

Corso di Idraulica per allievi Ingegneri Civili e Ambientali

Esercitazione n° 2

Esercizio n° 1

La paratoia a settore ADC in Figura 1a sbarra un canale di sezione trasversale rettangolare, contenente acqua limpida in quiete. Sono assegnati il raggio R dell'arco di cerchio costituente la sezione retta della paratoia, la larghezza b della paratoia, la profondità h_m dell'acqua a monte di essa e l'angolo α che la congiungente il punto A al centro O del profilo circolare della paratoia forma con l'orizzontale.

Determinare la spinta \vec{S} che viene esercitata sulla paratoia, trascurando nei calcoli lo spessore della parete di tenuta. Verificare che la retta d'azione della spinta esercitata dal solo liquido a valle della paratoia passi per il centro O del profilo circolare della paratoia.

Dati:

- $R = 7,00 \text{ m}$;
- $h_m = 7,00 \text{ m}$;
- $\alpha = 45^\circ$;
- $b = 7,00 \text{ m}$;
- $\gamma = 9806 \text{ Nm}^{-3}$

Esercizio n° 2

Il serbatoio cilindrico C in Figura 1b è pieno di acqua in quiete. Assegnate tutte le dimensioni geometriche e l'indicazione Δ del manometro a mercurio, determinare:

- 1) le spinte assoluta \vec{S}^* e relativa \vec{S} sul fondello sferico MN;
- 2) la spinta $\vec{\pi}_v$ che tiene nella propria sede la valvola conica.

Dati:

- $\gamma = 9806 \text{ Nm}^{-3}$;
- $\Delta = 0,40 \text{ m}$;
- $z_M = 2,00 \text{ m}$;
- $\gamma_m = 132970 \text{ Nm}^{-3}$
- $\alpha_{MN} = 90^\circ$;
- $a = 0,60 \text{ m}$;
- $D = 6,50 \text{ m}$;
- $\alpha_{BCD} = 60^\circ$.
- $b = 0,50 \text{ m}$;

Schema di soluzione Esercizio n° 1

La profondità h_v a valle della paratoia è data da:

$$h_v = R \sin \alpha \quad 1)$$

La spinta \vec{S} sulla paratoia si determina come somma vettoriale delle spinte \vec{S}' e \vec{S}'' , subite dalle facce della paratoia rivolte rispettivamente verso monte e verso valle. Ciascuna di queste spinte si calcola mediante i suoi componenti orizzontale e verticale.

Il componente \vec{S}'_o di \vec{S}' equivale alla spinta sulla proiezione CD' della superficie bagnata CDA sopra un piano verticale parallelo all'asse del settore. Esso si determina in modulo e retta d'azione per mezzo del diagramma delle pressioni CD'F ed è applicato nel baricentro di tale diagramma. Il componente verticale \vec{S}'_v è uguale ed opposto al peso del volume di sezione ADCB pensato tutto occupato da acqua ed è applicato nel baricentro di tale volume. Analogamente, il diagramma delle pressioni B'AE individua il componente orizzontale \vec{S}''_o di \vec{S}'' , il cui componente verticale \vec{S}''_v è

uguale al peso del volume liquido di sezione ADB'.

I moduli dei componenti orizzontali \vec{S}'_o ed \vec{S}''_o sono dati da:

$$S'_o = \frac{1}{2} \gamma h_m^2 b \quad (2)$$

$$S''_o = \frac{1}{2} \gamma h_v^2 b \quad (3)$$

I moduli dei componenti verticali \vec{S}'_v ed \vec{S}''_v sono dati rispettivamente da γV_{ADCB} e $\gamma V_{ADB'}$, in cui V_{ADCB} e $V_{ADB'}$ sono i corrispondenti volumi liquidi prismatici di sezioni ADCB e ADB', entrambi da determinare come unione o sottrazione di volumi prismatici elementari. In particolare, la figura ADB' si ottiene sottraendo al settore circolare OAD il triangolo OAB', mentre la figura ADCB si ottiene componendo la figura ADB' con il rettangolo CBB'D. I volumi V_{ADCB} e $V_{ADB'}$ si ottengono infine moltiplicando le sezioni composite così determinate per la larghezza b della paratoia.

