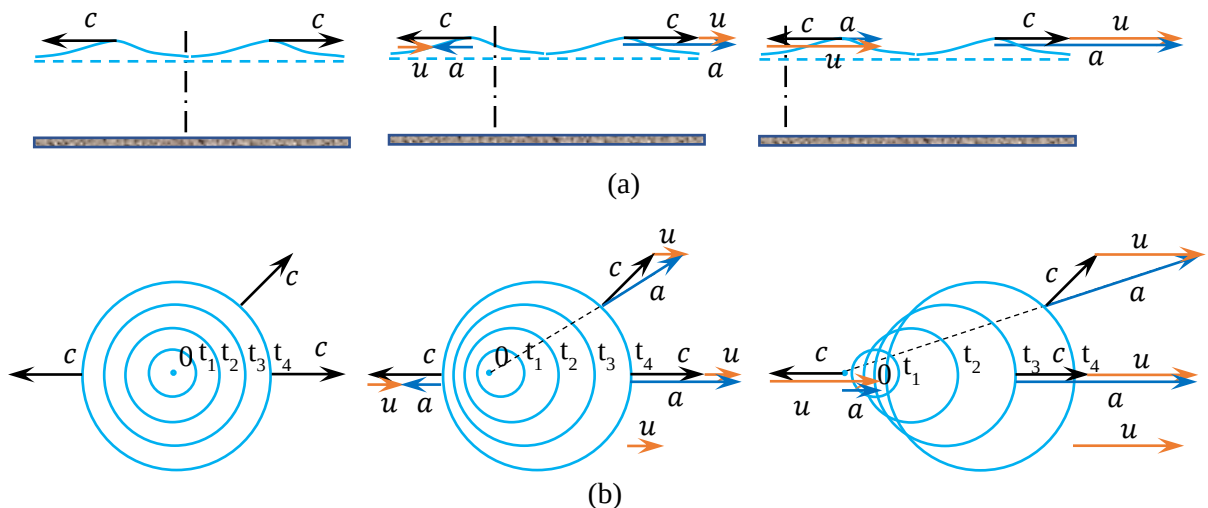


Figura 156. Modalità di propagazione delle perturbazioni (a) in un canale e (b) in uno stagno, da sinistra verso destra: in un liquido in quiete; in corrente lenta; in corrente veloce.

¹³⁴ La profondità media coincide con la profondità per sezioni rettangolari, quindi anche per moti bidimensionali quali quelli associati alla propagazione di onde circolari in uno stagno.

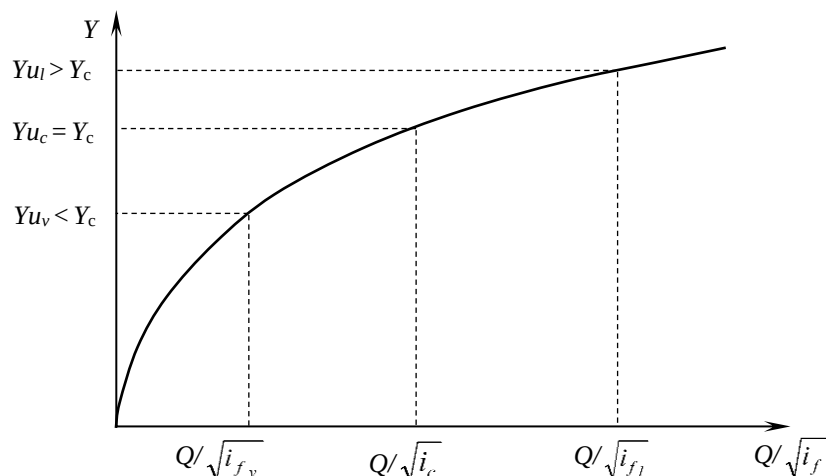


Figura 157. Schema di definizione della pendenza critica.

Introducendo il numero di Froude:

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gY_m}},$$

la classificazione delle correnti introdotta in precedenza può riassumersi come in Tabella 11.

Tabella 11. Classificazione delle correnti a superficie libera.

denominazione	definizione	proprietà
correnti lente (subcritiche)	$Y > Y_c$ ($Fr < 1$)	$U < \sqrt{gY_m}$ – le perturbazioni si propagano sia verso monte che verso valle.
correnti critiche	$Y = Y_c$ ($Fr = 1$)	$U = \sqrt{gY_m}$ – la perturbazione di celerità relativa rivolta verso monte è stazionaria rispetto a un osservatore fisso (la celerità assoluta è nulla).
correnti veloci (supercritiche)	$Y < Y_c$ ($Fr > 1$)	$U > \sqrt{gY_m}$ – le perturbazioni si propagano soltanto verso valle.

14.4.2 Classificazione degli alvei

Si consideri un canale sede di un moto uniforme, il cui funzionamento sia descritto dalla scala delle portate di moto uniforme ridotte riprodotta in Figura 157. Data la scala delle portate ridotte, dipendente dalle dimensioni della sezione trasversale e dalla scabrezza delle pareti, la profondità di moto uniforme per una data portata Q dipende, evidentemente, dalla pendenza del canale, mentre, a norma della (287), per lo stesso valore di portata la profondità critica assume un valore univoco, non dipendente dalla pendenza. Per pendenze sufficientemente ridotte (p.es. la i_{f_l} in Figura 157), il rapporto $Q/\sqrt{i_f}$ risulterà sufficientemente elevato da fornire una profondità di moto uniforme Y_{ul} superiore alla profondità critica Y_c , talché il moto uniforme si svolge in condizioni di corrente lenta. Un alveo di questo tipo si dice *a debole pendenza* o *fluviale*. Incrementando la pendenza dell'alveo, si ottengono valori di $Q/\sqrt{i_f}$ e, quindi, della profondità di moto uniforme, via via inferiori. Per pendenze sufficientemente elevate (p.es. la i_{f_v} in Figura 157), si ottiene una profondità di moto uniforme Y_{uv} inferiore alla profondità critica Y_c , corrispondente a condizioni di corrente veloce. Un alveo di questo tipo si dice *a forte pendenza* o *torrentizio*. Esisterà, infine, un particolare valore di

pendenza in corrispondenza del quale si otterrà una profondità di moto uniforme pari alla profondità critica. Tale valore di pendenza viene detto *pendenza critica*, e il tipo di alveo a *pendenza critica*. Tale classificazione è riassunta in Tabella 12.

Tabella 12. Classificazione degli alvei sedi di correnti a superficie libera.

denominazione	definizione
alvei a <i>debole pendenza</i> o <i>fluviali</i>	$Y_u > Y_c \equiv i_f < i_c \equiv$ la corrente di moto uniforme è una corrente lenta
alvei a <i>pendenza critica</i>	$Y_u = Y_c \equiv i_f = i_c \equiv$ la corrente di moto uniforme è una corrente critica
alvei a <i>forte pendenza</i> o <i>torrentizi</i>	$Y_u < Y_c \equiv i_f > i_c \equiv$ la corrente di moto uniforme è una corrente veloce

Sebbene le denominazioni introdotte facciano riferimento al termine “pendenza”, operativamente conviene classificare un alveo in uno dei tre tipi sulla base del confronto fra profondità critica e di moto uniforme. Tuttavia, il concetto di pendenza critica è ben definito, e utilizzabile per calcolare, se del caso, il valore di tale parametro per un dato alveo e una data portata. Per quanto su esposto, fissata la portata, il valore della pendenza critica si ottiene dalla scala delle portate ridotte di Figura 157 dal valore del rapporto $Q/\sqrt{i_f}$ letto sull’asse delle portate ridotte in corrispondenza di un valore di profondità di moto uniforme pari alla profondità critica per quella portata.

Si osservi che l’essere un alveo a pendenza debole, critica o forte non costituisce una sua caratteristica intrinseca, in quanto per uno stesso alveo, avente una data pendenza geometrica, il confronto fra profondità di moto uniforme e profondità critica dipende dalla portata che si considera. In altri termini, un dato alveo può risultare a forte pendenza per un certo valore della portata e a debole pendenza per un valore diverso. In particolare, può mostrarsi facilmente¹³⁵ che il valore di pendenza critica di un alveo rettangolare di profondità molto minore della sua larghezza è una funzione decrescente della portata. Pertanto, un alveo di questo tipo, avente una pendenza fissata, è sempre a debole pendenza per portate sufficientemente piccole e a forte pendenza per portate sufficientemente elevate. Tale conclusione è valida per alvei di forma qualunque e discende dalla diversa conformazione delle scale delle portate di moto uniforme e delle portate critiche. Come risulta evidente dalla Figura 158, nella quale sono riportati gli andamenti tipici delle scale delle portate di moto uniforme e delle portate critiche un alveo a pendenza geometrica i_f fissata, l’alveo è a debole pendenza per $Q < Q^*$ perché $Y_u > Y_c$, è a forte pendenza per $Q > Q^*$ ($Y_u < Y_c$) e a pendenza critica per $Q = Q^*$ ($Y_u = Y_c$).

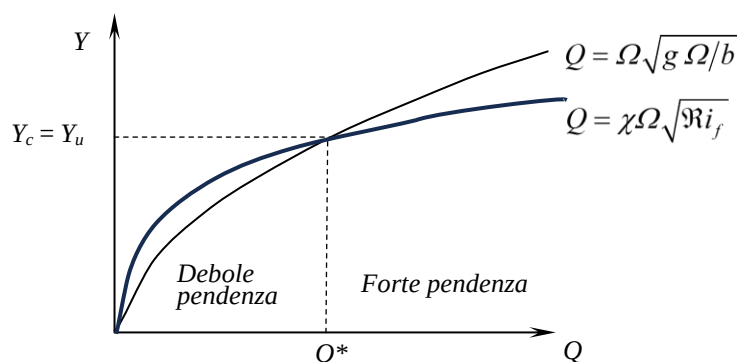


Figura 158. Scala delle portate di moto uniforme (tratto spesso) e scala delle portate critiche (tratto fine) per un alveo di pendenza geometrica fissata i_f .

¹³⁵ Vedi Citrini-Nosedà, §10.4.

14.5 Profili di moto permanente

14.5.1 Equazione differenziale dei profili di moto permanente.

Da quanto esposto nel §12.4 e nel §12.9, il moto di correnti stazionarie ma non uniformi, fintantoché esse risultano gradualmente variate, può essere studiato mediante l'equazione del moto nella forma generale:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{\tau_0}{\gamma \mathfrak{R}} ,$$

utilizzando per la valutazione del secondo membro le formule stabilite per il moto uniforme: nel caso delle correnti a pelo libero, tipicamente la formula di Chezy:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{U^2}{\chi^2 \mathfrak{R}} .$$

A essa si aggiunge l'equazione di continuità per le correnti, che, per il caso di moto stazionario di liquido isoterma e omogeneo, si riduce alla relazione $Q = \text{cost}$, § 11.2, eq. (232).

A partire dall'equazione differenziale del moto, si può dedurre l'equazione differenziale che descrive l'andamento della profondità Y lungo l'asse della corrente e, quindi, il profilo della superficie libera. A tale scopo, l'equazione va riscritta in termini di carico specifico E in luogo del carico totale H . Dalla definizione di carico specifico (286):

$$E = H - z_f$$

si ottiene, derivando rispetto all'ascissa curvilinea s :

$$\frac{dE}{ds} = \frac{dH}{ds} - \frac{dz_f}{ds} = -j + i_f . \quad (293)$$

Tale equazione può essere utilizzata per il tracciamento di profili di correnti a pelo libero in regime stazionario (*profili di moto permanente*) in alvei di forma qualunque, dal momento che l'energia specifica E è funzione unicamente della profondità Y . Tuttavia, per ogni applicazione pratica occorre integrare la (293) mediante metodi numerici alle differenze finite del tipo di quelli descritti nel §6.9, essendo preclusa la possibilità di ottenere una soluzione analitica anche nei casi più semplici.

L'impostazione del problema del tracciamento dei profili di moto permanente richiede la conoscenza delle caratteristiche qualitative dei vari tipi di profili possibili in relazione al *tipo* di alveo (se a pendenza debole, forte, nulla o anche avversa al moto) e al tipo di corrente, nonché alle relative condizioni al contorno. Tali caratteristiche sono ricavabili nel caso di alvei prismatici, o cilindrici¹³⁶ significativo anche dal punto di vista pratico in quanto a tale classe possono usualmente ascrivere i canali artificiali. Le stesse caratteristiche qualitative sono anche, in certa misura, rappresentative dei profili anche in alvei non prismatici, quali inevitabilmente sono gli alvei naturali. Il procedimento di soluzione generale alle differenze finite verrà quindi descritto successivamente alla discussione di tali caratteristiche, che verrà affrontata nei paragrafi seguenti.

14.5.2 Profili di moto permanente in alvei prismatici

Le caratteristiche qualitative salienti dei profili di moto permanente possono dedursi per il caso di alvei prismatici, sia declivi (nei quali la quota del fondo decresce nel senso del moto e la pendenza i_f

¹³⁶ Ricordiamo che, in Geometria, si definisce *cilindro* una superficie costituita da ∞^1 rette parallele, dette *generatrici*, passanti per una curva detta *direttrice*. Un cilindro si può quindi ottenere facendo traslare una retta generatrice lungo una curva direttrice, ovvero per proiezione della direttrice lungo la direzione delle generatrici. Un prisma è un solido ottenuto dalla proiezione di una figura piana lungo una direzione dello spazio, mediante la quale viene descritta una superficie cilindrica. Un alveo cilindrico, o prismatico, è quindi un alveo ad asse rettilineo, le cui sezioni trasversali (intese come i profili delle pareti a canale vuoto) non variano lungo l'asse.

è pertanto positiva), che a pendenza nulla, o anche acclivi ($i_f < 0$). Preventivamente alla deduzione della equazione del profilo del pelo libero, osserviamo che, in un alveo prismatico sede di una corrente in moto permanente, la dipendenza funzionale del carico specifico E dall'ascissa curvilinea s è del tipo $E = E(Y(s))$, in luogo della, più generale, forma $E = E(Y(s), s)$, rappresentativa di un moto stazionario in alveo di forma qualunque. Infatti, in due sezioni nelle quali si abbiano identiche profondità, a parità di portata il carico specifico (286) può differire soltanto se l'alveo non è prismatico per il termine cinetico, a causa della differente area della sezione liquida (come nelle sezioni A e B rappresentate in Figura 159): deve quindi essere ammessa una variabilità a Y fissata, espressa dalla forma $E = E(Y(s), s)$. Viceversa, negli alvei prismatici il carico specifico può variare lungo l'asse del canale soltanto se varia corrispondentemente la profondità della corrente.

Essendo il carico specifico E una funzione di s attraverso la Y per un alveo prismatico, a norma della (9) la derivata di E può svilupparsi come segue:

$$\frac{dE}{dY} \frac{dY}{ds} = i_f - j ,$$

da cui la cercata equazione differenziale che descrive l'andamento del profilo:

$$\frac{dY}{ds} = \frac{i_f - j}{\frac{dE}{dY}} .$$

La derivata a denominatore del secondo membro è stata valutata nel §14.3 nello studio delle condizioni critiche:

$$\left. \frac{dE}{dY} = \frac{\partial E(Y)}{\partial Y} \right|_{Q=\text{cost}} = \frac{\partial}{\partial Y} \left(Y + \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \right) \bigg|_{Q=\text{cost}} = 1 - \frac{bQ^2}{g\Omega^3} ,$$

in cui

$$\frac{bQ^2}{g\Omega^3} = \frac{bU^2}{g\Omega} = \frac{U^2}{gY_m} = \text{Fr}^2$$

dove Fr è il numero di Froude. L'equazione del profilo della superficie libera può quindi scriversi:

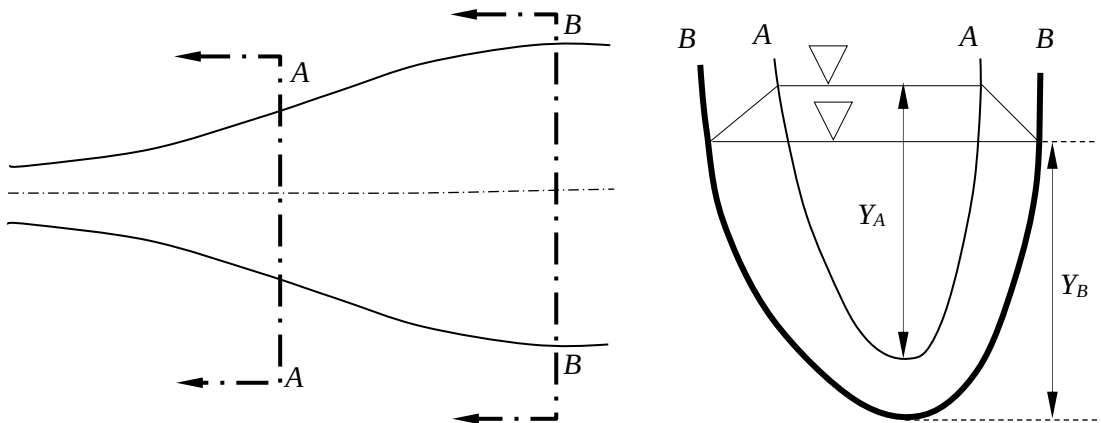


Figura 159. (a) veduta in pianta e (b) sezioni trasversali schematiche di alveo non prismatico.

$$\frac{dY}{ds} = i_f \frac{1 - \frac{j}{i_f}}{1 - Fr^2}.$$

Esprimendo la cadente dei carichi totali mediante la formula di Chezy (257) e inserendo l'espressione del numero di Froude, si ottiene una forma dell'equazione differenziale conveniente per la discussione qualitativa dei profili:

$$\frac{dY}{ds} = i_f \frac{1 - \frac{Q^2}{i_f \chi^2 \mathcal{R} \Omega^2}}{1 - \frac{bQ^2}{g\Omega^3}}. \quad (294)$$

Le caratteristiche dei profili in alveo declive od acclive ($i_f \neq 0$) si deducono discutendo il segno del numeratore e del denominatore della frazione a secondo membro della (294)¹³⁷.

Nel caso di alvei declivi ($i_f > 0$), indipendentemente dal tipo di alveo in considerazione, sia esso a pendenza debole, forte o critica, il numeratore e il denominatore della frazione si comportano come segue:

- Il numeratore si annulla per $Y = Y_u$ poiché in condizioni di moto uniforme è $j = i_f$; tende a 1 per $Y \rightarrow \infty$ poiché il denominatore $\chi^2 \mathcal{R} \Omega^2$ della frazione è crescente con la profondità¹³⁸ e pertanto tendente a infinito, col che $j \rightarrow 0$; tende, infine, a meno infinito per $Y \rightarrow 0$ poiché $\chi^2 \mathcal{R} \Omega^2 \rightarrow 0$;
- Il denominatore si annulla per $Y = Y_c$ poiché in condizioni critiche è $Fr = 1$ (ovvero $dE/dY = 0$); tende a 1 per $Y \rightarrow \infty$ poiché il denominatore $g\Omega^3$ della frazione tende a infinito più rapidamente del numeratore bQ^2 , col che $bQ^2/g\Omega^3 \rightarrow 0$; tende, infine, a meno infinito per $Y \rightarrow 0$ poiché $g\Omega^3$ tende a zero più rapidamente di bQ^2 , col che $bQ^2/g\Omega^3 \rightarrow \infty$.

Le caratteristiche geometriche dei profili risultanti vanno invece analizzate separatamente per alvei a pendenza debole, forte e critica.

14.5.3 Alvei a debole pendenza

Per definizione, in alvei a debole pendenza¹³⁹ si ha $Y_u > Y_c$. Per le considerazioni espone nel paragrafo precedente, gli andamenti del numeratore N e del denominatore D della frazione contenuta nell'espressione (294) della derivata dY/ds possono essere rappresentati come in Figura 160. Il segno di un rapporto è, ovviamente, positivo se i segni di numeratore e denominatore sono concordi; è invece negativo se i segni risultano discordi. Si determinano pertanto tre intervalli di profondità definiti dalle profondità critica e di moto uniforme, contraddistinti da diverse proprietà dei profili, tracciati in Figura 161, di seguito riassunte.

¹³⁷ Si ricordi che una derivata ha il significato di velocità di variazione della variabile dipendente (Y in questo caso) al variare della variabile indipendente (s). Conseguentemente, un valore positivo della derivata dY/ds rappresenta un aumento della profondità nel senso del moto, un valore negativo di dY/ds una diminuzione della profondità; valori grandi o piccoli in valore assoluto rappresentano rispettivamente variazioni relativamente brusche o graduali della profondità (pur nell'ambito dell'ipotesi di corrente gradualmente variata); $dY/ds \rightarrow +\infty$ rappresenta un punto del profilo a tangente verticale con concavità rivolta verso il basso (Y crescente), $dY/ds \rightarrow -\infty$ rappresenta un punto del profilo a tangente verticale con concavità rivolta verso l'alto (Y decrescente).

¹³⁸ Tranne che per una sezione chiusa in prossimità del completo riempimento. D'altro canto, anche nel caso di sezioni aperte, evidentemente, considerare $Y \rightarrow \infty$ ha senso unicamente nel caso in cui tali condizioni asintotiche si raggiungano per profondità inferiori alla profondità massima disponibile della sezione dell'alveo.

¹³⁹ Un alveo a pendenza debole, forte o critica è sempre declive. La classificazione degli alvei utilizzata è infatti definita sulla base del confronto fra profondità critica e di moto uniforme. Poiché, come si mostrerà al §14.5.6, la profondità di moto uniforme è definibile soltanto per alvei declivi, soltanto essi posso essere classificati come a pendenza debole, forte o critica, senza necessità di ulteriori specificazioni sul segno della pendenza.

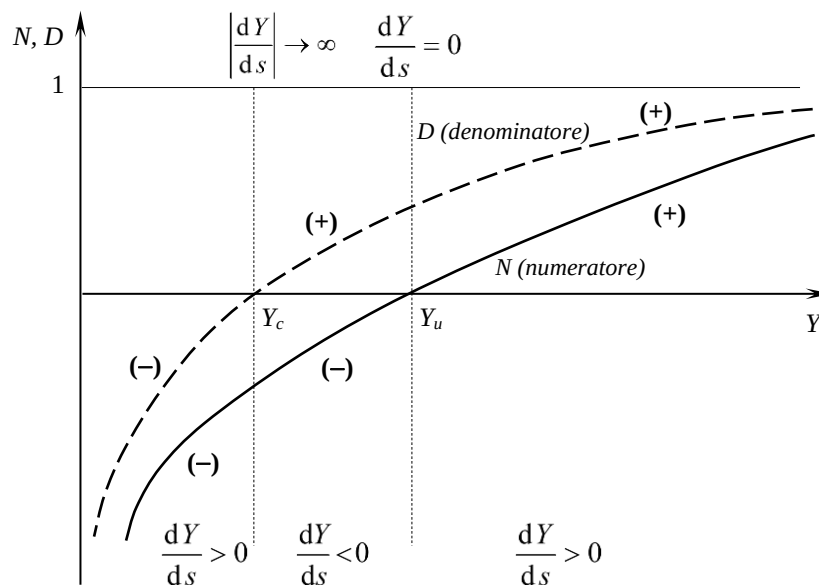


Figura 160. Andamento schematico del numeratore N e del denominatore D della frazione a secondo membro dell'espressione (294) della derivata dY/ds per alveo a debole pendenza.

14.5.3.1 Caso $0 < Y < Y_c$ (Profilo D3)

Poiché $N < 0$ e $D < 0$ si ha $dY/ds > 0$ e la profondità risulta crescente nel senso del moto; la corrente è pertanto veloce (perché $Y < Y_c$) rallentata (perché $U = Q/\Omega$ con $Q = \text{costante}$ e Ω crescente con la profondità Y nel senso del moto). Tale profilo viene identificato con il simbolo D3¹⁴⁰. Essendo la profondità crescente verso valle, gli estremi inferiore e superiore dell'intervallo di profondità ($Y = 0$ e $Y = Y_c$ rispettivamente) corrispondono agli estremi di monte e di valle del profilo.

Maggiori informazioni sulla forma dei profili possono ottenersi analizzando le condizioni che si verificano agli estremi di ciascuno dei tre intervalli di profondità. Nel limite per $Y \rightarrow 0$, il rapporto N/D assume la forma indeterminata $-\infty/-\infty$. Tale circostanza non risulta un particolare inconveniente, giacché un profilo di corrente veloce va tracciato assumendo condizioni al contorno all'estremo di monte, imponendo pertanto una profondità che, in casi reali, non potrà mai essere nulla¹⁴¹. Per un alveo rettangolare, l'approssimazione monomia della scala delle portate per $Y \rightarrow 0$ (cfr. §14.2) e il calcolo del limite attraverso la formula di de l'Hospital consentono di determinare una conformazione del profilo a tangente verticale con concavità rivolta verso il basso¹⁴².

Per $Y \rightarrow Y_c$ da sinistra (ossia, da valori inferiori alla profondità critica), il denominatore D tende a zero, il numeratore N tende a un valore negativo, con il rapporto fra i due che si mantiene sempre positivo e tende pertanto a $+\infty$. Il profilo assume pertanto una conformazione a tangente verticale, con concavità rivolta verso l'alto, come mostrato in Figura 161.

¹⁴⁰ La lettera "D" sta per "debole pendenza" ed è quindi riferito, ovviamente, alle denominazioni "debole pendenza" e "forte pendenza" in luogo di "fluviale" e "torrentizio". La precisazione è opportuna in quanto, in alcuni testi (ad esempio nel Marchi-Rubatta), viene fatto riferimento a quest'ultima terminologia, con la lettera "F" utilizzata per alvei fluviali (cioè a debole pendenza), che, secondo la scelta adottata in queste dispense, è, viceversa, riferita ad alvei a forte pendenza (cioè torrentizi).

¹⁴¹ Più in generale, è opportuno chiarire che in Figura 161, come nella analoga Figura 163 per alvei a forte pendenza, sono riportati gli interi sviluppi dei profili determinabili dalla discussione dell'equazione (294). Si osservi però che, nei casi reali, un profilo potrà estendersi, in generale, anche soltanto per parte dell'intero sviluppo. Anche nel caso ideale di un alveo di sviluppo infinito, è comunque sempre questo il caso dei profili di corrente veloce aventi valore minimo di profondità pari a zero (il D3 e l'F3 in alveo a forte pendenza) e dei profili di corrente lenta definiti nell'intervallo di profondità illimitato superiormente (il D1 e l'F1).

¹⁴² Vedi Citrini-Nosedà, §10.6.1.

Un profilo D3 si può formare a valle di una paratoia o in conseguenza di fenomeni più complessi, quali il passaggio su un rialzo del fondo o in una strizione della sezione, per effetto dei quali la corrente sia forzata ad assumere condizioni supercritiche (di corrente veloce).

Si osservi che, in prossimità di condizioni di tangente verticale del profilo (ove la corrente non può dirsi gradualmente variata) o di profondità nulla (ove la scabrezza è di dimensioni comparabili con la profondità della corrente), le ipotesi poste alla base della teoria delle correnti a pelo libero cadono in difetto. Per evidenziare questa circostanza, il profilo del pelo libero è tratteggiato. Le modalità della transizione per lo stato critico verranno analizzate in dettaglio nei §14.6.5 e §14.6.6.

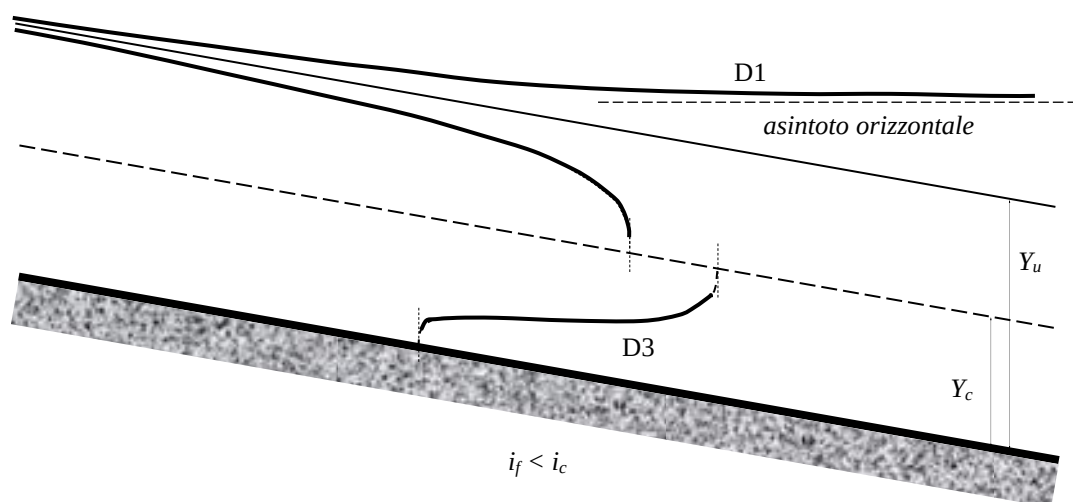


Figura 161. Profili di moto permanente in alvei a debole pendenza.

14.5.3.2 Caso $Y_c < Y < Y_u$ (Profilo D2)

Poiché $N < 0$ e $D > 0$ si ha $dY/ds < 0$. La profondità risulta decrescente nel senso del moto e la corrente è quindi lenta (perché $Y > Y_c$) accelerata (perché Ω decresce nel senso del moto). Tale profilo viene identificato con il simbolo D2. Essendo la profondità decrescente verso valle, gli estremi inferiore e superiore dell'intervallo di profondità ($Y = Y_c$ e $Y = Y_u$ rispettivamente) corrispondono, nell'ordine, agli estremi di valle e di monte del profilo. Un profilo D2 può prodursi a monte di una sezione a valle della quale la pendenza del fondo subisca un incremento, o l'alveo diminuisca la sua scabrezza (effetto di *richiamo*).

Nel limite per $Y \rightarrow Y_c$ da destra (ossia, da valori superiori alla profondità critica), il denominatore D tende a zero da valori positivi, il numeratore N tende a un valore negativo, con il rapporto fra i due che si mantiene sempre negativo e tende pertanto a $-\infty$. Il profilo assume pertanto una conformazione a tangente verticale, con concavità rivolta verso il basso, come mostrato in Figura 161. Per $Y \rightarrow Y_u$ il numeratore N tende a zero, così come il rapporto N/D e la derivata dY/ds . Ciò significa che la profondità tende a diventare costante e pari alla profondità di moto uniforme asintoticamente verso monte da valori inferiori (vedi Figura 161).

14.5.3.3 Caso $Y > Y_u$ (Profilo D1)

Poiché $N > 0$ e $D > 0$ si ha $dY/ds > 0$. La profondità risulta crescente nel senso del moto e la corrente è pertanto lenta (perché $Y > Y_c$) rallentata (perché Ω cresce nel senso del moto). Tale profilo viene identificato con il simbolo D1. Essendo la profondità crescente verso valle, gli estremi inferiore e superiore dell'intervallo di profondità ($Y = Y_u$ e $Y = \infty$ rispettivamente) corrispondono agli estremi di monte e di valle del profilo. Esso può prodursi a monte di un ostacolo al libero deflusso della corrente quale una paratoia o una soglia di fondo (effetto di *rigurgito*).

Per $Y \rightarrow Y_u$, il numeratore N , il rapporto N/D e la derivata dY/ds tendono a zero. La profondità tende perciò a diventare costante e pari alla profondità di moto uniforme asintoticamente verso monte da valori superiori (vedi Figura 161). Per $Y \rightarrow \infty$, numeratore e denominatore tendono a 1, per cui

$dY/ds \rightarrow i_f$. La quota del fondo diminuisce quindi di i_f per unità di lunghezza, tanto quanto aumenta la profondità della corrente. La quota del pelo libero deve quindi mantenersi costante: il profilo ha pertanto un asintoto orizzontale cui tende da valori superiori (vedi Figura 161).

14.5.4 Alvei a forte pendenza

Per definizione, in alvei a forte pendenza si ha $Y_u < Y_c$. Gli andamenti del numeratore N e del denominatore D della frazione a secondo membro dell'espressione (294) della derivata dY/ds possono essere rappresentati come in Figura 162. Analogamente al caso degli alvei a debole pendenza, si determinano tre intervalli di profondità contraddistinti dalle proprietà dei profili di seguito riassunte.

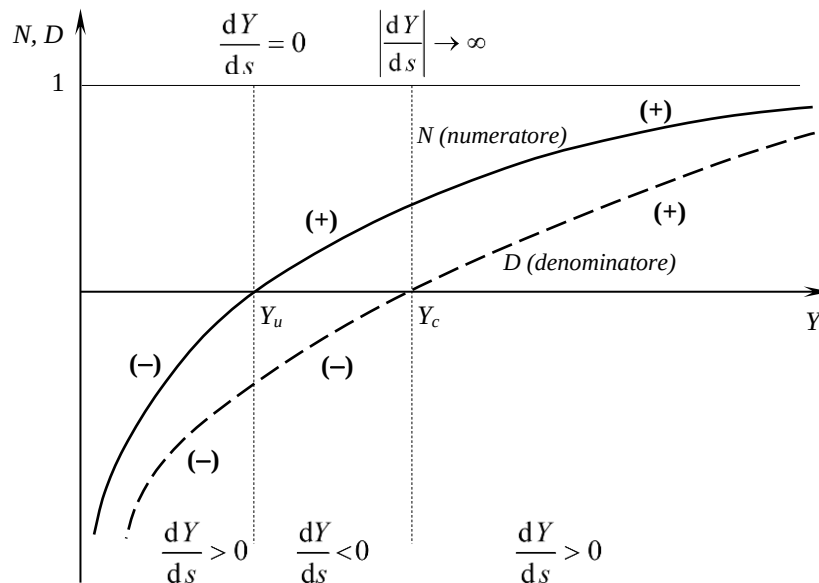


Figura 162. Andamento schematico del numeratore N e del denominatore D della frazione a secondo membro dell'espressione (294) della derivata dY/ds per alveo a forte pendenza.

14.5.4.1 Caso $0 < Y < Y_u$ (Profilo F3)

Poiché $N < 0$ e $D < 0$ si ha $dY/ds > 0$. La profondità risulta crescente nel senso del moto e la corrente è pertanto veloce (perché $Y < Y_c$) rallentata (perché Ω è crescente nel senso del moto a $Q = \text{costante}$). Tale profilo viene identificato con il simbolo F3. Essendo la profondità crescente verso valle, gli estremi inferiore e superiore dell'intervallo di profondità ($Y=0$ e $Y=Y_u$ rispettivamente) corrispondono agli estremi di monte e di valle del profilo.

