

Corso di Idraulica per allievi Ingegneri Civili e Ambientali

Esercitazione n° 4

La condotta di diametro D raffigurata in Figura 1 termina con un convergente ed un ugello di diametro d . Davanti al getto ad asse orizzontale uscente dall'ugello, avente coefficiente di contrazione C_c , si ponga una piastra piana perpendicolare al getto (Figura 1).

Assegnate le dimensioni geometriche della parte terminale della condotta e l'indicazione del manometro semplice a mercurio Δ , calcolare:

- 1) la portata effluente dall'ugello, q ;
- 2) l'indicazione del manometro metallico collegato al tubo di Pitot;
- 3) la spinta sul convergente;
- 4) la spinta sulla piastra piana;

Dati:

– $R = 5,0 \text{ m}$	– $z_M = 0,50 \text{ m}$	– $\alpha = 45^\circ$
– $D = 0,50 \text{ m}$	– $a = 0,30 \text{ m}$	– $\beta_1 = 60^\circ$
– $d = 0,125 \text{ m}$	– $b = 0,06 \text{ m}$	– $L = 1 \text{ m}$
– $\gamma = 9\,806 \text{ Nm}^{-3}$	– $\Delta = 0,20 \text{ m}$	– $L_c = 0,45 \text{ m}$
– $\gamma_m = 132\,970 \text{ Nm}^{-3}$	– $C_c = 0,85$	

Schema di soluzione

1) Assumendo come piano di riferimento per le quote il piano orizzontale contenente l'asse della condotta nel suo tratto terminale, applicando il teorema di Bernoulli tra la sezione in cui è posto il manometro a mercurio e la sezione contratta, ove la pressione risulta nulla, si ha:

$$h + \frac{U^2}{2g} = \frac{U_c^2}{2g},$$

in cui U ed U_c sono le velocità medie della corrente rispettivamente nella tubazione di diametro D e nella sezione contratta; h è la quota piezometrica della corrente, esprimibile in funzione della misura del manometro a mercurio:

$$h = a + \Delta \frac{\gamma_m}{\gamma}.$$

Introducendo le aree delle sezioni corrispondenti, Ω e Ω_c , ed utilizzando le espressioni delle velocità medie in funzione della portata q , $U = q/\Omega$ e $U_c = q/\Omega_c$, si ottiene l'espressione della portata:

$$q = \frac{\Omega_c \Omega}{\sqrt{\Omega^2 - \Omega_c^2}} \sqrt{2gh}.$$

2) Il liquido in quiete all'interno di un tubo di Pitot possiede carico piezometrico pari al carico totale della particella nel punto di ristagno posto sulla bocca dello strumento, il quale può approssimativamente considerarsi pari al carico totale della corrente. La pressione misurata dal manometro metallico collegato al tubo di Pitot è pertanto data da:

$$p_M = \gamma \left(h + \frac{U^2}{2g} - z_M \right).$$

3) Le spinte esercitate da un liquido in movimento si determinano mediante l'equazione globale del moto per un fluido incompressibile, riferito alle grandezze medie:

$$\vec{I} + \vec{M} = \vec{G} + \vec{H} ,$$

con:

$$\begin{aligned} \vec{I} &= \int_{V_c} \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} dV & \vec{M} &= \int_{S_c} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS \\ \vec{G} &= \int_{V_c} \rho \vec{f}_m dV & \vec{H} &= \int_{S_c} \vec{\tau}_n dS \end{aligned} , \quad (1)$$

