

Corso di Idraulica per allievi Ingegneri Civili e Ambientali

Esercitazione n° 3

Lo stramazzo Bazin (1), di larghezza b ed altezza del petto h_p , e quello Francis (2), pure di larghezza b , versano nel recipiente A, che è in comunicazione con il recipiente B a mezzo della luce circolare in parete sottile (6) di diametro D . Nel recipiente B arrivano anche le portate q_3 dallo stramazzo Thomson (3) e q_4 della paratoia piana (4), la cui luce di fondo ha larghezza b ed altezza a . Inoltre, il recipiente A scarica una portata q_5 attraverso la luce munita di tubo addizionale esterno (5) di diametro D ed il recipiente B versa nel recipiente C a mezzo della luce di Borda (7) di diametro D . Questo contiene aria in pressione nella parte superiore ed è munito di una valvola di rientrata d'aria; da esso la portata effluisce attraverso la luce in parete sottile (8) di diametro d .

Assegnati i carichi ζ_1 ed h_4 dello stramazzo Bazin e della paratoia piana ed i rapporti $q_2/q_1 = 0,6$, $q_3/q_1 = 0,2$ e $q_5/q_4 = 0,8$, determinare:

- 1) Le portate q_1 e q_4 ed i carichi ζ_2 e ζ_3 rispettivamente dello stramazzo Francis e di quello triangolare, supposte trascurabili le velocità di arrivo a questi due stramazzi;
- 2) I carichi ζ_5 e ζ_7 , il dislivello Δ_6 ed il livello ζ_8 sulla luce di fondo del serbatoio C corrispondenti alle situazioni di regime, quando il manometro metallico M segna $n \text{ kp cm}^{-2}$;
- 3) Il tempo occorrente perché, chiusa la luce di Borda, il livello del pelo libero nel serbatoio C rispetto alla luce di fondo si riduca dal valore ζ_8 fino alla quota della base inferiore della parte tronco-piramidale.

Dati:

– $\zeta_1 = 0,2 \text{ m}$	– $D = 0,25 \text{ m};$	– $n = 0,8 \text{ kp cm}^{-2};$
– $h_4 = 2,0 \text{ m}$	– $d = 0,20 \text{ m};$	– $h_p = 0,8 \text{ m}$
– $b = 1,0 \text{ m}$	– $a = 0,05 \text{ m}$	– $a_0 = 2,0 \text{ m}$
– $a_p = 2,0 \text{ m}$	– $a_b = 1,0 \text{ m}$	– $l = 4,0 \text{ m}$
– $l_b = 2,50 \text{ m}$	– $\gamma = 9'806 \text{ Nm}^{-3}$	

Schema di soluzione

Le formule da applicare per le varie bocche sono le seguenti (contrassegnate con gli stessi numeri che nel disegno indicano le bocche):

- Stramazzi

– Bazin (1)	$q_1 = \mu_1 b \zeta_e \sqrt{2g\zeta_e}$	formula di Rehbock	$\begin{cases} \zeta_e = \zeta_1 + 0,0011m \\ \mu_1 = 0,402 + 0,054 \zeta_e / h_p \end{cases}$
– Francis (2)	$q = \mu_2 (b - 0,2\zeta_2) \zeta_2 \sqrt{2g\zeta_2}$	$\mu_2 = 0,415$	
– Thomson (3)	$q_3 = (8/15) \mu_3 \zeta_3^2 \sqrt{2g\zeta_3}$	$\mu_3 = 0,63$	