Nel limite per $Y \rightarrow 0$, il rapporto N/D assume la forma indeterminata $-\infty/-\infty$. Valgono qui le stesse considerazioni svolte per il caso del profilo D3. In particolare, anche in questo caso il profilo in alveo rettangolare possiede, in prossimità del fondo, tangente verticale con concavità rivolta verso il basso. Per $Y \rightarrow Y_u$ il numeratore N , il rapporto N/D e la derivata dY/ds tendono a zero. La profondità tende perciò a diventare costante e pari alla profondità di moto uniforme asintoticamente verso valle, da valori inferiori (vedi Figura 163).

14.5.4.2 Caso $Y_u < Y < Y_c$ (Profilo F2)

Poiché $N > 0$ e $D < 0$ si ha $dY/ds < 0$. La profondità decresce nel senso del moto e la corrente è quindi veloce (perché $Y < Y_c$) accelerata (perché Ω decresce nel senso del moto). Tale profilo viene identificato con il simbolo F2. Essendo la profondità decrescente verso valle, gli estremi inferiore e superiore dell'intervallo di profondità ($Y=Y_u$ e $Y=Y_c$ rispettivamente) corrispondono, nell'ordine, agli estremi di valle e di monte del profilo. Un profilo F2 può prodursi a valle di una sezione a monte della quale la pendenza del fondo subisca un decremento, o l'alveo aumenti la sua scabrezza.

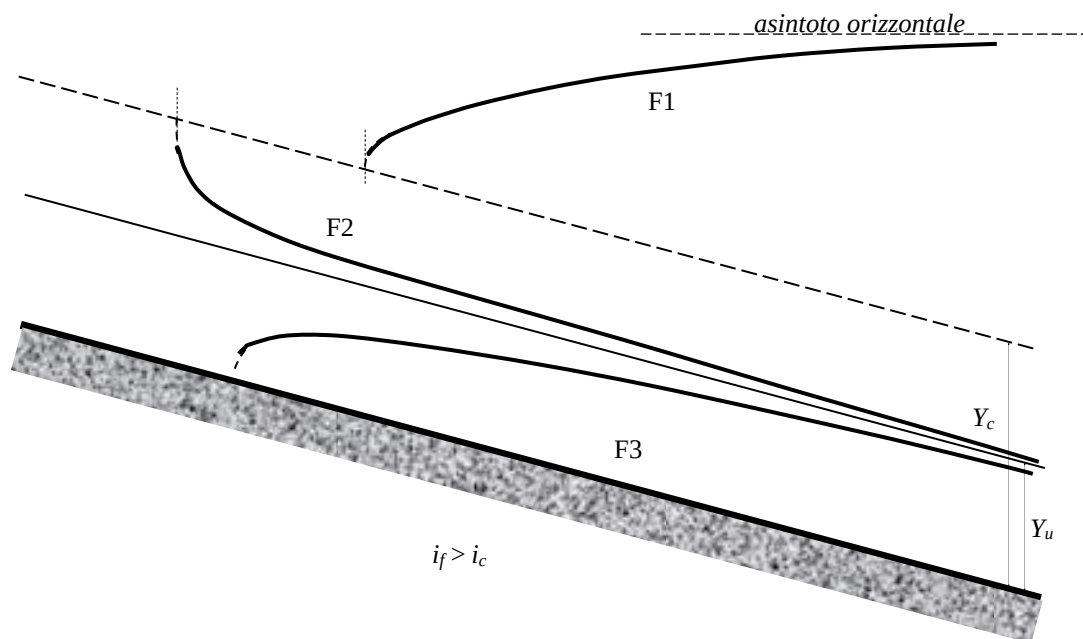


Figura 163. Profili di moto permanente in alvei a forte pendenza.

Nel limite per $Y \rightarrow Y_c$ da sinistra (ossia, da valori inferiori alla profondità critica), il denominatore D tende a zero da valori negativi; il numeratore N tende a un valore positivo, con il rapporto fra i due che si mantiene sempre negativo e tende pertanto a $-\infty$. Il profilo assume una conformazione a tangente verticale, con concavità rivolta verso l'alto, come mostrato in Figura 163. Per $Y \rightarrow Y_u$ il numeratore N tende a zero, così come il rapporto N/D e la derivata dY/ds . La profondità tende perciò a diventare costante e pari alla profondità di moto uniforme asintoticamente verso valle da valori superiori (vedi Figura 163).

14.5.4.3 Caso $Y > Y_c$ (Profilo F1)

Poiché $N > 0$ e $D > 0$ si ha $dY/ds > 0$. La profondità è crescente nel senso del moto e la corrente è pertanto lenta (perché $Y > Y_c$) rallentata (perché Ω cresce nel senso del moto). Tale profilo viene identificato con il simbolo F1. Essendo la profondità crescente verso valle, gli estremi inferiore e superiore dell'intervallo di profondità ($Y = Y_c$ e $Y = \infty$ rispettivamente) corrispondono agli estremi di monte e di valle del profilo. Esso può prodursi a monte di un ostacolo al libero deflusso della corrente quale una paratoia o una soglia di fondo (rigurgito).

Per $Y \rightarrow Y_c$ da destra (da valori superiori alla profondità critica), il denominatore D tende a zero da valori positivi; il numeratore N tende a un valore positivo, con il rapporto N/D che si mantiene sempre positivo e tende pertanto a $+\infty$. Il profilo assume una conformazione a tangente verticale, con concavità rivolta verso il basso (v. Figura 163). Per $Y \rightarrow \infty$, numeratore e denominatore tendono a 1, per cui $dY/ds \rightarrow i_f$. Analogamente al caso del profilo D1, la quota del pelo libero deve mantenersi costante e il profilo ha un asintoto orizzontale cui tende da valori inferiori (vedi Figura 163).

14.5.5 Alvei a pendenza critica

In un alveo a pendenza critica si ha $Y_u = Y_c$. I campi contraddistinti da diversi segni della derivata dY/ds , illustrati in Figura 164, sono ancora tre. Ragionando come nei casi precedenti, si ottiene $dY/ds > 0$ (corrente ritardata) sia per $Y < Y_c$ (corrente veloce, profilo C3) che per $Y > Y_c$ (corrente lenta, profilo C1). I profili si mantengono molto prossimi all'orizzontale, con debole pendenza acclive nel senso del moto¹⁴³, almeno per profondità non troppo piccole. Per $Y \rightarrow 0$ il profilo C3 tende ad

¹⁴³ Per un alveo rettangolare molto largo ($Y/b \ll 1$), assumendo l'espressione di Strickler del coefficiente di Chezy si può mostrare che, in prossimità della profondità critica la pendenza dei profili C1 o C3 rispetto all'orizzontale è pari a $i_f/9$. Per coefficiente di Chezy costante si otterrebbero profili C1 e C3 orizzontali.

assumere tangente verticale, con concavità rivolta verso il basso. Il profilo C1 ha un asintoto orizzontale per $Y \rightarrow \infty$, cui tende da valori inferiori. Come per altri profili teoricamente passanti per il fondo dell'alveo, anche il profilo C3, di corrente veloce, si traccia a partire da una condizione di profondità non nulla fissata da monte.

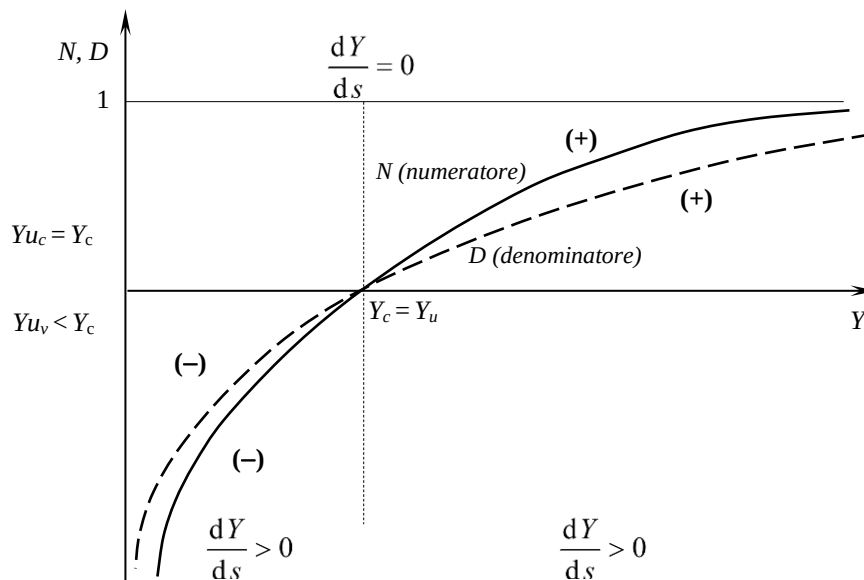


Figura 164. Andamento schematico del numeratore N e del denominatore D della frazione a secondo membro dell'espressione (294) della derivata dY/ds per alveo a pendenza critica.

Per $Y = Y_c = Y_u$, la (294) assume la forma indeterminata $dY/ds = 0/0$. Il tipo di profilo si può desumere con un ragionamento al limite, considerando il profilo intermedio in un alveo o a debole o a forte pendenza (rispettivamente il profilo D2 o F2). Poiché al limite per $i_f \rightarrow i_c$ le linee della profondità di moto uniforme e della profondità critica tendono a coincidere, il profilo in questione, dovendosi mantenere sempre compreso fra le due linee, assume la conformazione a profondità costante $Y = Y_c = Y_u$ (profilo C2)¹⁴⁴. I tre profili sono schematizzati in Figura 165.

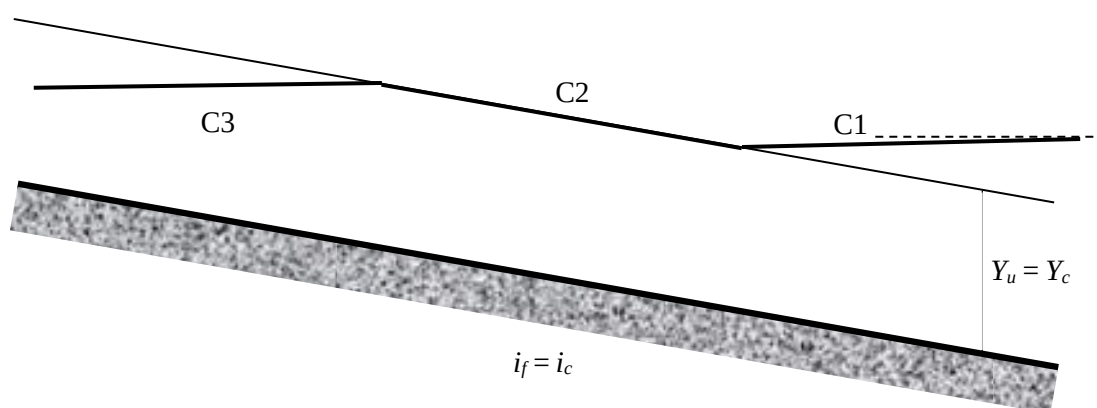


Figura 165. Profili di moto permanente in alveo a pendenza critica.

¹⁴⁴ Nella realtà, come in altre situazioni di transizione per lo stato critico, il profilo C2 ha un andamento ondulato attorno alla profondità critica.

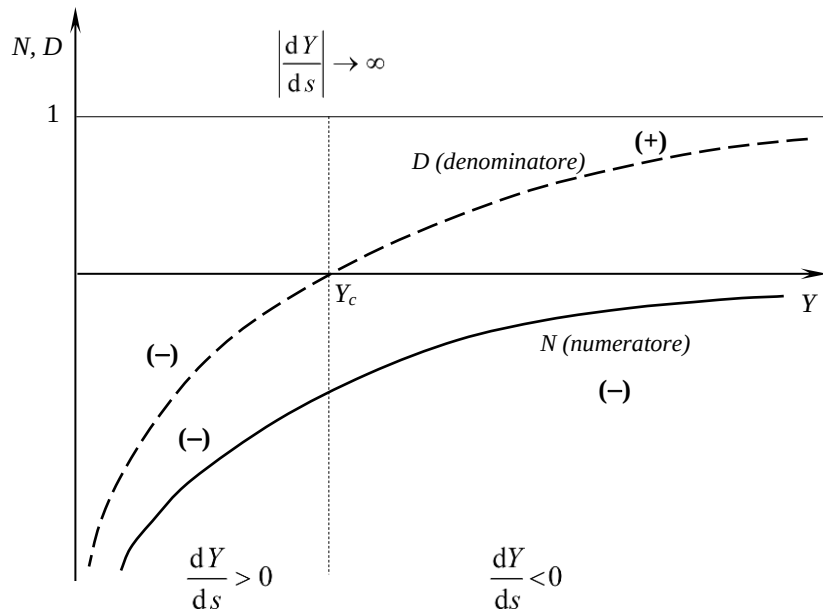


Figura 166. Andamento schematico del numeratore N e del denominatore D della frazione a secondo membro dell'espressione della derivata dY/ds (295), per alveo a pendenza nulla, o (294), per alveo acclive ($i_f < 0$).

Pertanto, tale caso è meno significativo dei precedenti ai fini pratici, sia perché relativo a un unico e ben preciso valore di pendenza, associato a un ben preciso valore di portata, costituente a rigore un caso a probabilità nulla di occorrenza; sia perché, costituendo un caso limite sia di alveo a debole pendenza che di alveo a forte pendenza, non risulta fondamentalmente differente dai due.

14.5.6 Alvei a pendenza nulla e alvei acclivi

Un caso limite di alvei a debole pendenza è rappresentato dagli alvei a pendenza nulla. Per tale tipo di alvei, la forma, non singolare, dell'equazione del profilo da considerare è la seguente:

$$\frac{dY}{ds} = \frac{-\frac{Q^2}{\chi^2 \Re \Omega^2}}{1 - \frac{bQ^2}{g\Omega^3}} \quad (295)$$

Gli alvei a pendenza nulla costituiscono un caso limite in quanto, per $i_f \rightarrow 0$, la profondità di moto uniforme, deducibile sulla base dell'equazione (284):

$$Q = \Omega \chi \sqrt{\Re i_f}$$

o della corrispondente scala delle portate, tende all'infinito. Non è pertanto definibile un profilo analogo al profilo D1, avente profondità superiori alla profondità di moto uniforme.

Mentre il denominatore D della frazione a secondo membro della (295) ha le medesime caratteristiche qualitative riscontrate nei casi precedenti, il numeratore N si mantiene sempre negativo come conseguenza del valore nullo della pendenza del fondo (vedi Figura 166). Si individuano pertanto due profili, per $0 \leq Y \leq Y_c$ (profilo O3) e per $Y_c \leq Y$ (profilo O2), aventi caratteristiche del tutto analoghe, rispettivamente, ai profili D3 e D2, sia quanto a segno della derivata dY/ds , sia quanto a comportamento ai limiti degli intervalli di profondità sui quali essi sono definiti. I due profili in alveo a pendenza nulla sono schematizzati in Figura 167.

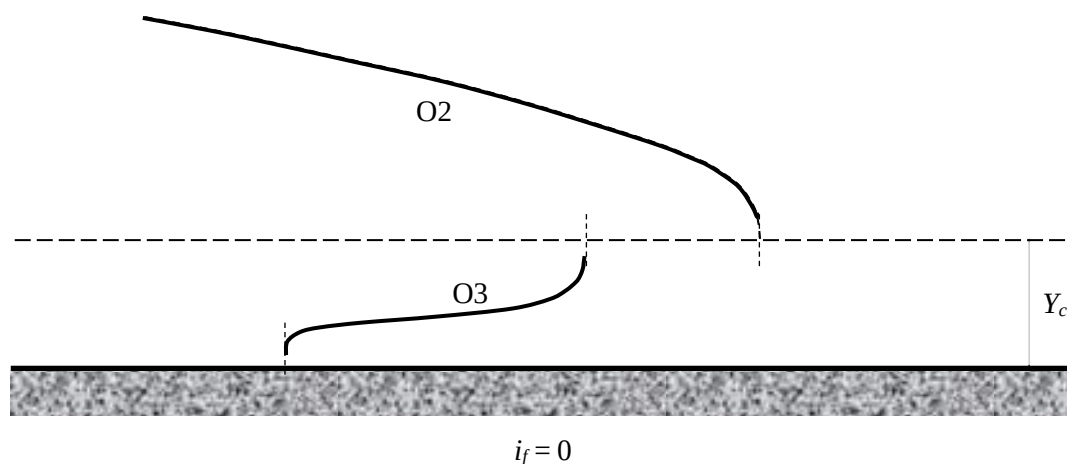


Figura 167. Profili di moto permanente in alveo a pendenza nulla.

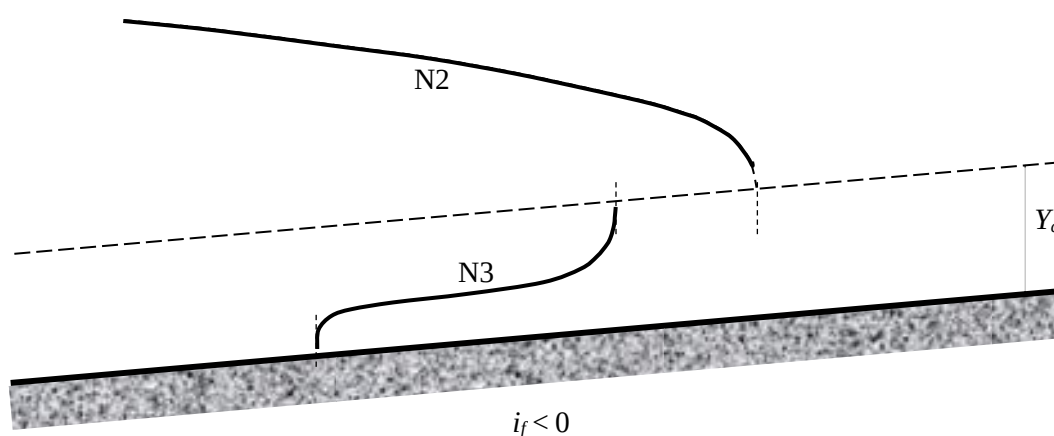


Figura 168. Profili di moto permanente in alveo acclive (in contropendenza).

Sono simili in forma ai profili in alveo a pendenza nulla i profili in alveo acclive (o *in contropendenza*), per i quali la pendenza del fondo definita dalla (282) è negativa. Pertanto, la (284) non possiede soluzione reale per la profondità di moto uniforme e i profili sono solo due, come per gli alvei a pendenza nulla. Anche in questo caso, non sussistono difficoltà nella individuazione dei profili di moto permanente, eseguibile mediante la (293) perché non singolare. Il denominatore possiede le stesse caratteristiche che per gli altri tipi di alvei, mentre il numeratore si mantiene sempre di segno negativo, come nel caso di alvei a pendenza nulla. La rappresentazione schematica di Figura 166 è pertanto rappresentativa anche degli alvei acclivi; i due profili da essa desumibili, riportati in Figura 168, possiedono pertanto le medesime caratteristiche dei profili in alveo a pendenza nulla. Utilizzeremo le denominazioni N3 per il profilo avente $0 \leq Y \leq Y_c$ e N2 per il profilo avente $Y_c \leq Y$.

14.6 Tracciamento dei profili di moto permanente

14.6.1 Generalità

In generale, il problema è costituito dal tracciamento del profilo del pelo libero in un canale che può essere composto di vari tratti, caratterizzati da diverse forme della sezione, tipo di pendenza (debole, forte o critica), presenza di manufatti, etc., secondo configurazioni che possono essere anche molto articolate. A prescindere dal tipo di strumento utilizzato per l'integrazione dell'equazione differenziale (293) – da una soluzione totalmente manuale, mediante un foglio di calcolo, a un software dedicato – è comunque necessario essere in grado di determinare le caratteristiche

qualitative della soluzione, non fosse altro che per poter valutare l'attendibilità dei risultati ottenuti. A tale proposito va rilevata la possibilità di molteplici soluzioni, *qualitativamente* differenti fra loro (ossia, in termini dei *tipi* stessi dei profili ammissibili), a seconda dei valori numerici delle condizioni al contorno o specificabili in particolari sezioni del canale (generalmente identificate come *sezioni di controllo*), con tante maggiori possibilità quanto più è articolata la conformazione del sistema in studio. Per questo motivo, la soluzione dei problemi relativi al tracciamento dei profili richiede, in generale, una certa dose di ragionamento caso per caso, non sempre traducibile in procedimenti standardizzati. Nonostante ciò, alcune linee guida generali alla soluzione di tali problemi possono essere delineate.

Nel prosieguo verrà fatto di norma riferimento ai risultati qualitativi ottenuti per i profili di moto permanente in alvei prismatici. Peraltro, i procedimenti indicati sono sostanzialmente identici a quelli utilizzabili nel caso di alvei non prismatici, dai quali differiscono lievemente soltanto nell'impostazione del procedimento di soluzione numerica. In particolare, va condotta con le stesse modalità la specificazione delle condizioni al contorno, o l'analisi di casi particolari (soglie di fondo, presenza di manufatti, etc.).

In generale, una soluzione sarà raggiunta se, in ogni tratto del canale, il profilo identificato:

1. è uno dei profili possibili per il tipo di alveo in questione (D1, D2 o D3 per alveo a debole pendenza; F1, F2 o F3 per alveo a forte pendenza, etc..)¹⁴⁵;
2. assume le proprie condizioni al contorno correttamente;
3. si basa, se del caso, su una specificazione corretta delle condizioni a una sezione di controllo, in termini di: a) valori delle profondità a monte e a valle della sezione di controllo; b) attribuzione del tipo di corrente (lenta o veloce).

I tre punti, seppure distinti per meglio evidenziare i controlli da effettuare nella analisi di una soluzione, attengono sostanzialmente tutti al problema della corretta specificazione delle condizioni al contorno, che riveste un ruolo chiave nella soluzione del problema¹⁴⁶ e conviene quindi illustrare preventivamente anche all'impostazione della soluzione numerica generale, per motivi che verranno chiari in seguito.

14.6.2 Condizioni al contorno

La (293) costituisce una equazione differenziale nella funzione incognita Y ; da un punto di vista strettamente matematico la sua soluzione richiede, pertanto, la specificazione di una sola condizione al contorno. Più precisamente, la specificazione di condizioni al contorno può essere richiesta nelle sezioni di estremità di un tratto omogeneo – caratterizzato cioè da forma della sezione o parametri quali pendenza e scabrezza costanti – ricavate dal tracciamento del profilo in un tratto adiacente o da particolari condizioni locali indipendenti dall'andamento dei profili nei tratti contigui, ovvero in sezioni di controllo interne a tratti omogenei, sulle quali sia posto un manufatto (paratoia, stramazzo, etc...) il cui funzionamento sia governato da una legge di efflusso.

Le modalità di specificazione delle condizioni al contorno sono intimamente legate alle modalità di propagazione delle perturbazioni illustrate nel §14.4.1. Infatti, come conseguenza delle proprietà fisiche delle correnti lente e veloci espresse in precedenza, *l'unica condizione al contorno richiesta in ciascun tratto va imposta a valle se si tratta di corrente lenta, a monte se si tratta di corrente veloce*. Il secondo caso è abbastanza intuitivo; infatti, potendo le perturbazioni dirigersi unicamente verso valle nelle correnti veloci, soltanto condizioni imposte da monte possono influenzare la corrente e risultare efficaci da un punto di vista fisico, oltre che matematico. L'affermazione relativa alle correnti lente può invece risultare meno chiara, dal momento che le perturbazioni possono propagarsi in entrambi i sensi. Una spiegazione euristica semplice ma convincente delle modalità di specificazione delle condizioni al contorno può ottenersi considerando il moto stazionario come

¹⁴⁵ La precisazione potrà sembrare banale; tuttavia, è frequente, nello studente, la tentazione di tracciare profili inesistenti, in quanto non coincidenti con alcuno dei soli profili che si è dimostrato potersi verificare nei vari tipi di alveo.

¹⁴⁶ La corretta specificazione delle condizioni al contorno è richiesta anche con l'uso di software di pubblico dominio quali, ad esempio, HEC-RAS.

condizione asintotica di un moto vario. Il problema di moto più generale è retto dalle equazioni differenziali del moto e di continuità per le correnti:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} \right) + \frac{\tau_0}{\gamma R} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0,$$

le cui incognite possono considerarsi (ancorché in forma non esplicita) la portata Q e la profondità Y . Nel moto vario le due condizioni al contorno richieste devono essere specificate entrambe da monte per una corrente veloce; una da monte e una da valle per una corrente lenta, conformemente alle modalità di propagazione delle perturbazioni. Il regime stazionario può verificarsi soltanto se, a monte, viene immessa una portata costante, o vengono realizzate condizioni che determinino un valore costante della portata (per esempio, determinando una certa apertura, costante nel tempo, di una paratoia che regola la portata derivata da un serbatoio, il cui livello venga pure mantenuto costante nel tempo). Specificando il valore di portata in un problema di moto permanente si sta, in effetti, impegnando una condizione al contorno da monte. La seconda condizione disponibile deve quindi essere, effettivamente, imposta da valle per le correnti lente e da monte per le correnti veloci.

I vari tipi di condizioni al contorno verranno esaminati di seguito, cominciando dal caso di alvei posti esternamente alla zona nella quale interessa specificamente tracciare i profili, che pertanto la delimitano verso monte o verso valle, sufficientemente estesi in confronto a essa da poterli considerare praticamente indefiniti in lunghezza.

14.6.3 Condizioni al contorno asintotiche in alvei indefiniti

Dall'analisi dei profili di moto permanente in alvei prismatici, si deduce una caratteristica comune: *tutti i profili tendono a ricostituire le condizioni di moto uniforme nel verso corrispondente al tipo di corrente*, sulla base delle modalità di propagazione delle perturbazioni: verso monte in correnti lente (profili D1, D2 direttamente, con tendenza asintotica; profilo F1 limitato inferiormente dalla profondità critica, per limitare gli esempi agli alvei a debole e forte pendenza); verso valle in correnti veloci (profili F2, F3 direttamente, con tendenza asintotica; profilo D3 limitato superiormente dalla profondità critica). Le condizioni di moto uniforme sono, in effetti, delle condizioni stabili che la corrente tenderebbe a realizzare spontaneamente in assenza di cause perturbative. Queste ultime possono essere molteplici: cambiamenti di pendenza, di scabrezza, di forma della sezione; presenza di manufatti di vario tipo: p.es., una paratoia, uno stramazzo, una soglia di fondo, un gradino o una variazione di sezione. È facile mostrare¹⁴⁷, mediante una applicazione dell'equazione globale del moto su un tronco di corrente di lunghezza L e volume $V = \Omega L$, che nel moto uniforme si fanno equilibrio la componente della forza peso lungo l'asse della corrente, $G_s = \gamma V i_f$, costituente la forza motrice principale, e le resistenze al moto esercitate dalle pareti dell'alveo $T = \gamma V j$, associate alle perdite di carico distribuite. Ogni deviazione da questa condizione di equilibrio determina l'insorgenza di forze che tendono a ripristinarlo: a norma della (294) si ha, infatti, $dY/ds \neq 0$ ogniqualvolta $i_f \neq j$.

Tale caratteristica dei profili determina le condizioni da considerare nel caso di alvei indefiniti. A titolo di esempio, si consideri il canale rappresentato in Figura 169, costituito da due tratti, entrambi a debole pendenza, indefiniti verso monte e verso valle. Seppure in termini astratti sia chiaro cosa possa intendersi con il termine "alveo indefinito", in pratica si sta parlando non di enti geometrici (per l'appunto astratti: una semiretta, un semispazio, etc...) ma di un manufatto che, nella realtà, deve avere necessariamente uno sviluppo limitato. Trattandosi di condizioni al contorno, la nozione di alveo indefinito è, in effetti, attinente a uno sviluppo sufficientemente grande del canale perché possa ritenersi verificata una qualche condizione significativa. Allo scopo di chiarire questo punto, si consideri lo schema di Figura 170, nel quale, in un riquadro, è evidenziato il tratto rappresentato

¹⁴⁷ Vedi Dispense di Idraulica di C.A. Fassò.

in Figura 169, mentre, a valle di esso, è riportato il tratto di canale “molto lungo”, detto indefinito ma in realtà limitato ed eventualmente seguito da altri tratti di diverse caratteristiche, con i tre profili di moto permanente che si possono verificare, in tutto o soltanto in parte di esso. Avendosi $i_{f1} > i_{f2}$, si ha anche $Y_{u1} < Y_{u2}$. Al termine del tratto in questione si potranno avere situazioni diverse; in ogni caso, per quanto mostrato riguardo la propagazione delle perturbazioni, una causa perturbatrice posta in tale sezione terminale potrà influenzare la zona di interesse (posta a una grande distanza a monte) *soltanto tramite una corrente lenta*; quindi, soltanto tramite un profilo D1 o D2¹⁴⁸. Viceversa, una corrente veloce *non è idonea a far risentire la sua presenza verso monte*; al contrario, essa *richiede condizioni da monte*. Ciò non significa, peraltro, che una corrente veloce non possa aversi in qualche parte del secondo tratto. Tuttavia, anche se ciò avvenisse, per effetto di una qualche causa perturbatrice, il profilo di corrente veloce D3 sarebbe posto *a valle* di tale causa e, per tale motivo, non potrebbe in alcun modo influenzare la zona di interesse; a monte della causa perturbatrice, verrebbe pur sempre generato un profilo di rigurgito D1 o D2, col che si ricadrebbe in una delle condizioni delineate in precedenza.

Chiarito che soltanto un profilo D1 o D2 possono influenzare la zona di interesse, e ricordato che entrambi i profili tendono asintoticamente verso monte alla profondità di moto uniforme, risulta ora chiaro che in un alveo a debole pendenza esteso verso valle rispetto alla zona di specifico interesse, può essere prescritta una condizione al contorno di moto uniforme se esso possiede lunghezza sufficiente a far sì che il profilo di rigurgito che ha sede nell'alveo assuma tale condizione asintotica nella zona di interesse. Diremo quindi “indefinito” un alveo di questo tipo. Nel caso del canale di Figura 169, la soluzione è fornita pertanto da un profilo di moto uniforme che si estende, nel secondo tratto, fino al suo estremo di monte. Tale profondità di corrente lenta, risultando superiore alla profondità di moto uniforme nel primo tratto, costituisce una condizione al contorno idonea al tracciamento di un profilo D1, ancora di corrente lenta, a monte del cambio di pendenza (punti 1 e 2 della procedura schematica presentata a pag.324). Tale considerazione è generale per alvei a debole pendenza indefiniti verso valle.

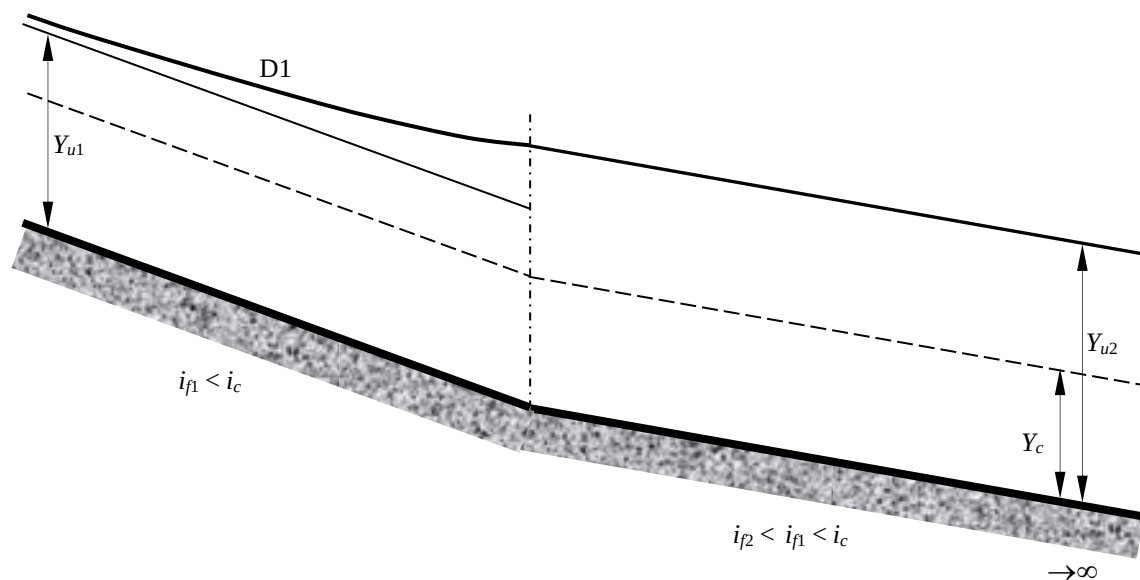


Figura 169. Alveo a debole pendenza indefinito verso valle.

¹⁴⁸ Il primo profilo potrà aversi se, nella sezione di valle del secondo tratto, avremo un rigurgito determinato, ad esempio, da una paratoia (come nel caso di Figura 171 descritto nel successivo §14.6.4), uno stramazzo, un gradino del fondo, un restringimento di sezione, etc... Un profilo D2 potrà invece essere causato da un richiamo generato da un cambiamento di pendenza, da lenta a forte, in un tratto successivo al secondo (vedi §14.6.5).

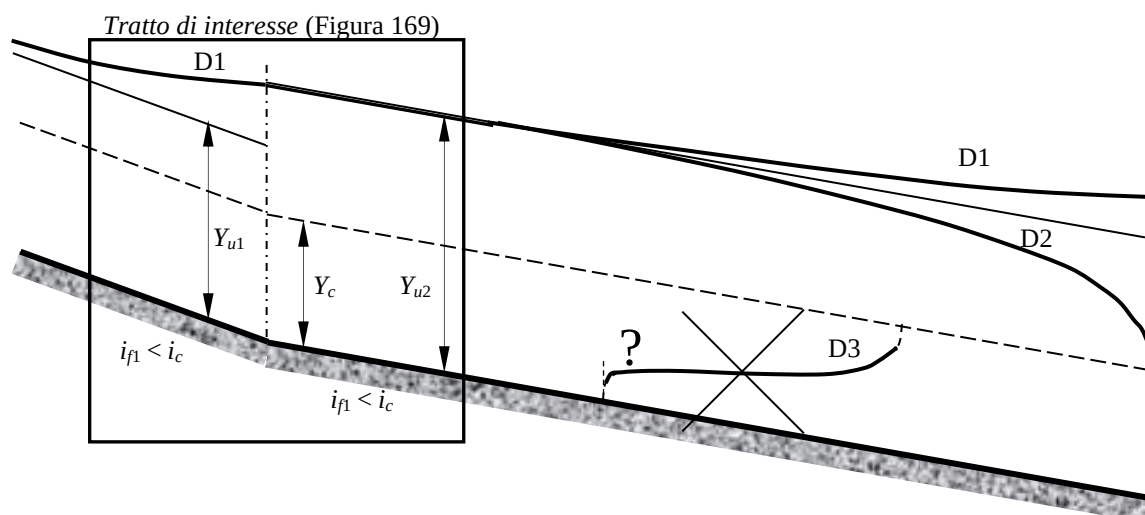


Figura 170. Possibili profili di moto permanente nel canale di Figura 169.