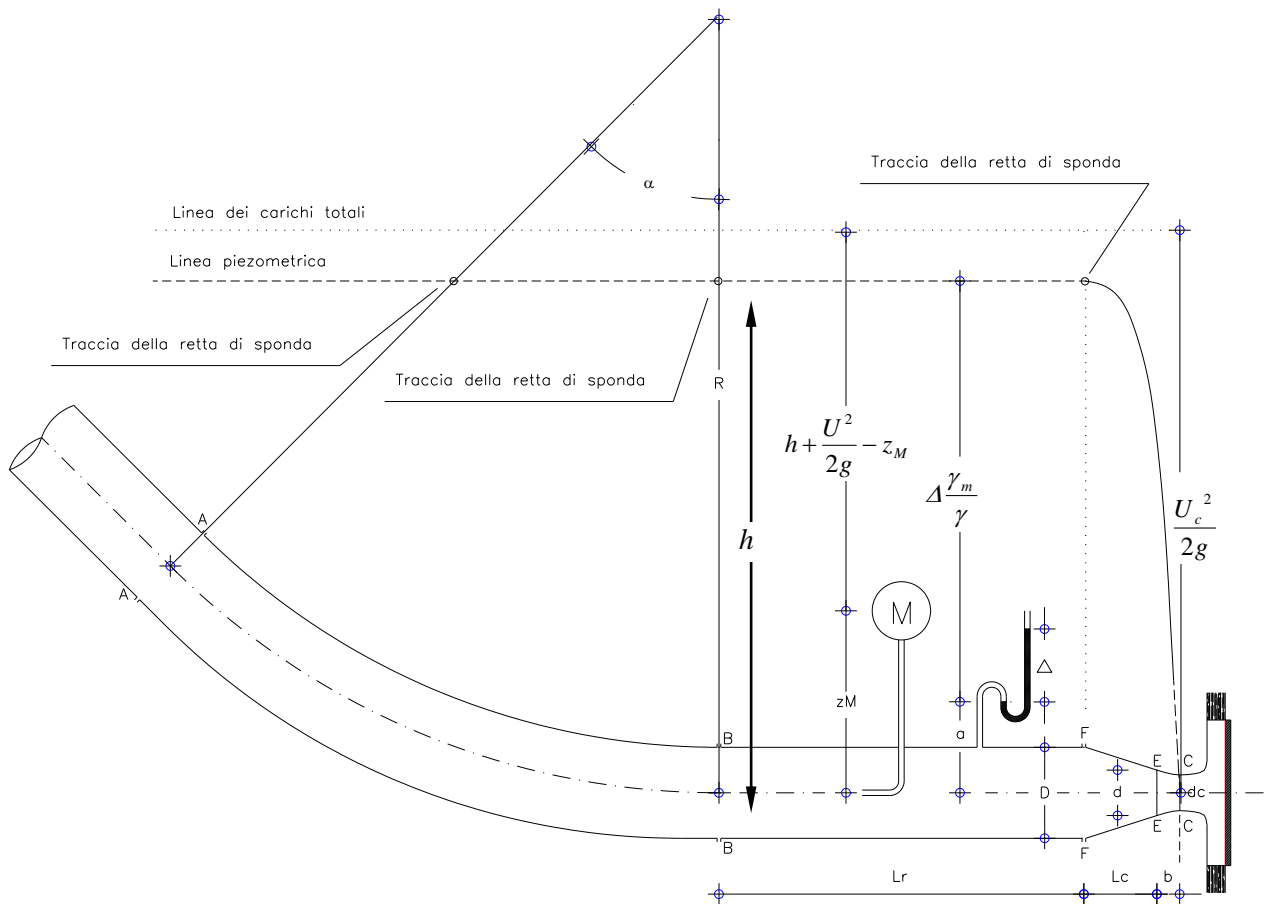


Figura 1. Sezione longitudinale della condotta con terminale convergente e piastra investita dal getto.

in cui \vec{I} è l'inerzia locale del liquido contenuto nel volume di controllo V_c ; ρ è la densità del fluido considerato; \vec{M} è il flusso di quantità di moto che attraversa la superficie di contorno del volume di controllo, S_c ; \vec{n} è la normale esterna alla superficie di contorno; \vec{G} è il risultante delle forze di massa – nel caso in questione costituito dal peso del volume di controllo (la forza specifica di massa è quindi data dall'accelerazione di gravità: $\vec{f}_m = -g \nabla z$); \vec{H} è il risultante delle forze di superficie

(spinta complessivamente esercitata sul volume di controllo attraverso la superficie di contorno); $\vec{\tau}_n$ è lo sforzo locale totale agente sulla faccia esterna della superficie di contorno, inclusivo di pressione, sforzi viscosi e sforzi turbolenti.