- Paratoia piana (4)

$$q_4 = \mu_4 ab \sqrt{2g(h_4 - C_c a)} \quad \mu_4 = 0,6$$

- Luci

$$\begin{aligned}
 & \text{– di Venturi (5)} \quad \begin{cases} q_5 = \sqrt{7/4} \mu_5 \Omega_5 \sqrt{2g\zeta_5} & \text{per } \zeta_5 \leq \frac{4}{3} \times 10,33 \text{ m} \\ q_5 = \mu_5 \Omega_5 \sqrt{2g(\zeta_5 + 10,33)} & \text{per } \zeta_5 > \frac{4}{3} \times 10,33 \text{ m} \end{cases} \quad \mu_5 = 0,6 \\
 & \text{– in parete sottile rigurgitata (6)} \quad q_6 = \mu_6 \Omega_6 \sqrt{2g\Delta_6} \quad \mu_6 = 0,6 \\
 & \text{– di Borda con contropressione } p_c \text{ (7)} \quad q_7 = \mu_7 \Omega_7 \sqrt{2g(\zeta_7 - p_c / \gamma)} \quad \mu_7 = 0,5 \\
 & \text{– in parete sottile (8)} \quad \begin{cases} \text{da recipiente in pressione} & q_8 = \mu_8 \Omega_8 \sqrt{2g(\zeta_8 + p_c / \gamma)} \\ \text{da recipiente a pelo libero} & q_8 = \mu_8 \Omega_8 \sqrt{2g\zeta_8} \end{cases} \quad \mu_8 = 0,6
 \end{aligned}$$

- 1) La portata q_1 si calcola con la formula di Rehbock (1). Da essa si deducono i valori q_2 e q_3 , i quali, introdotti rispettivamente nelle formule degli stramazzi Francis e Thomson, consentono di determinare i valori ζ_2 e ζ_3 . Applicando la (4) si ricava la portata q_4 della paratoia piana.
- 2) Dalla portata della paratoia piana si ottiene la portata q_5 e quindi il valore ζ_5 mediante la prima o la seconda delle (5), a seconda che sia $\zeta_5 \leq (4/3) \times 10,33 \text{ m}$ o $\zeta_5 > (4/3) \times 10,33 \text{ m}$. Calcolate le portate

$$q_6 = q_1 + q_2 - q_5$$

$$q_7 = q_3 + q_4 + q_6$$

$$q_8 = q_7$$

si ricavano mediante le (6), (7) e (8) rispettivamente il dislivello Δ_6 , il carico ζ_7 e il livello ζ_8 , ponendo nelle formule (7) e (8)

$$p_c / \gamma = \frac{9,80665 \times 10^4 n}{9806,65} = 10 n \text{ (m)}.$$

- 3) Chiusa la luce 7, il volume dell'aria contenuta nella parte superiore del recipiente C, per effetto dell'efflusso dell'acqua dalla luce 8, aumenta progressivamente, mentre, supponendo che l'aria evolva seguendo una trasformazione isoterma, diminuisce nel contempo la pressione assoluta p^* secondo la legge di Boyle-Mariotte:

$$p^* \Sigma(H - \zeta) = p_c^* \Sigma(H - \zeta_8) = K = \text{costante}, \quad (9)$$

in cui p^* e ζ sono rispettivamente la pressione assoluta ed il livello del pelo libero sulla luce in un istante generico del processo di svuotamento. Dall'istante t' in cui la pressione dell'aria raggiunge il valore della pressione atmosferica ($p=0$, corrispondente a $p_{atm}^* = 101'325 \text{ Pa}$) l'apertura della valvola di entrata d'aria fa sì che la pressione nella parte superiore del serbatoio C mantenga il valore costante $p=0$. L'equazione di continuità per il serbatoio C esprime

l'uguaglianza tra il volume d'acqua uscente dal serbatoio in un intervallo di tempo infinitesimo dt e la corrispondente variazione del volume d'acqua in esso contenuto:

$$q dt = -\Sigma d\zeta ,$$

in cui $d\zeta < 0$ perché il livello decresce. Separando le variabili, si ottiene l'equazione differenziale:

$$dt = -\frac{\Sigma}{q} d\zeta , \quad (10)$$

che, integrata, permette di determinare il tempo di svuotamento. In essa Σ è costante per la parte prismatica ed è invece funzione di ζ per la parte tronco-piramidale; per $t < t'$, q è funzione di ζ , sia direttamente, sia per il tramite della pressione p dell'aria secondo la prima delle (8) (contenente però le grandezze variabili p e ζ in luogo di p_c e ζ_8) e la (9), mentre per $t \geq t'$ è funzione della sola ζ , sulla base della seconda delle (8). L'equazione (10) diventa allora:

$$\begin{cases} dt = -\frac{\Sigma}{\mu_8 \Omega_8 \sqrt{2g}} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta + \frac{K}{\gamma \Sigma (H - \zeta)} - 10,33}} & \text{per } t < t' \\ dt = -\frac{\Sigma}{\mu_8 \Omega_8 \sqrt{2g}} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} & \text{per } t \geq t' \end{cases} . \quad (11)$$

Pertanto, fino al livello ζ' dato dalla

$$p_{am}^* \Sigma (H - \zeta') = p_c^* \Sigma (H - \zeta_8) = K = \text{costante}$$

il tempo di svuotamento si calcola per differenze finite, suddividendo l'altezza $(\zeta_8 - \zeta')$ in N parti uguali $\Delta\zeta = (\zeta_8 - \zeta')/N$, calcolando $N-1$ livelli intermedi $\zeta_i = \zeta_8 - i \Delta\zeta$, $i = 1, N-1$, $\zeta_{i-1} - \zeta_i = \Delta\zeta$, e calcolando gli intervalli di tempo necessari affinché il livello vari fra due valori successivi servendosi della relazione:

$$\Delta t_i = \frac{\Sigma}{\mu_8 \Omega_8 \sqrt{2g}} \frac{\Delta\zeta}{\sqrt{\zeta_{mi} + \frac{K}{\gamma \Sigma (H - \zeta_{mi})} - 10,33}} ,$$

che è la prima delle (11) scritta per incrementi finiti, ponendovi il livello medio del pelo libero sulla luce, $\zeta_{mi} = (\zeta_{i-1} + \zeta_i)/2$, nell'intervallo di tempo Δt_i . Il tempo t' si ottiene dalla somma degli intervalli Δt_i .

Per avere un'idea del passo di integrazione $\Delta\zeta$ da adottare, è conveniente ripetere ricorsivamente il procedimento riducendo progressivamente il passo (per esempio dimezzandolo a ogni nuova elaborazione), fino ad ottenere variazioni del risultato inferiori alla precisione desiderata.

Per la restante parte prismatica, il tempo di svuotamento si calcola con la

$$t'' = \frac{2\Sigma}{\mu_8 \Omega_8 \sqrt{2g}} \left(\sqrt{\zeta'} - \sqrt{a_{tp} + a_b + d/2} \right) ,$$

ottenuta dall'integrazione della seconda delle (11), in cui a_{tp} ed a_b sono le altezze delle parti del serbatoio C tronco-piramidale e di base, rispettivamente.

Infine, anche per la parte tronco-piramidale il tempo di svuotamento si può determinare per via analitica, risolvendo l'equazione differenziale:

$$dt = - \frac{\Sigma(\zeta)}{\mu_8 \Omega_8 \sqrt{2g}} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}}. \quad (12)$$

L'espressione dell'area della sezione quadrata Σ , di lato l_ζ , dipendente dal carico ζ , si determina tenendo presente che l_ζ varia linearmente dal valore l_b alla base del tronco di piramide, soprastante l'asse della luce della quantità $\zeta_{\min} = d/2 + a_b$, al valore l sulla sua sommità, soprastante l'asse della luce della quantità $\zeta_{\max} = d/2 + a_b + a_{tp}$:

$$\frac{l_\zeta - l_b}{l - l_b} = \frac{\zeta - \zeta_{\min}}{\zeta_{\max} - \zeta_{\min}}$$

