

# Corso di Idraulica per allievi Ingegneri Civili e Ambientali

## Esercitazione n° 8

Il canale rappresentato in Figura 1, indefinito a monte e sbarrato a valle con uno stramazzo Francis (a contrazione laterale) di larghezza  $\ell$ , è diviso in due tronchi: il primo a sezione circolare chiusa di diametro  $D$ , pendenza  $i_{f1}$  e scabrezza di Strickler  $k_{s1}$ ; il secondo a sezione trapezia di larghezza  $b_0$  alla base, sponde inclinate aventi scarpa  $m$ , pendenza  $i_{f2}$  e scabrezza di Strickler  $k_{s2}$ .

Si richiede di:

- 1) tracciare, per ciascun tronco, le curve (scale) delle sezioni,  $\Omega$ , dei contorni bagnati,  $B$ , dei raggi idraulici,  $\mathcal{R}$ , dei coefficienti di Chezy,  $\chi$ , delle portate,  $Q$ , e delle velocità,  $U$ ;
- 2) determinare la massima portata,  $Q_{max}$ , che può defluire in moto uniforme nella galleria;
- 3) determinare l'altezza del petto dello stramazzo Francis,  $h_p$ , affinché nel canale a sezione trapezia sia mantenuto il moto uniforme per la portata  $Q_{max}$ ;
- 4) determinare l'altezza del gradino,  $\Delta$ , da realizzare nella sezione di passaggio fra i due tronchi, affinché la portata  $Q_{max}$  fluisca in moto uniforme anche nel primo tronco e l'innalzamento della superficie libera,  $\delta$ , che si produce nel secondo tronco per effetto del cambio di sezione.