In tutti i casi di moto stazionario, come nel problema in esame, risulta nullo il termine di inerzia locale. Inoltre, per una sezione regolare (sezione piana, ortogonale in ogni suo punto al vettore velocità) il flusso di quantità di moto e la spinta possono essere calcolati in modo particolarmente semplice. Il modulo del flusso di quantità di moto si può esprimere con riferimento alla velocità media della corrente come segue:

$$M = \beta \rho U^2 \Omega = \beta \rho U q = \beta \rho q^2 / \Omega , \quad (2)$$

in cui β è il coefficiente di ragguaglio delle quantità di moto, dato da:

$$\beta = \frac{\int u^2 d\Omega}{U^2 \Omega} ,$$

che assume valori prossimi all'unità nel caso di moto turbolento;

Nella espressione degli sforzi assiali, le componenti viscosa e turbolenta risultano trascurabili in confronto alla pressione. Poiché, inoltre, in una sezione regolare la pressione è distribuita con legge idrostatica, il problema si riduce al calcolo di una spinta idrostatica su una superficie piana, eseguibile con tutti i metodi e le regole studiate in Idrostatica.

Nella applicazione dell'equazione globale del moto ad un volume di controllo, è generalmente conveniente decomporre la superficie di contorno, alla quale sono estesi gli integrali delle forze di superficie e del flusso di quantità di moto, in superfici elementari caratterizzate da proprietà utili allo sviluppo dell'equazione.

Per quanto riguarda la spinta sul convergente, conviene applicare l'equazione globale al volume liquido compreso tra la sezione FF e la sezione contratta CC e suddividere la superficie di contorno nelle seguenti quattro superfici (vedi schema di Figura 2):

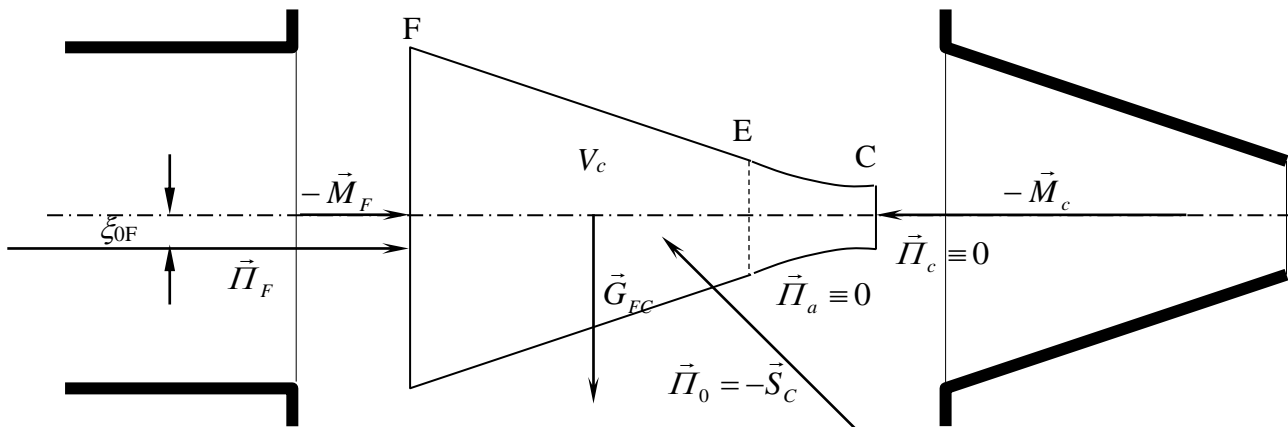


Figura 2. Schema di applicazione dell'equazione globale del moto per il calcolo della spinta sul convergente.

- la sezione regolare corrispondente alla sezione di area massima del convergente, sezione FF;
- la sezione contratta, sezione CC;
- la superficie laterale del tronco di cono a contatto con le pareti del convergente;

- la parte di superficie laterale del volume di controllo compresa fra l'ugello del convergente e la sezione contratta, esposta alla pressione atmosferica.