Esplicitando l_ζ , l'espressione dell'area $\Sigma = l_\zeta^2$ si può esprimere nella forma:

$$\Sigma = a\zeta^2 + b\zeta + c,$$

con:

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{l - l_b}{a_{tp}} \right)^2 \\ b &= 2 \frac{l - l_b}{a_{tp}} \left[l_b - \frac{l - l_b}{a_{tp}} (d/2 + a_b) \right], \\ c &= \left[l_b - \frac{l - l_b}{a_{tp}} (d/2 + a_b) \right]^2 \end{aligned}$$

Sostituendo nella (12) si ottiene:

$$dt = - \frac{a\zeta^{3/2} + b\zeta^{1/2} + c\zeta^{-1/2}}{\mu_8 \Omega_8 \sqrt{2g}} d\zeta. \quad (13)$$

Il cui integrale generale è:

$$t = - \frac{1}{\mu_8 \Omega_8 \sqrt{2g}} \left(\frac{2}{5} a \zeta^{5/2} + \frac{2}{3} b \zeta^{3/2} + 2c \zeta^{1/2} \right) + C,$$

in cui C è una costante di integrazione, il cui valore si determina imponendo la condizione iniziale $\zeta = \zeta_{\max}$ per $t = 0$:

$$C = \frac{1}{\mu_8 \Omega_8 \sqrt{2g}} \left(\frac{2}{5} a \zeta_{\max}^{5/2} + \frac{2}{3} b \zeta_{\max}^{3/2} + 2c \zeta_{\max}^{1/2} \right),$$

da cui l'espressione del tempo corrente dall'inizio dello svuotamento della parte tronco-piramidale:

$$t = \frac{1}{\mu_8 \Omega_8 \sqrt{2g}} \left[\frac{2}{5} a (\zeta_{\max}^{5/2} - \zeta^{5/2}) + \frac{2}{3} b (\zeta_{\max}^{3/2} - \zeta^{3/2}) + 2c (\zeta_{\max}^{1/2} - \zeta^{1/2}) \right]$$

e l'espressione della durata complessiva t''' dello svuotamento, allorché $\zeta = \zeta_{\min}$ e $\zeta_{\max} - \zeta_{\min} = a_{tp}$:

$$t = \frac{1}{\mu_8 \Omega_8 \sqrt{2g}} \left[\frac{2}{5} a (\zeta_{\max}^{5/2} - \zeta_{\min}^{5/2}) + \frac{2}{3} b (\zeta_{\max}^{3/2} - \zeta_{\min}^{3/2}) + 2c (\zeta_{\max}^{1/2} - \zeta_{\min}^{1/2}) \right].$$

Un'idea della precisione del calcolo numerico si può ottenere confrontando il risultato precedentemente calcolato per via analitica con quello ottenibile mediante integrazione numerica alle differenze finite. A tale scopo, si suddivide l'altezza a_{tp} in N parti uguali $\Delta\zeta = a_{tp}/N$ e si calcolino $N-1$ livelli intermedi $\zeta_i = a_{tp} + a_b - i \Delta\zeta$ ed i corrispondenti valori medi dei livelli, $\zeta_{mi} = (\zeta_{i-1} + \zeta_i)/2$, e delle aree delle sezioni del serbatoio, $\Sigma_{mi} = \Sigma(\zeta_{mi})$. Gli intervalli di tempo necessari affinché il livello vari fra due valori successivi si calcolano mediante la relazione:

$$\Delta t_i = \frac{\Sigma_{mi}}{\mu_8 \Omega_8 \sqrt{2g}} \frac{\Delta\zeta}{\sqrt{\zeta_{mi}}}.$$

L'intervallo di tempo t''' necessario complessivamente per ottenere lo svuotamento della parte tronco-piramidale è dato dalla somma degli intervalli Δt_i .

Il tempo di svuotamento totale è dato da $t' + t'' + t'''$.