È importante rimarcare che, al contrario del caso delle sezioni di controllo di cui si dirà nei paragrafi successivi, la condizione al contorno in un alveo a debole pendenza indefinito verso valle *non viene specificata in una sezione determinata*. Si può invece affermare che, indipendentemente dalla molteplicità di situazioni che possono verificarsi nella zona di monte del tratto, *da una certa sezione in poi verso valle si possano assumere condizioni di moto uniforme*¹⁴⁹ (purché a distanza sufficiente dalla causa perturbatrice che ha prodotto il profilo di rigurgito verso monte). Tale concetto potrà essere chiarito meglio sulla base delle considerazioni sviluppate nei paragrafi successivi.

Risulta anche evidente come la qualità di alveo indefinito sia tale non soltanto per determinate condizioni di portata, ma anche in relazione alla causa perturbatrice che, all'estremo di valle del tratto "indefinito", determina uno dei due profili di rigurgito. Ad esempio, se tale causa perturbatrice fosse costituita da una paratoia, per un fissato grado di apertura, il livello di monte aumenterebbe all'aumentare della portata, fino a che possa non essere più possibile ammettere che all'estremo di monte il profilo D1 si trovi in condizioni asintotiche. Viceversa, fissata la portata, valori crescenti di profondità a monte della paratoia (e quindi profili D1 che raggiungono condizioni asintotiche a distanze verso monte sempre crescenti) possono ottenersi riducendo la luce al di sotto della paratoia.

Le considerazioni svolte per un alveo a debole pendenza indefinito verso valle possono ripetersi, con modalità del tutto analoghe, per un alveo a forte pendenza indefinito verso monte. Infatti, in questo caso i due profili che, determinati da condizioni poste a monte di essi, possono influenzare la corrente all'estremo di valle del canale, e pertanto fornire condizioni al contorno in tale zona, sono i profili F2 e F3 di corrente veloce, entrambi tendenti asintoticamente verso valle alla profondità di moto uniforme. Viceversa, un profilo F1 non è idoneo a far risentire la sua presenza verso valle in quanto di corrente lenta (e perciò esso stesso *necessitante* di condizioni da valle).

Ricapitolando: *condizioni al contorno costituite dalla profondità di moto uniforme devono essere specificate in alvei a debole pendenza indefiniti verso valle e in alvei a forte pendenza indefiniti verso monte*. Nessuna particolare condizione può essere specificata per alvei a debole pendenza indefiniti verso monte o per alvei a forte pendenza indefiniti verso valle, nella direzione verso la quale il canale si estende "indefinitamente".

14.6.4 Cause perturbatrici. Sezioni di controllo.

Nel paragrafo precedente è stato esaminato un esempio di specificazione di condizioni al contorno in alvei indefiniti e in sezioni estreme di tronchi omogenei. Tale specificazione ha dato luogo a una soluzione ammissibile, perché conforme alla procedura indicata a pag. 324. Precisate le modalità di

¹⁴⁹ È questo il caso di Figura 171b, a valle della discontinuità del profilo, le modalità di formazione della quale saranno illustrate nel successivo §14.6.6.

specificazione delle condizioni al contorno, la procedura può essere integrata al punto 2, allo scopo di riconoscere quale soluzione ammissibile un profilo che, in ogni tratto del canale:

1. è uno dei profili possibili per il tipo di alveo in questione (D1, D2 o D3 per alveo a debole pendenza; F1, F2 o F3 per alveo a forte pendenza, etc..).
2. assume le proprie condizioni al contorno correttamente (da monte se corrente veloce; da valle se corrente lenta)¹⁵⁰;
3. si basa, se del caso, su una specificazione corretta delle condizioni a una sezione di controllo di estremità in termini di: a) valori delle profondità a monte e a valle della sezione di controllo; b) attribuzione del tipo di corrente (lenta o veloce).

La condizione 3b è, in effetti, complementare alla 2, in quanto entrambe sono legate alle modalità di propagazione delle perturbazioni. Per questo motivo, *una causa perturbatrice può esercitare la propria influenza: verso monte soltanto se la corrente su cui agisce è lenta (o diventa tale per causa sua); verso valle soltanto se la corrente su cui agisce è veloce (o diventa tale per causa sua).*

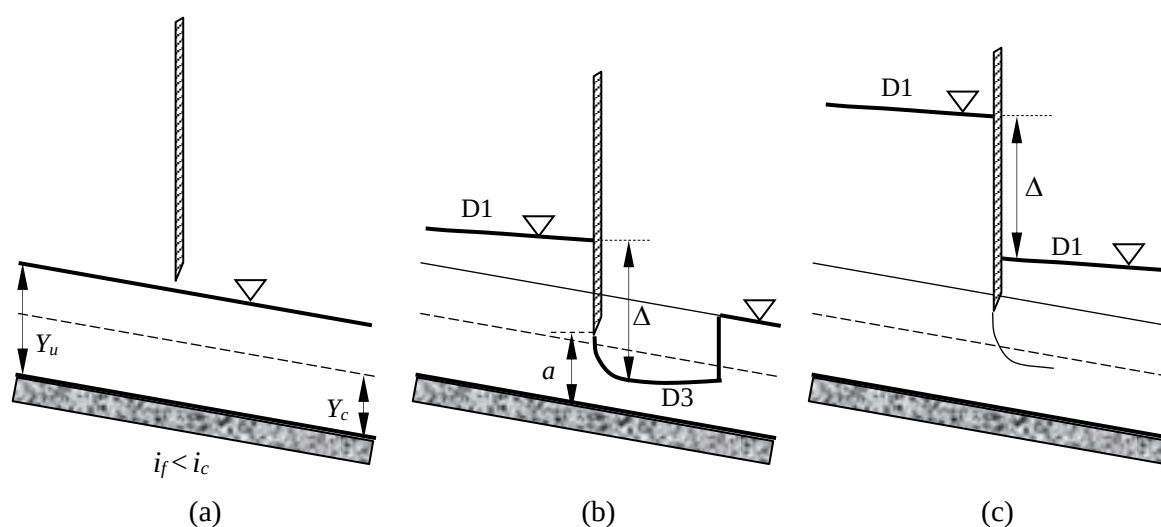


Figura 171. Schema illustrativo delle modalità con le quali una causa perturbatrice influenza una corrente a pelo libero.

Il concetto può essere meglio illustrato con riferimento all'esempio riportato in Figura 171, nella quale una portata assegnata, uguale nei tre casi mostrati, fluisce in un alveo rettangolare a debole pendenza indefinito (nel senso specificato in precedenza), sul quale è posta una paratoia piana di larghezza pari alla larghezza del canale, la cui apertura può essere regolata al fine di variare le modalità di deflusso.

Nel caso (a) la luce libera al di sotto della paratoia ha altezza maggiore della profondità di moto uniforme. La corrente non viene pertanto influenzata dalla presenza della paratoia, e in tutto il canale il deflusso avviene perciò in condizioni di moto uniforme.

Nel caso (b) la luce libera ha altezza inferiore alla profondità di moto uniforme. Come visto nel §6.6, a una breve distanza a valle dalla paratoia si forma una sezione contratta di profondità $Y_v = a C_c$, dove C_c è il coefficiente di contrazione, nella quale si ripristinano le condizioni di corrente gradualmente variata, non sussistenti nel breve tratto fra la paratoia e la sezione contratta per effetto della rilevante curvatura delle traiettorie. Essendo la formazione della sezione contratta dovuta a una causa perturbatrice (la paratoia) situata a monte, *la corrente nella sezione contratta deve essere*

¹⁵⁰ Lo studente tenga bene a mente che in tutti i tipi di alveo (a pendenza debole, forte, critica, nulla o acclivi), come si è mostrato, possono verificarsi sia correnti lente che correnti veloci. Non si commetta quindi l'errore, anch'esso abbastanza frequente, di associare sempre e comunque una corrente lenta ad un alveo a debole pendenza ed una veloce ad un alveo a forte pendenza.

necessariamente veloce. La profondità Y_v costituisce pertanto una condizione al contorno valida per il tracciamento di un profilo D3 (l'unico di corrente veloce in alveo a debole pendenza) a valle della sezione contratta. Il profilo avrà uno sviluppo limitato anche verso valle; per motivi che verranno spiegati nel §14.6.6, esso si riporterà bruscamente alla profondità di moto uniforme, che verrà mantenuta indefinitamente verso valle.

A monte della paratoia, l'ostacolo al moto offerto dal manufatto determina un innalzamento del pelo libero. Poiché il tratto di corrente a monte della paratoia viene influenzato da una causa perturbatrice (la paratoia) posta al suo estremo di valle, *la corrente a monte della paratoia deve necessariamente essere lenta*. Poiché si tratta di una corrente lenta in alveo a debole pendenza, avente in un punto (immediatamente a monte della paratoia) profondità Y_m maggiore della profondità di moto uniforme, il profilo non potrà che essere di tipo D1 (l'unico profilo di corrente lenta in alveo a debole pendenza con $Y > Y_u$). Il valore di tale profondità si determina sulla base della relazione $Q = f(\Delta)$, che esprime la portata in funzione del differenziale Δ delle quote piezometriche (quote del pelo libero) fra la sezione immediatamente a monte della paratoia e la sezione contratta (quindi anche delle profondità Y_m e Y_v); nel caso specifico della paratoia piana, trascurando l'energia cinetica della corrente in arrivo:

$$Q = \mu ab \sqrt{2g(Y_m - Y_v)}$$

che è l'eq. (179) con Y_m in luogo di h_0 e $Y_v = a C_c$. Poiché la portata Q assegnata deve fluire attraverso la paratoia in condizioni stazionarie, da tale relazione si ricava la profondità Y_m .

Nel caso (c), a parità di grado di apertura della paratoia, particolari condizioni a valle – quali una seconda paratoia, uno stramazzo, un gradino del fondo, una soglia, etc – determinano la formazione di un rigurgito con profilo D1. A seconda delle dimensioni del rigurgito, e sulla base di condizioni che verranno, anch'esse, illustrate successivamente¹⁵¹, può accadere che la vena liquida si addossi alla paratoia in questione. In questo caso, la corrente a valle della paratoia non è veloce, bensì lenta, in quanto *la paratoia non è in grado di costituire una causa perturbatrice. Il profilo D1 a valle della paratoia verrà tracciato, come ogni profilo di corrente lenta, a partire dal suo estremo di valle, a monte della causa perturbatrice che lo avrà causato*. Il tracciamento di tale profilo D1 fornirà il nuovo valore di profondità a valle della paratoia, $Y'_v > Y_v$, in funzione del quale si calcola un nuovo valore di profondità $Y'_m > Y_m$ a monte della paratoia mediante la legge di efflusso, a parità di portata.

Nell'esempio considerato, il fatto che a monte della paratoia si abbia un profilo di corrente lenta è abbastanza intuitivo, dal momento che ciò avviene in risposta a un ostacolo al deflusso di una corrente uniforme che è, già essa, lenta. Si osservi però che, anche nel caso di un alveo a forte pendenza – quindi con moto uniforme in corrente veloce – il profilo che si produrrebbe a monte della paratoia deve essere di corrente lenta, quindi necessariamente un F1. Nel caso b) Il profilo a valle della sezione contratta sarebbe invece un profilo F3, perché in tal caso $aC_c < a < Y_u$.

Chiaramente, il medesimo procedimento si applica a prescindere dalla particolare struttura di controllo, sulla base di una relazione di efflusso nella forma $Q = f(\Delta)$, in funzione del differenziale Δ delle quote piezometriche fra la sezione immediatamente a monte della struttura e la sezione contratta, come nell'esempio della paratoia, ovvero nella forma $Q = f(Y_m)$ come nel caso degli stramazzi non rigurgitati. In termini generali, in una sezione di controllo converrà sempre ipotizzare dapprima delle condizioni generali plausibili, utilizzare le relazioni che descrivono il funzionamento della sezione di controllo per ricavare delle profondità a monte e/o a valle, e procedere successivamente alla verifica della correttezza delle ipotesi fatte una volta che tutti i segmenti nei quali il canale può essere suddiviso saranno stati considerati. Sempre con riferimento alla Figura 171, nel caso in cui la paratoia incida la corrente uniforme, è di norma preferibile ipotizzare, in prima battuta, il caso (b) piuttosto che il caso (c), verificando successivamente se si possano stabilire profili di corrente lenta da valle che possano determinare una situazione del tipo (c).

¹⁵¹ Qui menzioniamo soltanto che la corrente rigurgitata deve avere profondità sufficientemente grande.

14.6.5 Transizione per lo stato critico.

Nel paragrafo precedente è stato discusso il caso di una sezione di controllo determinata dalla presenza di una struttura il cui funzionamento è descritto da una legge di efflusso indipendente, nella sua forma generale, dalle condizioni della corrente, evidenziando altresì la generalità del procedimento per tutti i casi nei quali una legge siffatta sia nota. Nel presente paragrafo verrà esaminato un diverso tipo di sezione di controllo, non determinata dalla presenza di manufatti, la cui legge di funzionamento, per così dire, non è rappresentata da una relazione aggiuntiva, ma determinata dalle caratteristiche fisiche delle stesse correnti a pelo libero. Come nel caso della paratoia, dall'analisi del moto nella sezione risultano condizioni al contorno per ciascuno dei due segmenti contigui. Tale caso notevole è costituito da una sezione in cui avviene un cambio di pendenza, da debole a monte a forte a valle (non il viceversa), nel qual caso la condizione determinabile riguarda la profondità nella sezione. Il caso è particolarmente significativo, in quanto associato alla transizione con continuità per lo stato critico: precisamente, al passaggio da corrente lenta a monte a corrente veloce a valle della sezione di controllo.

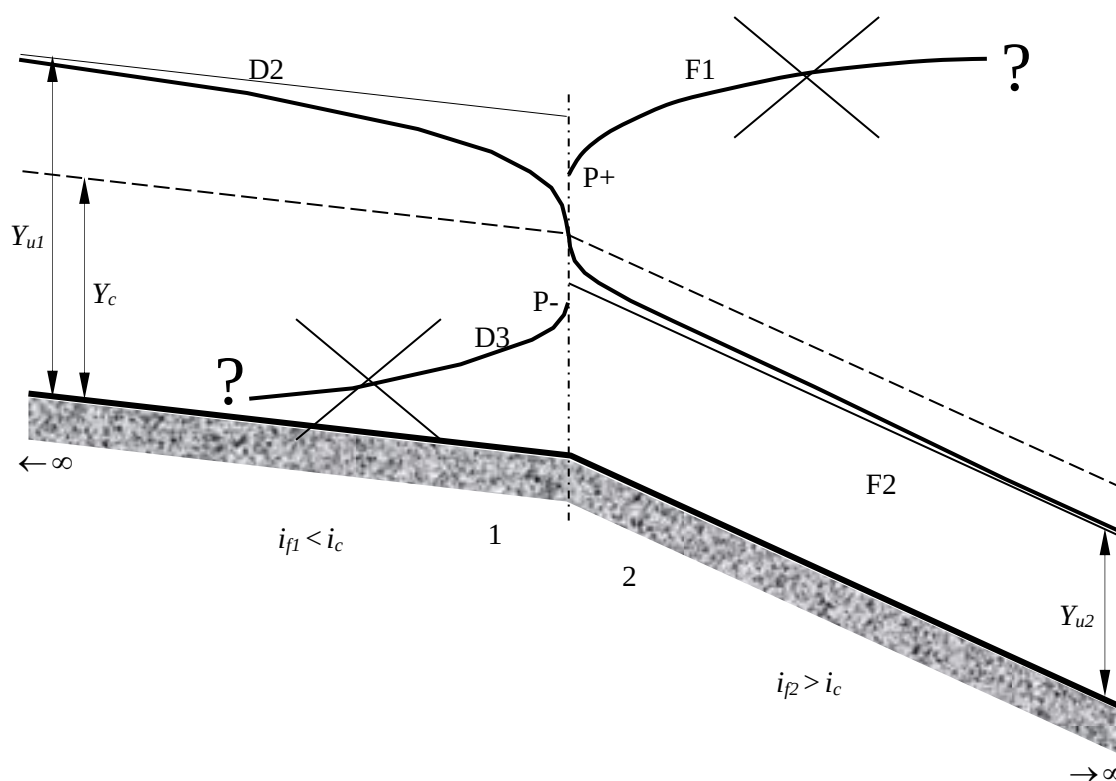


Figura 172. Schema illustrativo della transizione con continuità attraverso lo stato critico.

La situazione è rappresentata in Figura 172, nella quale i due tratti di alveo separati dalla sezione di controllo sono indefiniti. Il procedimento seguito è di tipo esaustivo¹⁵². Nella sezione in cui avviene il cambio di pendenza sono possibili soltanto tre condizioni qualitative differenti: $Y < Y_c$, $Y = Y_c$, o $Y > Y_c$. Dimostrando l'impossibilità della prima e della terza condizione, rimarrà dimostrata la seconda in quanto unica alternativa rimasta, nonché fisicamente accettabile.

Si supponga la sussistenza della prima ipotesi: $Y < Y_c$. Sulla sezione di controllo la superficie libera sia pertanto posta su un punto come il punto P- di figura (le conclusioni non cambiano se la profondità, invece che essere inferiore a Y_{u2} , come in figura, risulta compresa fra Y_{u2} e Y_c). Tale situazione non comporta incongruenze per quanto riguarda il tracciamento del profilo verso valle: la

¹⁵² Si ricorda che per procedimento esaustivo si intende un procedimento logico mediante il quale si dimostra un assunto non esplicitamente, ma escludendo la possibilità di verificarsi di *tutte* le alternative possibili.

profondità costituirebbe una valida condizione per il tracciamento di un profilo di corrente veloce (F3 nel caso specifico di figura; F2 se si considerasse il caso $Y_{u2} < Y < Y_c$). A monte, una profondità di corrente veloce implicherebbe la presenza di un profilo D3 (l'unico di corrente veloce in alveo a debole pendenza). Perché esso possa esistere effettivamente, tuttavia, esso dovrebbe essere prodotto da una causa perturbatrice *posta a monte di esso*. Ma se l'alveo, come per ipotesi, è indefinito verso monte, tale causa perturbatrice non esiste e la condizione non può pertanto verificarsi. In modo del tutto analogo, si dimostra che non può verificarsi neanche la condizione $Y > Y_c$, identificata dal punto P+ in Figura 172. Infatti, mentre verso monte non vi sarebbe problema alcuno, con profili D1 o D2 possibili a seconda del valore di profondità, verso valle una profondità di corrente lenta implicherebbe la presenza di un profilo F1 (l'unico di corrente lenta in alveo a forte pendenza), che però non potrebbe verificarsi per mancanza di una causa perturbatrice a valle di esso che ne determini la formazione. Sulla sezione di controllo la corrente assume, in definitiva, una profondità pari alla profondità critica. Infatti, oltre che l'unica ancora possibile, essa è anche fisicamente consistente: la profondità critica costituisce una valida condizione al contorno da valle per un profilo di corrente lenta D2 tracciato verso monte e da monte per un profilo di corrente veloce F2 tracciato verso valle.

È importante rimarcare che tale passaggio si verifica spontaneamente, per effetto di condizioni di tipo puramente qualitativo, nel senso che è la sola presenza del cambio di pendenza, da debole a forte (qualunque siano i valori numerici delle pendenze, purché dei tipi detti), a determinare lo stabilirsi della profondità critica, in quanto unica possibile. Cambiando il valore della portata immessa, dopo un transitorio più o meno lungo si perviene a una nuova situazione di moto permanente in cui si ha ancora la transizione per lo stato critico nella stessa sezione, con profondità corrispondente al nuovo valore di portata, qualunque esso sia¹⁵³. Lo stesso avverrebbe, a parità di portata, se venissero variate le pendenze di uno dei tratti o anche di entrambi, purché il tratto a monte si mantenga a debole pendenza e il tratto a valle a forte pendenza.

Si osservi che, poiché una parete verticale costituisce un caso limite di alveo a forte pendenza, si ha una transizione per lo stato critico anche se l'estremo di valle del tronco a debole pendenza costituisce il ciglio di un salto di fondo di altezza sufficiente in relazione alle condizioni della corrente a valle¹⁵⁴. In tal caso non si parla di profilo F2 a valle del salto. Nel caso di passaggio da debole a forte pendenza all'interno di un sistema più articolato, nel quale siano presenti ulteriori cambi di pendenza, cambi di sezione o manufatti vari, converrà ipotizzare, in prima battuta, il passaggio per lo stato critico sulla sezione di controllo, salvo accertare successivamente che le condizioni imposte in altre sezioni consentano effettivamente il verificarsi della transizione.

Il passaggio da corrente lenta a corrente veloce costituisce, in pratica, l'unico caso possibile di transizione con continuità per lo stato critico. Perché la transizione con continuità nel senso opposto non risulti praticamente possibile verrà illustrato nel paragrafo successivo.

14.6.6 Rialto idraulico

14.6.6.1 Descrizione fenomenologica e criterio per la localizzazione del rialto

Si è detto nel §14.6.5 che la transizione per lo stato critico può avvenire nel passaggio da un profilo di tipo D2 in alveo a debole pendenza a un profilo di tipo F2 in alveo a forte pendenza, e che ciò avviene spontaneamente al solo ricorrere di tali condizioni puramente qualitative. Viene spontaneo chiedersi se sia possibile la transizione per lo stato critico nel senso opposto – da corrente veloce a corrente lenta – e, in caso affermativo, quali siano le condizioni che determinano tale fenomeno.

Dall'esame dei profili in alvei a debole e a forte pendenza, risulta che l'unica possibilità di assistere a una transizione per lo stato critico da corrente veloce a corrente lenta è rappresentata dalla successione di profili D3 a monte e F1 a valle, anche in questo caso l'altezza critica stabilendosi nella

¹⁵³ Purché sempre tale da rendere l'alveo a monte a debole pendenza e l'alveo a valle a forte pendenza, tali caratteristiche, come si è detto in precedenza, non essendo intrinseche dell'alveo ma dipendenti dalla portata.

¹⁵⁴ Nella realtà, per effetto della inconsistenza delle condizioni di curvatura del profilo D2 in condizioni critiche con le ipotesi generali della teoria delle correnti a pelo libero, la transizione per lo stato critico non avviene esattamente sul ciglio del salto di fondo. Maggiori informazioni al riguardo possono trovarsi nel Marchi-Rubatta.

sezione ove avviene il cambio di pendenza da debole a forte. Tuttavia, in tal caso il profilo D3, in quanto di corrente veloce, richiede condizioni da monte, mentre il profilo F1 richiede condizioni da valle. Pertanto, soltanto specificando esattamente i *valori numerici* di tali due condizioni al contorno necessari a ottenere, in ciascuno dei due profili, la formazione dell'altezza critica sul cambio di pendenza, si potrà realizzare il raccordo continuo degli stessi¹⁵⁵: si tratta, in pratica, di un'evenienza che può essere realizzata soltanto deliberatamente¹⁵⁶. All'atto pratico, il passaggio di una corrente a pelo libero dalla condizione di corrente veloce a quella di corrente lenta avviene sempre mediante un, più o meno brusco, incremento dei livelli denominato *risalto idraulico* (un esempio del quale è la transizione da corrente veloce a corrente lenta nel caso di Figura 171b).

Al crescere dei valori del numero di Froude della corrente a monte del risalto, questo si presenta in forme che vanno da semplici ondulazioni della superficie libera (*risalto ondulato*), a ondulazioni più accentuate con parziale frangimento sulle creste (*risalto ondulato con frangimento*), ovvero assumono l'aspetto, più eclatante, di un fronte d'onda frangente stazionario, caratterizzato da un vortice ad asse orizzontale sede di intensa turbolenza e relative notevoli dissipazioni di energia (*risalto diretto*, detto anche *salto di Bidone*, dal nome dello studioso torinese che indagò tale fenomeno sperimentalmente al principio del XIX secolo). I due tipi estremi di risalto sono schematizzati in Figura 173¹⁵⁷.

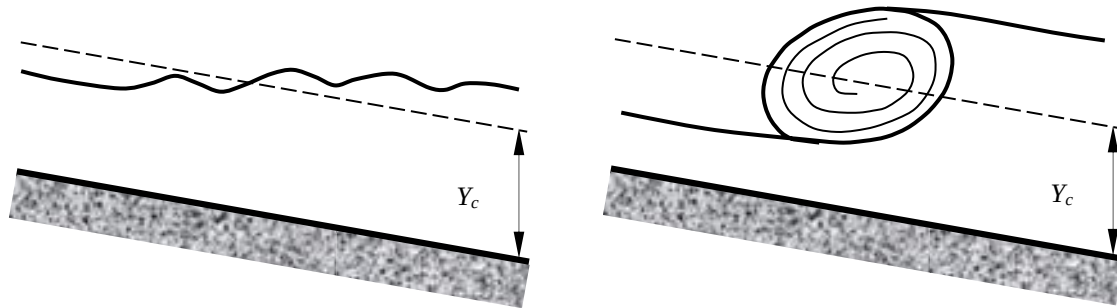


Figura 173. (a) risalto ondulato e (b) salto di Bidone.

Qualunque sia la forma del risalto delle tre descritte, rispetto alla scala delle variazioni del livello della superficie libera nei tratti di corrente gradualmente variata il risalto è assimilabile a una discontinuità, costituente, come già osservato nel §12.9, una singolarità ammessa per la soluzione delle equazioni che descrivono il moto delle correnti. Non potendosi tuttavia utilizzare equazioni indefinite in presenza di discontinuità delle variabili, giacché le relative derivate spaziali non sarebbero definite, il risalto idraulico deve essere studiato mediante l'equazione globale del moto¹⁵⁸. A tale scopo, sulla base dello schema di Figura 174, si consideri il tratto di corrente interessato dal risalto, delimitato dalle due più prossime sezioni regolari. Osservato che sono nulli: i flussi di quantità di moto attraverso le pareti dell'alveo, perché assunto impermeabile, e attraverso la superficie libera, perché il moto è stazionario; il termine di inerzia locale, per la stazionarietà del moto; la spinta esercitata dall'atmosfera sulla superficie libera, perché corrispondente alla pressione relativa nulla, la proiezione dell'equazione globale lungo l'asse della corrente si scrive:

$$-M_1 + M_2 = G \sin \alpha + \Pi_1 - \Pi_2 - \Pi_R,$$

¹⁵⁵ Peraltro, anche a voler realizzare tali condizioni deliberatamente, in corrispondenza del cambio di pendenza si osserverebbe, in luogo di un profilo ben definito a tangente verticale, una serie di ondulazioni caratteristiche dell'instabilità propria dello stato critico.

¹⁵⁶ Per i motivi esposti, un simile evento viene qualificato “*a probabilità nulla*”.

¹⁵⁷ Maggiori ragguagli sulle tipologie di risalto descritte possono trovarsi nel Marchi-Rubatta.

¹⁵⁸ Trattandosi di un'equazione in forma integrale, non è richiesta la continuità delle variabili (cfr. §1.1.2).

in cui $M_1 = \beta \rho Q^2 / \Omega_1$ e $M_2 = \beta \rho Q^2 / \Omega_2$ sono i flussi di quantità di moto attraverso le sezioni regolari 1 e 2; $\Pi_1 = p_{G1} \Omega_1$ e $\Pi_2 = p_{G2} \Omega_2$ sono le spinte idrostatiche sulle medesime sezioni, dove $p_{G1} = \gamma \zeta_G$ è la pressione idrostatica nel baricentro e ζ_G è l'affondamento del baricentro della sezione rispetto al pelo libero; $G \sin \alpha$ è la proiezione della forza peso lungo l'asse e Π_R il risultante degli sforzi resistenti esercitati attraverso la parete dell'alveo. In considerazione della piccola pendenza e del limitato sviluppo in asse del volume di controllo, si assume che la componente assiale della forza peso e le resistenze al moto si facciano approssimativamente equilibrio, perché individualmente piccole in modulo e opposte in verso. Si perviene quindi alla seguente espressione:

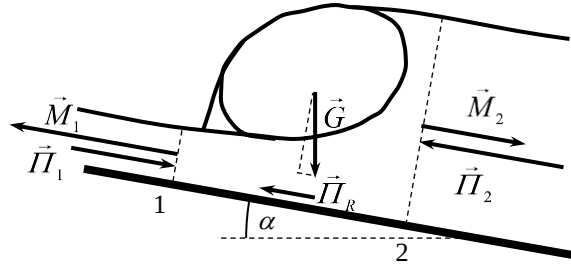


Figura 174. Schema di riferimento per l'analisi del risalto idraulico mediante l'equazione globale del moto.

$$\Pi_1 + M_1 = \Pi_2 + M_2 ,$$

ovvero:

$$p_{G1} \Omega_1 + \beta \rho \frac{Q^2}{\Omega_1} = p_{G2} \Omega_2 + \beta \rho \frac{Q^2}{\Omega_2} . \quad (296)$$

La quantità:

$$S = p_G \Omega + \beta \rho \frac{Q^2}{\Omega} \quad (297)$$

è detta *spinta totale*¹⁵⁹. L'equazione (296) esprime che *la spinta totale assume il medesimo valore a monte e a valle del risalto*. Pertanto, al fine di determinare il punto nel quale si localizza il risalto che collega, con discontinuità, un profilo di corrente veloce a monte a un profilo di corrente lenta a valle, occorrerà ricercare la sezione (unica) nella quale la relazione (296) è verificata.

Al fine di illustrare più chiaramente gli aspetti applicativi di tali concetti, osserviamo innanzitutto che, in condizioni di moto stazionario ($Q = \text{cost}$) in un alveo di caratteristiche geometriche fissate, la spinta totale è funzione della sola profondità della corrente: $S = S(Y)$. Il grafico della funzione si ricava facilmente osservando che, analogamente al caso del carico specifico, essa si compone di una parte S_r che si annulla per $Y = 0$ e cresce indefinitamente con la profondità (la spinta idrostatica) e di una parte S_i decrescente con la profondità, che tende a $+\infty$ per $Y \rightarrow 0$ e tende a zero per $Y \rightarrow \infty$ (il flusso di quantità di moto). Uno schema del diagramma della $S(Y)$ è riportato in Figura 175.

Sulla base di tali caratteristiche, la curva $S(Y)$ deve tendere a $+\infty$ per $Y \rightarrow 0$ e per $Y \rightarrow \infty$ - ossia, agli estremi dell'intero campo di definizione della funzione. Essa deve pertanto necessariamente possedere un minimo, che si può mostrare verificarsi per un valore di profondità pari alla profondità critica Y_c . Le condizioni critiche sono pertanto caratterizzate, oltre che dal carico specifico minimo a

¹⁵⁹ Si tratta infatti di una forza, costituita dalla somma di una spinta derivante da forze reali (la spinta idrostatica) e di una spinta derivante da forze di inerzia o fittizie (il flusso di quantità di moto) – concetti richiamati al §1.3.5.

portata costante, dalla portata massima a carico specifico costante e dall'uguaglianza fra velocità media della corrente e celerità relativa delle perturbazioni, anche dalla spinta totale minima a portata costante. Conseguentemente, possiamo anche identificare, sulla curva $S(Y)$, un ramo delle correnti lente per $Y > Y_c$ e uno delle correnti veloci per $Y < Y_c$.

Due profondità, una di corrente veloce e una di corrente lenta, cui corrisponde il medesimo valore della spinta totale (come nel caso delle sezioni a monte e a valle del risalto) sono dette *profondità coniugate*. Nel prosieguo, indicheremo le profondità coniugate con un asterisco in posizione di indice. In pratica, possono darsi due casi leggermente differenti di uso del diagramma di Figura 175 ai fini della localizzazione di un risalto, che vengono descritte di seguito.

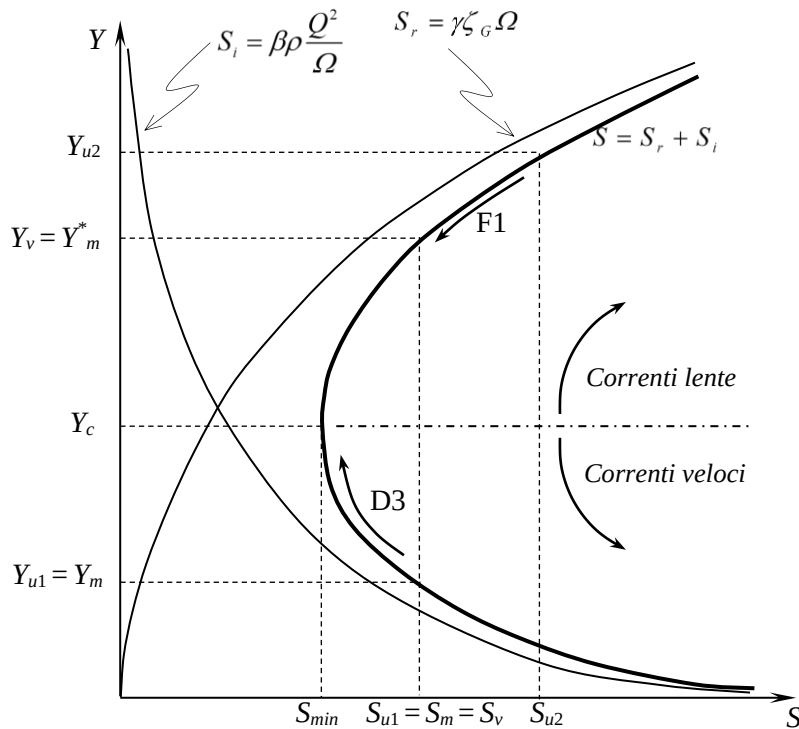


Figura 175. Diagramma della spinta totale a portata costante.