Esplicitando le spinte ed i flussi di quantità di moto relativi alle quattro superfici, l'equazione globale del moto assume la forma:

$$\vec{G}_{FC} + \vec{\Pi}_F + \vec{\Pi}_c + \vec{\Pi}_o + \vec{\Pi}_a = \vec{M}_F + \vec{M}_c + \vec{M}_o + \vec{M}_a,$$

nella quale \vec{G}_{FC} è il peso del volume liquido, $\vec{\Pi}_F$ è la spinta che il liquido a sinistra della sezione FF esercita sul volume considerato, $\vec{\Pi}_c$ è la spinta che il liquido a destra della sezione contratta CC esercita sul volume, $\vec{\Pi}_o$ e $\vec{\Pi}_a$ sono le spinte che il volume subisce lungo le parti della superficie laterale a contatto rispettivamente con la parete del convergente e con l'atmosfera; \vec{M}_F , \vec{M}_c , \vec{M}_o e \vec{M}_a sono i flussi di quantità di moto che attraversano rispettivamente le sezioni FF, CC e le parti della superficie laterale a contatto con la parete del convergente e con l'atmosfera.

Poiché nella sezione contratta agisce la pressione atmosferica è $\vec{\Pi}_c = 0$. Per lo stesso motivo è nulla la spinta $\vec{\Pi}_a$ esercitata dall'atmosfera sulla superficie laterale del tronchetto EC. $\vec{\Pi}_o$ è la spinta esercitata sul volume di controllo dalla parete solida del convergente. Per il principio di azione e reazione, tale spinta risulta uguale e contraria alla spinta \vec{S}_c che il liquido contenuto nel volume di controllo esercita sul convergente¹. $\vec{\Pi}_F$ è parallela all'asse della condotta e rivolta nel senso della corrente, perché la piezometrica sovrasta il baricentro della sezione FF; essa ha modulo:

$$\Pi_F = p_{GF} \Omega = \gamma h \Omega$$

ed è applicata lungo l'asse verticale della sezione circolare, ad una distanza dal centro pari a:

$$\xi_{F0} = \frac{I_{xx0}}{M_s},$$

in cui $I_{xx0} = \pi D^4 / 32$ è il momento di inerzia della sezione rispetto all'asse orizzontale contenuto sul piano della sezione, passante per il baricentro della stessa; $M_s = \Omega h$ è il momento statico della sezione rispetto alla retta di sponda, intersezione del piano contenente la sezione e del piano orizzontale posto a quota pari alla quota piezometrica nella sezione considerata.

Nella parte di superficie laterale a contatto con la parete del convergente la velocità è nulla per la condizione di aderenza, propria di un fluido reale. La parte di superficie laterale esposta all'aria costituisce un tubo di flusso, cui le velocità sono tangenti. Per entrambe le superfici si ha pertanto:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0,$$

col che risultano nulli i relativi flussi di quantità di moto.

Nelle sezioni FF e CC le velocità hanno versi rispettivamente opposto e concorde con la normale esterna e ortogonali alle sezioni stesse, per cui i relativi flussi di quantità di moto sono dati da:

$$\vec{M}_F = - \int_{\Omega_F} \rho |\vec{u}| \vec{u} dS \quad ; \quad \vec{M}_c = \int_{\Omega_c} \rho |\vec{u}| \vec{u} dS,$$

di moduli $M_F = \rho q^2 / \Omega_F$ e $M_c = \rho q^2 / \Omega_c$, avendo assunto unitario il coefficiente di ragguglio β .

L'espressione del risultante della spinta agente sul convergente è data pertanto da:

¹ Di tutte le forze evidenziate in Figura 2, $\vec{\Pi}_o$ è l'unica per la quale non sia possibile stabilire a priori direzione e verso, essendo legata all'incognita del problema. Il vettore è stato quindi tracciato a sentimento.

$$\vec{S}_C = -\vec{\Pi}_o = \vec{G}_{FC} + \vec{\Pi}_F - \vec{M}_F - \vec{M}_C, \quad (3)$$

in cui il peso è, ovviamente, verticale e rivolto verso il basso, mentre le rimanenti forze sono tutte orizzontali. Assunto positivo il verso da sinistra verso destra per le componenti orizzontali e verso il basso per le componenti verticali, le componenti orizzontale e verticale della spinta sono date da:

$$\begin{aligned} S_{Co} &= \Pi_F + M_F - M_c \\ S_{Cv} &= G_{FC} \end{aligned} \quad (4)$$

Il peso del volume di controllo può valutarsi approssimando il volume compreso fra l'ugello e la sezione contratta con un tronco di cono, da sommare al volume, questo rigorosamente tronco-conico, contenuto all'interno del convergente.