I baricentri dei solidi di spinta di sezioni CD'F e B'AE e dei volumi di sezione ADCB ed ADB' giacciono sul piano verticale di simmetria della paratoia a settore. Nel caso di CD'F e B'AE, aventi entrambi forma di triangolo rettangolo, il baricentro si trova ad una distanza da uno dei cateti pari ad un terzo della lunghezza dell'altro cateto. Nel caso delle figure ADCB e ADB' le coordinate dei baricentri rispetto ad un qualunque sistema di riferimento contenuto nel piano di simmetria della paratoia si ottengono come medie pesate delle coordinate dei baricentri delle figure elementari che, per unione o sottrazione, forniscono tali figure, con pesi dati dalle aree delle figure elementari, positivi o negativi a seconda che la figura elementare debba essere rispettivamente aggiunta o sottratta per ottenere la figura composta finale.

Stabilito quindi un sistema di riferimento conveniente (per esempio, avente origine in O ed assi orizzontale, rivolto da destra verso sinistra, e verticale, rivolto verso l'alto), dette x_{GS} e x_{GT} le generiche coordinate dei baricentri del settore circolare e del triangolo, A_S ed A_T le aree corrispondenti, la corrispondente coordinata x'_G del baricentro della figura ADB' si ottiene dalla media pesata:

$$x'_G = \frac{x_{GS}A_S - x_{GT}A_T}{A_S - A_T} \quad (4)$$

Detta x_{GR} la generica coordinata del baricentro del rettangolo CBB'D di area A_R , la coordinata x''_G del baricentro della figura ADCB si ottiene dalla:

$$x''_G = \frac{x'_G A' + x_{GR} A_R}{A' + A_R} \quad (5)$$

dove $A' = A_S - A_T$ è l'area della figura ADB'. In modo del tutto analogo si procede per la coordinata verticale dei baricentri.

Una volta determinati i punti di applicazione dei quattro componenti \vec{S}'_o , \vec{S}''_o , \vec{S}'_v , \vec{S}''_v , si possono determinare le due spinte \vec{S}' e \vec{S}'' , la risultante $\vec{S} = \vec{S}' + \vec{S}''$ e le posizioni delle rette d'azione delle tre forze. Le due spinte parziali e la risultante si determinano dalla composizione vettoriale riportata in Figura 1a. Le posizioni delle rette d'azione si determinano utilizzando la proprietà di equivalenza di due sistemi di forze, uno dei quali sia ottenuto dall'altro mediante operazioni di scorrimento delle forze e composizione (somma) nel punto di intersezione delle corrispondenti rette d'azione. L'equivalenza discende dal fatto che tali operazioni non alterano né il risultante né il momento risultante del sistema di forze originario.

Deve verificarsi il passaggio della retta d'azione di \vec{S}'' per il centro O della sezione ad arco di

cerchio della paratoia. Tale condizione è infatti imposta dall'essere \vec{S}'' la risultante di forze elementari di pressione le cui rette d'azione, in quanto perpendicolari ad una superficie cilindrica avente per sezione un arco di cerchio, passano tutte per il centro dell'arco. Essendo perciò nullo il momento risultante di tale sistema di forze rispetto a tale punto, nullo deve risultare anche il momento della spinta \vec{S}'' , equivalente al sistema di forze di pressione, rispetto allo stesso punto. La retta d'azione di \vec{S}'' deve quindi necessariamente passare per il punto O.

Schema di soluzione Esercizio n° 2

1) Si definisce piano dei carichi idrostatici relativi di un liquido il piano orizzontale sul quale il liquido raggiunge (o raggiungerebbe se vi arrivasse) la pressione atmosferica p_a^* , ossia, la pressione relativa nulla. Si definisce, invece, piano dei carichi idrostatici assoluti di un liquido il piano orizzontale sul quale il liquido raggiunge (o raggiungerebbe se vi arrivasse) la pressione assoluta nulla, ossia, la pressione relativa $-p_a^*$. Pertanto, il piano dei carichi idrostatici assoluti sovrasta quello relativo dell'altezza p_a^*/γ , dove γ è il peso specifico del liquido. Nel caso dell'acqua ($\gamma=9806 \text{ Nm}^{-3}$), assumendo per la pressione atmosferica il valore normale $p_a^*=101325 \text{ Nm}^{-2}$, tale altezza vale $10,33 \text{ m}$.

Imponendo l'uguaglianza delle espressioni della pressione relativa agente sul menisco interno del manometro, ottenibili con riferimento al menisco esterno ed al piano dei carichi idrostatici relativi dell'acqua, si ottiene l'affondamento δ del piano dei carichi idrostatici relativi dell'acqua rispetto al menisco interno:

$$\delta = \frac{\gamma_m}{\gamma} \Delta \quad (6)$$

in cui Δ è l'indicazione del manometro a mercurio. Il piano dei carichi idrostatici assoluti sovrasta quello relativo di $10,33 \text{ m}$.