14.6.6.2 Profondità a monte o a valle del risalto nota a priori

Descriviamo questo caso con riferimento allo schema di Figura 176, nella quale è illustrato il profilo di un canale nella zona in cui esso varia la propria pendenza da forte a debole. Avendosi un alveo a forte pendenza indefinito verso monte e uno a debole pendenza indefinito verso valle, ciascuno dei due tratti ammette condizioni al contorno di moto uniforme (vedi §14.6.3). Nello stesso paragrafo si è chiarito come tali condizioni non siano da prescrivere in sezioni prestabilite, ma sia certo che esse si verifichino da una certa sezione in poi (verso valle per l'alveo a debole pendenza; verso monte per l'alveo a forte pendenza). Poiché deve necessariamente verificarsi il passaggio da una corrente veloce a monte a una corrente lenta a valle, si deve anche formare un risalto, che è necessario localizzare per poter tracciare i profili di moto permanente lungo l'intero canale. Sulla base di quanto esposto in precedenza, il risalto dovrà trovarsi nella sezione nella quale la corrente veloce a monte e la corrente lenta a valle possiedono il medesimo valore di spinta totale; una delle due altezze coniugate dovrà necessariamente essere una delle due altezze di moto uniforme costituenti le condizioni al contorno dei due alvei.

Operativamente conviene procedere nel seguente modo. Si valutano i valori di spinta totale corrispondenti alle profondità di moto uniforme che si otterrebbero nella sezione ove avviene il

cambio di pendenza per le due correnti¹⁶⁰, per effetto delle condizioni al contorno in alvei indefiniti. Nel caso la spinta della corrente veloce a monte, S_{u1} , risulti maggiore della spinta della corrente lenta a valle, S_{u2} , il risalto si localizzerà a valle, nel tratto a debole pendenza; se risulta, invece, $S_{u1} < S_{u2}$, il risalto si localizzerà a monte, nell'alveo a forte pendenza.

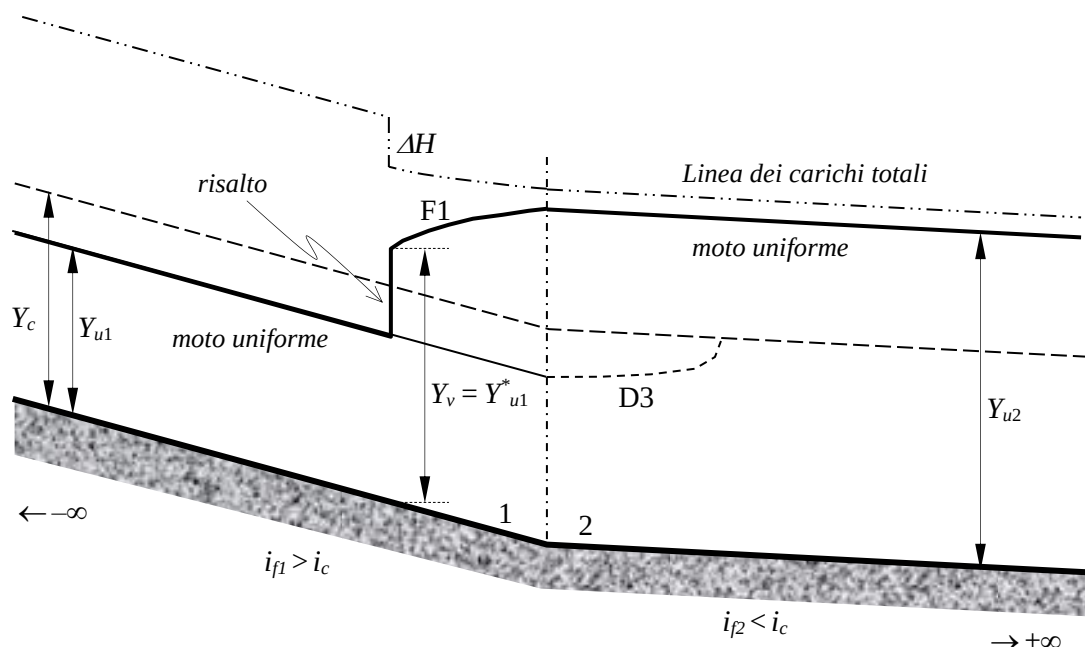


Figura 176. Risalto idraulico in prossimità di un cambio di pendenza.

Tale regola ha una semplice giustificazione¹⁶¹. Con riferimento al caso di Figura 176, supponiamo, ad esempio, che risulti $S_{u1} < S_{u2}$. Se il risalto venisse ricercato verso valle anziché verso monte, si dovrebbe tracciare un profilo D3 avente quale condizione al contorno da monte la profondità di moto uniforme nell'alveo a forte pendenza, Y_{u1} . Poiché il profilo D3 ha profondità crescenti verso valle, ci si muoverebbe, lungo la curva in Figura 175, in modo tale da vedere diminuire la spinta totale, allontanandosi dalla richiesta condizione di uguaglianza fra le spinte delle due correnti. Viceversa, ricercando il risalto a monte del cambio di pendenza lungo un profilo F1, avente quale condizione al contorno da valle la profondità di moto uniforme nell'alveo a debole pendenza, ci si muoverebbe, lungo la curva in Figura 175, in modo tale da vedere diminuire la spinta totale, fino a raggiungere il valore di profondità coniugata alla profondità di moto uniforme nell'alveo a forte pendenza, $Y_v = Y_m^* = Y_{u1}^*$, con quest'ultima che si riconosce doversi verificare a monte del risalto per effetto delle condizioni al contorno in alveo indefinito.

In pratica, in un caso del genere, essendo nota a priori la profondità (di moto uniforme) a un estremo del risalto, il procedimento consiste nel determinare la profondità coniugata a quest'ultima dal grafico $S(Y)$, nel tracciare il profilo F1 e nell'individuare (anche contestualmente al tracciamento del profilo) la sezione del profilo F1 nella quale si verifica la medesima profondità¹⁶². Per i motivi

¹⁶⁰ In linea di principio è possibile riferirsi ad una qualunque sezione del canale nella quale siano ancora presenti le correnti veloce e lenta determinate rispettivamente dalle condizioni da monte e da valle. In tal caso, occorrerebbe tracciare un profilo di moto permanente, con la possibilità che ciò si riveli però fatica sprecata, in seguito alla determinazione della posizione qualitativa del risalto (se a monte od a valle del cambio di pendenza).

¹⁶¹ Essa costituisce, fra l'altro, un utile trucco mnemonico (la corrente che "spinge" di più sposta il risalto verso l'altra corrente).

¹⁶² Graficamente, tale ultima operazione si realizza, ovviamente, tracciando un segmento di retta parallelo al fondo, posto ad una distanza da quest'ultimo pari alla profondità coniugata determinata in precedenza.

discussi in precedenza riguardo la conformazione del risalto, nonché per il fatto che i profili longitudinali vengono disegnati in scale alterate allo scopo di favorirne la leggibilità, il risalto viene usualmente indicato (come anche in Figura 176) come una discontinuità della superficie libera.

La linea dei carichi totali assume l'andamento qualitativo riportato in Figura 176. In particolare, in corrispondenza del risalto, si verifica una perdita di carico localizzata dovuta alla brusca espansione della corrente.

14.6.6.3 Profondità coniugate entrambe incognite

Nel canale rappresentato in Figura 177, una corrente veloce è generata a valle di una paratoia posta in un alveo a debole pendenza. Nello stesso alveo, un profilo di richiamo D2 viene generato dalla presenza di un tratto a forte pendenza a valle del primo. A differenza del caso del §14.6.6.2, in questo caso né a monte né a valle del risalto è nota a priori la profondità della corrente. In effetti, nel caso in questione, la presenza stessa del risalto dipende dai valori numerici dei dati. Verrà pertanto illustrato sotto quale ipotesi il risalto si verifichi, e in quale modo se ne possa eseguire la localizzazione. La condizione da utilizzare per la ricerca della (eventuale) posizione del risalto è sempre la (296): nel caso non si possa determinare una sezione nella quale si verifichi tale condizione, si dovrà concludere che il risalto non può formarsi e risolvere il problema di conseguenza.

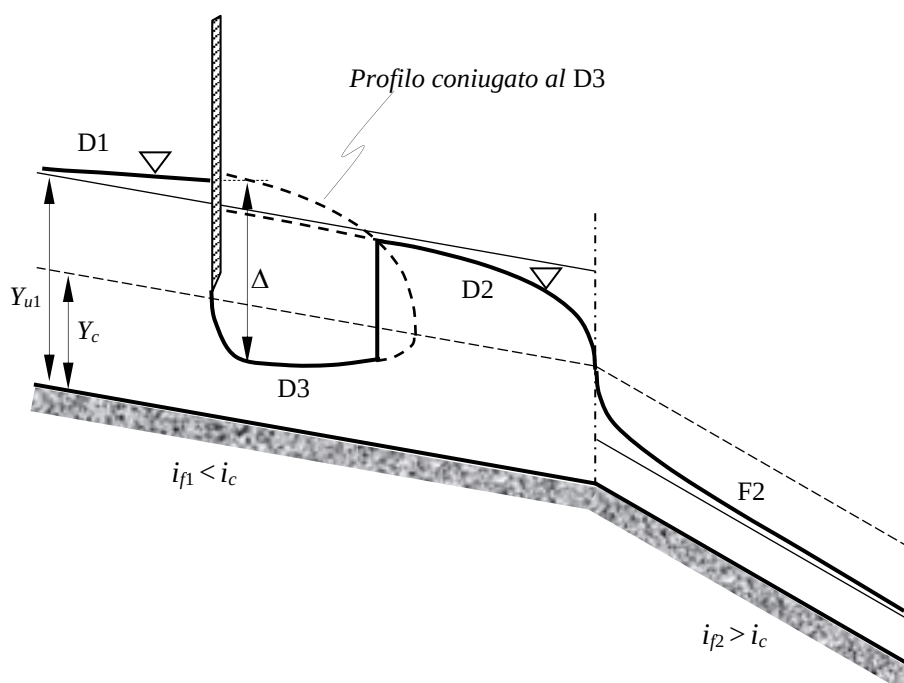


Figura 177. Localizzazione del risalto mediante profilo coniugato.

In termini grafici, il procedimento da seguire si illustra in termini del cosiddetto *profilo coniugato*. Il profilo coniugato a un profilo dato è un profilo *fittizio* (ossia, una mera costruzione grafica che non è materializzata da un pelo libero), caratterizzato dall'avere in ciascuna sezione una profondità coniugata alla profondità del profilo dato nella stessa sezione. Pertanto, un profilo coniugato a un profilo dato si può determinare per punti, rilevando, per ciascuno dei valori di profondità in un certo numero di sezioni del profilo dato¹⁶³, le corrispondenti profondità coniugate sul diagramma della spinta del tipo rappresentato in Figura 175.

Nel caso di Figura 177 il profilo coniugato al profilo di corrente veloce D3 interseca il profilo D2 nel tratto di alveo a debole pendenza a valle della paratoia. Sulla base della definizione di profilo

¹⁶³ Come sempre in questo tipo di procedimenti, maggiore è il numero dei punti, più accurato sarà il tracciamento del profilo coniugato.

coniugato e del suo conseguente significato, per costruzione, in tale punto di intersezione risultano coniugate anche le profondità dei profili D3 e D2: in tale sezione si localizza pertanto il risalto.

A seconda dei valori numerici dei dati del problema (portata, apertura della paratoia, pendenze, scabrezza, forma della sezione, etc...), può anche darsi il caso di Figura 178, nel quale il profilo coniugato al profilo D3 non interseca il profilo D2 nel tratto a valle della paratoia. Poiché la spinta totale cresce al crescere della profondità in corrente lenta (così come decresce al crescere della profondità in corrente veloce), il profilo D2 possiede ovunque una spinta totale superiore, sezione per sezione, alla spinta totale del profilo D3. Con ragionamento analogo a quello svolto per discutere la localizzazione qualitativa del risalto nel problema descritto nel §14.6.6.2, ciò corrisponderebbe allo spostamento del risalto verso monte. Poiché però l'intersezione del profilo D2 con il profilo coniugato al D3, come detto, non avviene in tutto il tratto utile a valle della paratoia, la corrente si mantiene lenta, con profilo D2, in tutto questo tratto, sommergendo la vena effluente dalla paratoia e determinando pertanto, a parità di portata, un ulteriore rigurgito a monte della paratoia, secondo quanto già discusso in un problema simile affrontato nel §14.6.4. In generale, un efflusso da paratoia non sarà rigurgitato se la spinta totale della sezione contratta della vena è maggiore della spinta totale che la corrente lenta determinata dalle condizioni a valle assume nella stessa sezione.

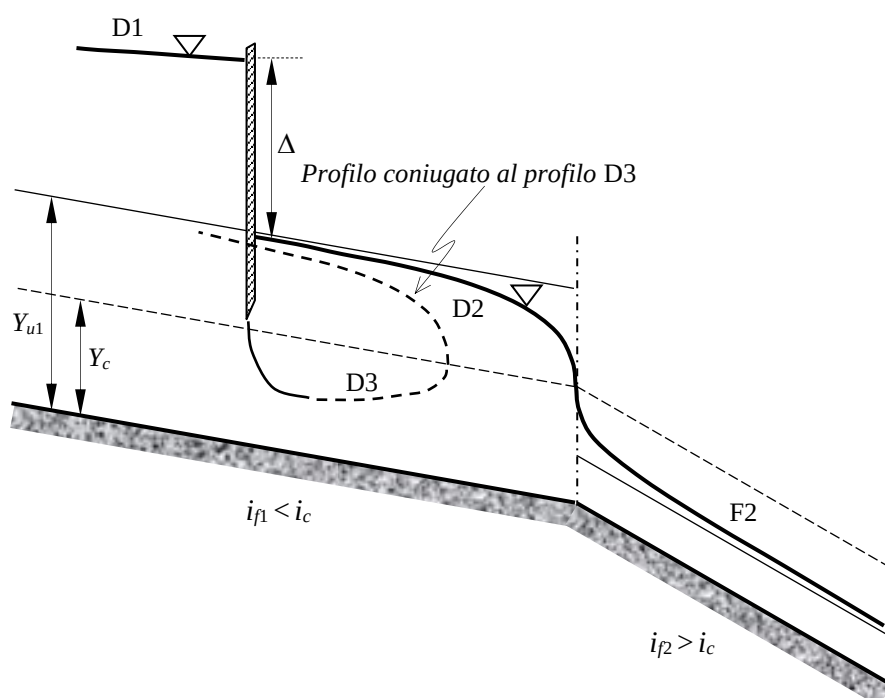


Figura 178. Efflusso annegato da paratoia senza formazione del risalto.

14.6.7 Tracciamento dei profili di moto permanente mediante integrazione numerica

L'impostazione del problema del calcolo numerico dei profili di moto permanente viene presentata con riferimento all'esempio di Figura 179, relativo al tracciamento di un profilo D2. La soluzione alle differenze finite dell'equazione differenziale (298) del profilo si basa essenzialmente sull'approssimazione della derivata del carico specifico con il corrispondente rapporto incrementale¹⁶⁴:

¹⁶⁴ In termini generali, i metodi numerici di soluzione di equazioni differenziali forniscono una soluzione approssimata per la variabile dipendente, corrispondente ad un insieme finito di valori della variabile indipendente. Tali metodi sono pertanto detti anche *metodi di discretizzazione*, perché approssimano una funzione definita su un intervallo continuo con un insieme discreto di valori. Attualmente esiste una gran varietà di metodi numerici di discretizzazione. Fra essi citiamo, oltre al metodo delle differenze finite qui

$$\Delta s_k = \frac{\Delta E_k}{i_f - j_{mk}} = \frac{E_{k+1} - E_k}{i_f - j_{mk}} \quad (299)$$

in cui Δs_k è la distanza incognita fra due sezioni di profondità prefissate Y_k e Y_{k+1} , E_k e E_{k+1} i corrispondenti valori di carico specifico, calcolati mediante la:

$$E_k = Y_k + \frac{Q^2}{2g\Omega^2(Y_k)} \quad ; \quad k = 0, \dots, K ;$$

j_{mk} è un valore medio della cadente dei carichi totali nel tratto compreso fra le due sezioni, calcolabile sulla base della formula di Chezy:

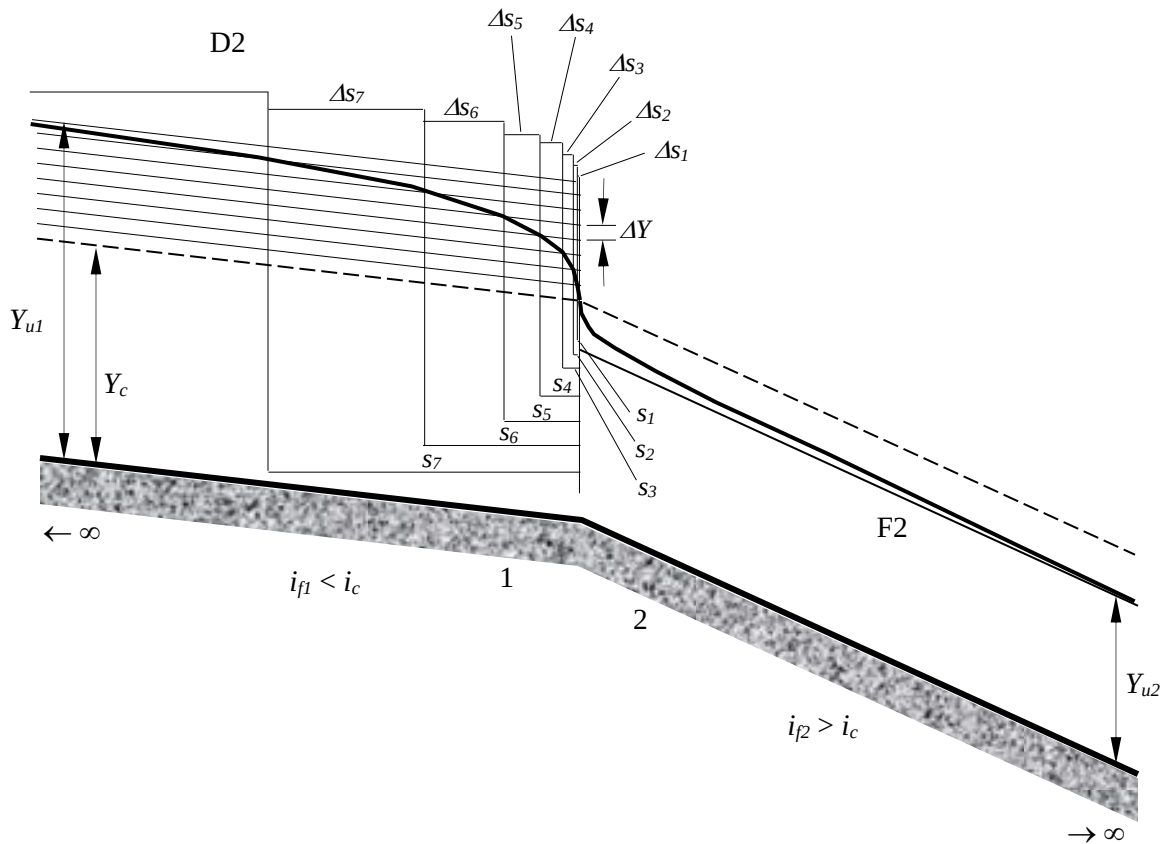


Figura 179. Schema di calcolo di un profilo di moto permanente di tipo D2.

$$j = \frac{Q^2}{\chi(Y)^2 \Re(Y) \Omega(Y)^2}$$

con una delle espressioni disponibili per il coefficiente χ , in uno dei seguenti modi:

a) in funzione di un valore di profondità media nel tratto: $Y_{km} = (Y_k + Y_{k+1}) / 2$;

descritto, i metodi agli *elementi finiti* (utilizzato specialmente, ma non soltanto, nell'Ingegneria Strutturale) e ai *volumi finiti*, particolarmente utile nei problemi di moto vario con soluzione discontinua, come è il caso delle onde di piena a fronte ripido o dello stesso risalto idraulico.

- b) in funzione di valori medi di area, raggio idraulico e coefficiente di Chezy:
 $\Omega_{km} = (\Omega_k + \Omega_{k+1})/2$, $\Re_{km} = (\Re_k + \Re_{k+1})/2$, $\chi_{km} = (\chi_k + \chi_{k+1})/2$; $\Omega_k = \Omega(Y_k)$,
 $\Re_k = \Re(Y_k)$, $\chi_k = \chi(Y_k)$;
- c) come media aritmetica delle cadenti calcolate nelle due sezioni estreme del tratto:
 $j_{km} = (j_k + j_{k+1})/2$; $j_k = j(Y_k)$ ¹⁶⁵.

I valori delle profondità si fissano nel modo seguente. Trattandosi di un profilo di corrente lenta, esso deve essere tracciato a partire da valle, assumendo come condizione al contorno la profondità critica nella sezione ove si ha il cambio di pendenza, Y_c . Il profilo D2 si estende da tale valore al valore di moto uniforme, Y_{u1} . La corrispondente escursione di profondità, $Y_{u1} - Y_c$, si suddivide in un certo numero K di parti uguali ΔY , in corrispondenza delle quali si determinano le profondità $Y_0 = Y_c$, $Y_1 = Y_0 + \Delta Y$, $Y_2 = Y_0 + 2\Delta Y$, ..., $Y_k = Y_0 + k\Delta Y$, ..., $Y_K = Y_0 + K\Delta Y = Y_{u1}$ ¹⁶⁶. Le variazioni Δs_k fra le sezioni di profondità Y_k e Y_{k+1} calcolate mediante la (299) risultano negative, come in generale per le correnti lente, il cui profilo viene tracciato da valle verso monte. Valori positivi si otterrebbero per una corrente veloce.

Come in qualunque metodo di discretizzazione, il procedimento è tanto più accurato quanto maggiore è il numero di sezioni considerate. Si osservi che il metodo descritto, nel quale si fissano i valori della variabile dipendente Y e si determinano i corrispondenti valori della variabile indipendente s , è preferibile rispetto a un metodo che determinasse le profondità in posizioni prefissate lungo l'asse, poiché si ottiene un infittimento delle sezioni là dove è più utile, ossia, dove è maggiore la curvatura del profilo¹⁶⁷. Inoltre, il metodo inverso risulterebbe anche più complicato operativamente, poiché i valori di energia specifica e di cadente nella sezione in cui la profondità è incognita dovrebbero essere determinati per iterazioni successive. Una verifica della accuratezza del calcolo si può eseguire, per esempio, raddoppiando progressivamente il numero delle sezioni e verificando la variazione del risultato nelle stesse sezioni. Un procedimento come quello descritto è facilmente implementabile in un foglio di calcolo, per lo meno per un alveo prismatico. Il caso di alveo non prismatico, che è tipicamente il caso degli alvei naturali, comporta qualche complicazione di tipo più pratico che concettuale. È infatti evidente che un alveo naturale difficilmente avrà tratti estesi a pendenza costante, per cui, in pratica, anche la pendenza media in ciascun tratto andrà determinata per iterazioni successive. Per casi di questo tipo, evidentemente, il metodo inverso (determinare Y fissato Δs) può essere di efficienza comparabile.

Infine, si rimarca, quand'anche il problema del tipo descritto venisse risolto mediante pacchetti software, la necessità di conoscere le caratteristiche qualitative attese della soluzione, al fine di poter verificare l'attendibilità dei risultati numerici, quanto meno a fronte di errori grossolani.

14.7 Problemi di moto non lineare

14.7.1 Generalità

Nel §11.1 sono state denominate lineari le correnti gradualmente variate, per le quali, essendo individuabili sezioni piane (anche approssimativamente) sede di una distribuzione idrostatica delle pressioni (sezioni regolari), è anche definibile una linea piezometrica (nonché, sulla base dell'estensione del Teorema di Bernoulli di cui al §11.4, una linea dei carichi totali). Nonostante la condizione di corrente gradualmente variata (o lineare) sia una delle ipotesi alla base della teoria

¹⁶⁵ Utilizzando un foglio di calcolo, il secondo ed il terzo modo di calcolare il valore medio della cadente evitano di dover replicare il calcolo di varie grandezze in corrispondenza dei valori medi delle profondità. Da un punto di vista della accuratezza formale del calcolo, i tre metodi sono sostanzialmente equivalenti.

¹⁶⁶ In generale, per un valore ΔY preso in valore assoluto, si calcoleranno i valori $Y_k = Y_0 \pm k\Delta Y$, in cui si prenderà il segno "+" o "-" a seconda del tipo di profilo: il segno "+" per i profili nei quali la profondità è crescente nel senso del tracciamento – oltre al D2, i profili D3 e F3; il segno "-" per i profili nei quali la profondità è decrescente nel senso del tracciamento: D1, F1 e F2.

¹⁶⁷ In particolare, se la soluzione avesse andamento lineare, il metodo sarebbe esatto, avendosi $j = \text{cost}$ e $dE/dY = \text{cost}$ fra due sezioni.

delle correnti a pelo libero, le soluzioni ottenute per i profili di moto permanente D2, D3, F1 e F2 ammettono localmente situazioni nelle quali, per essere la curvatura notevolmente accentuata e la tangente al profilo addirittura verticale, tali soluzioni risultano in contraddizione con l'ipotesi. Ciò nonostante, una soluzione può essere comunque determinata, per cui l'incongruenza si riflette in un certo grado di approssimazione, che non inficia sostanzialmente la validità dei risultati ottenuti.

Vi sono, invece, situazioni particolari, anch'esse caratterizzate da condizioni locali di non linearità (nell'accezione del termine qui utilizzata¹⁶⁸) la cui analisi non può essere condotta nell'ambito delle ipotesi di continuità della soluzione. In questo senso tali casi presentano una certa analogia con il risalto idraulico, se non fosse che quest'ultimo è determinato dalle condizioni dinamiche della corrente anche in alvei di geometria del tutto regolare, mentre i casi che vengono qui presentati vedono una discontinuità della geometria dell'alveo o, comunque, una sua brusca e localizzata variabilità spaziale, come causa originante la discontinuità della soluzione.

14.7.2 Passaggio su una soglia di fondo in alveo a debole pendenza

Si consideri il caso di un alveo prismatico indefinito a debole pendenza, sul quale sia presente un sovrizzo del fondo (soglia) di altezza a e uguale pendenza, come schematizzato in Figura 180. Per un alveo siffatto, lo studio del profilo parte da valle con le condizioni di moto uniforme, che, almeno in prima ipotesi, supporremo si mantengano fino all'estremità di valle del sovrizzo.

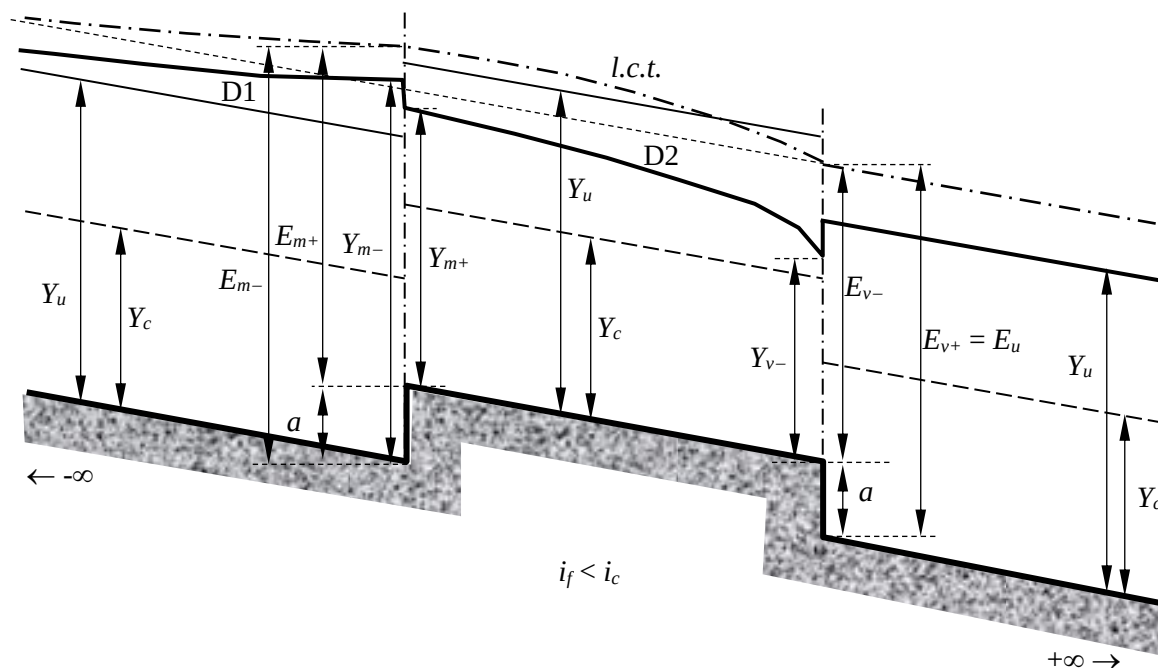


Figura 180. Profili di moto permanente in alveo a debole pendenza con soglia di fondo, senza transizione per lo stato critico.

Nell'ipotesi che il sovrizzo sia ben raccordato al resto del canale, tanto a monte quanto a valle, si possono ammettere trascurabili le perdite di carico localizzate nelle due sezioni estreme, dove quindi la linea dei carichi totali non presenta discontinuità. I valori del carico specifico (rispetto al fondo) fra le sezioni immediatamente precedente e successiva le estremità della soglia differiscono pertanto esattamente dell'altezza del sovrizzo. In particolare, per la sezione terminale:

$$E_{v-} = E_{v+} - a = E_u - a ,$$

in cui i pedici "v-" e "v+" indicano le sezioni immediatamente a monte e a valle della sezione in questione e il carico E_u è calcolato sulla base della profondità di moto uniforme. Il valore della

¹⁶⁸ Niente a che vedere, quindi, con la proprietà di linearità, o di non linearità, degli operatori.

corrispondente profondità all'estremo di valle (interno) della soglia, Y_{v-} , si determina utilizzando il diagramma dell'energia specifica a portata costante descritto al §14.3¹⁶⁹, sulla base del valore di energia specifica E_{v-} . Si possono qui presentare due casi:

14.7.2.1 $E_{v-} \geq E_{min}$

Il valore di carico specifico sulla soglia è non inferiore al carico minimo compatibile con la portata assegnata ($E_{v-} \geq E_{min}$, Figura 181). Essendo influenzata da una causa perturbatrice posta a valle di essa (il gradino al termine della soglia), la corrente sulla soglia deve essere lenta. La profondità Y_{v-} si determina quindi nel ramo delle correnti lente del diagramma, avente per asintoto la bisettrice del quadrante, col che si ha $\Delta Y = Y_{v+} - Y_{v-} > a$ e il livello nella sezione $v-$ è quindi inferiore rispetto al livello in $v+$. Essendo la profondità nella sezione $v-$ compresa fra le profondità critica e di moto uniforme, sul sovrizzo si forma un profilo D2 di corrente lenta accelerata, tracciabile a partire dalla sezione $v-$ e dal relativo valore di profondità. Determinato il profilo D2 fino all'estremo superiore della soglia (sezione $m+$), sulla base dei valori di profondità ed energia specifica ivi calcolati, si procede in modo analogo a quanto fatto per l'estremo di valle (Figura 181), determinando l'energia specifica nella sezione $m-$ immediatamente a monte della soglia, $E_{m-} = E_{m+} + a$, e la relativa profondità Y_{m-} letta sul ramo delle correnti lente, corrispondente a un livello in $m-$ maggiore del livello in $m+$. A partire dalla sezione $m-$ si traccia pertanto un profilo D1 di corrente lenta ritardata. Gli andamenti qualitativi dei profili di moto permanente e della linea dei carichi totali sono riportati in Figura 180. La soluzione descritta si verifica per altezze della soglia minori o uguali al valore:

$$a_{max} = E_u - E_{min} . \quad (300)$$

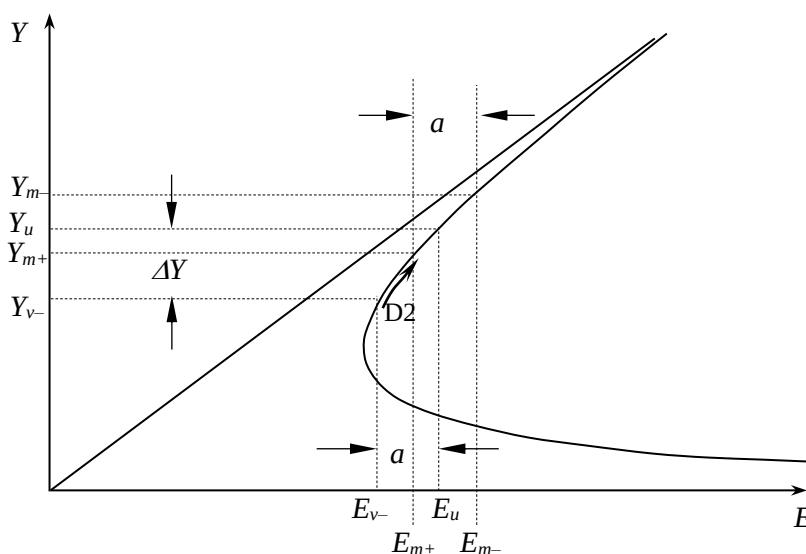


Figura 181. Schema di calcolo della profondità nella sezione $v-$ mediante il diagramma dell'energia specifica a portata costante.

14.7.2.2 $E_{v-} < E_{min}$

La condizione di carico specifico sulla soglia inferiore al carico minimo compatibile con la portata assegnata ($E_{v-} < E_{min}$, Figura 182) rende tale soluzione fisicamente inconsistente. È invece ammissibile una soluzione secondo la quale la corrente assume una profondità pari alla profondità critica all'estremo di valle della soglia: $Y_{v-} = Y_c$, che è anche l'unica possibile. Infatti, se la corrente fosse lenta all'estremo di valle della soglia, essa dovrebbe essere influenzata da valle, il che però comporterebbe il dover ripetere il procedimento iniziale che ha condotto alla soluzione inconsistente.

¹⁶⁹ Al medesimo scopo si può anche utilizzare il diagramma della portata a carico specifico costante di cui al §14.3 Tuttavia, tale modalità nulla aggiunge in termini di rappresentazione del fenomeno fisico e, oltre tutto, richiede il tracciamento di due curve, rispetto all'unica del carico specifico a portata costante necessaria.

Se, viceversa, la corrente fosse veloce, essa dovrebbe essere influenzata da monte, il che non è possibile per un alveo indefinito a debole pendenza. Con lo stabilirsi della profondità critica sulla sezione $v-$, la causa perturbatrice, costituita dal gradino terminale della soglia, è invece in grado di influenzare la corrente, correttamente, sia a monte che a valle.