Il modulo della spinta è dato da:

$$S_C = \sqrt{S_{Co}^2 + S_{Cv}^2}. \quad (5)$$

L'angolo che essa forma rispetto all'orizzontale è pari a:

$$\beta_c = \arctan(S_{Cv} / S_{Co}). \quad (6)$$

La somma vettoriale (3) si rappresenta graficamente con il poligono delle forze di Figura 3.²

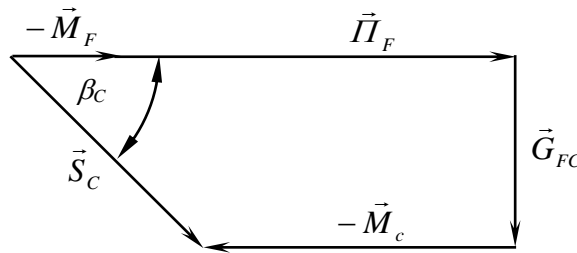


Figura 3. Rappresentazione grafica della determinazione del risultante della spinta eseguita attraverso la somma vettoriale di cui all'espressione (3).

Per definire compiutamente la spinta \vec{S}_c occorre fare riferimento alle condizioni di equivalenza dei sistemi di forze. Due sistemi di forze si dicono equivalenti se possiedono uguali risultante e momento risultante rispetto ad un qualunque punto dello spazio. La scelta del punto (detto polo) è arbitraria e può quindi essere effettuata nel modo più conveniente. Se ad un sistema di forze applicate ad un corpo rigido si sostituisce un sistema equivalente, non si altera lo stato di quiete o di moto del corpo. I due sistemi sono quindi intercambiabili.

Ogni sistema di forze nello spazio può essere ridotto ad un sistema equivalente costituito da una forza e una coppia, o da due forze sghembe (non complanari). Un sistema di forze giacenti su un piano con vettore risultante non nullo è equivalente ad una sola forza (applicata in un punto opportuno), che in tal caso è detta la risultante del sistema; se il vettore risultante è nullo, il sistema equivale ad una coppia; se, oltre al vettore risultante, è nullo anche il momento risultante, il sistema di forze è equilibrato e non modifica le condizioni di quiete o di moto del corpo al quale è applicato.

Nel caso in questione, poiché tutte le forze giacciono sul piano verticale contenente l'asse della condotta, la spinta è equivalente al risultante \vec{S}_c , applicato in un punto tale che il suo momento

² Qualora si debba eseguire, come nel caso in oggetto, la somma di più di due vettori, conviene disporre i vettori da sommare uno in coda all'altro, con il vettore somma avente "coda" e "punta" rispettivamente nella coda del primo vettore e nella punta dell'ultimo vettore. Ovviamente, il procedimento è equivalente alla somma ripetuta di vettori a due a due con il metodo del parallelogramma; esso consente però di evitare il tracciamento dei parallelogrammi.

rispetto ad un qualunque polo sia uguale al momento risultante del sistema di forze reali rispetto allo stesso punto^{3 4}.

Dalle condizioni di equivalenza consegue che, dato un sistema di forze, facendo scorrere una delle forze del sistema lungo la propria retta d'azione si ottiene ancora un sistema equivalente. Infatti, in tal modo rimangono invariati il vettore risultante ed il momento risultante del sistema. Un sistema equivalente si ottiene anche eseguendo la somma di due forze del sistema applicate nel medesimo punto, dal momento che, anche in questo caso, non variano né il vettore risultante né, per la proprietà distributiva del prodotto vettoriale rispetto alla somma di vettori, il momento risultante.