Le spinte \vec{S} e \vec{S}^* si trovano applicando al volume liquido contenuto fra la calotta e la superficie piana verticale circolare avente traccia MN nella sezione longitudinale rappresentata in Figura 1b (segmento sferico), l'equazione globale dell'idrostatica:

$$\vec{G} + \vec{I} = 0 \quad (7)$$

in cui \vec{G} è il peso del volume liquido e \vec{I} il risultante delle forze di superficie (relative ed assolute rispettivamente) esercitate *sul volume* attraverso la sua superficie di contorno.

Con riferimento alla determinazione della spinta relativa \vec{S} , si osserva che il risultante delle forze di superficie \vec{I} può riguardarsi come somma delle forze di superficie (spinte) esercitate *dall'esterno sul volume di controllo* attraverso la superficie a forma di calotta sferica, \vec{I}_0 , ed attraverso la superficie piana, \vec{S}_o :

$$\vec{G} + \vec{I}_0 + \vec{S}_o = 0 \quad (8)$$

In particolare, \vec{I}_0 viene esercitata sul volume di controllo dal fondello metallico. Pertanto, per il principio di azione e reazione, tale forza risulta uguale e contraria alla spinta \vec{S} che il liquido esercita sul fondello attraverso la medesima superficie: $\vec{I}_0 = -\vec{S}$. L'equazione 8) può quindi riscriversi:

$$\vec{G} - \vec{S} + \vec{S}_o = 0 \quad (9)$$

dalla quale si ottiene infine l'espressione della spinta cercata:

$$\vec{S} = \vec{G} + \vec{S}_o \quad (10)$$

La spinta \vec{S} ha per componente verticale il peso \vec{G} del volume di controllo, applicato nel baricentro del volume. Il componente orizzontale \vec{S}_o di \vec{S} è la spinta relativa che l'acqua alla destra della superficie piana MN esercita sul volume di controllo ed ha modulo uguale al prodotto dell'area della stessa superficie, Ω , per il valore assoluto della pressione relativa nel suo baricentro, p_G :

$$|\vec{S}_o| = |p_G| \Omega \quad (11)$$

Se, come nel caso di Figura 1b, il piano dei carichi idrostatici relativi è posto a quota inferiore rispetto al baricentro della quantità (positiva) δ_G (con conseguente affondamento negativo $\zeta_G = -\delta_G$ del baricentro rispetto al piano dei carichi idrostatici), risulta:

$$p_G = \gamma \zeta_G = -\gamma \delta_G, \quad (12)$$

la \vec{S}_o è rivolta verso l'interno del serbatoio (sollecitazione di trazione) e risulta applicata in un punto, detto centro di spinta, giacente, per la simmetria della superficie circolare, sulla verticale passante per il baricentro, posto al di sopra di questo alla distanza:

$$\xi_0 = \frac{I_0}{M_s}, \quad (13)$$

in cui I_0 è il momento di inerzia della superficie rispetto all'asse orizzontale baricentrico e M_s il momento statico della superficie rispetto alla retta di sponda relativa (intersezione del piano contenente la superficie MN e del piano dei carichi idrostatici relativi), preso in valore assoluto¹. Per il Teorema di Varignon, il momento statico di una superficie piana rispetto ad una retta complanare è pari al prodotto dell'area della superficie per la distanza del baricentro della superficie dalla retta in questione. Trattandosi in questo caso di una superficie giacente su un piano verticale, si ha:

$$M_s = \delta_G \Omega. \quad (14)$$

Se, invece, il piano dei carichi idrostatici relativi fosse posto a quota superiore rispetto al baricentro, la pressione baricentrica sarebbe positiva, la spinta sarebbe di compressione e la sua retta d'azione passerebbe al di sotto del baricentro, a distanza espressa ancora dalla 13) e dalla 14).

Con ragionamento del tutto analogo, si ottiene l'espressione della spinta assoluta:

$$\vec{S}^* = \vec{G} + \vec{S}_o^*, \quad (15)$$

il cui componente orizzontale \vec{S}_o^* ha modulo uguale al prodotto dell'area della superficie piana MN per la pressione assoluta nel suo baricentro, data da:

$$p_G^* = \gamma \zeta_G^*, \quad (16)$$

e soggiace ad esso di:

¹ Si osservi che, volendo esprimere distanze ξ_0 essenzialmente positive, il momento statico è assunto qui anch'esso sempre positivo. Nella teoria esso era invece stato introdotto con riferimento ad un asse x avente direzione di massima pendenza sul piano che contiene la superficie, orientato nel verso delle pressioni crescenti. Così definito, il momento statico poteva perciò assumere valori positivi o negativi a seconda che il baricentro si trovasse al di sopra od al di sotto del piano dei carichi idrostatici rispettivamente. In tal modo si era anche dedotta la regola riguardante la posizione del centro di spinta, sempre da parte opposta della retta di sponda rispetto al baricentro.

$$\xi_0^* = \frac{I_0}{M_s^*} , \quad (17)$$

in cui $M_s^* = \zeta_G^* \Omega$ è il momento statico della superficie rispetto alla retta di sponda assoluta.