Di tale conclusione ci si può convincere anche considerando il transitorio che, a portata immessa da monte costante, conduce asintoticamente alle condizioni stazionarie di regime. L'impossibilità della portata immessa di fluire nella sezione $v-$ per effetto del carico inferiore al minimo possibile determina un accumulo di liquido a monte di tale sezione. Conseguentemente, si determina un innalzamento dell'energia specifica della corrente, fino al raggiungimento del valore minimo compatibile con la portata assegnata, corrispondente alle condizioni critiche in $v-$. Poiché, in tali condizioni, la corrente, può nuovamente fluire con la portata assegnata, il processo di accumulo a monte termina e la corrente stabilizza spontaneamente le condizioni critiche.

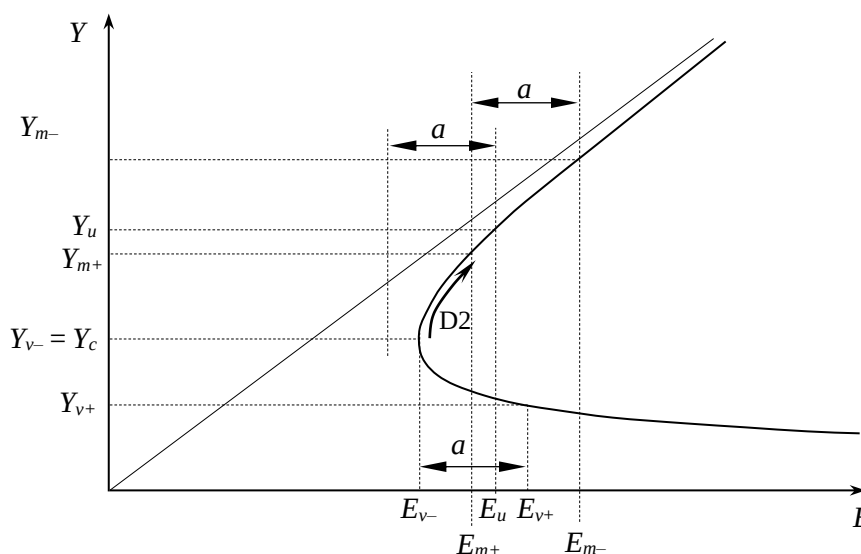


Figura 182. Schema di soluzione del problema della soglia di fondo in alveo a debole pendenza con transizione per lo stato critico.

Per l'assenza di perdite di carico localizzate, nella sezione $v+$ si deve ancora avere un valore di energia specifica incrementato di a rispetto alla sezione $v-$. Inoltre, in tale sezione la corrente dovrà essere veloce, perché influenzata dalle condizioni critiche a monte. La relativa profondità si determina quindi sul ramo corrispondente del diagramma dell'energia specifica a portata costante in corrispondenza del valore di energia $E_{v+} = E_{v-} + a$ (vedi Figura 182). A valle di tale sezione si sviluppa un profilo di corrente veloce ritardata D3, che si estende fino alla sezione nella quale la spinta totale della corrente eguaglia il valore relativo alle condizioni di moto uniforme, ove un risalto collega il profilo D3 al profilo di moto uniforme, costituente la condizione estrema da valle.

Dalla sezione $v-$ verso monte si sviluppa ancora un profilo D2, per cui da questo punto in poi il procedimento è identico a quello delineato per il caso $E_{v-} \geq E$: determinati i valori di profondità ed energia specifica nella sezione $m+$ dal tracciamento del profilo, si calcola $E_{m-} = E_{m+} + a$; dal ramo delle correnti lente della curva dell'energia specifica, si rileva la profondità $Y_{m-} > Y_u$, corrispondente a un livello maggiore che nella sezione $m+$. Dalla sezione $m-$ si sviluppa pertanto ancora un profilo D1 tendente asintoticamente verso monte all'altezza di moto uniforme.

Il profilo qualitativo del pelo libero è riportato in Figura 183. Si osservi che, per quanto discusso nel §14.7.1, nei brevi tratti in prossimità delle discontinuità del fondo non è possibile tracciare un profilo definito sulla base della teoria delle correnti a pelo libero, poiché essa perde validità in tali zone. I profili all'interno e all'esterno della soglia andranno pertanto raccordati a sentimento.

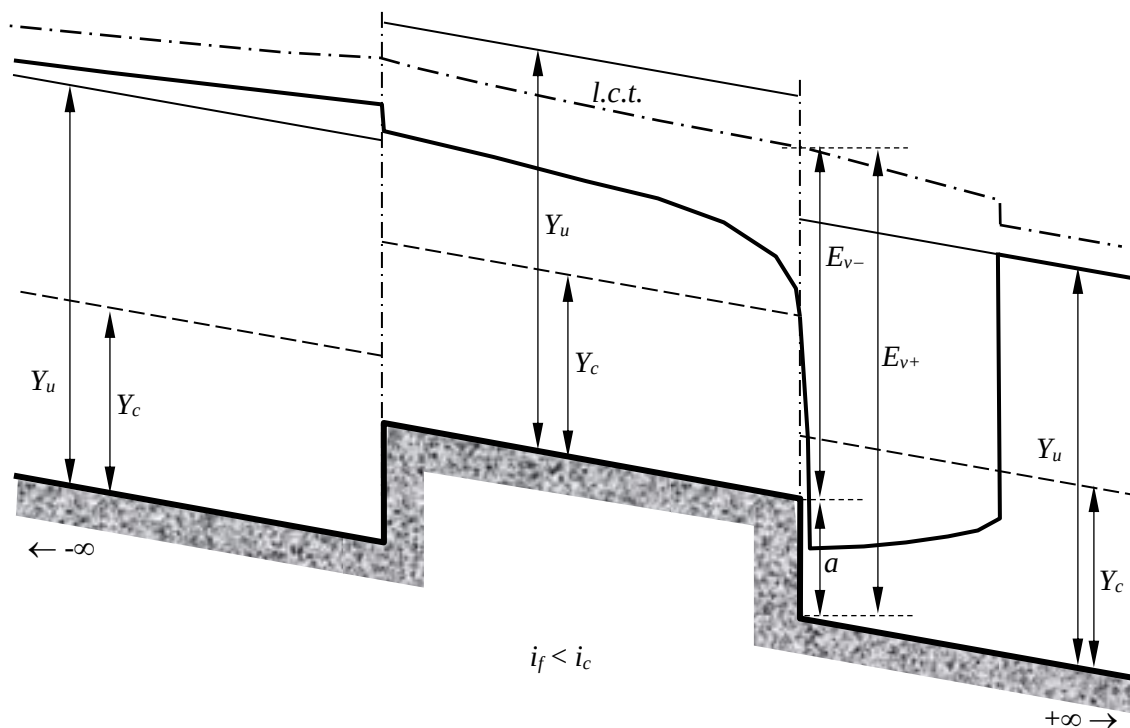


Figura 183. Profili di moto permanente in alveo a debole pendenza con soglia di fondo, con transizione per lo stato critico.

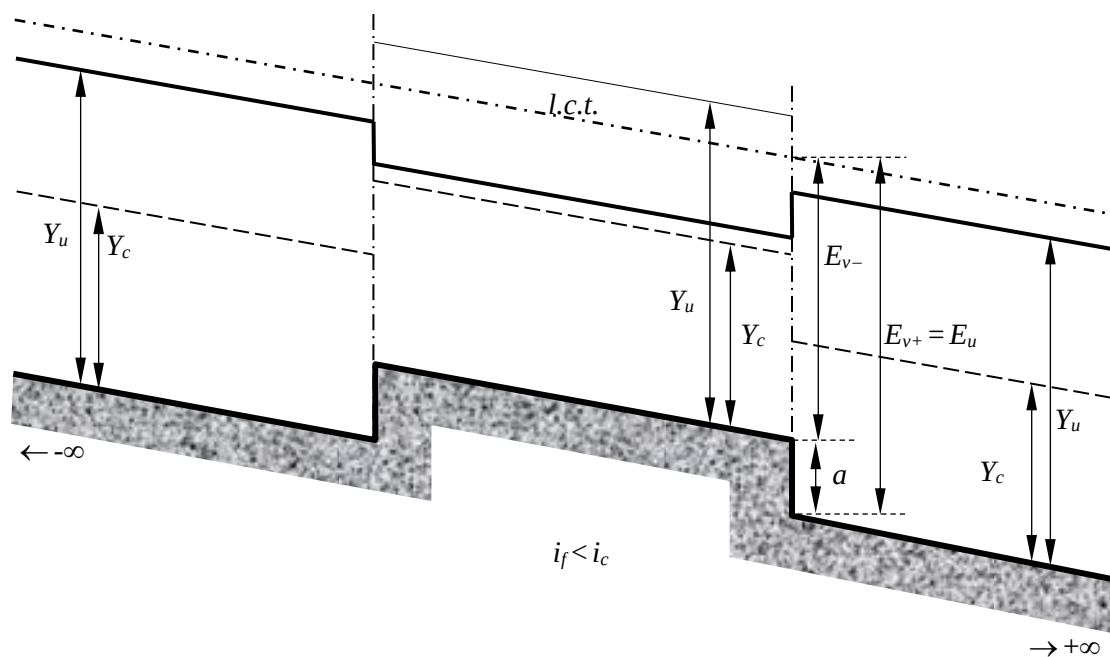


Figura 184. Profili di moto permanente in alveo a debole pendenza con soglia di fondo di sviluppo limitato, senza transizione per lo stato critico.

Nel caso senza transizione per lo stato critico, in cui la soglia di fondo abbia sviluppo decisamente limitato (Figura 184), le profondità nelle sezioni $m+$ e $v-$ sono praticamente identiche, cosicché a monte della soglia (sezione $m-$) la corrente ripristina le condizioni di moto uniforme esistenti nella sezione $v+$, che mantiene indefinitamente verso monte. In presenza di transizione con profondità critica sulla soglia, si attuano unicamente i procedimenti descritti ai due estremi della soglia per ricavare le profondità di corrente lenta e veloce, rispettivamente a monte e a valle del sovrizzo.

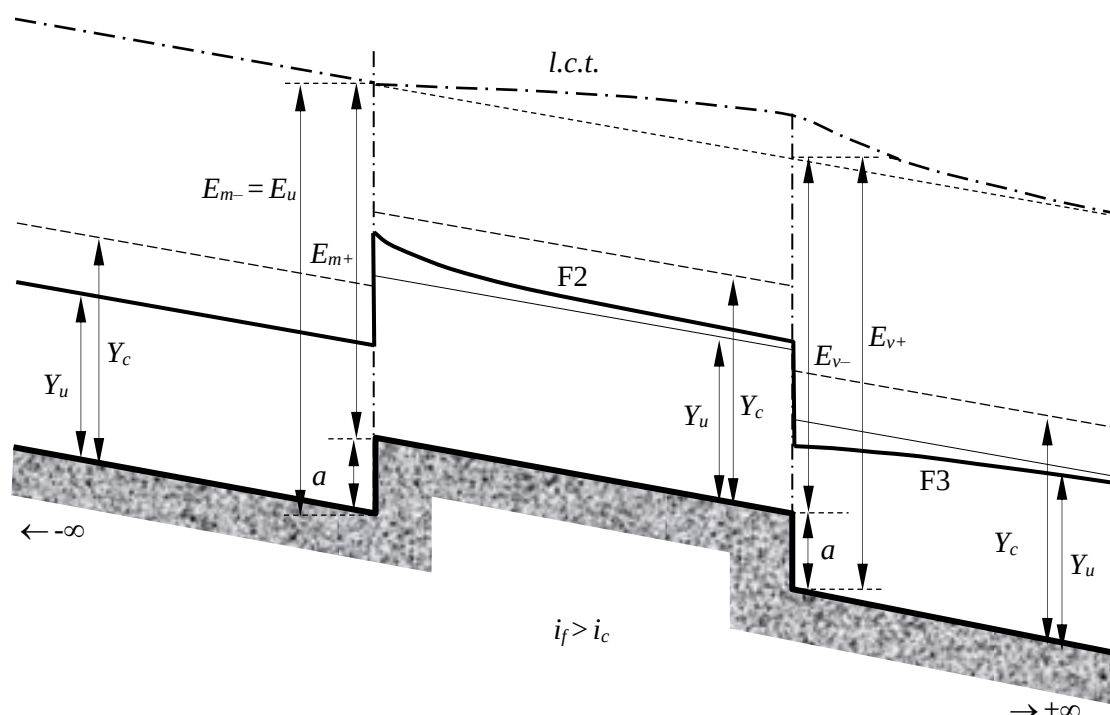


Figura 185. Profili di moto permanente in alveo a forte pendenza con soglia di fondo, senza transizione per lo stato critico.

Siamo ora in grado di definire in maniera più puntuale le condizioni per la formazione di un salto di fondo in alveo a debole pendenza, a monte del quale una corrente non viene influenzata dalle condizioni a valle, menzionato nel §14.6.5 in tema di sezioni di controllo con transizione per lo stato critico – in tale sede ammettendo, su base intuitiva, che il salto di fondo dovesse essere sufficientemente alto. L'altezza della discontinuità del fondo a deve essere superiore al valore massimo compatibile con il mantenimento di condizioni di corrente lenta ovunque nel canale, dato dalla (300). Su tale principio si basa il funzionamento dello stramazzo a larga soglia, la cui legge di efflusso è stata ricavata nel §6.8. L'altezza del manufatto si determina dalla (300), con riferimento alla portata massima che si desidera misurare.

14.7.3 Passaggio su una soglia di fondo in alveo a forte pendenza

Sulla base dei ragionamenti esposti nei paragrafi precedenti, si può determinare la soluzione di problemi analoghi relativi ad alvei a forte pendenza. In questo caso, la condizione al contorno di moto uniforme è fornita a monte (Figura 185). Ammettendo trascurabili le perdite di carico localizzate agli estremi della soglia, come in precedenza, i valori del carico specifico nelle sezioni immediatamente precedente (sezione $m-$) e successiva (sezione $m+$) all'estremo di monte della soglia differiscono di una quantità pari all'altezza del sovrizzo:

$$E_{m+} = E_{m-} - a = E_u - a ,$$

con il carico E_u immediatamente a monte della soglia calcolato sulla base della profondità di moto uniforme. Imponendo detta condizione nel diagramma dell'energia specifica a portata costante, anche in questo caso si possono presentare due situazioni:

14.7.3.1 $E_{m+} \geq E_{min}$

Il valore di carico specifico sulla soglia è maggiore o uguale al carico minimo compatibile con la portata assegnata ($E_{m+} > E_{min}$, Figura 186). Essendo influenzata da una causa perturbatrice posta a monte di essa (il gradino all'inizio della soglia), la corrente sulla soglia deve essere veloce. Dal ramo delle correnti veloci della curva dell'energia specifica si ricava pertanto una profondità Y_{m+} tale che

$Y_u < Y_{m+} < Y_c$, la quale determina un profilo F2 di corrente veloce accelerata (Figura 185). Tracciato il profilo F2 fino all'estremo di valle della soglia (sezione $v-$), sulla base dei valori di profondità ed energia specifica ivi calcolati, le condizioni nella sezione $v+$ immediatamente a valle della soglia si determinano incrementando l'energia specifica di una quantità pari all'altezza della soglia: $E_{v+} = E_{v-} + a$; sul ramo delle correnti veloci si ricava la profondità $Y_{v+} < Y_u < Y_{v-}$. Dalla sezione $v+$ si traccia pertanto un profilo F3 di corrente veloce ritardata.

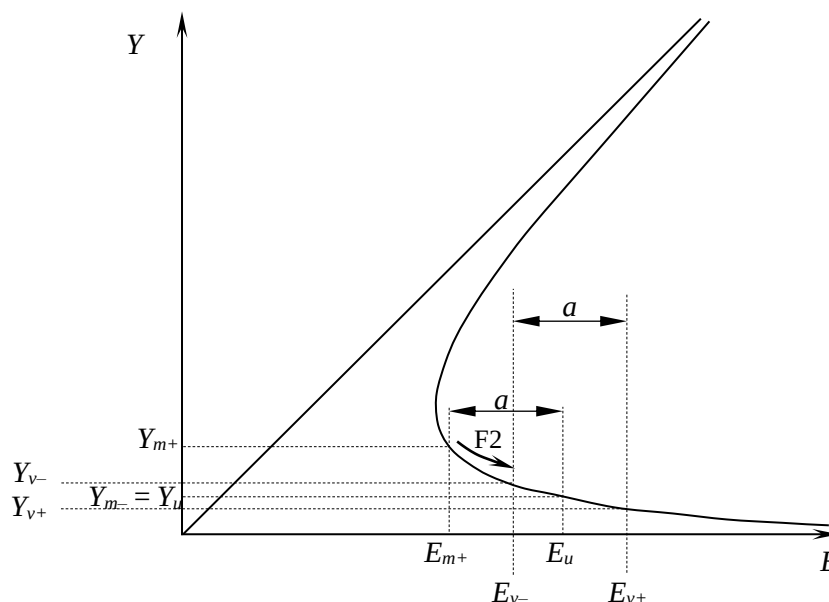


Figura 186. Schema di calcolo della profondità nella sezione $m+$ mediante il diagramma dell'energia specifica a portata costante.

14.7.3.2 $E_{m+} < E_{min}$

La condizione di carico specifico sulla soglia inferiore al carico minimo compatibile con la portata assegnata ($E_{m+} < E_{min}$, Figura 187) rende tale soluzione fisicamente inconsistente. È ammissibile, nonché l'unica possibile, la soluzione secondo la quale la corrente assume nella sezione $m+$ una profondità pari al valore critico: $Y_{m+} = Y_c$. Infatti, se la corrente fosse veloce all'estremo di monte della soglia, essa dovrebbe essere influenzata da monte, il che però comporterebbe il dover ripetere il procedimento iniziale che ha condotto alla soluzione inconsistente. Se, viceversa, la corrente fosse lenta, essa dovrebbe essere influenzata da valle, il che però non è possibile in alveo a forte pendenza indefinito verso valle. Poiché la causa perturbatrice costituita dal gradino terminale all'estremo di monte della soglia deve influenzare la corrente sia a monte che a valle, in tale sezione la corrente deve passare per lo stato critico. Anche in questo caso, alla medesima conclusione si perviene ragionando in termini di transitorio verso il regime stazionario.

Dalla sezione $m+$ verso valle si sviluppa un profilo F2 (vedi Figura 188), tracciando il quale si determina il valore della profondità e dell'energia specifica nella sezione $v-$. Per la supposta assenza di perdite di carico localizzate, nella sezione $v+$ si ha un valore di energia specifica incrementato di a rispetto alla sezione $v-$. In tale sezione la corrente deve essere influenzata dalle condizioni a monte ed è quindi ancora veloce. La relativa profondità $Y_{v+} < Y_u$ si determina sul relativo ramo del diagramma dell'energia specifica in corrispondenza di un valore di energia $E_{v+} = E_{v-} + a$ (vedi Figura 187). A valle di tale sezione si sviluppa pertanto un profilo di corrente veloce ritardata F3, tendente asintoticamente alla profondità di moto uniforme.

Aumentando di a l'energia nella sezione $m+$ si ottiene il valore della profondità nella sezione $m-$, di corrente lenta perché influenzata da una causa perturbatrice posta a valle. Da tale sezione si sviluppa pertanto un profilo F1, che si estende fino alla sezione nella quale la spinta totale della corrente eguaglia il valore relativo alle condizioni di moto uniforme (condizione estrema da monte), ove si localizza il risalto.

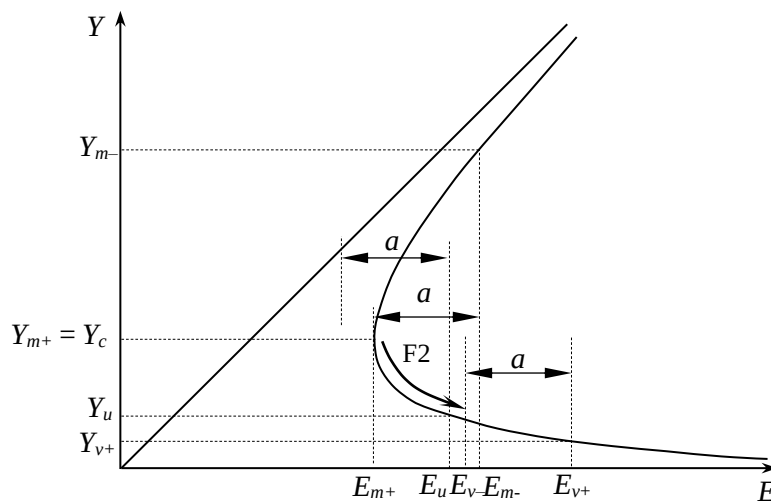


Figura 187. Schema di soluzione del problema della soglia di fondo in alveo a forte pendenza con transizione per lo stato critico.

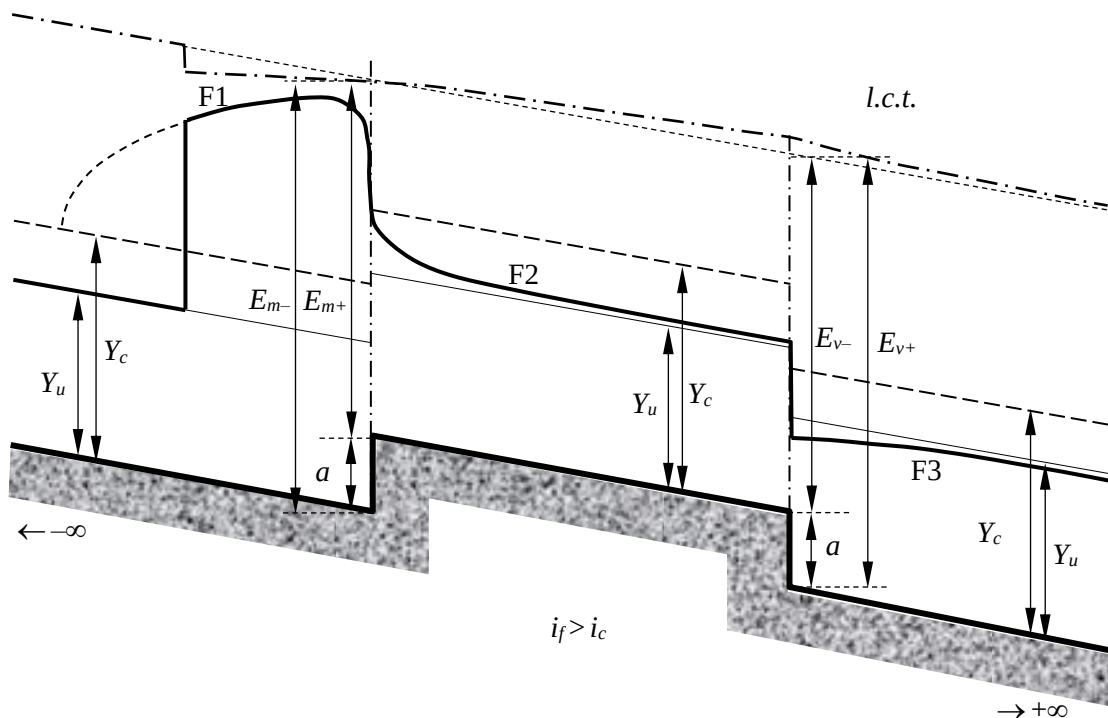


Figura 188. Profili di moto permanente in alveo a forte pendenza con soglia di fondo, con transizione per lo stato critico.

Nel caso di soglia di fondo di sviluppo limitato (Figura 189), in assenza di transizione la corrente a valle della soglia ripristina le condizioni di moto uniforme, che mantiene indefinitamente verso valle. In presenza di transizione con profondità critica sulla soglia, si attuano unicamente i procedimenti descritti ai due estremi della soglia per ricavare le profondità di corrente lenta e veloce, rispettivamente a monte e a valle del sovrizzo.

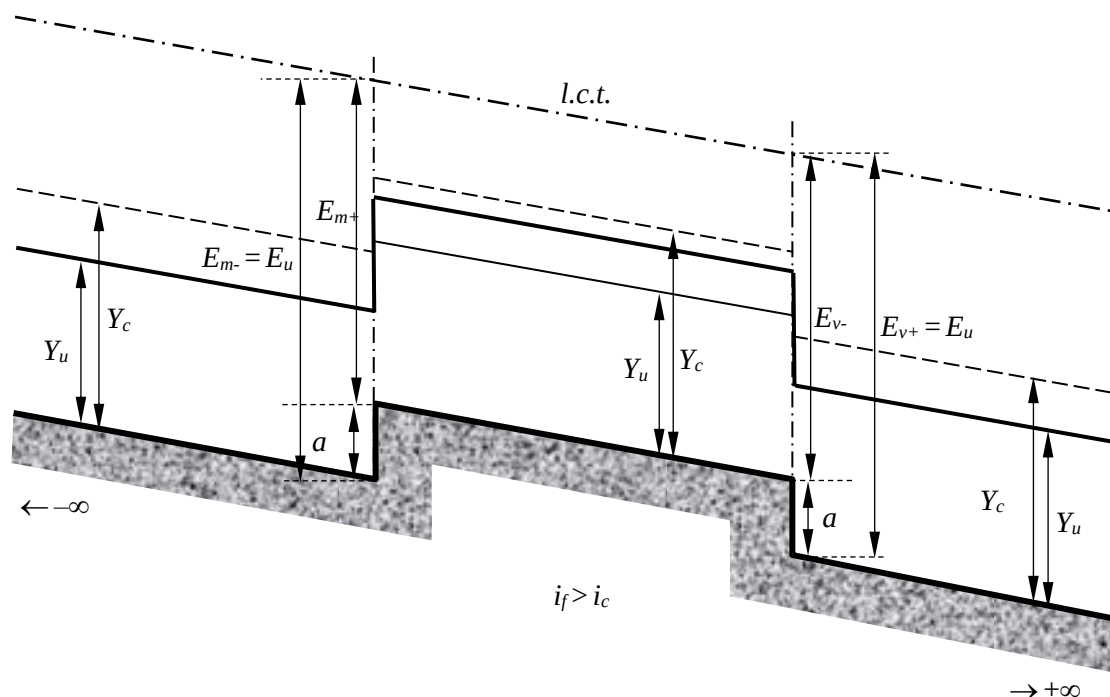


Figura 189. Profili di moto permanente in alveo a forte pendenza con soglia di fondo di sviluppo limitato, senza transizione per lo stato critico.

14.7.4 Restringimenti di sezione

Un caso di notevole interesse applicativo è rappresentato dal restringimento localizzato della sezione di un canale, quale può verificarsi, ad esempio, nel passaggio di un corso d'acqua fra le pile di un ponte. In Figura 190 è riportata una veduta planimetrica di un alveo a debole pendenza di sezione rettangolare di larghezza b interessato da un restringimento di sezione di larghezza b_r , al quale, per semplicità ma senza perdita di generalità, si farà riferimento per la descrizione dei profili di moto permanente. Si ipotizza il canale sia ben raccordato agli estremi del restringimento, di modo che risultino trascurabili, almeno in prima approssimazione, le perdite di carico localizzate.

Trattandosi di alveo a debole pendenza indefinito sia a monte che a valle, l'analisi ha inizio da valle, ove vigono condizioni al contorno di moto uniforme, che si ipotizza, in prima istanza, mantenersi fino all'estremo di valle del restringimento. Nella sezione $v+$ l'energia specifica è data pertanto dal valore E_u corrispondente alla profondità di moto uniforme Y_u :

$$E_u = Y_u + \frac{Q^2}{2g\Omega_u^2} = Y_u + \frac{q^2}{2gY_u^2}.$$

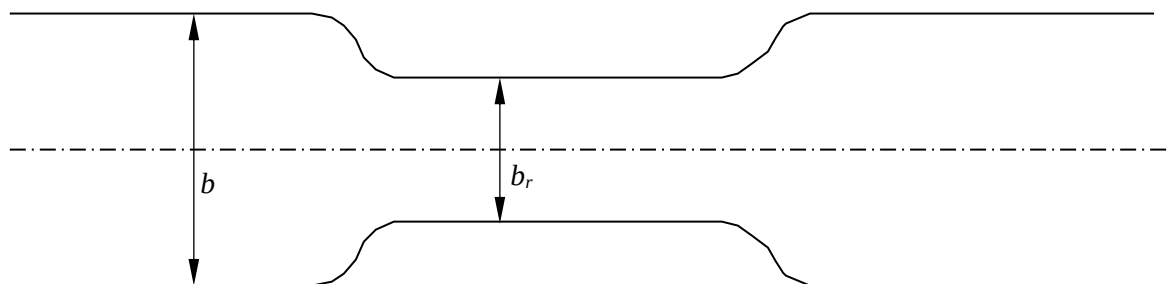


Figura 190. Veduta planimetrica di un canale a sezione rettangolare con restringimento.

La determinazione della profondità della corrente nel restringimento si effettua mediante la curva delle portate a energia specifica costante di cui al §14.3, la cui espressione per alveo rettangolare può essere scritta in funzione della *portata per unità di larghezza*, o *portata specifica*, $q = Q/b$ ¹⁷⁰:

$$q = \frac{Q}{b} = Y \sqrt{2g(E - Y)} \quad , \quad (301)$$

Per l'ipotesi di assenza di perdite di carico localizzate, nelle due sezioni di larghezza b e $b_r < b$ immediatamente a valle e a monte del termine del restringimento rispettivamente, vige il medesimo valore di carico specifico E_u . Pertanto, esse sono caratterizzate dalla stessa curva delle portate specifiche definita dalla (301). Sulla base delle considerazioni esposte al §14.3, le portate specifiche compatibili con il carico rispetto al fondo E_u ammettono un valore massimo dato da:

$$q_{\max} = \sqrt{\frac{8}{27}} \sqrt{g} E_u^{3/2} . \quad (302)$$

Nella strizione la portata specifica $q_r = Q/b_r$ risulta maggiore del valore $q = Q/b$ al suo esterno. Se la strizione è tale da determinare un valore di portata specifica $q_r < q_{\max}$, come rappresentato in Figura 191, nella sezione $v-$ si stabilisce una profondità Y_{v-} di corrente lenta, in quanto dipendente da condizioni da valle, che si ottiene dal grafico in corrispondenza della portata specifica q_r . La profondità Y_{v-} è inferiore alla profondità di moto uniforme Y_u vigente all'esterno del restringimento.

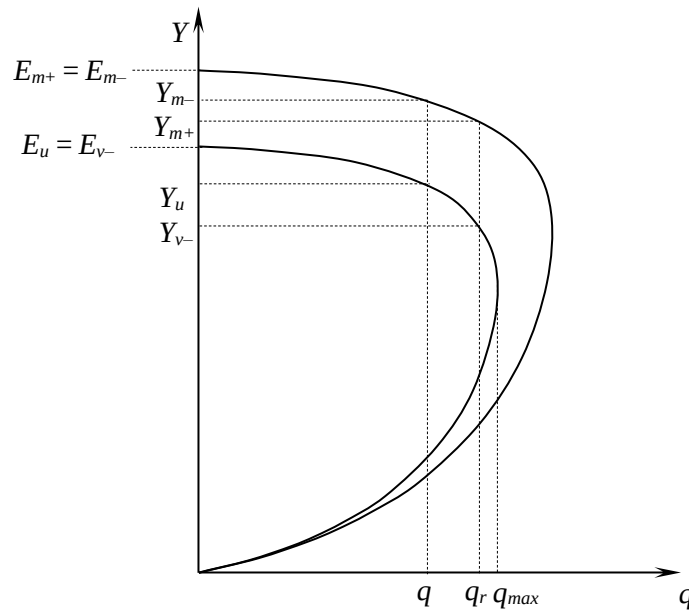


Figura 191. Curva delle portate specifiche a energia specifica costante.

Se il restringimento ha sviluppo limitato (Figura 192), per cui si possa ammettere che le perdite distribuite al suo interno non determinino variazioni di profondità rilevanti, nella sezione $m+$ immediatamente a valle dell'estremo di monte del restringimento è $Y_{m+} = Y_{v-}$; pertanto, con ragionamento analogo a quello condotto per l'estremo di valle, si conclude che a monte del

¹⁷⁰ Il lettore non confonda la “specificità” dell’energia rispetto alla quota del fondo con la “specificità” della portata per unità di larghezza. Le terminologie simili non sottintendono una caratteristica fisica comune, essendo riferite alle unità di grandezze differenti. Talvolta, il termine “specifico” viene anche utilizzato con riferimento alle portate per designare la scala delle portate ridotte di moto uniforme $Q/\sqrt{i_f} = \chi Q R$; a dispetto del nome si tratta, evidentemente, di tutt’altra grandezza che la portata per unità di larghezza.

restringimento (sezione $m-$) si ripristina la profondità di moto uniforme Y_u , che si mantiene indefinitamente verso monte. Se il restringimento non ha sviluppo trascurabile (Figura 193), al suo interno si sviluppa un profilo D2, con condizione al contorno da valle nella profondità Y_{v-} determinata come sopra descritto. Il tracciamento del profilo D2 fornisce nella sezione $m+$ una profondità $Y_{m+} > Y_{v-}$ e, conseguentemente, un carico specifico $E_{m+} > E_{v-} = E_u$. Sulla base della corrispondente nuova curva delle portate specifiche a carico specifico costante e della profondità Y_{m+} , si determina quindi, per la sezione $m-$, una profondità di corrente lenta $Y_{m-} > Y_u$. Tale profondità costituisce la condizione al contorno per il tracciamento di un profilo di tipo D1 a monte della strizione.