Nel caso del convergente si potrà quindi procedere nel seguente modo per ridurre il sistema di forze ad una unica forza (risultante) agente lungo la corretta retta d'azione (v. Figura 4):

- 1) si fanno scorrere le forze $-\vec{M}_B$ e $-\vec{M}_C$, giacenti sull'asse della condotta⁵, fino al baricentro del volume di controllo;
- 2) si sommano le due forze;
- 3) il vettore risultante dalla somma di $-\vec{M}_B$ e $-\vec{M}_C$ viene sommato alla forza peso, applicata nello stesso punto;
- 4) il vettore risultante dalla somma di $-\vec{M}_B$, $-\vec{M}_C$ e \vec{G} e la forza $\vec{\pi}_B$ vengono fatti scorrere lungo le rispettive rette d'azione fino al punto di intersezione delle stesse;
- 5) le due forze vengono sommate.

In questo modo è stata determinata sia la risultante (in modulo, direzione e verso) che la sua retta d'azione. Avendo costruito il poligono delle forze di Figura 3, la sola determinazione della retta d'azione della risultante può anche effettuarsi imponendo direttamente che il momento della risultante rispetto ad un qualunque punto dello spazio sia uguale al momento dei vettori componenti rispetto allo stesso punto. Per l'arbitrarietà della scelta del punto rispetto al quale calcolare i momenti, lo si potrà scegliere nel modo più conveniente. In pratica, nel caso sotto esame, sarà conveniente scegliere come polo per il calcolo dei momenti il baricentro del volume di controllo. Rispetto a tale punto risultano infatti nulli i momenti dei due flussi di quantità di moto e della forza peso. Il momento risultante del sistema di forze ha pertanto modulo pari a:

$$M_r = \Pi_F \xi_{0F}$$

e verso di rotazione antiorario. La retta d'azione della risultante \vec{S}_C , di direzione individuata dalla costruzione del poligono delle forze, dovrà pertanto trovarsi ad una distanza δ dal baricentro del volume di controllo, tale che risulti:

$$\Pi_F \xi_{0F} = S_C \delta \quad (7)$$

e il verso di rotazione antiorario, come mostrato in Figura 5.

Dalla equazione (7) si ricava quindi il valore del braccio δ .

Utilizzando strumenti di calcolo automatico (codici di calcolo, fogli elettronici, etc..) può tornare comodo disporre di un metodo che non richieda operazioni grafiche propriamente dette.

Una prima possibilità è quella di implementare i procedimenti grafici illustrati mediante le equazioni della Geometria Analitica.

³ A loro volta, le singole forze che compaiono nella (3) ammettono punti di applicazione determinati sulla base dell'equivalenza alle distribuzioni di forze elementari di cui esse costituiscono le risultanti, equazioni (1).

⁴ In un caso tridimensionale generale, il sistema di forze equivarrà ad una coppia di momento pari al momento risultante del sistema di forze rispetto ad un qualunque punto dello spazio e da un vettore uguale al vettore risultante del sistema, applicato nel punto utilizzato per il calcolo del momento risultante.

⁵ I due flussi di quantità di moto hanno per retta d'azione l'asse della condotta, in quanto rispetto ad un qualunque punto di tale asse è nullo il momento risultante dei flussi elementari contenuti negli integrali che definiscono $-\vec{M}_B$ e $-\vec{M}_C$.