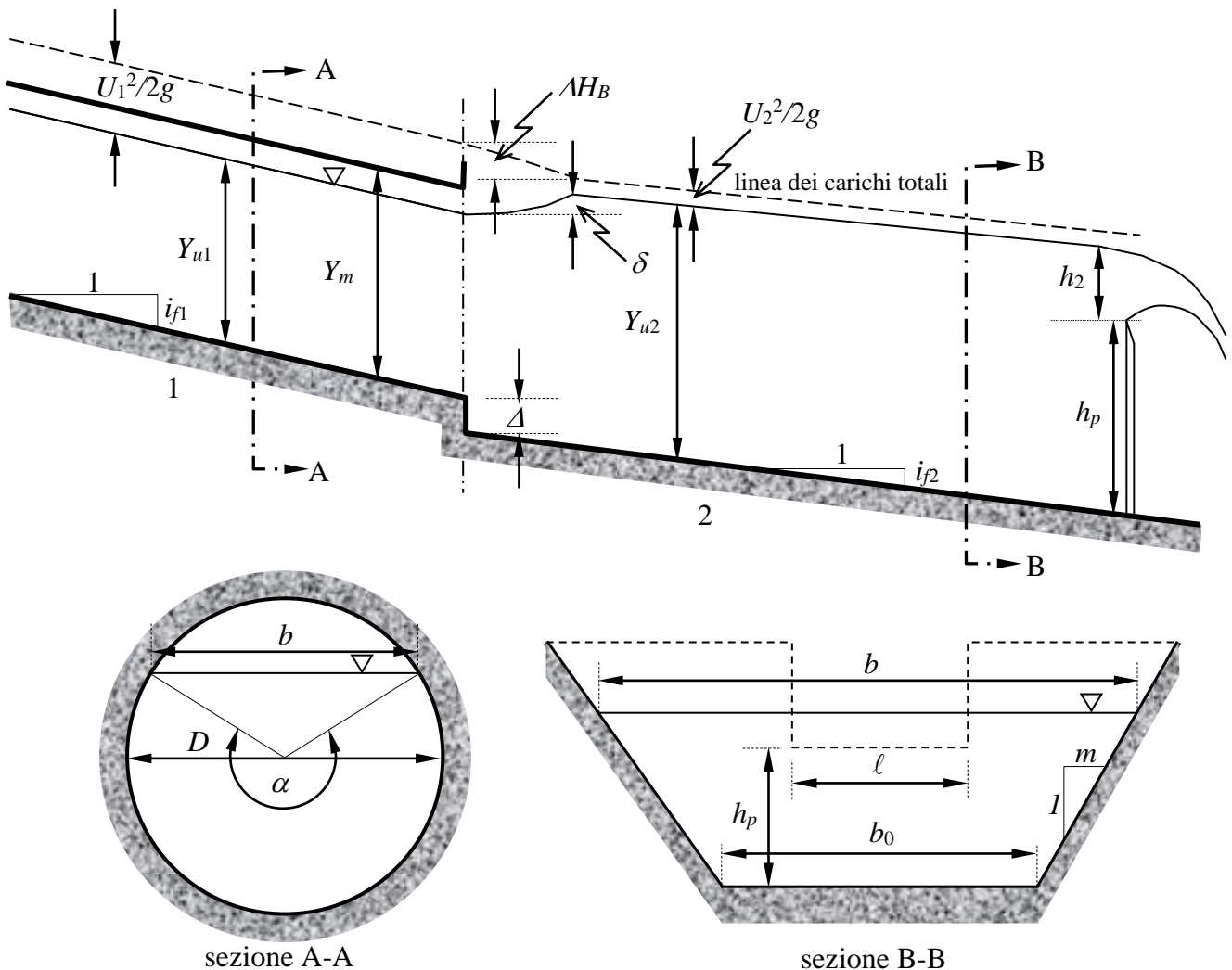


Figura 1. Sezione longitudinale e sezioni trasversali di un canale a pelo libero.

Dati:

- $\ell = 3.50 \text{ m}$ ;      –  $k_{s1} = 75 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ ;      –  $i_{f1} = 0.001$ ;
- $D = 2.50 \text{ m}$ ;      –  $k_{s2} = 60 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ ;      –  $i_{f2} = 0.0001$
- $m = 0.5$ ;      –  $b_0 = 3.50 \text{ m}$ ;      –  $\mu = 0.4$

### Avviamento alla soluzione

In una corrente in moto uniforme la linea dei carichi totali e la linea piezometrica sono rette parallele. Nel caso di una corrente a pelo libero la linea piezometrica è rappresentata dal profilo della superficie libera, per cui quest'ultimo deve risultare parallelo al profilo del fondo del canale nel caso di moto uniforme, dovendo essere costante anche l'area della sezione liquida. Dette  $j$ ,  $i$  ed  $i_f$  rispettivamente la cadente dei carichi totali, la cadente piezometrica e la pendenza del fondo, in una corrente a pelo libero in moto uniforme risulta pertanto  $j = i = i_f$ . Tali condizioni di moto sono pertanto rappresentabili mediante l'equazione di Chezy, ove si ponga  $j = i_f$ :

$$i_f = \frac{U^2}{\chi^2 \Re} = \frac{Q^2}{\chi^2 \Re \Omega^2}, \quad (1)$$

nella quale il coefficiente di Chezy,  $\chi$ , può esprimersi mediante la formula di Manning-Gauckler-Strickler:

$$\chi = k_s \Re^{1/6}. \quad (2)$$

Il tracciamento delle scale richieste dovrà effettuarsi per punti, preferibilmente con l'ausilio di un foglio di calcolo, per un numero di punti sufficiente a descrivere l'andamento delle grandezze indicate. Con riferimento allo schema di Figura 1, per quanto concerne la sezione circolare, le espressioni analitiche delle varie grandezze in funzione della profondità  $Y$  sono le seguenti:

$$b(Y) = D \sin \frac{\alpha}{2} \quad (3)$$

$$\Omega(Y) = \frac{\alpha}{8} D^2 - \frac{1}{2} b \left( \frac{D}{2} - Y \right) = \frac{\alpha}{8} D^2 - \frac{D}{2} \left( \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left( \frac{D}{2} - Y \right) \quad (4)$$

$$\alpha(Y) = 2 \arccos \left( \frac{D/2 - Y}{D/2} \right) \quad (5)$$

$$B(Y) = \frac{\alpha}{2} D \quad (6)$$

$$\Re(Y) = \frac{\Omega}{B} = \frac{D}{4} - \frac{1}{\alpha} \left( \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left( \frac{D}{2} - Y \right) \quad (7)$$