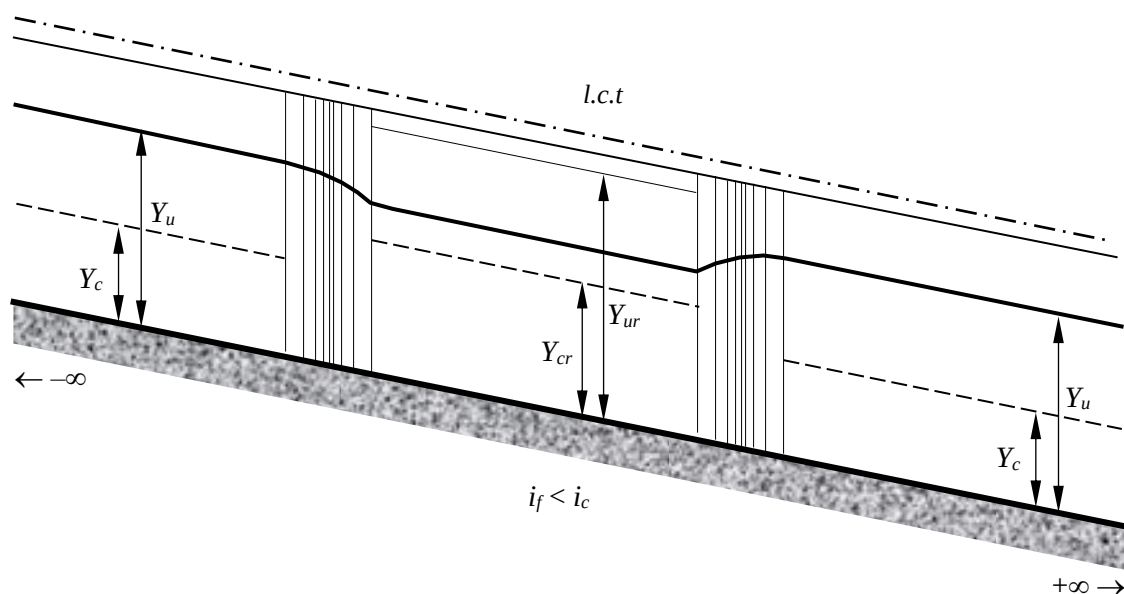


Figura 192. Soluzione del problema del restringimento di sezione di breve sviluppo in alveo a debole pendenza, senza transizione per lo stato critico.

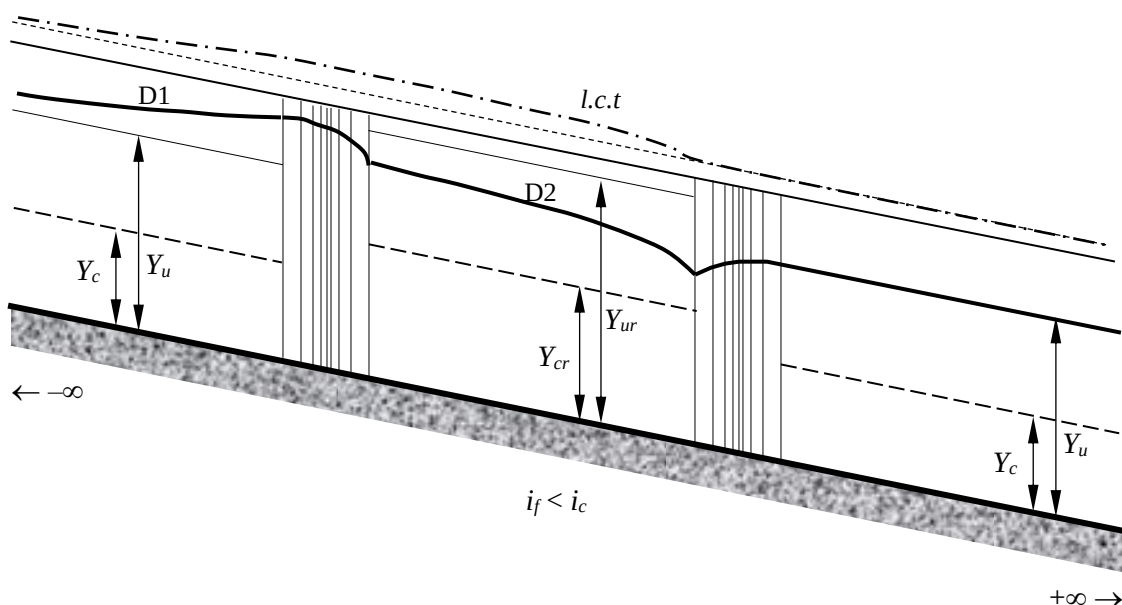


Figura 193. Profili di moto permanente in alveo a debole pendenza con restringimento di sezione, senza transizione per lo stato critico.

Similmente al caso del sovrizzo, è possibile individuare un valore minimo della larghezza b_r della sezione ristretta, al di sotto del quale la portata specifica all'interno del restringimento non è compatibile con il valore di energia specifica del moto uniforme E_u . Tale valore è dato da:

$$b_{\min} = \frac{Q}{q_{\max}},$$

in cui $q_{\max}$ è il valore di portata specifica massima della curva di Figura 191, dato dalla (302). Al di sotto di tale valore la corrente assume all'interno del restringimento il minimo valore di energia specifica compatibile con la portata q_r calcolata, maggiore di quello del moto uniforme inizialmente assunto, cui corrisponde la nuova curva delle portate specifiche di Figura 194:

$$E_{v-} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{q_r^2}{g}}$$

col che la portata specifica è la massima compatibile con tale valore e il flusso avviene in condizioni critiche, con la profondità:

$$Y_{cr} = \frac{2}{3} E_{v-} = \sqrt[3]{\frac{q_r^2}{g}}.$$

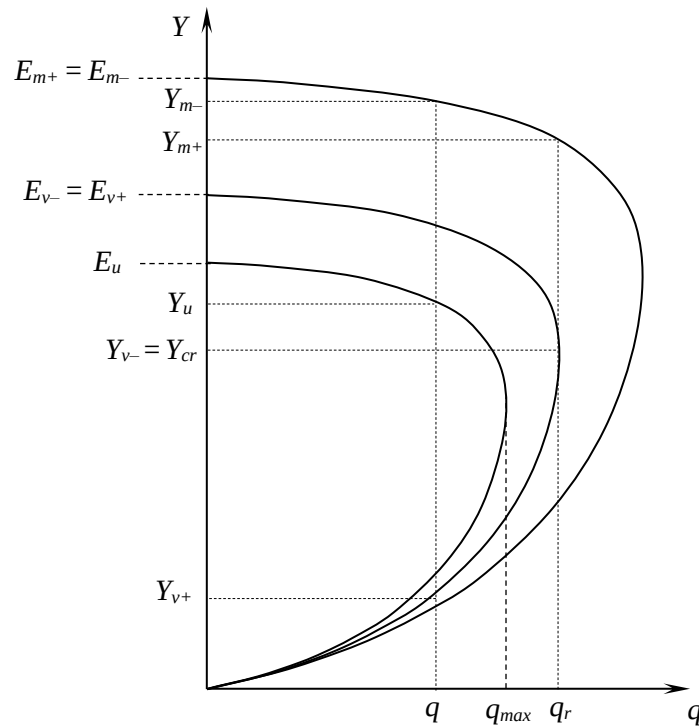


Figura 194. Curva delle portate specifiche a energia specifica costante per il problema del restringimento d'alveo di sviluppo non trascurabile con transizione per lo stato critico.

Chiariamo che le profondità critiche Y_c e Y_{cr} rappresentate in Figura 192 e Figura 193 sono relative alle portate q e q_r secondo la (289) e sono quindi costanti lungo l'asse. La profondità critica che si legge sul diagramma delle portate a carico costante è relativa, per l'appunto, al particolare valore di E e alla corrispondente portata massima. Lungo un profilo essa assume pertanto valori diversi al variare del carico specifico. All'interno del restringimento la profondità critica Y_{cr} per la portata

specifica q_r coincide con il valore che si legge sulla curva delle portate a energia costante soltanto se si verifica la transizione per lo stato critico.

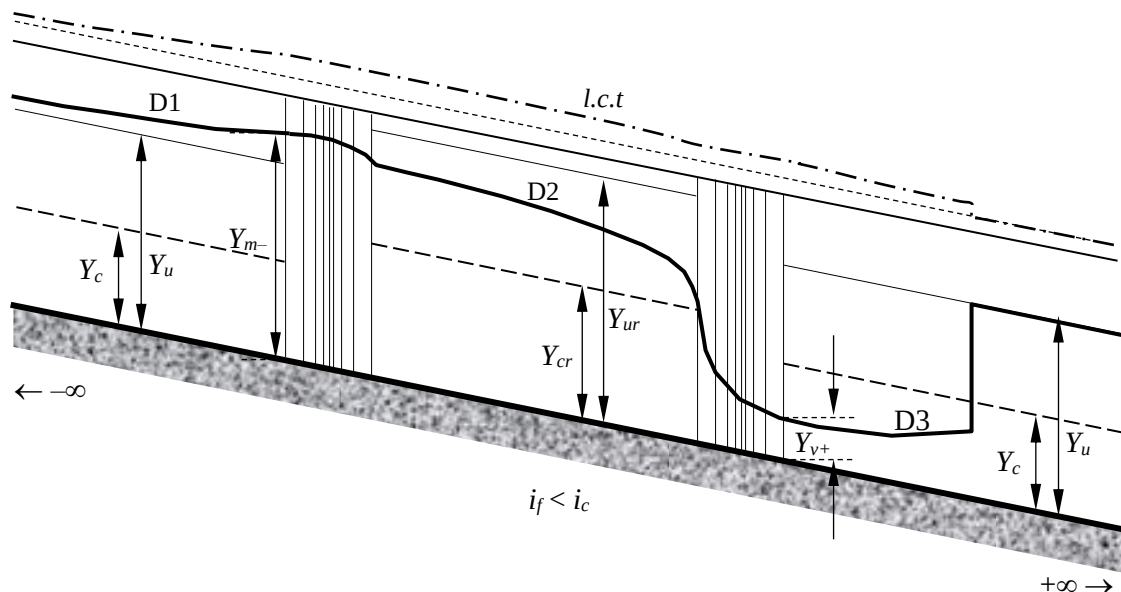


Figura 195. Profilo di moto permanente in alveo a sezione rettangolare con restringimento di sviluppo non trascurabile, con transizione per lo stato critico.

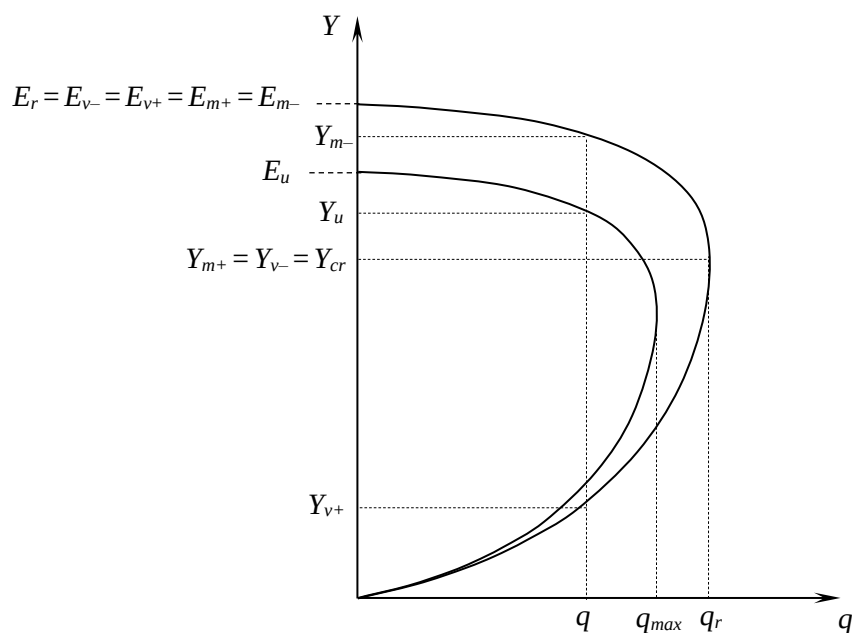


Figura 196. Curva delle portate specifiche a energia specifica costante per il problema del restringimento d'alveo di sviluppo trascurabile con transizione per lo stato critico.

Se la strizione ha sviluppo non trascurabile, all'interno di essa si sviluppa un profilo D2 con profondità critica e carico specifico minimo $E_{v-} > E_u$ compatibile con la portata sulla sezione $v-$ (vedi Figura 195). Conseguentemente, sulla sezione $m+$ la corrente ha energia specifica incrementata rispetto a tale valore minimo, $E_{m+} > E_{v-} > E_u$, cui corrisponde la più esterna delle tre curve delle portate specifiche rappresentate in Figura 194. Da questa si ricava il valore di profondità Y_{m-} sul ramo delle correnti lente, costituente una condizione da valle per il tracciamento un profilo D1 di corrente lenta

rallentata a monte della strizione. Dalla curva corrispondente all'energia specifica $E_{v-} = E_{v+}$ si ricava, sul ramo delle correnti veloci, la profondità Y_{v+} , condizione da monte per il tracciamento di un profilo D3 di corrente veloce rallentata, che si raccorda al profilo di moto uniforme con un risalto.

Se il restringimento ha sviluppo limitato, le profondità nell'alveo a larghezza piena nelle sezioni esterne al restringimento immediatamente a monte e a valle si leggono sul diagramma corrispondente all'energia specifica $E_r = E_{v-}$ per il valore di portata specifica $q < q_r$, sui due rami di corrente rispettivamente lenta e veloce (Figura 196). Come nel caso di strizione di sviluppo non trascurabile, le profondità a monte e a valle del restringimento rappresentano condizioni al contorno per il tracciamento di profili D1 e D3 rispettivamente, con raccordo del profilo D3 al profilo di moto uniforme mediante un risalto.

I casi di restringimento in alveo a forte pendenza si trattano in modo del tutto analogo. Partendo da monte, all'ingresso nel restringimento si ha un incremento della profondità. Nel caso in cui non avvenga transizione per lo stato critico, nel restringimento si sviluppa un profilo F2, mentre a valle del restringimento si sviluppa un profilo F3, tendente asintoticamente alla profondità di moto uniforme. Nel caso di transizione per lo stato critico si ha la formazione di un profilo F1 a monte, di un profilo F2 nel restringimento con profondità critica all'ingresso, e di un profilo F3 a valle.

Il caso di sezione di forma diversa dalla rettangolare non si presta alla soluzione in termini delle portate specifiche. In questo caso occorre riferirsi alle curve della portata Q a carico specifico costante. Assumendo ancora la condizione di perdite localizzate nulle agli estremi della strizione, si tracciano una curva per ciascuna delle due sezioni, corrispondenti al medesimo valore di energia specifica, sulle quali si leggono valori di profondità corrispondenti al medesimo valore di portata Q , per il resto utilizzando sostanzialmente gli stessi procedimenti descritti per la sezione rettangolare.

Come si è avuto modo di precisare ripetutamente, rappresentazioni grafiche dei procedimenti di soluzione sono state utilizzate per maggiore efficacia illustrativa, anche se il calcolo grafico vero e proprio è ormai in disuso. All'atto pratico, le varie operazioni descritte dovranno essere impostate in termini numerici, con l'ausilio di strumenti di calcolo aggiornati, fra i quali il foglio di calcolo elettronico rappresenta il miglior compromesso fra economia ed efficienza. A tale mezzo di calcolo si farà pertanto riferimento nella illustrazione delle procedure di soluzione numerica di alcuni dei passi dei procedimenti descritti nei paragrafi precedenti.

Nel §14.7.2.1, il calcolo della profondità Y_{v-} a partire dalle condizioni di moto uniforme a valle della soglia si esegue ricercando la soluzione dell'equazione:

$$Y + \frac{Q^2}{2gb^2Y^2} = E_u - a ,$$

previa verifica numerica che risulti:

$$E_u - a \geq E_{\min}$$

con $E_{\min} = (3/2)Y_c$ per una sezione rettangolare (in caso contrario nessuno dei procedimenti descritti di seguito potrebbe condurre ad una soluzione). L'equazione dell'energia specifica, razionalizzata, fornisce una equazione algebrica di ordine tre, per le cui radici esistono espressioni esplicite. In alternativa, la soluzione può determinarsi agevolmente mediante il foglio di calcolo calcolando la funzione a primo membro per vari valori di profondità su righe successive, in funzione di valori di profondità incrementati di una quantità corrispondente alla accuratezza desiderata della soluzione, oppure, più rapidamente, mediante i solutori automatici implementati negli stessi fogli elettronici. Naturalmente, fra le due soluzioni reali esistenti (la terza è complessa) occorre scegliere quella corrispondente al tipo di corrente corretto – lenta nell'esempio in questione¹⁷¹.

¹⁷¹ È questo un chiaro esempio del perché occorra avere ben presente tutti i presupposti del procedimento, legati al funzionamento delle correnti a pelo libero. Un esecutore malaccorto della procedura suggerita potrebbe prendere per buona la radice dell'equazione corrispondente ad una corrente veloce, magari perché essa è la prima determinata facendo variare la profondità Y a partire dallo zero.

La soluzione numerica è obbligata nel caso di sezioni di forma qualunque, per le quali l'equazione assume la forma generale:

$$Y + \frac{Q^2}{2g\Omega(Y)^2} = E_u - a \quad .$$

Ancorché rappresentati in termini della curva delle portate specifiche a carico specifico costante, i problemi trattati nel §14.7.4 con riferimento ai restringimenti di sezione richiedono la soluzione della stessa equazione per la determinazione delle profondità all'interno della strizione.

Sul comportamento assunto da una corrente attraverso un restringimento si basano strumenti di misura della portata chiamati *modellatori a risalto*. Tali manufatti realizzano la transizione per lo stato critico mediante l'effetto combinato di un sovrizzo del fondo e di un restringimento di sezione. Come già per lo stramazzo a larga soglia, la transizione per lo stato critico consente di stabilire un legame univoco fra la portata e la profondità della corrente a una congrua distanza dall'imbocco del restringimento. A parità di portata da misurare, i modellatori a risalto presentano altezze del sovrizzo inferiori rispetto a uno stramazzo a larga soglia; essi pertanto consentono di evitare, o ridurre considerevolmente, fenomeni di deposito di materiale grossolano a monte del manufatto. Tale caratteristica risulta particolarmente utile, ad esempio, per l'uso in impianti di depurazione, nei quali le correnti possono convogliare anche grandi quantità di solidi sospesi a elevato carico organico, dei quali è necessario evitare la sedimentazione al di fuori delle parti dell'impianto a ciò deputate.

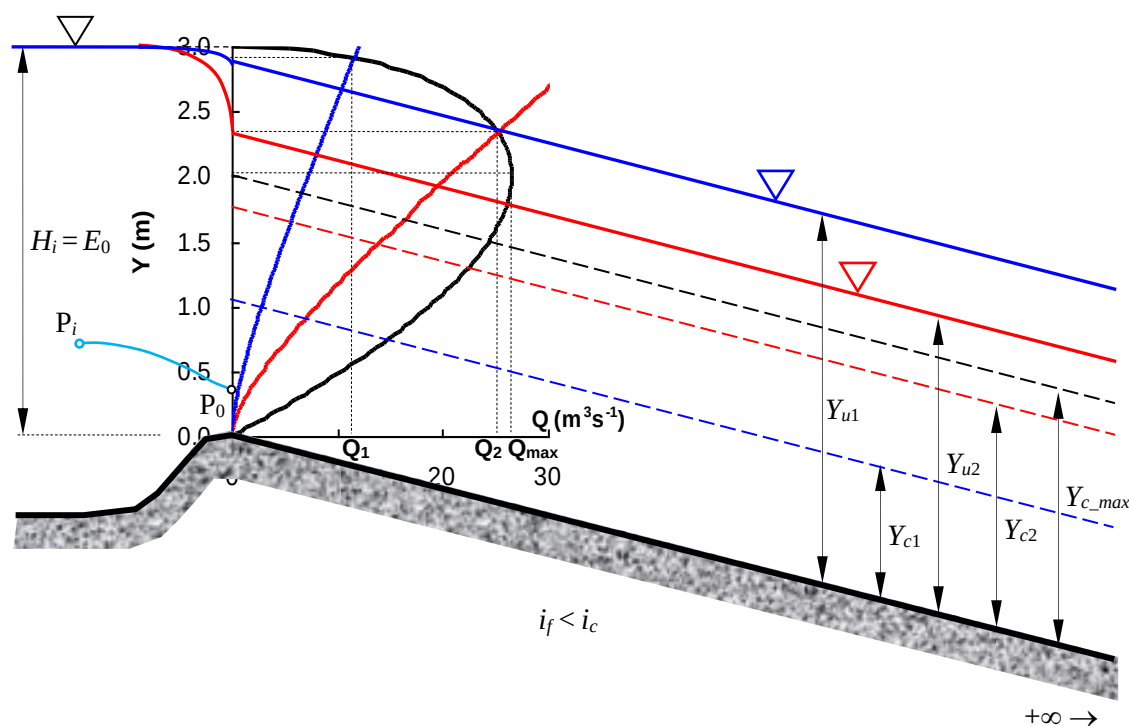


Figura 197. Presa da serbatoio con canale indefinito a debole pendenza.

14.7.5 Presa da un serbatoio

La valutazione della portata convogliata da un canale alimentato da un serbatoio non presenta particolari difficoltà nel caso in cui il serbatoio sia regolato da un manufatto quale una paratoia o uno stramazzo, nel caso in cui l'efflusso non sia rigurgitato. La portata effluente dipende allora soltanto dal livello a monte del manufatto ed è quindi determinabile sulla base delle leggi di efflusso presentate nel cap.6. Di soluzione decisamente meno intuitiva è invece il problema della

determinazione della portata estratta da un serbatoio in assenza di organi di regolazione, da un canale di date caratteristiche.

Si consideri la presa da un serbatoio mediante il canale indefinito rappresentato in Figura 197. Ammettendo, come già nei problemi relativi alle soglie e ai restringimenti, che le perdite di carico localizzate all'imbocco del canale possano ritenersi trascurabili, il carico totale nella sezione di imbocco è pari alla quota del pelo libero nel serbatoio, coincidente con il carico totale H_i delle particelle interne al serbatoio, essendo esse animate da velocità che si assumono, come di consueto nei problemi di efflusso, trascurabili a una distanza sufficiente dall'imbocco. Assumendo un piano di riferimento alla quota del fondo della sezione di imbocco, si ha quindi:

$$H_i = E_0 = Y_0 + \frac{U_0^2}{2g} = Y_0 + \frac{Q^2}{2g\Omega(Y_0)^2}, \quad (303)$$

per cui nella sezione di imbocco la corrente possiede energia specifica E_0 pari al livello dell'acqua nel serbatoio. La (303) è una equazione fra le due grandezze incognite Y_0 e Q rappresentata graficamente dalla curva delle portate a carico specifico costante tracciata in Figura 197. Le incognite possono essere determinate disponendo di una seconda relazione indipendente fra le stesse grandezze – quindi, valida anch'essa sulla sezione di imbocco.

La scala delle portate di moto uniforme in tratto blu, relativa alla pendenza effettiva del canale, interseca la curva delle portate a carico specifico costante nel ramo delle correnti lente. Tale circostanza segnala che l'alveo è a debole pendenza per la portata che fluisce nel canale. Infatti, in un alveo a debole pendenza indefinito verso valle vige la condizione al contorno di moto uniforme. Nel caso specifico la corrente risente di tale condizione fino alla sezione di imbocco. La scala delle portate costituisce la seconda relazione indipendente cercata, valida in tale sezione. Il punto di intersezione fra le due curve fornisce quindi i valori di portata (costante lungo il canale perché il moto è permanente) e profondità all'imbocco, quest'ultima ovviamente pari alla corrispondente profondità di moto uniforme. Essendo questa di corrente lenta, il canale è, per definizione, a debole pendenza. Poiché il canale è indefinito verso valle, il profilo presenta la profondità di moto uniforme costante lungo l'asse del canale. Si noti che la profondità critica corrispondente alla portata determinata, determinabile dalla (287), è inferiore al valore associato alla portata massima.

Se il canale avesse una pendenza maggiore¹⁷², ma pur sempre tale che la relativa scala delle portate intersechi la curva delle portate a carico specifico costante nel ramo delle correnti lente, la scala delle portate sarebbe qualitativamente come quella in tratto rosso in figura: la pendenza sarebbe ancora debole, la portata estratta maggiore del valore ottenuto per il valore di pendenza minore del caso precedente, le corrispondenti profondità di moto uniforme e critica inferiori ai valori precedenti e il profilo ancora a profondità costante. In definitiva, la portata aumenta all'aumentare della pendenza del fondo, almeno fintanto che l'intersezione fra le due curve si ha nel ramo delle correnti lente.

Rimanendo nel caso di un alveo indefinito, esaminiamo cosa accade quando, aumentando ulteriormente la pendenza del fondo, la scala delle portate interseca la curva delle portate a carico specifico costante in corrispondenza del valore massimo di portata ammissibile, nonché, per pendenze ancora maggiori, nel ramo delle correnti veloci. Si consideri lo schema di riferimento di Figura 198. Nel primo caso, rappresentato in colore blu, la profondità critica, corrispondente alla portata massima compatibile con il dato carico specifico, è anche profondità di moto uniforme per tale portata: l'alveo ha pertanto pendenza critica. Si tratta evidentemente di un caso limite di alveo a debole pendenza, che consente ancora di ritenere valida la condizione di moto uniforme all'imbocco. Il profilo si mantiene ancora parallelo al fondo: si tratta quindi del profilo C2 descritto nel §14.5.5. Inclinazioni maggiori dell'alveo corrispondono ovviamente a forti pendenze. Evidentemente, in questo caso non sussiste più la possibilità di prescrivere condizioni di moto uniforme da valle¹⁷³. La

¹⁷² Per la sintesi, e come negli esempi successivi, la rappresentazione grafica di casi a pendenza differente è riferita ad un unico profilo del fondo del canale.

¹⁷³ Oltre che per le argomentazioni presentate nel §14.6.3, del tutto esaurienti, ci si convince ulteriormente di ciò osservando che, imponendo condizioni di moto uniforme, il punto di intersezione con la curva delle portate

portata non può essere maggiore del valore Q_{max} in presenza della data energia specifica, né, evidentemente, può risultare inferiore al medesimo valore, determinato per un valore di pendenza inferiore (la pendenza critica). Pertanto, per qualunque valore di forte pendenza, la portata estratta è la massima compatibile con il carico specifico all'imbocco. Nel canale si stabilisce un profilo di corrente veloce accelerata F2, tendente asintoticamente alla profondità di moto uniforme.

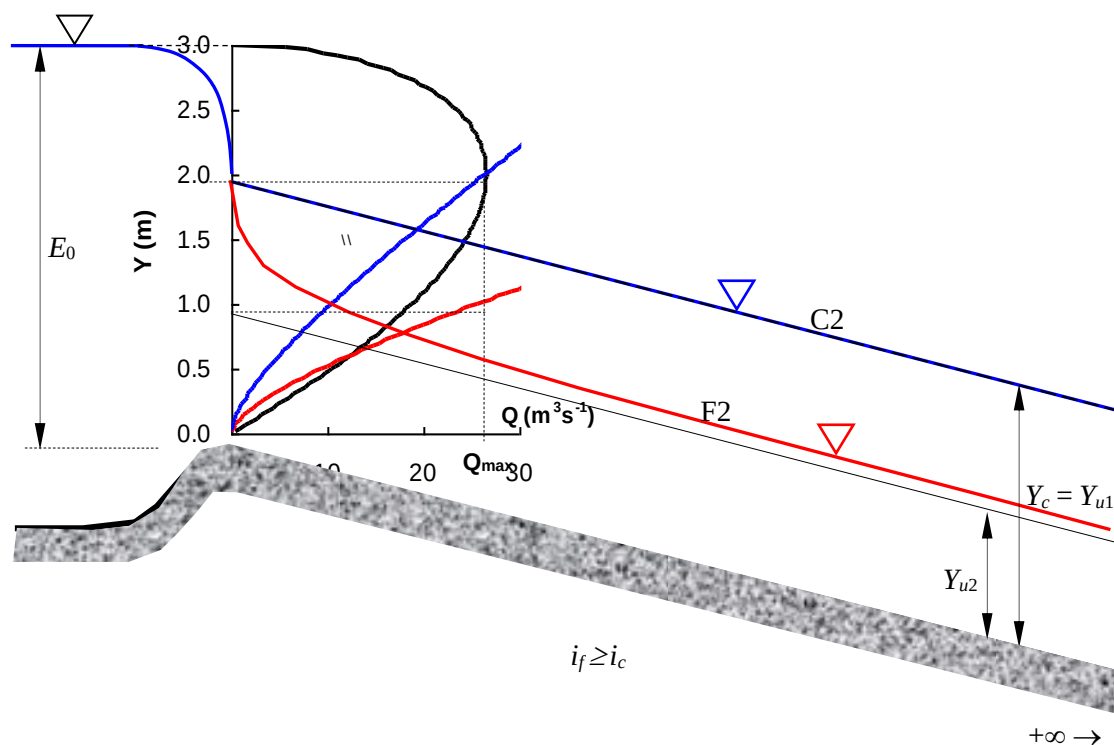


Figura 198. Presa da serbatoio con canale indefinito a pendenza critica (in colore blu) e a forte pendenza (in colore rosso).

Tipicamente, il caso di alveo a forte pendenza non sufficientemente esteso da poter essere considerato praticamente indefinito non comporta alcuna complicazione pratica. In relazione alle condizioni effettive lungo l'asse del canale (cambi di pendenza o di scabrezza, presenza di manufatti, etc...), si può dare il caso della formazione di profili di corrente lenta (rigurgiti) in qualche parte del canale. Fintanto che la relativa transizione dal profilo F2 avviene mediante un risalto, esiste ancora un tratto di corrente veloce a valle della sezione di imbocco, che impedisce alla corrente di influenzare le condizioni in tale sezione. Il valore della portata estratta dal serbatoio può differire dal valore massimo, risultando inferiore a esso, soltanto se condizionata da una corrente lenta all'imbocco. Ciò può accadere soltanto se un eventuale rigurgito in corrente lenta si propaga fino all'imbocco del canale: in pratica, sulla base del criterio per la formazione del risalto e delle caratteristiche della spinta totale quale funzione della profondità, se il profilo F1 (unico di corrente lenta in alveo a forte pendenza) si estende oltre alla sezione di imbocco. Infatti, poiché la spinta totale è minima in corrispondenza dello stato critico, a qualunque diversa profondità è associata una spinta totale maggiore, che impedisce lo sviluppo della corrente veloce.

In questo caso la soluzione si determina per approssimazioni successive. Un procedimento iterativo di soluzione è richiesto anche nel caso di un alveo a debole pendenza per il quale non si possano assumere condizioni di moto uniforme all'imbocco, che è quanto succede ogni qual volta

a carico specifico costante corrisponde ad una portata inferiore a quella estratta con un valore di pendenza inferiore, il che è privo di senso fisico.

l'alveo non possa ritenersi indefinito verso valle. Tale procedimento viene descritto con riferimento allo schema in Figura 199. Si assuma, ad esempio, che all'alveo a debole pendenza segua un tratto a forte pendenza, di modo che sulla sezione in cui avviene il cambio di pendenza si verifichi la transizione per lo stato critico. Per avviare la procedura iterativa, si può fissare un valore di portata a sentimento, oppure stimare un valore di prima approssimazione ipotizzando la condizione di moto uniforme alla sezione di imbocco; tale valore sarà tanto più prossimo alla soluzione cercata quanto maggiore è lo sviluppo del canale a debole pendenza. Con il primo valore di portata Q_1 così determinato si traccia un profilo D2 dalla profondità critica all'estremo di valle (in colore blu in figura). Se la profondità Y_{01} calcolata alla sezione di imbocco differisce dal valore asintotico del moto uniforme di una quantità inferiore a una tolleranza prefissata, il valore di tentativo può essere considerato accettabile e il procedimento termina (l'alveo può quindi ritenersi indefinito verso valle con riferimento alla zona dell'imbocco, nel senso del termine fin qui utilizzato).

Nel caso rappresentato in figura, in cui, viceversa, la profondità del profilo D2 sulla sezione di imbocco differisca significativamente dal valore del moto uniforme, tale condizione si rivela non corretta e non verrà quindi più utilizzata nel corso del procedimento. Tale conclusione, naturalmente, non inficia la validità della relazione fra portata e profondità all'imbocco dettata dal valore di energia specifica in tale sezione, che deve quindi ancora essere utilizzata.

Sulla relativa curva si rileva quindi un secondo valore di portata Q_2 , maggiore di Q_1 , in corrispondenza della profondità Y_{01} all'imbocco, sulla base della quale si determinano nuove profondità critica e di moto uniforme e si traccia un secondo profilo D2 (in tratto rosso in Figura 199). Da questo punto in poi il procedimento si ripete: dal nuovo valore di profondità all'imbocco Y_{02} si determinano: un terzo valore di portata Q_3 , la terza coppia di profondità critica e di moto uniforme, un terzo profilo D3, etc... Il procedimento si arresta quando due valori successivi di portata o di profondità all'imbocco differiscano della tolleranza prefissata.

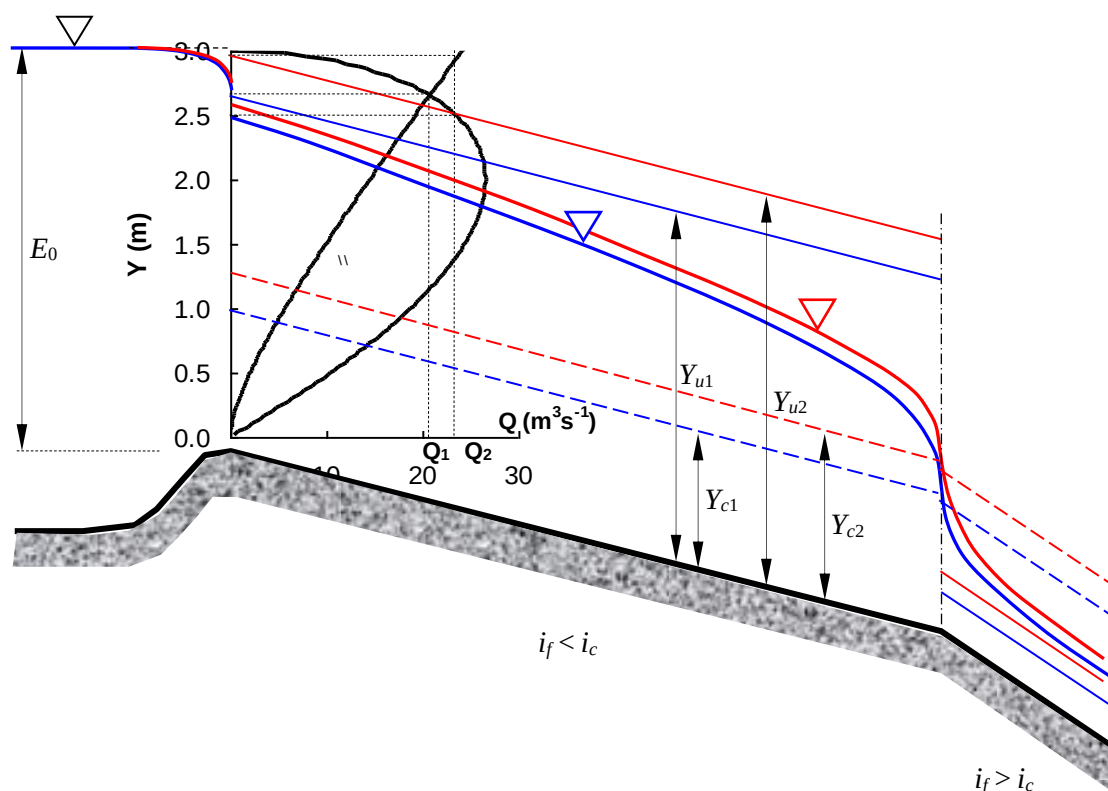


Figura 199. Presa da serbatoio con canale a debole pendenza di sviluppo limitato.