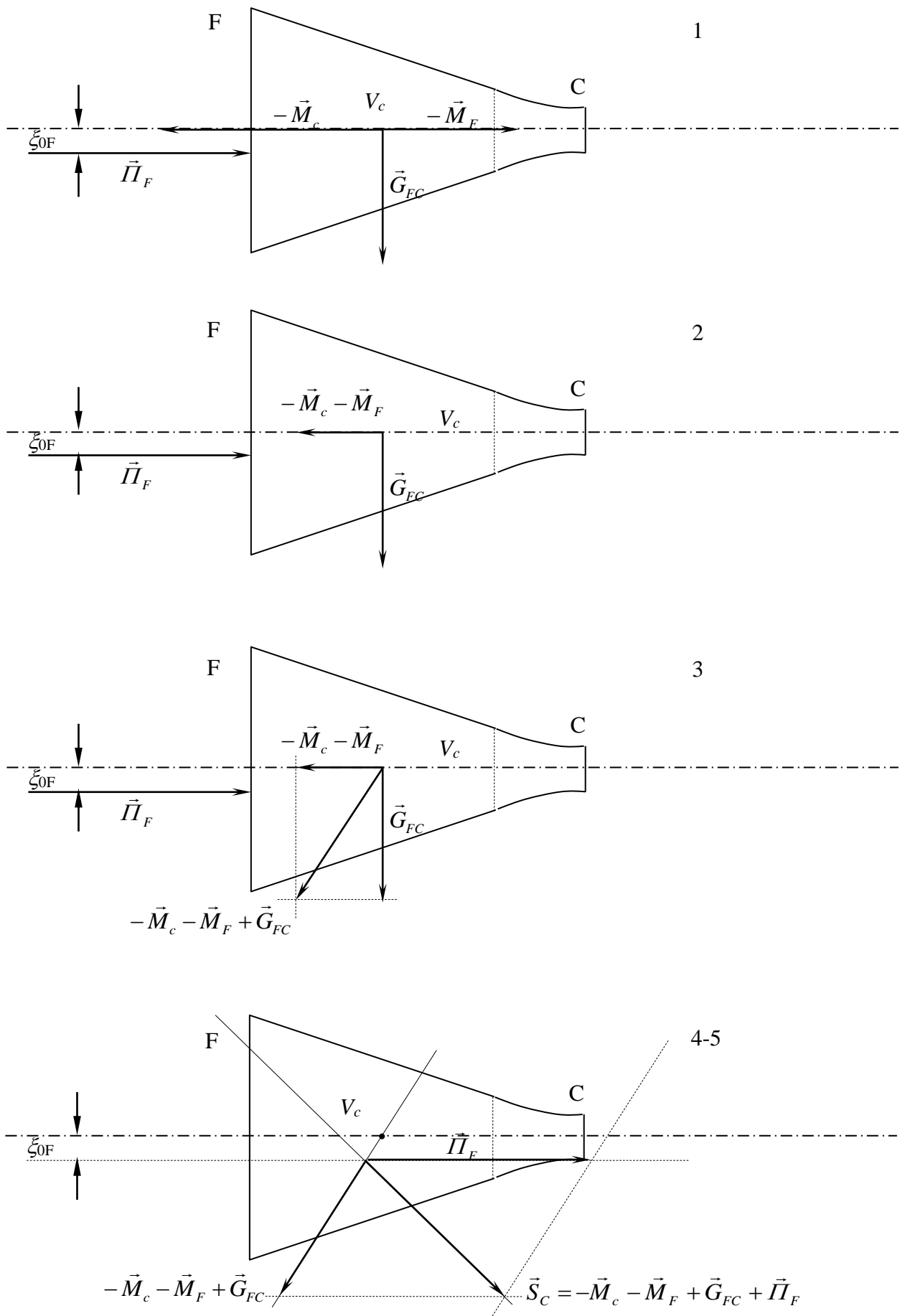


Figura 4. Determinazione della retta d'azione della spinta per via grafica.