$$\chi(Y) = k_s \Re^{1/6} = k_s \left[ \frac{D}{4} - \frac{1}{\alpha} \left( \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left( \frac{D}{2} - Y \right) \right]^{1/6} \quad (8)$$

$$U(Y) = \chi \sqrt{\Re i_f} = k_s \Re^{2/3} \sqrt{i_f} = k_s \left[ \frac{D}{4} - \frac{1}{\alpha} \left( \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left( \frac{D}{2} - Y \right) \right]^{2/3} \sqrt{i_f} \quad (9)$$

$$Q(Y) = \Omega \chi \sqrt{\Re i_f} = k_s \left[ \frac{\alpha}{8} D^2 - \frac{D}{2} \left( \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left( \frac{D}{2} - Y \right) \right] \left[ \frac{D}{4} - \frac{1}{\alpha} \left( \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left( \frac{D}{2} - Y \right) \right]^{2/3} \sqrt{i_f} . \quad (10)$$

Le scale delle portate, delle velocità e dei raggi idraulici sono riportate in forma grafica in Figura 2a. Per migliore leggibilità i valori dei raggi idraulici sono moltiplicati per 10 e le velocità per 5.

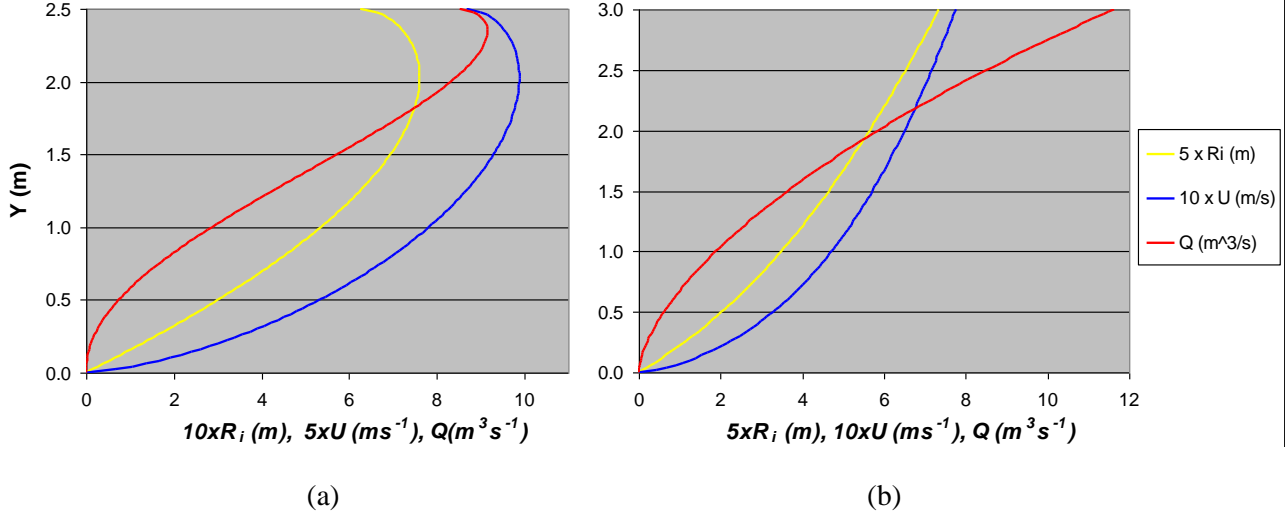


Figura 2. Scale delle portate, delle velocità e dei raggi idraulici per la sezione (a) circolare e (b) trapezia.