Le spinte \vec{S} ed \vec{S}^* si ottengono dalla composizione vettoriale riportata in Figura 1b. Si può verificare che la \vec{S} è la risultante della spinta assoluta \vec{S}^* dell'acqua sulla faccia interna del fondello e della spinta assoluta \vec{S}_a^* dell'aria alla pressione atmosferica sulla sua faccia esterna, come risulta dal poligono delle forze riportato in Figura 1b².

Le posizioni delle rette d'azione delle spinte, sia relativa che assoluta, si ottengono da operazioni di scorrimento e composizione delle forze. Deve verificarsi il passaggio di tali rette d'azione per il centro O della superficie sferica di cui la calotta è parte, poiché le spinte costituiscono le risultanti di forze elementari di pressione aventi rette d'azione tutte passanti per tale centro.

2) La spinta $\vec{\pi}_v$ che trattiene nella propria sede la valvola si può ottenere con riferimento ad una situazione *fittizia* convenientemente definita: per esempio, immaginando di porre un tappo piano sulla luce BD e sostituendo alla parte di valvola interna al serbatoio, di volume conico BDC, lo stesso liquido contenuto nel resto del serbatoio. Poiché la superficie conica del volume liquido fittizio è identica alla superficie conica della valvola ed è posta nella medesima posizione rispetto al piano dei carichi idrostatici, la spinta $\vec{\pi}$ cercata è uguale alla spinta che il liquido esterno al volume liquido fittizio esercita su di esso attraverso tale superficie. La spinta $\vec{\pi}_v$ può quindi ottenersi applicando l'equazione globale dell'idrostatica 7) al volume di controllo liquido BDC, il cui peso indichiamo con \vec{G} . Operando con riferimento alle pressioni relative, analogamente al caso del fondello di cui al punto 1), si pone $\vec{\pi} = \vec{\pi}_v + \vec{\pi}_{BD}$, in cui $\vec{\pi}_{BD}$ è la spinta relativa esercitata dal tappo piano posto sulla luce BD in sostituzione della valvola. L'equazione globale si scrive pertanto:

$$\vec{G} + \vec{\pi}_v + \vec{\pi}_{BD} = 0 , \quad (18)$$

da cui si ricava:

$$\vec{\pi}_v = -\vec{G} - \vec{\pi}_{BD} . \quad (19)$$

Si osservi che, poiché la $-\vec{\pi}_{BD}$ è uguale al peso del volume liquido cilindrico BDEA, $\vec{\pi}_v$ risulta uguale, in modulo direzione e verso, al peso del volume liquido BCDEA. Le tre forze che compaiono nell'equazione globale hanno tutte rette d'azione coincidenti con l'asse del cono.

Se applicata con riferimento alle pressioni assolute, l'equazione globale ha la forma:

$$\vec{G} + \vec{\pi}_v^* + \vec{\pi}_{BD}^* = 0 , \quad (20)$$

dove $\vec{\pi}_{BD}^*$ è la spinta assoluta esercitata dal tappo piano posto sulla luce BD in sostituzione della valvola e $\vec{\pi}_v^*$ è la spinta assoluta che l'acqua all'interno del serbatoio esercita sul volume di controllo attraverso la superficie BCD, avente modulo e direzione del peso del volume liquido CDGFB, ma verso opposto (rivolto verso l'alto). La $\vec{\pi}_v^*$ è anche la spinta assoluta esercitata dall'acqua sulla valvola, che sommata vettorialmente con la spinta assoluta dell'aria sulla porzione della valvola esterna al serbatoio, data dal peso del volume AEGF, dà la $\vec{\pi}_v$.

² È questo il motivo fondamentale per il quale è conveniente riferirsi alle pressioni relative in luogo di quelle assolute. Ciò consente infatti di calcolare la risultante delle spinte esercitate sul fondello dal liquido e dall'atmosfera esterna direttamente come spinta relativa. Un altro aspetto pratico vantaggioso è rappresentato dalla materializzazione del piano dei carichi idrostatici relativi di un liquido nella sua superficie libera, sempre che essa esista effettivamente.

Figura 1. Schemi qualitativi di (a) paratoia a settore in canale a sezione rettangolare e (b) serbatoio in depressione.