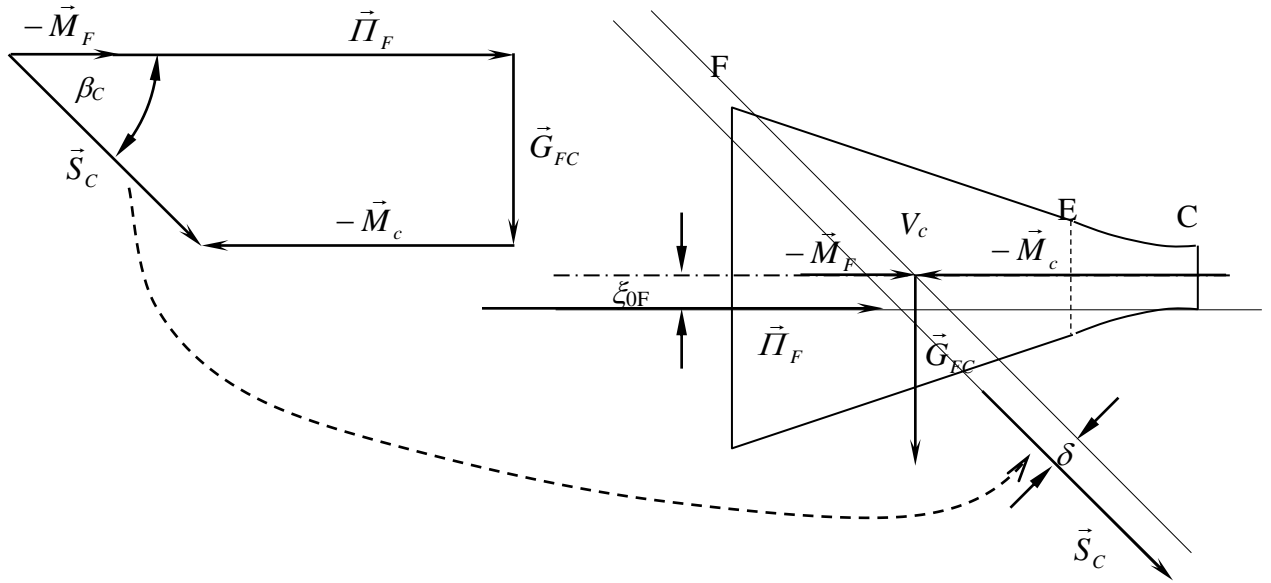


Figura 5. Determinazione della retta d'azione della spinta per via semi-analitica.

Un modo più semplice per determinare uno dei possibili punti di applicazione della risultante di un sistema di forze piano evitando qualunque operazione grafica consiste nell'imporre separatamente le uguaglianze dei momenti dei singoli componenti nelle due direzioni degli assi coordinati (nel caso in questione: orizzontale e verticale), del sistema di forze e della risultante rispetto ad un qualunque punto.

Sulla base dei valori dei moduli dei componenti orizzontale e verticale della spinta, determinati dalle relazioni (4), scegliendo ancora il baricentro del volume di controllo, di coordinate x_G e y_G , come polo per il calcolo dei momenti si impongono le seguenti uguaglianze di momenti:

$$S_{C_o}(y_G - y_P) = II_F \xi_{0F} \quad ; \quad S_{C_v}(x_G - x_P) = 0,$$

da cui si determinano le coordinate x_P , y_P di un punto della retta d'azione della risultante determinata precedentemente con il metodo grafico (v. Figura 6):

$$\begin{cases} x_P = x_G \\ y_P = y_G - \frac{II_F \xi_{0F}}{S_{C_o}} \end{cases},$$

In generale, qualora nell'equazione globale compaiano forze non aventi direzione orizzontale né verticale, occorrerà operare preventivamente la decomposizione di tali forze lungo tali direzioni.

4) la spinta \vec{S}_2 sulla piastra si calcola applicando l'equazione globale al volume liquido compreso tra la sezione contratta del getto e la piastra (vedi Figura 1):

$$\vec{G}_p + \vec{II}_c + \vec{II}_u + \vec{II}_a + \vec{II}_2 = \vec{M}_c + \vec{M}_u,$$

in cui \vec{G}_p è il peso del volume liquido, \vec{II}_c e \vec{II}_u sono le spinte esercitate sul volume di controllo dalle parti di liquido poste rispettivamente a sinistra della sezione contratta CC ed esternamente alla sezione in cui il liquido cessa di essere a contatto con la piastra (sezione di uscita), entrambe nulle in quanto su entrambe risulta nulla la pressione; $\vec{II}_a = 0$ è la spinta esercitata sul volume di controllo attraverso la superficie a contatto con l'atmosfera, \vec{II}_2 è la spinta subita dal volume di controllo attraverso la superficie di contatto con la piastra; \vec{M}_c e \vec{M}_u sono i flussi di quantità di moto che attraversano rispettivamente la sezione contratta CC e la sezione di uscita.


$$\vec{S}_2 = -\vec{M}_c,$$

9