14.8 Sommario e suggerimenti pratici per l'analisi di una corrente a pelo libero

Nel presente paragrafo si intende fornire il lettore di una sintesi dei concetti e delle procedure esaminate in precedenza, che possa costituire una guida metodologica per l'analisi dei problemi di tracciamento dei profili di moto permanente nei canali. Si è già ampiamente fatto riferimento alla molteplicità delle possibili soluzioni anche qualitative di uno stesso problema, a seconda dei valori numerici dei dati. Questa circostanza, determinata dal comportamento fisico delle correnti a pelo libero, si traduce nella necessità di analisi globale di un sistema, giacché, un certo andamento del profilo, determinato per una parte del canale come una delle soluzioni possibili, può essere ritenuto corretto soltanto se esso non è in contrasto con condizioni imposte in altri punti del canale. Tutto ciò comporta generalmente nel principiante qualche difficoltà nel padroneggiare l'aspetto pratico-applicativo dell'analisi dei profili di moto permanente. Tuttavia, un riepilogo di tutti i concetti presentati nel capitolo, anche a costo di qualche ripetizione e di affermazioni che potranno talora sembrare banali, consente di delineare una traccia di procedura che può essere di un qualche aiuto nella soluzione dei problemi pratici.

Innanzitutto, riprendiamo i tre punti fondamentali richiamati nel §14.6.4. In ogni tratto del canale, il profilo corretto:

1. è uno dei profili possibili per il tipo di alveo in questione (D1, D2 o D3 per alveo a debole pendenza; F1, F2 o F3 per alveo a forte pendenza, etc..).
2. assume le proprie condizioni al contorno correttamente (da monte se corrente veloce; da valle se corrente lenta);
3. si basa, se del caso, su una specificazione corretta delle condizioni a una sezione di controllo di estremità in termini di: a) valori delle profondità a monte e a valle della sezione di controllo; b) attribuzione del tipo di corrente (lenta o veloce).

Ovviamente, il punto 1 presuppone la conoscenza delle caratteristiche geometriche dei vari tipi di profilo, mentre il punto 3 presuppone la conoscenza delle leggi di efflusso dei vari manufatti rinvenibili lungo linea (paratoie, stramazzi, etc..., esaminati nel cap. 6) o del più articolato comportamento di soglie di fondo o restringimenti di sezione (§§14.7.2, 14.7.3 e 14.7.4).

Possiamo distinguere problemi nei quali sia assegnata la portata da altri nei quali siano specificate condizioni diverse, che consentano di determinarla (in sostanza, il livello in un serbatoio a monte del canale, con presenza o meno di organi di regolazione). Se essa non è nota, dovrà sempre essere determinata come primo passo del procedimento. In tal caso, alla determinazione della portata potrà essere associato o meno il tracciamento di un profilo. Il primo caso si ha nei problemi di presa libera descritti dettagliatamente nel paragrafo precedente, o anche nel caso in cui il serbatoio sia regolato da una paratoia, perché – almeno quale soluzione di primo tentativo – dovrà ammettersi la formazione di una corrente veloce a partire dalla sezione contratta a valle del manufatto. Diverso è il caso di uno stramazzo in parete sottile, perché il comportamento della vena stramazza non consente di trascurare le perdite di carico successive all'impatto con la corrente sottostante. Si badi, a tale proposito, che, fra gli strumenti di misura delle portate basati sulla transizione per lo stato critico, l'ipotesi di perdite trascurabili, soprattutto a valle, è realistica se il manufatto è conformato in modo che la vena non si distacchi dal fondo. Essa sarà quindi molto più plausibile per un modellatore a risalto che per uno stramazzo a larga soglia.

Nota che sia la portata, allo scopo di tracciare un primo tratto di profilo (se ciò non è immediata conseguenza della determinazione della stessa portata), a parte il caso banale di unico tratto a pendenza costante privo di manufatti, nel quale la soluzione è il profilo di moto uniforme, si presentano due casi: si può avere almeno un cambio di pendenza nel senso del moto da debole a forte o la sequenza opposta, da forte a debole. Nel primo caso, ovunque si verifichi il cambio di pendenza, si potrà sempre considerare tale sezione, almeno in prima approssimazione, una sezione di controllo ove si verifica la transizione per lo stato critico (§14.6.5), il che consente di tracciare un profilo D2 verso monte e uno F2 verso valle. Tale assunzione può essere fatta senz'altro anche qualora esistano altre cause perturbative in punti diversi del canale. Naturalmente, in questo caso occorrerà verificare l'ipotesi tracciando i profili che vengono perciò originati.

Nel caso di passaggio da forte a debole pendenza, se il primo è indefinito verso monte o il secondo è indefinito verso valle, dalle direzioni corrispondenti provengono profili che determinano condizioni al contorno di moto uniforme (§14.6.3).

La presenza di manufatti dotati di leggi di efflusso non costituisce generalmente una complicazione, perché, al contrario, consente di determinare ulteriori valori della profondità nelle sezioni a monte o a valle, sulla base dei quali si tracciano nuovi tratti di profilo (14.6.4).

La successione di tratti di corrente veloce a monte e lenta a valle necessita della presenza di un risalto, da determinare sulla base della condizione di uguaglianza delle spinte totali ai suoi due estremi (§14.6.6). Tale determinazione è relativamente spedita se a uno degli estremi è prescritta la condizione al contorno asintotica di moto uniforme, giacché in tal caso è sufficiente il rilievo della profondità coniugata a quella di moto uniforme nel grafico della spinta totale. In caso contrario occorrerà procedere al tracciamento del profilo coniugato.

Quelli presentati sono i concetti essenziali da tenere presente nell'analisi di una corrente a pelo libero in moto permanente. Esiste una grande varietà di possibili combinazioni di pendenze, manufatti, tipi di sezione, etc..., che possono essere risolti, a propria volta, combinando tutti i metodi locali di soluzione mostrati per tali circostanze. Un buon bagaglio esercitativo è comunque necessario per affrontare la soluzione di tali problemi con una sufficiente confidenza.

CAPITOLO QUINDICESIMO

15. MOTI DI FILTRAZIONE

15.1 Generalità

Si dice permeabile un mezzo costituito da una fase (o *matrice*) solida, frequentemente costituita da un ammasso granulare incoerente, all'interno della quale siano presenti dei vuoti comunicanti che rendano possibile la circolazione di un fluido, sia esso un gas o un liquido. Tipicamente, risultano di interesse mezzi permeabili caratterizzati da un elevato valore della superficie della matrice solida per unità di volume (*superficie specifica*), di modo che il moto negli interstizi della matrice solida (*moto di filtrazione*) abbia luogo con velocità molto basse.

Evidentemente, affinché un mezzo poroso possa essere sede di un moto di filtrazione almeno una parte dei pori presenti nel mezzo devono essere comunicanti; eventuali pori isolati all'interno della matrice solida non costituiscono elementi sostanzialmente differenti da quest'ultima nei confronti del moto. Il principale indice caratteristico di un mezzo permeabile è rappresentato dalla *porosità*, definita come rapporto fra volume dei vuoti e volume totale. A parità di dimensioni dei grani costituenti la matrice solida, la porosità dipende dalla disposizione degli stessi: ad esempio, nel caso ideale di elementi sferici di diametro uniforme la porosità varia da 0,476 se le sfere hanno i centri disposti ai vertici di un cubo a 0,259 se i centri sono disposti sui vertici di un tetraedro. Valori ancora inferiori si ottengono in presenza di una distribuzione non uniforme dei diametri delle sfere, giacché gli elementi più fini possono occupare gli spazi fra gli elementi di dimensioni maggiori. Oltre alla porosità n definita con riferimento alla totalità dei pori, si definisce *porosità efficace*, $n_e < n$, il rapporto fra i vuoti comunicanti e il volume totale. In generale, gli interstizi possono avere dimensioni e forme diverse. Si definisce *diametro nominale* D_n di un grano di forma irregolare il diametro della sfera di pari volume. La distribuzione statistica dei diametri nominali è detta *distribuzione granulometrica* dell'ammasso granulare. Le caratteristiche di forma dei meati sono legate anche alle caratteristiche *morfometriche* dei granuli: *sfericità* e *spigolosità*.

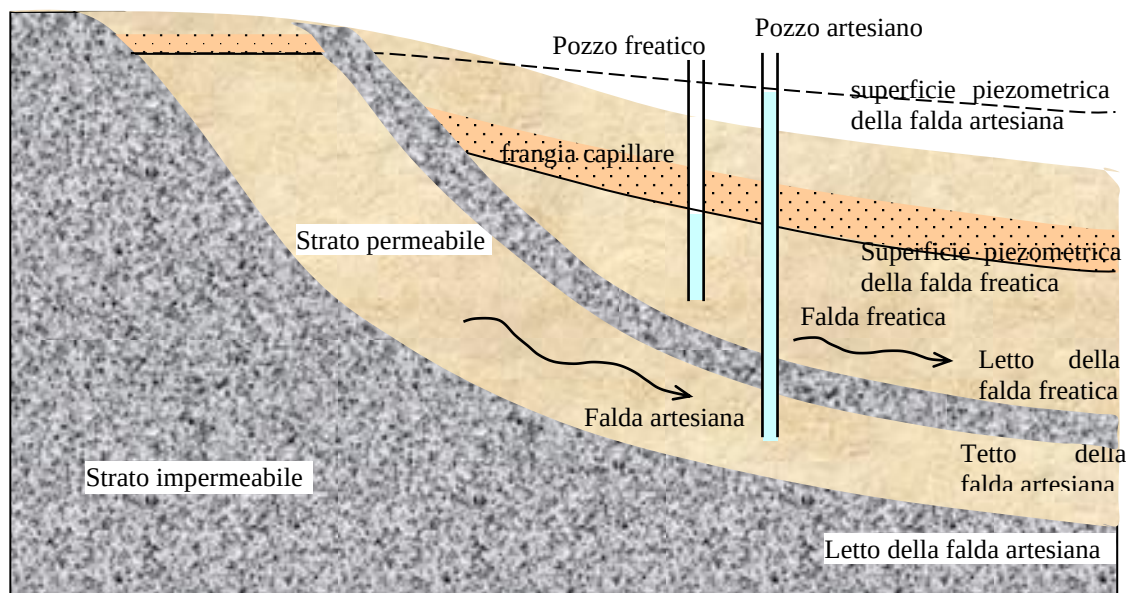


Figura 200. Sezione schematica del sottosuolo con falda artesiane e falda freatica.

Il moto di liquidi entro mezzi porosi di origine sia naturale che artificiale costituisce un fenomeno di interesse tecnico in vari campi dell'Ingegneria. Moti di filtrazione in matrici porose artificiali hanno

luogo, ad esempio, in alcuni dispositivi degli impianti di depurazione delle acque di rifiuto, come i letti percolatori nel trattamento secondario (biologico) o filtri di vario tipo nel trattamento terziario. Il caso tipico delle matrici porose naturali è quello delle *falde acquifere*, alle quali verrà fatto riferimento esclusivo nel presente capitolo. Si tratta di formazioni alluvionali permeabili di sabbie o ghiaie, che possono perciò essere imbibite dalle acque provenienti dalla superficie sotto forma di pioggia o per corrivazione. Tali formazioni costituiscono delle riserve di acqua essenziali per una varietà di processi biologici, vegetali e animali, incluse le attività umane. In particolare, per quanto riguarda la possibilità di utilizzazione per scopi idropotabili attraverso emungimento da pozzi o prelievo da sorgenti, va rilevato come la filtrazione nel terreno costituisca un processo di depurazione naturale dell'acqua, tanto più efficace quanto più è minuta la granulometria dell'ammasso permeabile, che consente di ottenere, in assenza di cause specifiche di inquinamento, caratteristiche organolettiche idonee per l'uso potabile.

Le falde acquifere (dette anche, in breve, *acquiferi*) si dividono in due categorie contraddistinte da differenti caratteristiche sia geomorfologiche che di funzionamento idraulico: falde *freatiche* e falde *artesiane*, una rappresentazione schematica delle quali è riportata in Figura 200.

Nelle falde freatiche le formazioni permeabili sono occupate dall'acqua soltanto nella parte inferiore, poggiante su uno strato impermeabile argilloso o roccioso, costituente il *letto* della falda. Nella sua parte superiore, l'acqua della falda è esposta alla pressione atmosferica su una superficie detta *superficie piezometrica* o *superficie freatica*. Alla quota locale della superficie piezometrica si disporrebbe il menisco dell'acqua contenuta in un piezometro infisso nel terreno. La medesima canna può essere utilizzata per l'estrazione (*emungimento*) di acqua mediante una pompa; si parla in tal caso di *pozzo freatico*. La superficie freatica è un piano orizzontale in una falda in quiete; è una superficie inclinata nel senso del moto in una falda in movimento. Al di sopra della superficie piezometrica si trova ancora una zona satura di liquido per effetto della risalita capillare, di estensione in altezza tanto maggiore quanto minore è la granulometria del terreno (*frangia capillare*), nella quale il liquido risulta in depressione¹⁷⁴. Superiormente alla frangia capillare si trova una zona insatura, nella quale l'acqua è trattenuta per adesione ai granuli (*adsorbimento*).

Nelle falde artesiane le formazioni permeabili sono limitate inferiormente e superiormente da formazioni impermeabili, dette rispettivamente il *letto* e il *tetto* della falda, e interamente imbibite di acqua in pressione. La superficie piezometrica di una falda artesiane è posta pertanto superiormente al tetto della falda; alla quota locale di tale superficie si porta, come nel caso della falda freatica, il livello del menisco in un piezometro infisso nel terreno inferiormente al tetto della falda. Un pozzo per l'emungimento da una falda artesiane è detto *pozzo artesiano*. Se la superficie piezometrica si trova al di sopra del livello del terreno, la captazione dell'acqua non necessita di impianti di pompaggio: se la canna del pozzo non venisse prolungata al di sopra del livello del terreno, l'acqua ne zampillerebbe, teoricamente, fino alla quota locale della superficie piezometrica.

15.2 Velocità di filtrazione

L'estrema irregolarità del moto di un liquido negli interstizi di un mezzo poroso ne determina la pratica impossibilità di rappresentazione dettagliata. D'altro canto, da un punto di vista pratico la conoscenza dettagliata del campo di moto non è utile, risultando di interesse la portata fluente attraverso sezioni di dimensioni grandi in confronto alle dimensioni dei granuli.

Per questo motivo, la rappresentazione matematica del flusso nei mezzi porosi si basa su una schematizzazione analoga a quella di mezzo continuo, illustrata nel §2.1: così come la velocità puntuale in un continuo fluido deve essere definita quale valore medio su un congruo insieme di molecole animate da moti caotici, costituenti il volume denominato "particella fluida", similmente un campo continuo di velocità rappresentativo del flusso nel mezzo poroso, definito però sul volume comprendente sia la massa liquida che la matrice solida (*velocità di filtrazione*), scaturisce, punto per punto, dalla media fra le velocità del liquido in moto negli interstizi fra i granuli di terreno e i valori nulli delle velocità nei punti della matrice solida, in un volume di dimensioni sufficientemente grandi

¹⁷⁴ Le cause di tale fenomeno sono state illustrate nel §3.13.

rispetto alla dimensione caratteristica del granulo, ma limitato rispetto alla scala del moto: ciò che consente di attribuire a tale valore medio il significato pratico di velocità puntuale.

Il campo delle velocità di filtrazione deve essere rappresentato nelle sue caratteristiche cinematiche e dinamiche, espresse rispettivamente da una equazione di continuità (conservazione della massa) e un'equazione del moto (bilancio della quantità di moto).

Si consideri un qualunque volume di controllo finito V_l contenente unicamente liquido, la cui superficie di contorno S_l sia costituita da parti a contatto con liquido esterno al volume e con le superfici dei granuli, costituenti rispettivamente le superfici non connesse S_p e S_s . Per tale volume di controllo vale l'equazione globale di continuità per un fluido a densità costante (136), esprimente l'annullamento del flusso volumetrico attraverso la superficie stessa:

$$\int_{S_l} \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0 .$$

L'integrale di superficie si può decomporre nella somma degli integrali estesi alle due superfici S_p e S_s , il secondo dei quali nullo per la condizione di aderenza del liquido alla parete dei granuli. Risulta pertanto nullo anche l'integrale esteso a S_p :

$$\int_{S_p} \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0 .$$

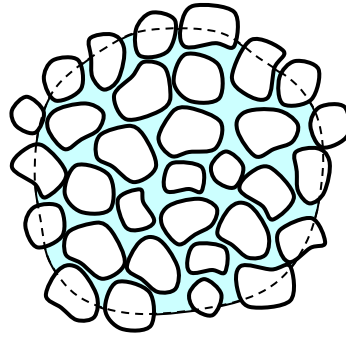


Figura 201. Volume di controllo per la definizione delle velocità di filtrazione.

Si consideri ora una qualunque superficie S_c comprendente integralmente la superficie S_p e completata con una superficie S_m , eventualmente comprendente anche porzioni ricadenti all'interno della matrice solida, indicate con contorno tratteggiato in Figura 201, sulle quali le velocità reali $\vec{u}$ sono nulle. Si può pertanto scrivere:

$$\int_{S_c} \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_p} \vec{u} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_m} \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_p} \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Poiché il campo delle velocità di filtrazione $\vec{v}$ si definisce anche nei punti dello spazio ricadenti all'interno della matrice solida, affinché risulti equivalente in termini di conservazione della massa al campo delle velocità reali esso deve soddisfare la medesima condizione di annullamento del flusso volumetrico sulla superficie S_c , sulla quale, in generale, possono aversi ovunque velocità di filtrazione non nulle:

$$\int_{S_c} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0 .$$

L'applicazione del Teorema di Gauss, con procedimento inverso a quello seguito nel §4.9.2 per dedurre l'equazione globale di continuità, conduce inoltre alla forma locale:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 .$$

In definitiva, le forme locale e globale dell'equazione di continuità risultano formalmente invariate rispetto a quelle utilizzabili per il moto reale.

L'equazione del moto può essere formulata euristicamente, sulla base di classiche risultanze sperimentali per flussi unidimensionali (esperienze di Darcy) e varie schematizzazioni atte alla estensione dei risultati sperimentali al caso tridimensionale, cui di norma deve essere fatto riferimento anche per le applicazioni pratiche, ancorché in forma schematica.

In Figura 202 è riportato lo schema dell'apparato sperimentale utilizzabile per riprodurre le esperienze di laboratorio di Darcy (1856). Un filtro costituito da un tubo di lunghezza L e area della sezione trasversale Ω , riempito di un mezzo permeabile (p.es. sabbia), è interposto fra due serbatoi i cui peli liberi sono soggetti a un dislivello Δh . Il mezzo poroso è percorso da un moto di filtrazione del quale si misura la portata Q , per esempio mediante uno stramazzo posto nel serbatoio di valle. Assumendo una velocità di filtrazione uniforme, questa è data in modulo da $v = Q/\Omega$. Si può altresì definire cadente piezometrica del moto di filtrazione uniforme in questione il rapporto fra il dislivello piezometrico Δh e la lunghezza del tubo L . La costanza della cadente piezometrica $-\partial h/\partial s$ lungo il filtro è verificabile mediante l'inserzione di piezometri lungo linea¹⁷⁵.

La velocità di filtrazione risulta proporzionale alla cadente piezometrica, secondo un coefficiente di proporzionalità f detto *permeabilità* del mezzo filtrante (Legge di Darcy)¹⁷⁶:

$$v = f \frac{\Delta h}{L} = -f \frac{\partial h}{\partial s} \quad (304)$$

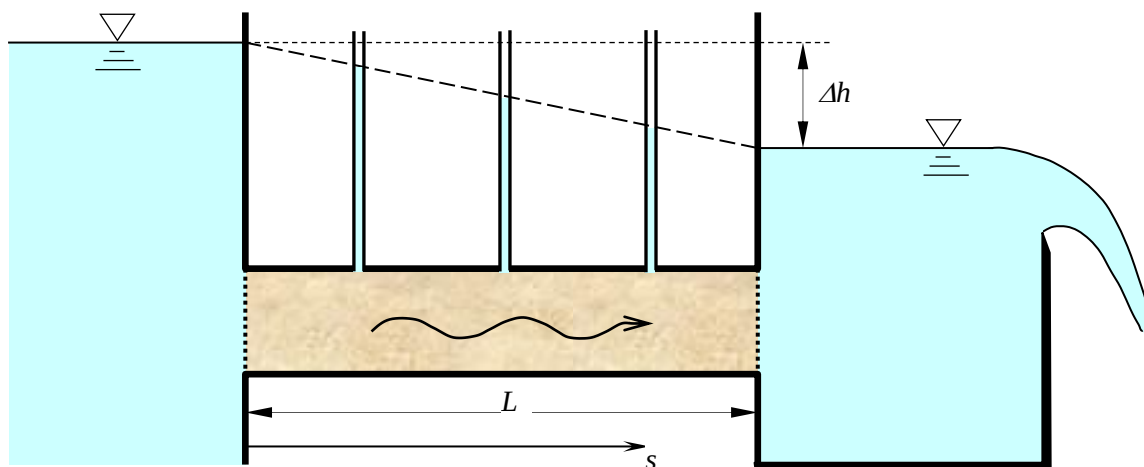


Figura 202. Schema dell'apparato sperimentale di Darcy.

Poiché la cadente piezometrica è un numero puro, la permeabilità ha le dimensioni di una velocità e può quindi anche essere identificata con la velocità di filtrazione corrispondente a una cadente unitaria. La permeabilità dipende dalle caratteristiche sia della matrice porosa che del liquido.

La formula di Darcy ha validità ristretta al caso di mezzi porosi ad alto valore di superficie specifica della matrice solida, nel qual caso, come già osservato, le velocità reali sono molto basse, di modo che il moto reale si svolge in regime laminare. Tale osservazione fornisce una prima giustificazione della formula di Darcy, che si osserva avere forma analoga alle formule scritte per il flusso laminare in un condotto, quale la formula di Hagen-Poiseuille o l'espressione (250):

¹⁷⁵ A tale scopo, a rigore, occorrerebbe definire anche la quota piezometrica quale valore medio sul medesimo volume considerato per definire la velocità di filtrazione. Non insistiamo su questo punto; una più completa trattazione del problema della definizione delle grandezze utili alla rappresentazione del campo delle velocità di filtrazione si può trovare nel Marchi-Rubatta, §9.12.

¹⁷⁶ La denominazione del parametro f , come di altri parametri ad esso legati, non è univoca in letteratura.

$$j = \frac{32\mu}{\gamma} \frac{U}{D^2}. \quad (250)$$

Dal confronto fra le due formule si dedurrebbe una espressione della permeabilità del tipo:

$$f = k \frac{g}{\nu} d^2,$$

in cui d è una dimensione lineare caratteristica della matrice solida (ad esempio, un diametro caratteristico della distribuzione granulometrica) e k una quantità adimensionale dipendente unicamente dalle caratteristiche del mezzo poroso, detta *coefficiente di permeabilità*. Il prodotto $K = kd^2$, anch'esso ovviamente dipendente soltanto dalle caratteristiche del mezzo poroso, prende il nome di *conduttività idraulica*.

Una prima estensione della legge di Darcy al caso di flusso tridimensionale, valida per un mezzo poroso isotropo, è data dalla seguente equazione vettoriale, della quale la (304) costituisce la proiezione lungo la direzione del moto:

$$\vec{v} = -f \nabla h. \quad (305)$$

A norma della (305) le velocità di filtrazione sono ortogonali alle superfici a carico piezometrico costante (*isopiezometriche*) e pari in modulo al prodotto della permeabilità per la derivata del carico piezometrico nella direzione del moto.

In generale, introdotto un tensore di permeabilità idraulica $\underline{\underline{F}}$, ovvero un tensore di conduttività idraulica $\underline{\underline{K}}$, il legame fra velocità di filtrazione e gradiente piezometrico si può scrivere:

$$\vec{v} = -\underline{\underline{F}} \nabla h = -\frac{g}{\nu} \underline{\underline{K}} \nabla h,$$

ovvero, nella notazione per componenti:

$$v_i = -F_{ij} (\nabla h)_j = -F_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} = -\frac{g}{\nu} K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j},$$

che denota un legame lineare e omogeneo fra le componenti della velocità di filtrazione e le componenti del gradiente piezometrico¹⁷⁷. Per effetto del consolidamento dei terreni, è abbastanza comune riscontrare caratteristiche di permeabilità differenti nelle direzioni orizzontali e verticale.

Se, oltre che isotropo, il tensore di permeabilità idraulica è anche uniforme nello spazio, si ha:

$$\vec{v} = \nabla(-fh),$$

col che il campo delle velocità di filtrazione è irrotazionale¹⁷⁸ e può essere pertanto descritto in termini di un potenziale $\phi = -fh$, con i metodi descritti nel capitolo 8. Le superfici equipotenziali coincidono allora con le superfici isopiezometriche.

Data la costanza della permeabilità, il carico piezometrico è armonico:

$$\nabla^2 h = 0 \quad (306)$$

e le condizioni al contorno dell'equazione di Laplace (306) possono essere stabilite con facilità nei casi più comuni: la derivata normale a superfici impermeabili deve risultare nulla, in quanto proporzionale alla componente della velocità normale alla superficie (condizione di Neumann), mentre alla frontiera dell'ammasso permeabile a contatto con una massa liquida si impone il valore

¹⁷⁷ Argomentazioni più articolate a supporto della (305), anch'esse peraltro di tipo euristico, che qui tralasciamo, vengono fornite nel Marchi Rubatta, §9.12 e nel Cenedese, §9.2.

¹⁷⁸ Altrettanto non può dirsi, evidentemente, per il moto reale in regime viscoso.

del carico piezometrico (condizione di Dirichlet). Nei problemi piani, il moto può essere rappresentato in termini di rete idrodinamica; il profilo di una superficie impermeabile costituisce una linea di corrente; il bordo dell'ammasso permeabile a contatto con liquido in quiete, o approssimativamente considerabile tale, costituisce una linea equipotenziale.

15.3 Emungimenti da falde artesiane

Nel presente paragrafo verranno esaminate alcune soluzioni analitiche di problemi a geometria semplice, sufficientemente rappresentativi di casi di pratica utilità, riguardanti l'emungimento da falde artesiane. Lo scopo dell'emungimento può essere il prelievo di acqua in sé, per l'utilizzazione in varie attività, oppure l'esecuzione di prove di campo finalizzate alla misura della permeabilità dei terreni. Va infatti osservato che mentre la possibilità di determinazione in laboratorio, seppure possibile, richiede una estrema cura nel prelievo del campione di terreno, che facilmente può perdere le caratteristiche possedute in situ, la determinazione sul campo consente di valutare globalmente le proprietà idrauliche dell'acquifero.

15.3.1 Trincea indefinita in falda di spessore costante

Si consideri una trincea di sviluppo indefinito, che intercetta una falda artesianiana di spessore costante s e lunghezza L in direzione ortogonale alla trincea (Figura 203). Mediante emungimento di una portata per unità di sviluppo della trincea q , l'acqua all'interno della trincea venga mantenuta a un livello (*livello dinamico*) inferiore a quello della superficie piezometrica della falda in quiete (*livello statico*), pari alla quota H del pelo libero di un bacino adiacente la falda, che la alimenta.

Nel mezzo poroso si stabilisce un moto di filtrazione uniforme in direzione orizzontale, le cui superfici isopiezometriche sono piani verticali ortogonali alla direzione del moto. Indicando con x un'ascissa avente direzione e verso del moto di filtrazione, la legge di Darcy si scrive:

$$v = \frac{q}{s} = -f \frac{dh}{dx}$$

che, integrata fra le sezioni estreme della falda con la condizione al contorno $h = H$ per $x = 0$, fornisce il seguente andamento rettilineo della traccia della superficie piezometrica:

$$h = H - \frac{q}{sf} x,$$

cui corrisponde un *abbassamento dinamico* Δ del livello in trincea rispetto al livello statico:

$$\Delta = H - h_0 = \frac{L}{sf} q$$

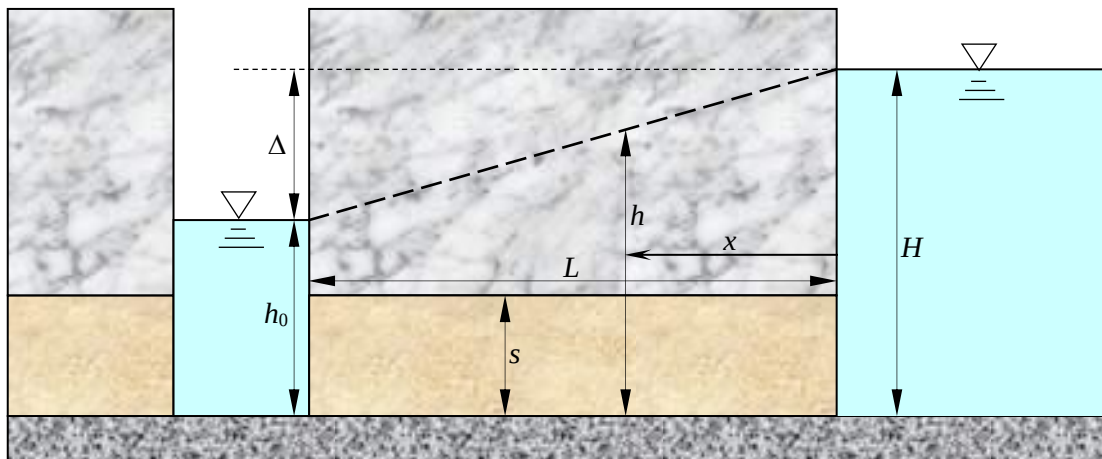


Figura 203. Trincea drenante indefinita in falda artesianiana di spessore costante.

La portata risulta quindi proporzionale allo spessore della falda e all'abbassamento dinamico nella trincea e inversamente proporzionale allo sviluppo della falda nel senso del moto. Come si vedrà nel prosieguo, la linearità della relazione fra portata e abbassamento dinamico è una caratteristica comune alle falde artesiane.

15.3.2 Trincea indefinita in falda artesiania seminfinita

Nel caso la trincea indefinita raggiunga una falda di spessore molto grande (teoricamente infinito), il moto è ancora piano ma radiale, e le superfici isopiezometriche sono semicilindri circolari aventi per asse l'asse longitudinale della sezione di base della trincea (vedi Figura 204). La legge di Darcy si scrive quindi, con riferimento alla portata per unità di sviluppo della trincea q :

$$v = \frac{q}{\pi} = f \frac{dh}{dr},$$

da cui l'equazione a variabili separabili:

$$\frac{q}{f\pi} \frac{dr}{r} = dh,$$

che, integrata con la condizione $h = h_0$ per $r = D/2$, dove D è la larghezza della trincea, fornisce l'equazione della superficie piezometrica delle traiettorie che lambiscono il tetto della falda:

$$\frac{q}{f\pi} \ln\left(\frac{2r}{D}\right) = h - h_0,$$

da cui la relazione lineare fra portata specifica e abbassamento dinamico:

$$q = \frac{f\pi}{\ln(2r) - \ln(D)} \Delta.$$

Si osserva come la portata non dipenda in misura rilevante dalla larghezza della trincea, giacché essa compare quale argomento di un logaritmo.

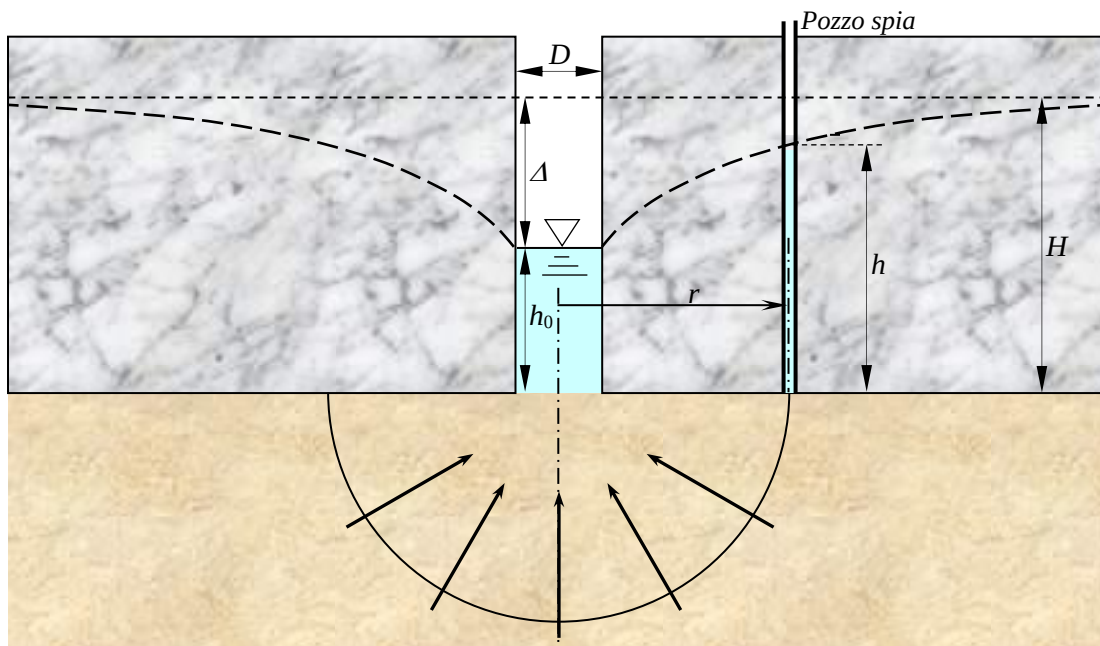


Figura 204. Trincea drenante in falda artesiania seminfinita.