Le corrispondenti scale per la sezione trapezia sono date dalle:

$$b(Y) = b_0 + 2 Y m \quad (11)$$

$$\Omega(Y) = \frac{1}{2} (b_0 + b) Y = (b_0 + Y m) Y \quad (12)$$

$$B(Y) = b_0 + 2 \sqrt{Y^2 + (Ym)^2} = b_0 + 2 Y \sqrt{1 + m^2} \quad (13)$$

$$\Re(Y) = \frac{\Omega}{B} = \frac{(b_0 + Y m) Y}{b_0 + 2 Y \sqrt{1 + m^2}} \quad (14)$$

$$\chi(Y) = k_s \Re^{1/6} = k_s \left[ \frac{(b_0 + Y m) Y}{b_0 + 2 Y \sqrt{1 + m^2}} \right]^{1/6} \quad (15)$$

$$U(Y) = \chi \sqrt{\Re i_f} = k_s \Re^{2/3} \sqrt{i_f} = k_s \left[ \frac{(b_0 + Y m) Y}{b_0 + 2 Y \sqrt{1 + m^2}} \right]^{2/3} \sqrt{i_f} \quad (16)$$

$$Q(Y) = \Omega \chi \sqrt{\Re i_f} = k_s \frac{[(b_0 + Y m) Y]^{5/3}}{(b_0 + 2 Y \sqrt{1 + m^2})^{2/3}} \sqrt{i_f} . \quad (17)$$

Le relative scale delle portate, delle velocità e dei raggi idraulici sono riportate in forma grafica in Figura 2b, con i raggi idraulici moltiplicati per 5 e le velocità medie per 10.

Il massimo valore di portata,  $Q_{max}$ , che può defluire nel canale a sezione circolare chiusa, ed il corrispondente valore di profondità,  $Y_{u1}$ , si deducono dal grafico corrispondente o mediante il solutore di un foglio di calcolo (la funzione “Risolutore” di Microsoft Excel™ esegue la determinazione di massimi e minimi di una funzione).

Tenendo in conto l’energia cinetica della corrente nel secondo tronco del canale, la legge di efflusso dello stramazzo Francis, deducibile dal teorema di Bernoulli, si scrive:

$$Q = \mu(\ell - 0.2 h'_2) \sqrt{2g} \left[ h'^{3/2}_2 - (U_2^2 / 2g)^{3/2} \right], \quad (18)$$

in cui  $h'_2 = h_2 + U_2^2 / 2g$  è il carico dinamico sullo stramazzo ed  $h_2$  il corrispondente carico statico. Il carico dinamico si ricava dalla (18) inserendovi il valore di portata massima, per tentativi, graficamente o mediante il solutore di un foglio di calcolo (“Risolutore” o “Ricerca obiettivo” in Microsoft Excel™ o “solve” in MathCad™). Dedotte la profondità,  $Y_{u2}$ , e la velocità,  $U_2$ , di moto uniforme nel secondo tronco, dalle scale delle portate e delle velocità in corrispondenza di tale valore di portata, il carico statico si ottiene dalla:

$$h_2 = h'_2 - U_2^2 / 2g . \quad (19)$$

Il valore dell’altezza del petto dello stramazzo necessaria affinché in tutto il secondo tronco (a meno di una zona di sviluppo limitato prossima allo stramazzo) si verifichi il deflusso della portata massima in condizioni di moto uniforme si deduce imponendo la condizione  $Y_{u2} = h_p + h_2$ , da cui:

$$h_p = Y_{u2} - h_2 . \quad (20)$$

Il deflusso della portata massima può realizzarsi in condizioni di moto uniforme anche nel primo tronco, realizzando un gradino nella sezione di passaggio fra i due tronchi. L’altezza del gradino,  $\Delta$ , può determinarsi sulla base della condizione di congruenza (Figura 1):

$$\Delta + Y_{u1} + \frac{U_1^2}{2g} = Y_{u2} + \frac{U_2^2}{2g} + \Delta H_B , \quad (21)$$

in cui  $\Delta H_B$  è la perdita di carico localizzata per brusco allargamento che si produce nel cambio di sezione, esprimibile, in via approssimata, mediante la legge di Borda:

$$\Delta H_B = \left( \frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{U_2^2}{2g} , \quad (22)$$

nella quale devono essere inseriti i valori delle sezioni liquide nei due tronchi, estratte, ancora, dalle scale corrispondenti del moto uniforme.

La sopraelevazione della superficie libera che si produce per effetto del cambio di sezione è infine data da:

$$\delta = \frac{U_1^2}{2g} - \left( \frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{U_2^2}{2g} - \frac{U_2^2}{2g} = \frac{U_1 U_2 - U_2^2}{g} . \quad (23)$$