Si noti che $h \rightarrow \infty$ per $r \rightarrow \infty$. A rigore, occorrerebbe pertanto ammettere che a una distanza R dall'asse della trincea la quota piezometrica assuma un valore H costante su entrambi i lati: circostanza difficilmente riscontrabile in pratica. In via approssimata, è possibile assumere la validità dell'espressione della portata in funzione dell'abbassamento dinamico riferito al livello in un *pozzo spia* posto a una distanza r sufficientemente grande dal pozzo principale:

15.3.3 Pozzo artesiano in falda di spessore costante

Nel caso di un pozzo trivellato fino al letto di una falda artesiana di spessore costante s , rappresentato in Figura 205, il moto è ancora piano e radiale come per la trincea in falda indefinita, ma si svolge ora nel piano orizzontale con simmetria assiale; le superfici isopiezometriche sono cilindri ad asse verticale coincidente con l'asse del pozzo. La legge di Darcy si scrive quindi:

$$v = \frac{Q}{2\pi r s} = f \frac{dh}{dr},$$

in cui r è la coordinata radiale, crescente in direzione opposta a quella del moto. Separando le variabili si ottiene:

$$\frac{Q}{2\pi f s} \frac{dr}{r} = dh.$$

Integrando con la condizione $h = h_0$ per $r = D/2$, dove D è il diametro della canna del pozzo, si ha l'espressione analitica del conoide costituente la superficie piezometrica:

$$\frac{Q}{2\pi f s} \ln\left(\frac{r}{D/2}\right) = h - h_0.$$

Anche in questo caso, $h \rightarrow \infty$ per $r \rightarrow \infty$. Occorrerebbe pertanto ammettere che a una distanza R dall'asse del pozzo la quota piezometrica assuma un valore H costante (simmetria assiale). Come per il caso della trincea su falda di profondità indefinita, in via approssimata è possibile assumere la validità dell'espressione della portata in funzione dell'abbassamento dinamico riferito al livello in un pozzo spia posto a una distanza r sufficientemente grande dal pozzo principale:

$$Q = \frac{2\pi f s}{\ln(2r) - \ln(D)} \Delta. \quad (307)$$

Anche in questo caso, la portata non dipende in misura rilevante dal diametro del pozzo.

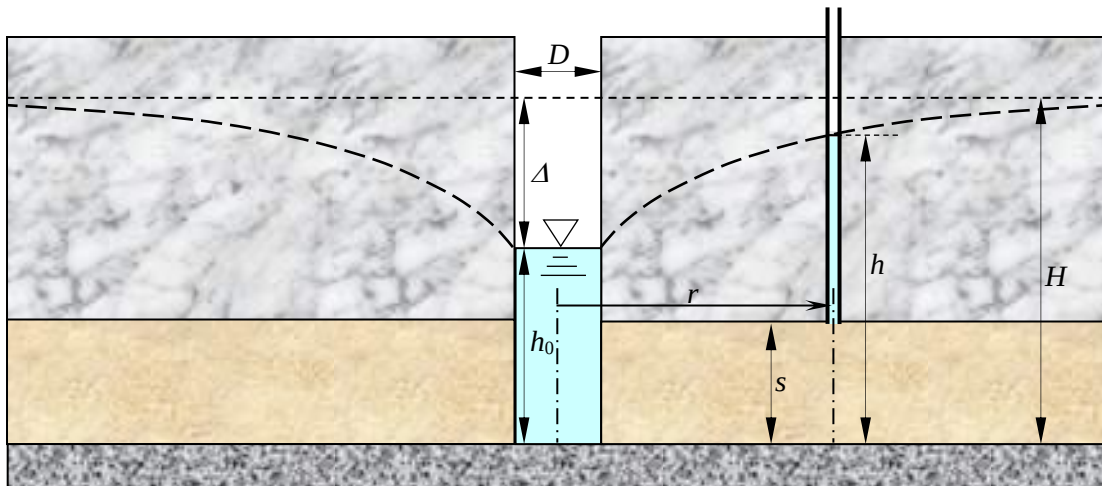


Figura 205. Pozzo artesiano in falda di spessore costante.

Mediante tale relazione fra portata e abbassamento dinamico, lineare come sempre nei pozzi artesiani, è possibile effettuare una misura indiretta della portata Q , sulla base della misura dell'abbassamento dinamico Δ , nota che sia la permeabilità f dello strato, ovvero una misura indiretta della permeabilità (media) sulla base della misura di Q e Δ .

15.3.4 Pozzo artesiano in falda seminfinita

Nel caso di un pozzo artesiano che raggiunga una formazione permeabile di sviluppo molto grande (teoricamente infinito) in profondità (vedi Figura 206), il moto è radiale con simmetria sferica e le superfici isopiezometriche sono superfici semisferiche con centro nel centro della sezione circolare di base della canna del pozzo, sempre di diametro D . Al contrario dei casi precedenti, il moto non è piano. La legge di Darcy si scrive:

$$Q = 2\pi r^2 f \frac{dh}{dr}.$$

Separando le variabili si ha:

$$\frac{Q}{2\pi f} \frac{dr}{r^2} = dh.$$

Integrando con la condizione $h = h_0$ per $r = D/2$ si ottiene l'equazione della superficie piezometrica delle traiettorie che lambiscono il tetto della falda:

$$\frac{Q}{2\pi f} \left(\frac{2}{D} - \frac{1}{r} \right) = h - h_0.$$

dalla quale si deduce che il livello statico H viene raggiunto a una distanza infinita dall'asse del pozzo. Si ottiene quindi anche il legame fra portata e abbassamento dinamico:

$$Q = \pi f D \Delta.$$

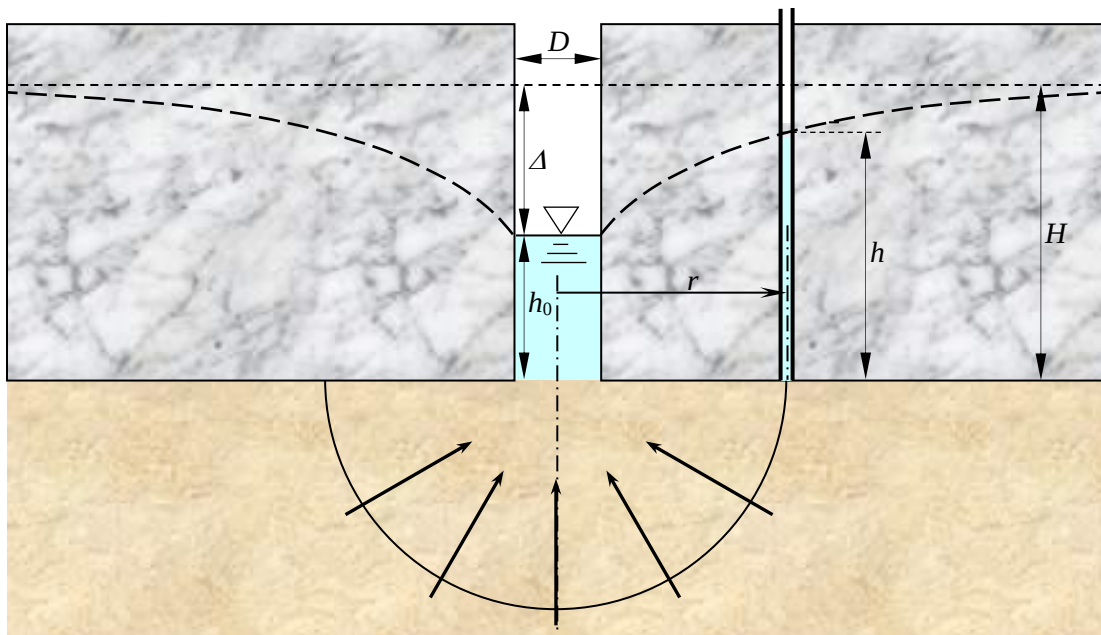


Figura 206. Pozzo artesiano in falda seminfinita.

15.3.5 Pozzo artesiano in falda di spessore costante in movimento

L'emungimento mediante un pozzo artesiano da una falda di spessore costante, sede di un moto di filtrazione uniforme in assenza del pozzo, determina ancora un moto di filtrazione irrotazionale piano, che si ottiene dalla sovrapposizione del flusso uniforme con il moto radiale determinato dall'emungimento (vedi Figura 207). Si tratta di un problema analogo a quello del semicorpo trattato nel §8.5.6, nel quale in luogo del pozzo era presente una sorgente. Similmente, nel caso del pozzo artesiano le parti curvilinee della linea di corrente $\psi = \pm Q/2$ delimitano l'area tributaria del pozzo (a destra in Figura 207, priva delle linee equipotenziali), di estensione indefinita e idraulicamente separata dal resto del piano.

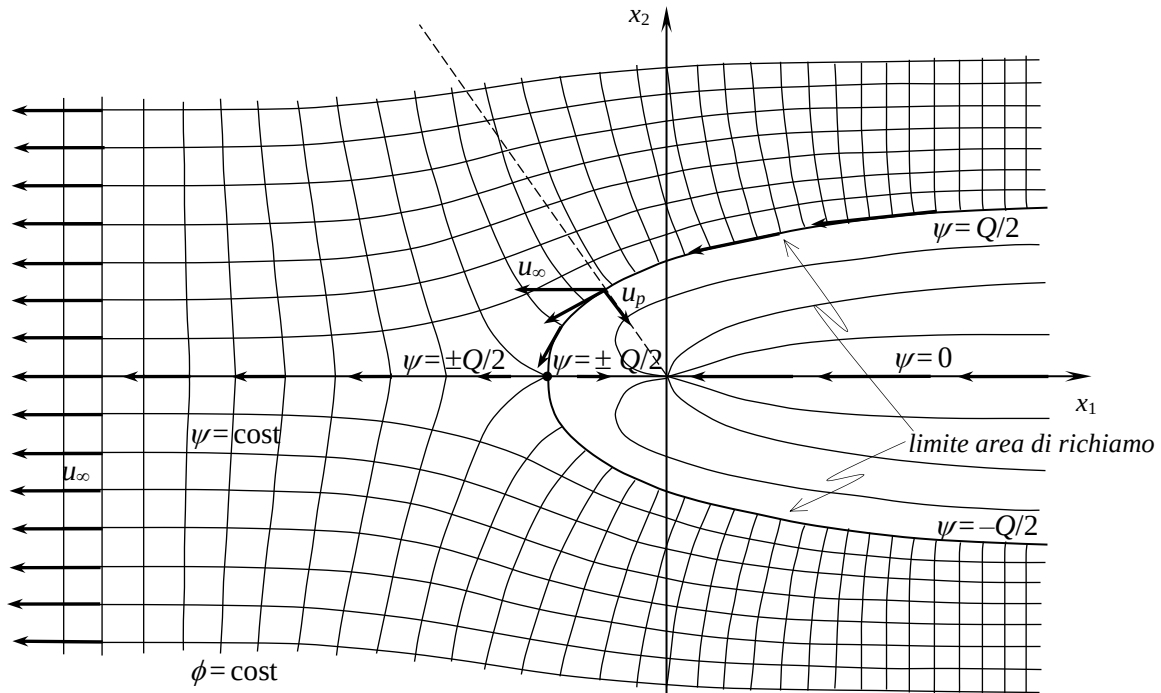


Figura 207. Rete idrodinamica del moto di filtrazione indotto da un pozzo artesiano in una falda sede di moto uniforme.

15.4 Emungimenti da falde freatiche

Nelle falde freatiche, tutta la parte del mezzo permeabile sottostante la superficie piezometrica è interessata dal moto di filtrazione e la sezione del flusso dipende pertanto dalla soluzione stessa. Poiché la superficie piezometrica è inclinata nella direzione del moto, anche nel caso di falda su letto orizzontale le traiettorie non possono essere orizzontali se non a contatto con il letto. Conseguentemente, le superfici isopiezometriche presentano curvatura nel piano verticale e non è possibile, a rigore, attribuire loro forme semplici come nei casi esaminati di falde artesiane. Inoltre, il livello che si stabilisce in un pozzo o in una trincea risulta sensibilmente inferiore a quello della falda sulla parete verticale dello strato permeabile; nel tratto di parete compreso fra i due livelli il liquido sbocca dalla falda in atmosfera e cola lungo la parete (*superficie di trapelazione*).

Allo scopo di rendere i problemi trattabili analiticamente, si introduce l'ipotesi di Dupuit-Forchheimer: le traiettorie sono approssimativamente orizzontali e le superfici isopiezometriche risultano quindi, in generale, cilindri a generatrice verticale. Inoltre, non si considera la presenza della superficie di trapelazione, assumendo che il livello della falda sulla parete del pozzo o della trincea sia uguale al livello del liquido all'interno dello scavo.

In generale, il transitorio che conduce alla condizione stazionaria è assai più lento rispetto al caso delle falde artesiane, in quanto nelle falde freatiche, partendo da condizioni statiche, occorre svuotare materialmente volumi maggiori.

15.4.1 Trincea indefinita in falda freatica

Si consideri una trincea di sviluppo in asse indefinito, scavata fino al letto orizzontale di una formazione permeabile di lunghezza L in direzione ortogonale all'asse, oltre la quale vi è un bacino di profondità H costante (vedi Figura 208).

Indicando con x un'ascissa avente direzione e verso del moto di filtrazione, con q la portata per unità di sviluppo in asse della trincea e assunto, sulla base dell'ipotesi di Dupuit-Forchheimer, che le superfici isopiezometriche siano piani verticali di altezza pari al livello locale della superficie piezometrica, la legge di Darcy si scrive:

$$v = \frac{q}{h} = -f \frac{dh}{dx},$$

dalla quale, separando le variabili, si ottiene:

$$h \, dh = -\frac{q}{f} \, dx,$$

che, integrata fra le sezioni estreme della falda con la condizione al contorno $h = H$ per $x = 0$, fornisce il seguente andamento parabolico della traccia della superficie piezometrica:

$$\frac{1}{2}(h^2 - H^2) = -\frac{q}{f}x,$$

dal quale si ottiene l'espressione della portata in funzione dell'abbassamento dinamico Δ del livello in trincea rispetto al livello statico:

$$q = \frac{f}{2L} (H - h_0)(H + h_0) = \frac{f}{2L} \Delta (2H - \Delta).$$

Contrariamente al caso delle falde artesiane, in una falda freatica la relazione non è lineare.

L'ipotesi di Dupuit-Forchheimer risulta tanto meno veritiera quanto minore è la distanza dal pozzo, in prossimità del quale la piezometrica accentua la propria inclinazione. Inoltre, l'ipotesi non tiene conto della superficie di trapelazione. Tuttavia, l'esperienza mostra che il legame ottenuto fra portata e abbassamento dinamico è valido se quest'ultimo è valutato, come in Figura 208, con riferimento al livello nella trincea, h_t , piuttosto che sulla parete interna della stessa, h_0 ; ponendo cioè $\Delta = H - h_t$. Tale conclusione è di validità generale per gli attingimenti da falde freatiche.

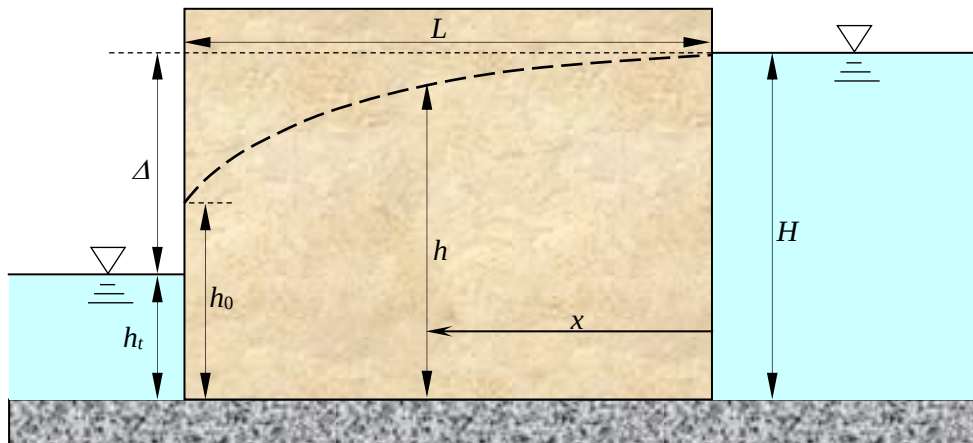


Figura 208. Trincea drenante indefinita in falda freatica su letto orizzontale.

15.4.2 Pozzo in falda freatica indefinita su letto impermeabile

Nel caso di un pozzo trivellato in una falda freatica indefinita e poggiante su un letto orizzontale, le superfici isopiezometriche sono cilindri ad asse verticale, coassiali al pozzo, supposto di sezione circolare di diametro D . La legge di Darcy fornisce pertanto:

$$v = \frac{Q}{2\pi rh} = f \frac{dh}{dr},$$

con r coordinata radiale, crescente nel verso opposto al moto di filtrazione. Separando le variabili si ha.

$$\frac{Q}{2\pi f} \frac{dr}{r} = h dh.$$

Integrando con la condizione $h = h_0$ per $r = D/2$, si ottiene la forma della superficie piezometrica:

$$\frac{Q}{\pi f} \ln \frac{2r}{D} = h^2 - h_0^2.$$

Come già per i casi di trincea e pozzo artesiano in falda di spessore costante (§§15.3.1-15.3.3), $h \rightarrow \infty$ per $r \rightarrow \infty$. Anche in questo caso, occorrerebbe ammettere che a una distanza R dall'asse del pozzo la quota piezometrica assuma un valore H costante (simmetria assiale), mentre in via approssimata è possibile assumere la validità dell'espressione della portata in funzione dell'abbassamento dinamico riferito al livello in un pozzo spia posto a una distanza r sufficientemente grande dal pozzo principale:

$$Q = \frac{\pi f}{\ln(2r) - \ln(D)} \Delta(2h - \Delta).$$

Come osservato in precedenza, l'espressione della portata bene si accorda con le osservazioni se l'abbassamento dinamico è riferito al livello dell'acqua nel pozzo: $\Delta = H - h_p$.

15.4.3 Condizioni al contorno: metodo delle immagini

Situazioni più articolate quanto a condizioni al contorno possono essere trattate sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti, la cui applicabilità discende dalla natura irrotazionale del moto di filtrazione nei mezzi a permeabilità costante.

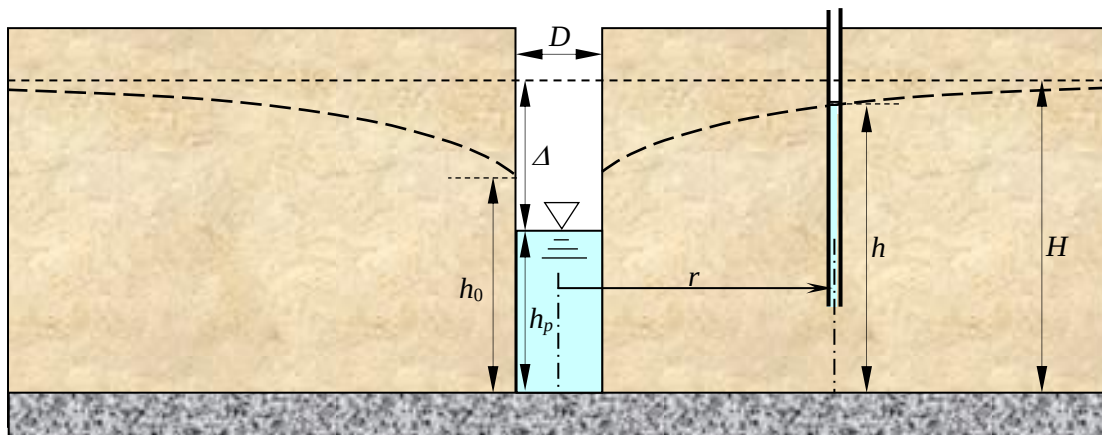


Figura 209. Pozzo in falda freatica indefinita su letto orizzontale.

Ad esempio, nel caso dell'attingimento da un pozzo posto in prossimità di un corso d'acqua ad asse rettilineo, la condizione al contorno da imporre consiste in un valore della quota piezometrica pari al livello del pelo libero del corso d'acqua lungo la riva più vicina al pozzo. Una soluzione del problema di moto irrotazionale rispettosa di tale condizione si ottiene considerando, oltre alla soluzione per il pozzo che attinge da una falda indefinita fittizia di spessore uguale a quello della falda reale, anche una sorgente fittizia disposta simmetricamente al pozzo rispetto alla linea di riva menzionata, attraverso la quale si immetta, nella stessa falda indefinita, una portata identica a quella attinta dal pozzo (Figura 210). La soluzione di tale problema fittizio consiste in un conoide speculare al conoide di depressione indotto dal pozzo rispetto al piano orizzontale del pelo libero del corso d'acqua. Per la simmetria delle posizioni degli assi di pozzo e sorgente rispetto alla riva lato pozzo, su tutti i punti di tale linea le quote piezometriche per le due soluzioni sono uguali in valore assoluto e di segno opposto. La somma delle soluzioni, che rappresenta essa stessa un moto irrotazionale, fornisce quindi un valore di quota piezometrica pari al livello del pelo libero del corso d'acqua sui punti della riva lato pozzo, ed è pertanto la soluzione cercata (linea in tratto continuo in Figura 210). Il piano verticale contenente la riva è una superficie equipotenziale e le velocità di filtrazione sono a essa ortogonali, come esemplificato in Figura 210 per il punto P.

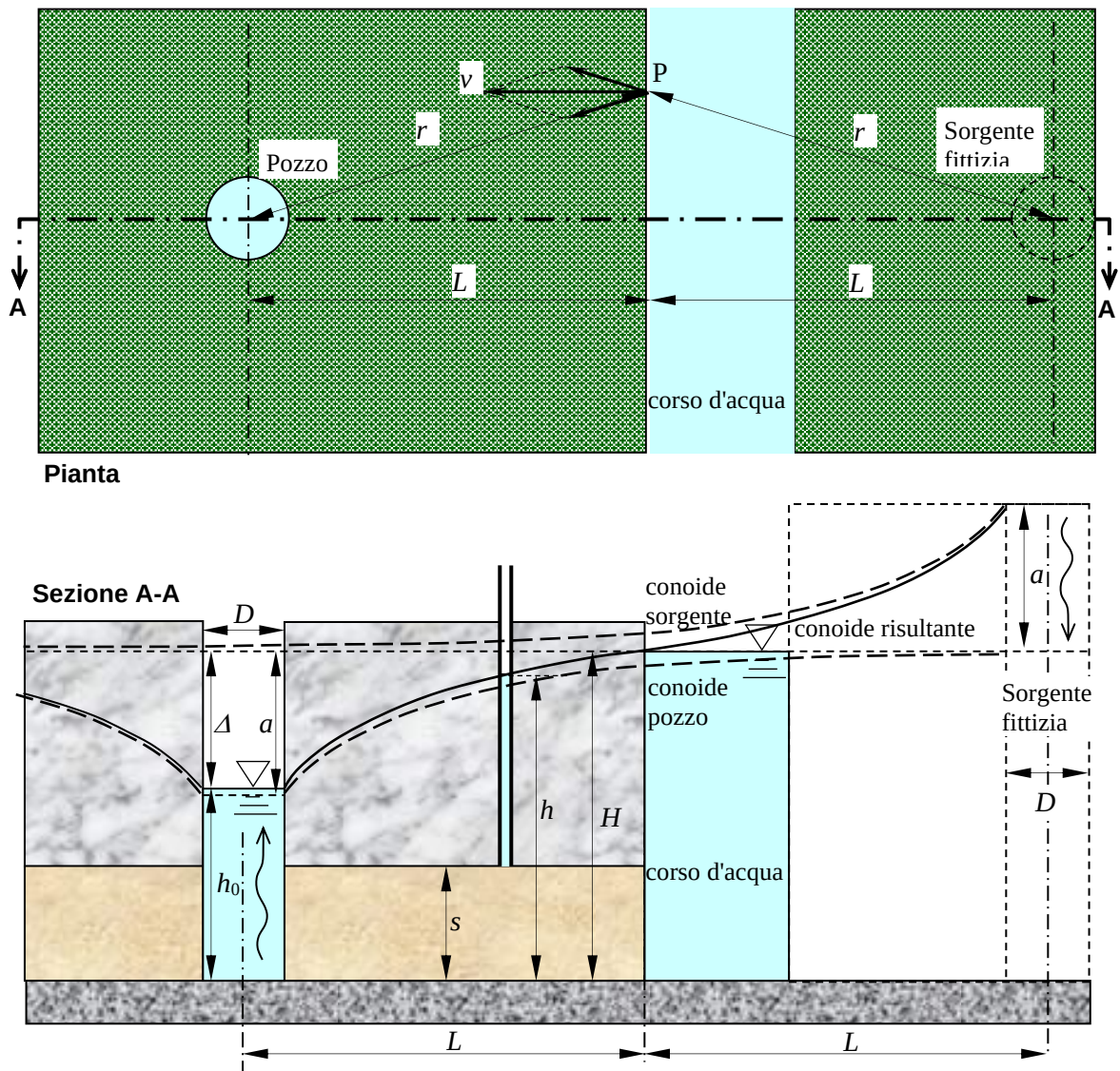


Figura 210. Schema di applicazione del metodo delle immagini al caso di un pozzo artesiano in falda confinante con un corso d'acqua.

La formulazione descritta del metodo di sovrapposizione degli effetti mediante il ricorso a soluzioni fittizie prende il nome di *metodo delle immagini*.

In modo analogo si risolve il caso dell'emungimento da una falda artesianica limitata da una formazione verticale impermeabile (Figura 211). In tal caso la condizione da imporre è l'annullamento della componente della velocità nella direzione normale alla parete. Poiché detta componente normale u_n è pari alla derivata del potenziale di velocità nella stessa direzione normale (cfr. §8.3) e il potenziale è proporzionale alla quota piezometrica, ciò comporta che le sezioni della superficie piezometrica ortogonali alla parete possiedano tangente orizzontale, ossia:

$$\frac{\partial h}{\partial n} = 0.$$

La soluzione rispettosa di tale condizione si ottiene sovrapponendo al moto di filtrazione indotto dal pozzo reale il moto indotto da un pozzo fittizio, disposto simmetricamente al primo rispetto alla parete impermeabile. In tal modo i conoidi indotti dai due pozzi, entrambe di depressione, in corrispondenza della parete possiedono pendenze opposte nella direzione normale alla parete stessa, e il conoide risultante dalla sovrapposizione dei due ha quindi pendenza normale nulla.

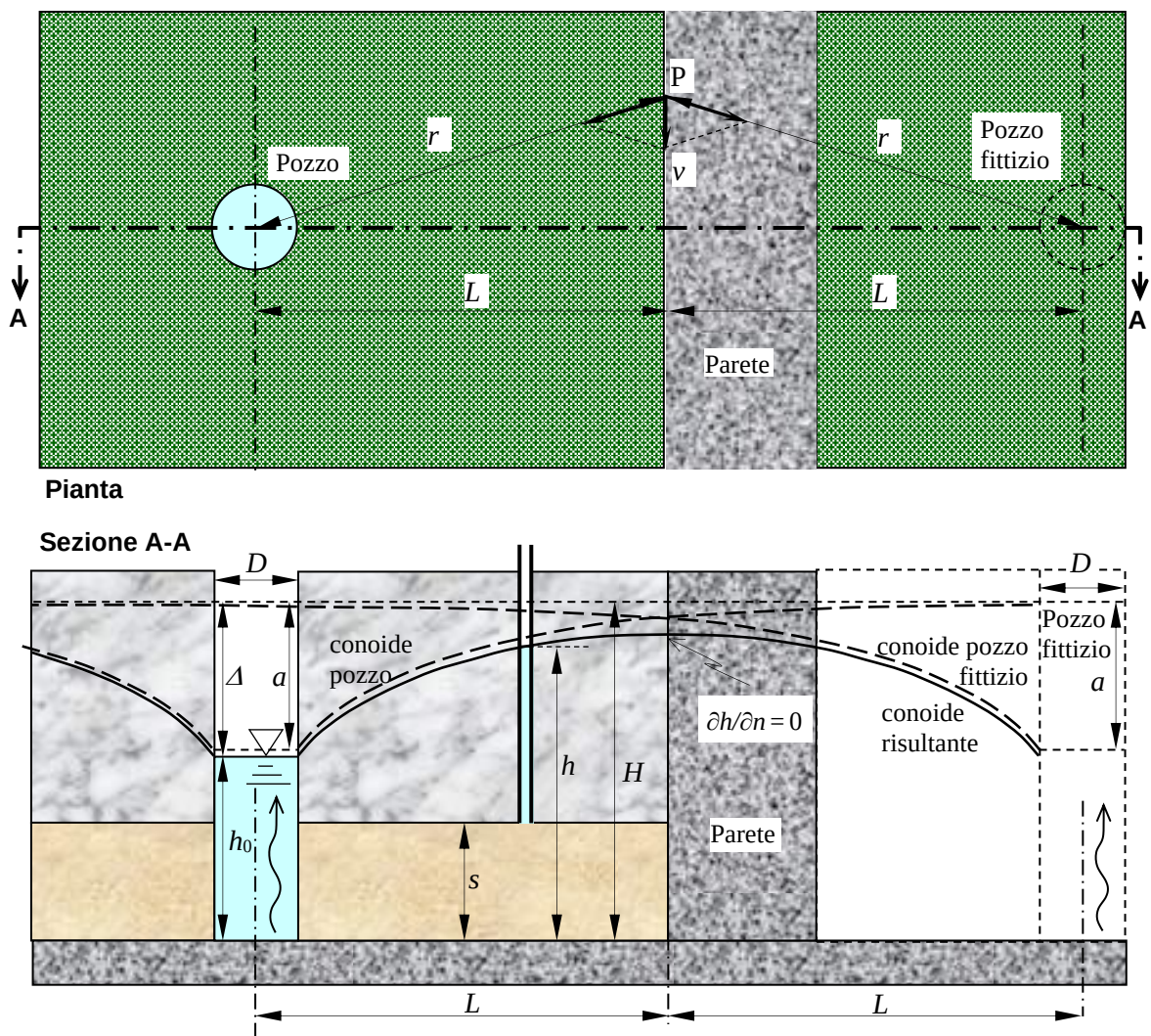


Figura 211. Schema di applicazione del metodo delle immagini al caso di un pozzo artesianico in falda limitata da una parete verticale impermeabile.

Il medesimo risultato si verifica in termini di direzione del vettore velocità parallelo alla parete in corrispondenza della stessa.

Infine, nel caso di un pozzo in una falda artesianica delimitata da un corso d'acqua e da una parete impermeabile fra loro ortogonali, la soluzione si ottiene inserendo, oltre alla sorgente e al pozzo fittizi richiesti dalla presenza del solo corso d'acqua o della sola parete, un ulteriore sorgente fittizia secondo lo schema di Figura 212, che neutralizza lo sbilanciamento delle condizioni al contorno indotto da ciascuno dei due primi elementi fittizi sull'altro. In tal modo le velocità sono sempre tangenti la parete impermeabile e normali alla riva del corso d'acqua. Il ruolo della sorgente fittizia aggiuntiva è illustrato in Figura 212 con riferimento all'intersezione della parete con la riva del corso d'acqua verso il pozzo reale.

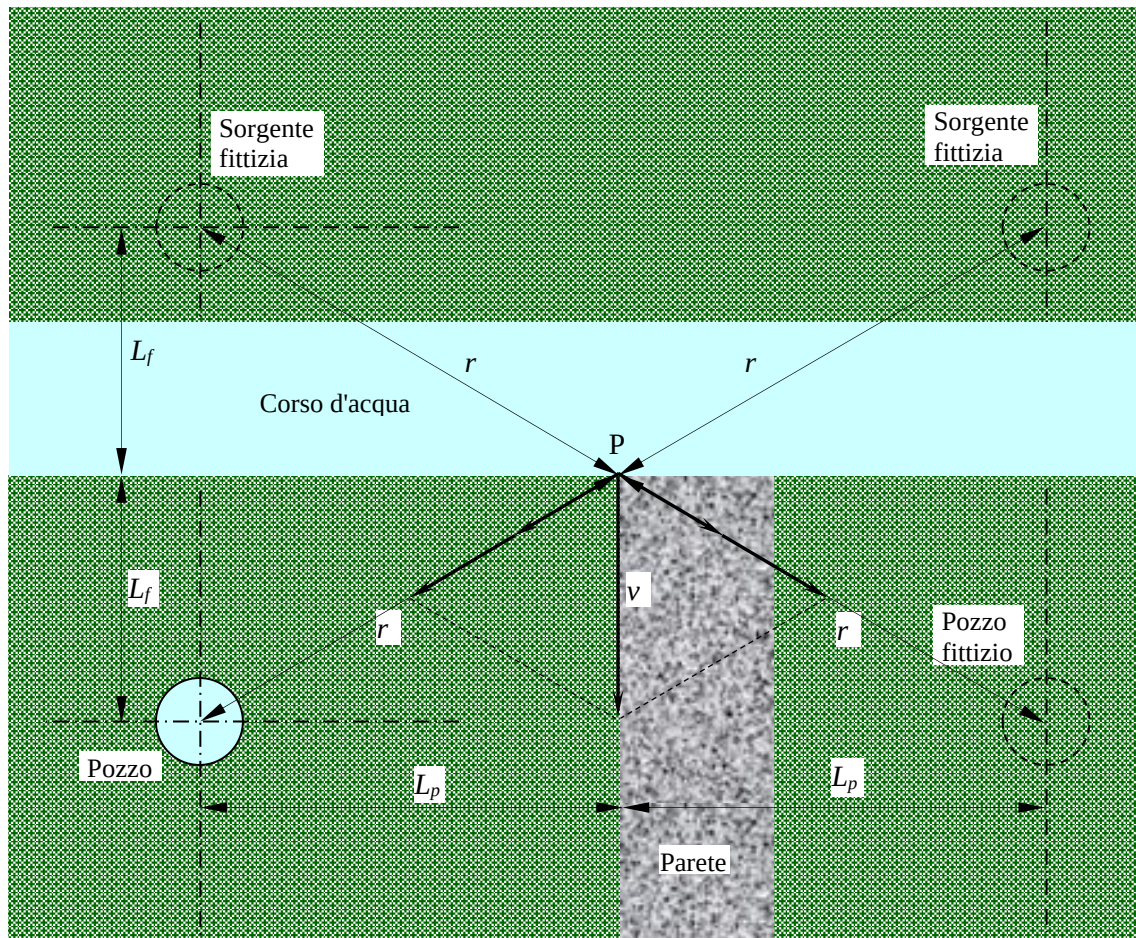


Figura 212. Schema di applicazione del metodo delle immagini al caso di un pozzo artesianico in falda delimitata da una parete impermeabile e da un corso d'acqua fra loro ortogonali (veduta in pianta).